## Válasz Nagy Gábor Péter bírálatára

Köszönöm szépen az alapos munkát és a biztató, pozitív sorokat. Válaszomban a kérdésre és a kritikai észrevételekre szeretnék reagálni.

Nagy Gábor Péter kérdése. "A 4.1 tétel lényegében a $\mathrm{PGL}(2,q)$ és $\mathrm{PGL}(3,q)$ csoportok bázisairól szól, és a bizonyítás második felében használja C. Hering tranzitív lineáris csoportokra vonatkozó tételét, ami viszont függ a véges egyszerű csoportok osztályozásától. Másrészről $\mathrm{PGL}(2,q)$ és $\mathrm{PGL}(3,q)$ részcsoportjairól sokat tudunk, gondolván az 1905-os Dickson tételre, vagy H. H. Mitchell 1909-es cikkére. A kérdésem, hogy a jelölt lát-e esélyt arra, hogy a 4.1 tételt a klasszifikációt nem használva bizonyítsuk?"

Köszönöm szépen a kérdést.

A kérdésnek két része van: $n = 2$ és $n = 3$.

Legyen $V$ az $n$-dimenziós vektortér a $\mathbb{F}_q$ test felett, ahol $q = p^f$ prímhatvány és $p$ prím. Legyen $G$ olyan részcsoportja az általános lineáris $\mathrm{GL}(V)$ csoportnak, ami tartalmazza $\mathrm{GL}(V)$ centrumát, $Z$-t. Továbbá, tegyük fel, hogy a $G$ csoport $p$-feloldható ($G$ minden kompozíciófaktorának rendje $p'$ szám vagy $p$).

A 4.1 Tétel az $n = 2$ esetben a következő.

**Tétel** (Disszertáció 4.1 Tételének első fele). *Legyen $V$, $n = 2$, $q = p^f$, $G$, $Z$ mint az előbb. Ha $q \geq 5$, akkor az alábbi kettő közül legalább egy teljesül.*

(1) *Létezik olyan $\{x, y\} \subseteq V$ bázisa $V$-nek, amelyre $N_G(\langle x \rangle) \subseteq N_G(\langle y \rangle)$.*

(2) *$p = 2$ és létezik olyan $\{x, y\} \subseteq V$ bázisa $V$-nek, amelyre $N_G(\langle x \rangle) = Z \times C_2$ és az $N_G(\langle x \rangle)$ csoport $g$ involúciójára $g(x) = x$ és $g(y) = y + x$ teljesül.*

Ez az állítás a következő esetre redukálható: a $G$ csoport olyan, hogy rendje osztható $p$-vel és $G$ tranzitívan hat $V$ nem-nulla vektorainak halmazán.

Ezek után a disszertációban az alábbi érvelés szerepelt.

"By Hering's theorem (see [4, Chapter XII, Remark 7.5 (a)]) we see that if $q$ is odd (and not a prime by assumption) then $q$ must be 9 and $G$ has a normal subgroup isomorphic to $\mathrm{SL}_2(5)$ (case (5)). But then $G$ is not 3-solvable and so we can rule out this possibility. Similarly, if $q$ is even, then the only possibility is that $G \geq Z$ normalizes a Singer cycle $\mathrm{GL}_1(q^2)$ (case (1)). The only such group not satisfying 1/(a) is the full semilinear group $\Gamma(1, q^2) \simeq \mathrm{GL}_1(q^2).2$. In this case taking $x$ to be any non-zero vector in $V$ we have $N_G(\langle x \rangle) = Z \times C_2$ and the involution $g$ in $N_G(\langle x \rangle)$ satisfies $g(x) = x$ and $g(y) = y + x$ for some $y \in V$."

Nagy Gábor Péter rámutatott, hogy Hering fent használt eredménye támaszkodik a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételére és annak a lehetőségét is felveti, hogy Hering tételét a jóval korábbi Dickson tétellel helyettesítsük.

A redukció egy előző lépésében azt tesszük fel, hogy $G$ Sylow $p$-részcsoportjainak száma $q + 1$. Ezt és az eredeti, előbb idézett érvelés végét használva elegendő az alábbi lemmát bizonyítani.

**Lemma.** *Legyen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ olyan véges csoport, amely $p$-feloldható és Sylow $p$-részcsoportjainak száma $q+1$. Ha $q \geq 5$, akkor $p=2$ és $G = \mathrm{GL}(1,q^2).2$.*

Legyen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ olyan véges csoport, amelyben a Sylow $p$-részcsoportok száma $q+1$. Ekkor $(G \cap \mathrm{SL}(V))/(Z \cap \mathrm{SL}(V))$ izomorf a projektív speciális lineáris $\mathrm{PSL}(2,q)$ csoport egy $H$ részcsoportjával, aminek Sylow $p$-részcsoportjainak száma $q+1$. Elegendő tehát a következőt igazolni.

