Vélemény Kristály Alexandru
Sharp Functional Inequalities and Elliptic Problems on Non-Euclidean Structures
című MTA doktori értekezéséről

Az elliptikus típusú nemlineáris parciális differenciálegyenletek elméletében az utóbbi években nagy előrelépések történtek, mély, úttörő jelentőségű módszereket fejlesztettek ki. A különböző tereken megfogalmazott funkcionál-egyenlőtlenségek, a bennük rejlő geometriai tulajdonságok alapvető szerepet játszottak az elmélet fejlődésében. Kristály Sándor kutatási tevékenysége, speciálisan az értekezésben leírtak szorosan kapcsolódnak ehhez az elmélethez, amely a modern matematikai kutatások homlokterében áll.

Az értekezés funkcionál-egyenlőtlenségeket tárgyal görbült tereken. Az elliptikus parciális differenciálegyenletek modern elméletében alapvető eszköz a megfelelő Szoboljev-terek tulajdonságainak leírása. A Szoboljev-típusú egyenlőtlenségek garantálják a beágyazási tételeket, amelyek a variációs formában megfogalmazott problémák tanulmányozásának kulcskérdései. A jelölt ezeket a kérdéseket nemeuklideszi geometriai struktúrákon vizsgálja. Tipikus kérdés pl. az, hogy egy görbült térre megfogalmazott Szoboljev-típusú egyenlőtlenség milyen geometriai információt hordoz.

A disszertáció a jelölt utóbbi 10 évben publikált eredményein alapszik. Ez egy monográfiát és 19 cikket jelent, amelyek a témakör rangos folyóirataiban jelentek meg.

Az angol nyelven írt értekezés 108 oldal terjedelmű, 5 fejezetből áll.

Az 1. fejezet felsorolja a használt fogalmakat, jelöléseket, és ismertet néhány összehasonlítási eredményt, az Ekeland variációs elvet, minimax tételeket.

Az *Éles interpolációs eredmények* című második fejezet a Gagliardo–Nirenberg interpolációs egyenlőtlenséget tárgyalja pozitív és negatív görbületű tereken. A Gagliardo–Nirenberg interpolációs egyenlőtlenség a Szoboljev-terek elméletének eredménye, amely egy függvény L^p-normája és általánosított deriváltjainak normája között teremt kapcsolatot különböző p értékekre és különböző rendű deriváltakra. Az elliptikus parciális differenciálegyenletek vizsgálatában különösen fontos eszköz.

A fejezet kiindulópontja Cordero-Erausquin, Nazaret és Villani egy éles Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlensége, pontosabban annak két formája. A becslésekben az állandók optimálisak. Egy paraméter határhelyzetében az egyenlőtlenségek az éles L^p-logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenségre, illetve a szintén éles Faber–Krahn-egyenlőtlenségre redukálódnak. Ezek lényeges szerepet játszanak az első fő eredményben. A 2.3. Tétel azt igazolja, hogy ha egy (M, d, m) metrikus mértéktér valamely M-beli pontjában teljesül egy alsó n-sűrűségi tulajdonság, fennáll a Lott–Sturm–Villani-féle görbület-dimenziós $CD(K, n)$ feltétel valamely $K \geq 0$, $n \geq 2$ esetén, továbbá igaz a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenség (vagy annak határesetei), akkor egy globális n-dimenziós nem-összezsugorodó térfogatnövekedés érvényes, azaz létezik egy univerzális $C > 0$ állandó úgy, hogy $m(B(x, \rho)) \geq C\rho^n$ minden $x \in M$

és $\rho \geq 0$ esetén, ahol $B(x,\rho) = \{y \in M : d(x,y) < \rho\}$. A bizonyítás többek között felhasználja a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségek élességét, a görbület-dimenziós feltétel mellett érvényes Bishop–Gromov- és Bonnet–Myers-egyenlőtlenségeket, továbbá közönséges és parciális differenciálegyenletek összahasonlítási elveit. A 2.4–5. Tételek a 2.3. Tétel határeseteit tárgyalják. A 2.6. Tétel arra a Villani által felvetett kérdésre ad választ, hogy hogyan viselkednek a Lott–Sturm–Villani-féle $CD(K,n)$-terek bizonyos funkcionál-egyenlőtlenségekkel kapcsolatban. A globális térfogatnövekedési tételeknek a fontosságát differenciálható struktúrákon mutatja be az értekezés. Speciálisan, egy nemnegatív Ricci-görbületű Riemann-sokaság topológiailag akkor kerül közel az euklideszi térhez, ha az interpolációs egyenlőtlenségek állandói a megfelelő euklideszi állandókhoz közel vannak (2.6. Tétel). Ez utóbbi eredmény nemnegatív Ricci-görbületű Riemann-sokaságon lehetővé teszi a a hővezetési magfüggvény becslését. A 2.6. Tétel megválaszolja Xia egy nyitott problémáját.

