A bírálóbizottság értékelése

Kristály Alexandru az utóbbi nyolc évben elért eredményeit foglalja össze „Éles funkcionál-egyenlőtlenségek és elliptikus problémák nemeuklideszi struktúrákban” című értekezésében. Ezek az eredmények 8 egyszerzős cikként, további 11 többszerzős cikként, ill. egy monográfiaként jelentek meg az adott időszakban különböző rangos folyóiratokban. A dolgozatban a Jelölt a matematika több területéről (differenciálgeometria, variációszámítás, parciális differenciálegyenletek, csoportelmélet) is mély elméleteket használva fogalmaz meg új állításokat, melyekkel elmélyíti az adott területek utóbbi két évtizedben elért áttörést jelentő eredményeit. A kidolgozott elméletek alkalmazhatóak sokaságokon definiált parciális differenciálegyenletek megoldhatóságának vizsgálatára.

A Jelölt áttekinthető és következetes formában prezentálja eredményeit, melyeket részletesen megalapoz a korábbi irodalom bemutatásával, ill. elvégzi azok diszkusszióját is, felvillantva a további kutatási irányokat, ill. nyitott kérdéseket az egyes témákban. A dolgozat eredményei jelentősen hozzájárulnak a kutatási terület fejlődéséhez és új kutatási irányokat is motiválnak.

A Jelölt által újként megjelölt és 4 tézispontban összefoglalt eredmények mindegyikét újként fogadja el a bírálóbizottság. Ezek a következők:

1. Interpolációs egyenlőtlenségekkel kapcsolatban

a Jelölt megmutatta, hogy az ezeket megengedő, Lott—Sturm—Villani értelemben görbült metrikus mértékterek topológiai értelemben merevek. Azt is igazolta, hogy ha Hadamard-sokaságon teljesül a Cartan—Hadamard-sejtés, akkor érvényesek az éles interpolációs egyenlőtlenségek, továbbá, hogy extremális függvények létezése a sokaság és az Eulideszi-tér izometrikusságát implikálja.

2. Az éles határozatlansági elvekkel kapcsolatban

a Jelölt a Cartan—Hadamard-sejtés érvényességét nem felhasználva megmutatta, hogy Hadamard-sokaságokon érvényes az éles Heisenberg—Pauli—Weyl határozatlansági elv, viszont ez az elv nemnegatív Ricci-görbületű teljes Riemann-sokaságon akkor és csak akkor teljesül, ha a sokaság az Eulideszi-térrel izometrikus. Erőteljesebb negatív metszetgörbület erősebb Hardy—Poincaré és Rellich-féle határozatlansági elveket von maga után.

3. Finsler-sokaságokon megfogalmazott elliptikus feladatokkal kapcsolatban

a Jelölt először megvizsgálta a Finsler-sokaságokon értelmezett Szoboljev-terek tulajdonságait. Megmutatta, hogy ha a Finsler-sokaság reverzibilitási állandója véges, akkor ezek a Szoboljev-terek reflexív Banach-terek lesznek. Ezen kívül megadott egy olyan nemkompakt Finsler-sokaságot, melynek reverzibilitási állandója végtelen és a felette értelmezett Szoboljev-tér még vektortér struktúrával sem fog rendelkezni. Ezek után a véges reverzibilitású Finsler-sokaságokon megfogalmazott paraméterfüggő szublineáris elliptikus feladatokról megmutatta, hogy mindig van legalább két nemnulla megoldásuk. Az egypólusú Poisson-egyenlet megoldásának alakja teljes mértékben jellemzi a Finsler-sokaság görbületét.

4. A Riemann-sokaságokon megfogalmazott elliptikus feladatokkal kapcsolatban

a Jelölt megmutatta, hogy kompakt sokaság esetén a paraméterfüggő szublineáris egyenleteknek csak a nulla lesz a megoldása, míg nagy paraméterek esetén legalább két nemnulla megoldás is garantálható, miközben a két paramétertartományt elválasztó rés tetszőlegesen kicsi lehet. Nemkompakt sokaságok esetén egy – a Rubik-kocka megoldhatóságára támaszkodó – csoportelméleti érvelés segítségével megmutatja, hogy végtelen sok, egymástól szimmetrikusan különböző megoldás van.