**Lemma.** *Legyen $H \leq \mathrm{PSL}(2,q)$ olyan csoport, amely $p$-feloldható és Sylow $p$-részcsoportjainak száma $q+1$. Ha $q \geq 5$, akkor $p=2$ és $H = D_{2(q+1)}$.*

Most alkalmazzuk a Nagy Gábor Péter által említett tételt (lásd [3] 213-214 oldalait, illetve [1] 285. oldalát).

**Tétel** (Dickson; 1901). *Legyen $q = p^f$. A $\mathrm{PSL}(2,q)$ csoport minden részcsoportja az alábbiak valamelyike.*

(i) *Elemi Abel $p$-csoport.*
(ii) *Ciklikus csoport, amelynek $z$ rendje osztja a $(p^f \pm 1)/k$ számot, ahol $k = (p^f-1,2)$.*
(iii) *$D_{2z}$, ahol $z$ (ii)-beli.*
(iv) *$A_4$, ahol $p>2$ vagy $p=2$ és $f \equiv 0 \pmod 2$.*
(v) *$S_4$, ahol $p^{2f}-1 \equiv 0 \pmod{16}$.*
(vi) *$A_5$, ahol $p=5$ vagy $p^{2f}-1 \equiv 0 \pmod 5$.*
(vii) *$p^m$-rendű elemi Abel csoport és $t$-rendű ciklikus csoport szemidirekt szorzata, ahol $t \mid p^m-1$ és $t \mid p^f-1$.*
(viii) *$\mathrm{PSL}(2,p^m)$, ahol $m \mid f$ és $\mathrm{PGL}(2,p^m)$, ahol $2m \mid f$.*

Ha egy részcsoport Dickson tételének (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vii) pontjának valamelyikét teljesíti, $q \geq 5$ és rendje osztható $p(q+1)$-gyel, akkor $p=2$ és az a csoport izomorf $D_{2(q+1)}$-gyel.

Tegyük fel, hogy $H$ teljesíti Dickson tételének (vi) vagy (viii) pontját. Ha $H$ nem feloldható, akkor $p$ osztja $H$ nem kommutatív egyszerű normálosztójának rendjét, vagyis $H$ nem lehet $p$-feloldható. Ha $H$ feloldható, akkor a (viii) pont teljesül és $p^m \in \{2,3\}$. Ekkor $H$ Sylow $p$-részcsoportjainak száma $p^m+1 \leq 4$, ami kisebb, mint $q+1 \geq 6$.

Térjünk át az $n=3$ esetre. A 4.1 Tétel az $n=3$ esetben a következő.

**Tétel** (Disszertáció 4.1 Tételének második fele). *Legyen $V$ a 3-dimenziós vektortér a 3 illetve a 4-elemű test felett. Legyen $G$ olyan részcsoportja $\mathrm{GL}(V)$-nek, amely tartalmazza a $Z = Z(\mathrm{GL}(V))$ csoportot. Tegyük fel, hogy $G$ az első esetben 3-feloldható, a második esetben pedig 2-feloldható. Ekkor az alábbi kettő közül legalább egy teljesül.*

(1) *Létezik $\{x,y,z\} \subseteq V$ bázisa $V$-nek, amelyre $N_G(\langle x\rangle) \cap N_G(\langle y\rangle) \subseteq N_G(\langle z\rangle)$.*
(2) *Létezik $\{x,y,z\} \subseteq V$ bázisa $V$-nek, amelyre $N_G(\langle y,z\rangle) = G$.*

Ezt az állítást a Gap [2] programcsomag segítségével igazoltuk. Adjunk egy ettől független bizonyítást.

Feltehető, hogy $V$-ben nincs nem triviális, valódi $G$-invariáns altér, azaz $V$ irreducibilis $G$-modulus.