A 2.3. rész negatív görbületű tereken vizsgálja az interpolációs egyenlőtlenségeket. Azt igazolja, hogy n-dimenziós Hadamard-sokaságokon érvényesek a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségek, feltéve, hogy teljesül a Cartan–Hadamard-sejtés. A bizonyítások kiindulópontja Ni és Perelman ötletei. Érdekes észrevétel, hogy extremális függvények létezése a Gagliardo–Nirenberg-egyenlőtlenségekben azt eredményezi, hogy a Hadamard-sokaság izometrikus az $\mathbb{R}^n$ térrel.

Az *Éles bizonytalansági elvek* című 3. fejezet a Riemann/Finsler-sokaságok görbületeitől függő bizonytalansági elveket tartalmaz. A kvantummechanika egyik alaperedménye a Hiesenberg-féle határozatlansági elv: létezik egy egyenlőtlenséggel kifejezett korlát arra, hogy egy részecske két fizikai tulajdonságát egyidejűleg milyen pontossággal lehet meghatározni. Hasonlóan a 2. fejezethez, az $\mathbb{R}^n$-beli eredmények ismertetésével kezdődik a fejezet. Alapvető a Caffarelli–Kohn–Nirenberg-egyenlőtlenség, amelyből határátmenettel megkapható a Heisenberg–Pauli–Weyl-féle határozatlansági elv, továbbá az alapvető Hardy–Poincaré-egyenlőtlenség.

Az egyik fő eredmény, a 3.4. Tétel teljes, nemnegatív Ricci-görbületű (M,g) n-dimenziós Riemann-sokaságra vonatkozik. Rögzített $x_0 \in M$-re jelölje d_{x_0} az $x \in M$ pont távolságát x_0-tól. Az (M,g) sokaságon a Heisenberg–Pauli–Weyl (HPW) határozatlansági elv a következő:

$$\left(\int_M |\nabla_g u|^2 dV_g\right)\left(\int_M d_{x_0}^2 u^2 dV_g\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\int_M u^2 dV_g\right)^2 \quad (\forall u \in C_0^\infty(M)).$$

A (HPW) egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha (M,g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.

A 3.6. Tétel azt állítja, hogy az éles (HPW) határozatlansági elv teljesül minden n-dimenziós ($n \geq 2$) Hadamard-sokaságon, de pozitív extrémum csak akkor van, ha (M,g) izometrikus az $\mathbb{R}^n$ térrel. Hiperbolikus tereken a 3.6. Tétel Kombe és Özaydin egy eredményének a hibájára is rávilágít.

A 3.7–8. Tételek negatív görbületű n-dimenziós ($n \geq 3$) Hadamard-sokaságokra bizonyítanak Hardy–Poincaré-féle bizonytalansági elveket. Az éles egyenlőtlenségek alapján következik, hogy az erősebb görbület növeli a határozatlanságot. További érdekesség, és ennek komoly szerepe is van később, hogy bizonyos esetekben belátható az extrémum nemlétezése. A fentiek kiterjesztéseként a fejezet tartalmaz még egy többpólusú éles Hardy–Poincaré-egyenlőtlenséget is n-dimenziós ($n \geq 3$) teljes Riemann-sokaságokra.

A 4–5. fejezet elliptikus problémákat tárgyal Finsler-, illetve Riemann-sokaságokon. Ezen problémák tárgyalása alkalmas Szoboljev-terek vizsgálatával kezdődik. A Szoboljev-típusú egyenlőtlenségek alkalmazásával létezési, egyértelműségi/multiplicitási eredmények kaphatók. Azonban Finsler- és Riemann sokaságokon a kérdések messze nem triviálisak, a kétféle geometria eltérő tulajdonságaiból mély különbségek adódnak.

Alapvető a 4.1. Tétel. Bebizonyítja, hogy egy $n \geq 2$ dimenziós, véges reverzibilitási állandójú, teljes Finsler-sokaságon definiálható a $W_0^{1,2}(M, F, m)$ Szoboljev-tér, amely az F függvény F_s szimmetrizáltjából származtatott $\|\cdot\|_{F_s}$ normával reflexív Banach-tér. Az $\|\cdot\|_F$ és $\|\cdot\|_{F_s}$ normák ekvivalensek. Speciálisan ez igaz Riemann-sokaságokra, kompakt Finsler-sokaságokra, Minkowski-terekre. Végtelen reverzibilitás esetén a 4.1. Tétel nem feltétlenül igaz. A 4.2. Tétel rámutat arra, hogy a 4.1. Tétel optimális: a reverzibilitási állandó végessége szükséges feltétel, enélkül előfordulhat, hogy a Szoboljev-tér még csak nem is vektortér.