Legyen először $V$ a 3-elemű test feletti vektortér. Ekkor

$$|\mathrm{GL}(V)| = (3^3-1)(3^3-3)(3^3-3^2) = 26\cdot 24\cdot 18 = 2^5\cdot 3^3\cdot 13.$$

Legyen $\mathcal{S}$ a $V$ összes 1-dimenziós altereinek halmaza. Ezen a halmazon természetes módon hat $G$. Mivel $G$ irreducibilis $V$-n, minden $G$-pálya $\mathcal{S}$-en legalább 3-elemű. Tegyük fel, hogy $\Delta$ egy 3 vagy 4-elemű pálya $\mathcal{S}$-ben. Legyen $\langle x\rangle$ és $\langle y\rangle$ két különböző eleme $\Delta$-nak. Ekkor $N_G(\langle x\rangle)\cap N_G(\langle y\rangle)$ rendje 2-hatvány és így Maschke tételéből következik (1). Mivel 5, 7 és 11 nem osztja $G$ rendjét és $|\mathcal{S}| = 13$, minden pálya $\mathcal{S}$-en 6, 8, 9, 12 vagy 13 hosszú. Ez csak úgy lehet, ha $G$ tranzitívan hat $\mathcal{S}$-en és így 13 osztja $G$ rendjét.

Legyen $m = 13k+1$ a Sylow 13-részcsoportok száma $G$-ben, ahol $k$ egész. Ha $k\le 9$ és $k\notin\{0,2\}$, akkor $m$-nek van olyan prím osztója, ami eleme az $\{5,7,11,23,53,59,79\}$ halmaznak. Ez lehetetlen, hiszen $m \mid 2^4\cdot 3^3 = 432$ (a 2-elemű $Z$ csoport normalizál minden Sylow 13 részcsoportot). Ha $k\ge 10$, akkor $432/m\le 3$, azaz $m\in\{432,216,144\}$. Mivel $m-1$ osztható 13-mal, kapjuk, hogy $m\in\{1,27,144\}$. Legyen $P$ egy Sylow 13-részcsoport $G$-ben. Ekkor $PZ = \mathrm{GL}(1,3^3)$ része $G$-nek és a $\mathrm{GL}(V)$ csoportban a normalizátora $\mathrm{GL}(1,3^3):3$. Legyen $m=1$. Ekkor $G = \mathrm{GL}(1,3^3)$ vagy $G = \mathrm{GL}(1,3^3):3$. Legyen $\langle z\rangle$ tetszőleges eleme $\mathcal{S}$-nek. Ekkor $N_G(\langle z\rangle) = ZQ = Z\times Q$, ahol $Q$ Sylow 3-részcsoportja $G$-nek. Másrészt amennyiben $\langle x\rangle$ és $\langle y\rangle$ különböző elemei $\mathcal{S}$-nek, akkor $N_G(\langle x\rangle)\cap N_G(\langle y\rangle) = Z$. Így (1) teljesül. Legyen $m=27$. Mivel $\mathrm{GL}(V)$ minden Sylow 3-részcsoportja 27-elemű, $N_G(PZ) = PZ$ és $G = (PZ)Q$, ahol $Q$ valamely Sylow 3-részcsoportja $G$-nek. A $G/Z$ csoport rendje $13\cdot 27$. Mivel a 13-rendű elemek száma $G/Z$-ben $12\cdot 27$ és a 3-elemek száma legalább 27, kapjuk, hogy $QZ\lhd G$, azaz $Q\lhd G$. Ez lehetetlen, mivel $G$ irreducibilisen hat $V$-n. Végül $m=144$. Ebben az esetben $|G|\ge 13\cdot 2\cdot 144$, azaz $|\mathrm{GL}(V):G|$ osztja 3-mat. Mivel $\mathrm{SL}(V)$ egyszerű csoport és nem 3-feloldható, ez lehetetlen.

Legyen most $V$ a 4-elemű test feletti vektortér. Ekkor

$$|\mathrm{GL}(V)| = (4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2) = 63\cdot 60\cdot 48 = 2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7.$$

Azt állítjuk, hogy $G$ feloldható. Ellenkező esetben létezik $G$-nek olyan nem kommutatív egyszerű $S$ kompozíciófaktora, hogy $|S|$ osztja $3^4\cdot 5\cdot 7$-et. Mivel $|S|$ nem lehet $5\cdot 7$ osztója, 3 osztja $S$ rendjét és így $S$-ben 7 Sylow 3-részcsoport van. Továbbá Sylow tételét a Sylow 7-részcsoportokra alkalmazva azt is tudjuk, hogy 5 osztja $S$ rendjét. Ha $|S| = 3\cdot 5\cdot 7$, akkor $S$-ben van 21 Sylow 5-csoport, 7 Sylow 3-csoport és 15 darab 7-Sylow. Ez lehetetlen, mert ez legalább 189 elem. Így $S$ tekinthető az $S_7$ szimmetrikus csoport egy $3^2\cdot 5\cdot 7$-rendű részcsoportjának (mivel $|S_7| = 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$). Ekkor $S\cap S_6$ tranzitívan kell, hogy hasson 6 ponton, ami lehetetlen, hiszen $|S|$ páratlan.

A disszertáció releváns részéből tudjuk, hogy $G$ irreducibilis és primitív $V$-n.

Legyen $A$ Abel normálosztó $G$-ben. Ekkor $A$ homogén módon hat $V$-n. Ha $V$ 1-dimenziós $A$-invariáns alterek direkt összege, akkor $A\le Z$. Ellenkező esetben $V$ irreducibilis $A$-modulus. Ekkor legyen $C = C_{\mathrm{GL}(V)}(A) = \mathrm{GL}(1,4^3)$. Mivel $C$ egy $G$-invariáns (ciklikus) csoport, feltehető, hogy $C\le G$, azaz $C\lhd G$ (mivel $G$ választható maximális feloldhatónak). Ebből az következik, hogy $G\le \mathrm{GL}(1,4^3):3$. Mivel $G$

páratlan rendű csoport. (1) teljesül. Feltehető tehát, hogy $G$-ben minden Abel normálosztó centrális és az is, hogy $G$ abszolút irreducibilisen hat $V$-n.

Legyen $M$ olyan normálosztó $G$-ben, ami minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy nem centrális. Mivel $G$ feloldható és $M$ nem Abel, $Z \leq M$ és $M/Z$ elemi Abel. Továbbá $M$ extraspeciális 3-csoport. Mivel $G$ irreducibilisen és primitíven hat $V$-n, $M$ irreducibilis $V$-n. Extraspeciális csoportokról szóló tételekből következik, hogy $|M| = 3^3$. Mivel $C_G(M) = Z$, a $G/M$ faktorcsoport tekinthető úgy, mint $\mathrm{GL}(2,3)$ egy részcsoportja. Ennél több is állítható. Az $M/Z(M)$ vektortér igazából egy szimplektikus tér ($M$-ben a kommutátor szimplektikus forma ((a) ha $[x, y] = 1$ minden $x \in M$ esetén, akkor $y \in Z(M)$; (b) $[x, y] = [y, x]^{-1}$; (c) $[x, x] = 1$)). Így $G/M$ felfogható, mint egy részcsoportja az $\mathrm{Sp}(2,3) \cong \mathrm{SL}(2,3) \cong Q : 3$ csoportnak. Feltehető továbbá, hogy $G = M.(Q : 3)$.

Maschke tételéből feltehető, hogy minden lineárisan független $\{x, y\}$ vektorrendszer esetén $N_G(\langle x\rangle) \cap N_G(\langle y\rangle)$ olyan páros rendű csoport, amelyben nincs 4-ed rendű elem. Mivel $Q$ minden nem centrális eleme 4-ed rendű, feltehető, hogy $G = M.2$. Sylow tételéből tudjuk, hogy $G$-ben legfeljebb 9 involúció van. Ugyanakkor az involúciók száma legalább a $V$ vektortér 2-dimenziós alterei száma, ami 21. Ez ellentmondás.

Nagy Gábor Péter a következő kritikát fogalmazta meg. "... Egy furcsaságot tennék szóvá: A 3.6 tételt megelőző mondatot úgy lehet érteni, hogy a 3.6 tételt használja az 1.3 tétel bizonyításában, ami azért zavaró, mert a 2. fejezetben bebizonyítja a 2.1 tételt, amiből következik az 1.3 tétel. Kritikaként róható még fel, hogy a tézisfüzetben a tételek számozása teljesen eltér a disszertáció számozásától. Továbbá hasznosnak tartottam volna, ha az egyes fejezetek elején külön leírja, hogy melyik cikket dolgozza fel, de szerintem a tételeket is érdemes lett volna még egyszer kimondani."

Köszönöm az észrevételeket. Egyetértek velük. Az 1.3 tétel helyett 1.5 tételt kellett volna írnom. A disszertáció és a tézisfüzet sajnos más módon készült el, nem volt a kettő kellőképpen összehangolva. A disszertáció bevezetőjében lévő tételek egy részét a fejezetek elején is jó lett volna kimondani.

Köszönöm még egyszer a pozitív bírálatot és a véleményt.

Budapest, 2019. március 12.

Maróti Attila

Maróti Attila
(pályázó)

## References


[1] L. E. Dickson, Linear groups: With an exposition of the Galois field theory. With an introduction by W. Magnus Dover Publications, Inc., New York 1958.

[2] The GAP Group, *GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*; 2005, (`http://www.gap-system.org`).

[3] B. Huppert, Endliche Gruppen. I. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967.

[4] B. Huppert és N. Blackburn, Finite groups. III. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 243. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.