A 4.3. Tétel egy paraméterfüggő szublineáris elliptikus problémára — a megfelelő Finsler–Laplace-operátorral egy Funk-típusú Finsler-téren — azt igazolja, hogy kis paraméter esetén csak a triviális megoldás van, míg nagy paraméterre van legalább kettő nemtriviális, nemnegatív radiálisan szimmetrikus gyenge megoldás. A bizonyítás szép. Használja a természetes energiafunkcionált, amelynek kritikus pontjai gyenge megoldások. Mivel a megfelelő Finsler-sokaság nem kompakt, a Szoboljev-tér radiálisan szimmetrikus leszűkítését kell venni, ami kompakt módon beágyazható a megfelelő Lebesgue-terekbe. Variációszámításos technikával, továbbá a leszűkített energiafunkcionál szimmetria-tulajdonságának felhasználásával adódnak a kritikus pontok.

A 4.4-6. Tételek egy $n \geq 3$ dimenziós, nem szükségképpen reverzibilis Finsler–Hadamard-sokaságon vizsgálnak egy Poisson-típusú problémát. Többek között a 3. fejezet egy éles Hardy–Poincaré-egyenlőtlensége játszik fontos szerepet a bizonyításokban. Összehasonlítási elvből kiderül, hogy a görbületre vonatkozó becslés a megoldásra is eredményez egy becslést. Továbbá, a Bishop–Gromov-féle összehasonlítási elv alapján a megoldás meghatározza a Finsler-sokaság görbületét.

Az 5. fejezet különböző elliptikus problémákat tárgyal Riemann-sokaságokon. Ezen a területen jóval nagyobb számú és többféle eredmény van köszönhetően a Riemann-struktúra könnyebb kezelhetőségének szemben a Finsler-sokaságokkal. Az 5.1–3. Tételek azt bizonyítják, hogy kompakt Riemann-sokaságokon bizonyos paraméterfüggő szublineáris elliptikus problémáknak kis paraméterérték esetén csak a triviális megoldása van, míg nagy paraméterértékekre létezik két nemtriviális nemnegatív megoldás. A két kritikus paraméterérték tetszőlegesen közel lehet egymáshoz.

Az 5.5. Tétel egy, az n-dimenziós egységfélgömbön tekintett kétpólusú Dirichlet-problémára — benne a Laplace–Beltrami-operátorral — igazolja végtelen sok, egymástól szimmetrikusan különböző megoldás létezését. A bizonyítás az Amrosetti–Rabinowitz-féle "mountain-pass" tétel alkalmazásán és egy rendkívül érdekes csoportelméleti észrevételen alapszik, amely a Rubik-kocka megoldási ötletét használja.

Az 5.6. Tétel Hadamard-sokaságon értelmezett oszcillációs tagot tartalmazó Maxwell–Schrödinger-rendszerre igazolja végtelen sok izometriákra invariáns megoldás létezését, erősen kihasználva a Hadamard-sokaság izometriacsoportjának tulajdonságait.

Az értekezés gondosan összeállított munka. Az egyes eredmények motivációját, azok jelentőségét, a felhasznált technikai eszközöket felsorolja. A bizonyítások — annak ellenére, hogy rendkívül szerteágazó területek eszközeit használják — áttekinthetőek, követhetők. Az egyes fejezetek végén további diszkusszió található egyéb eredményekről, lehetséges kutatási irányokról, nyitott problémákról. Az eredmények közvetlenül kapcsolódnak a parciális differenciálegyenletek, a geometriai analízis területén 2000 után elért áttörést jelentő munkákhoz. Kristály Sándor átlátja, brilliáns módon alkalmazza, továbbfejleszti a legnagyobb matematikusok által kidolgozott mély összefüggéseket, mint például Perelman Ricci-folyamokra vonatkozó elméletét (amelynek fontos szerepe volt a Poincaré-sejtés igazolásában), vagy Villani optimális transztportra vonatkozó elméletét Riemann–Finsler-sokaságokon.

Az értekezés (v) oldalán felsorolt — 2-2 alpontot tartalmazó — 4 tézis mindegyikét elfogadom új tudományos eredménynek. Ezek az állítások részletesen kifejtésre kerülnek az értekezésben tételek formájában, amelyek ismertetése fent megtörtént. Az értekezésben közölt eredmények nem csupán újak, azok jelentősen hozzájárulnak a témakör fejlődéséhez, további kutatási irányokat motiválnak. A bizonyítások egy széles látókörű, nagy technikai tudású, rendkívül kreatív szerzőről árulkodnak.

Az értekezést nyilvános vitára alkalmasnak tartom.

Meggyőződésem, hogy az utóbbi évek egyik legszínvonalasabb doktori munkája ez, amely minden kétséget kizáróan messzemenően teljesíti a doktori címmel szemben támasztott követelményeket.

Szeged, 2019. február 21.

Krisztin Tibor
az MTA levelező tagja