A bírálóbizottság értékelés

„Adaptált komplex struktúrák” című, MTA doktori értekezésében Szőke Róbert a Riemann-sokaságok komplexifikációjához kapcsolódó kutatásait tárgyalja. Az angol nyelven megírt disszertáció 159 oldal terjedelmű, az irodalomjegyzék 145 címet tartalmaz. A disszertációt a jelölt 11 rangos folyóiratban közölt (6 egyszerzős és 5 társszerzős) dolgozata alapján állította össze.

Az értekezés két fő részből áll. Az első részben (1-5. fejezetek) az adaptált komplex struktúrák létezésével, egyértelműségével és tulajdonságaival foglalkozik mintegy a komplexifikáció jelensége szempontjából; illetve kapcsolatot talál más természetes komplex geometriai struktúrákkal. Itt központi szerepet játszik a homogén terek vizsgálata.
A második részben (6-9. fejezetek) az adaptált komplex struktúrák családjához kapcsolódva a geometriai kvantálás egyértelműségének a vizsgálata kerül terítékre.
Az 1. fejezet, előkészítésként, a Monge-Ampère egyenlet megoldásainak szingularitásai kapcsán motiválja az adaptált komplex struktúrák fogalmát, illetve számos alapfogalmat vezet be, többek között magukat az adaptált komplex struktúrákat is mint Riemann-sokaságokhoz köthető fogalmat. A 2. fejezet megadja az adaptált komplex struktúrák (és az indukált Kähler-metrika) lokális leírását Jacobi-mezők és analitikus folytatás segítségével. Ezután a véges és végtelen sugarú adaptált csőszerű környezetek globális tulajdonságait tárgyalja biholomorfizmusok, illetve biholomorf izometriák vonatkozásában. Végül, az egész érintőnyalábra kiterjedő adaptált komplex struktúrával rendelkező Riemann-sokaságok esetében bizonyítja az eredeti izometriacsoport komplexifikációja hatásának a létezését a globális adaptált komplex struktúrán. A 3. fejezetben a kompakt normális homogén terekből származó adaptált komplex struktúrákat vizsgálja, ahol is az adaptált komplex struktúra teljesnek és kanonikusnak bizonyul. A 4. fejezetben az adaptált komplex struktúrákból a geodetikus folyam segítségével előállított limitstruktúrákat tanulmányozza szimmetrikus tereken. Az 1 rangú szimmetrikus terek esetében kiderül, hogy az így előálló komplex struktúra általánosan visszaadja és kiterjeszti a Souriau, Rawnsley és mások által a kilyukasztott érintőnyalábokon megkonstruált komplex struktúrákat. Magasabb rangú esetben ilyen limit komplex struktúra nem jön létre, de az (1,0) és (0,1) típusú érintővektor-felbontásból kiindulva a kilyukasztott érintőnyalábokon sztratifikált involutív struktúrák definiálhatóak. Az 5. fejezet első része Chevalley invariánsokra vonatkozó kiterjesztési tételét általánosítja. Az 5. fejezet második részében ezen eredményt és az adaptált komplex struktúrák módszerét felhasználva konstruál hiperkähler metrikákat klasszikus típusú, kompakt, irreduciblis, hermitikus szimmetrikus terek érintőnyalábjain.
A 6. fejezetben, némi szemléletváltással, Riemann-sokaságok érintőtere helyett a paraméterezett geodetikusokat téve a megközelítés középpontjába, az adaptált komplex struktúrák eredeti fogalmát általánosítva, komplex struktúrák (nem-valós) komplex számok által parametrizált családját vezeti be. (A továbbiakban: paraméterezett adaptált strukturák.) Létezés, egyértelműség, simaság, görbületi vonatkozások stb. szempontjából tárgyalja ezeket a paraméterezett adaptált komplex struktúrákat, melyek a szokásos adaptált komplex struktúra természetes kiegészítéseinek bizonyulnak. Mivel ezek mind természetes konstrukciók, hasonló érvényességgel, ezért természetes módon merül fel, hogy bizonyos célokra, pl. geometriai kvantálás vonatkozásában, ezek a konstrukciók mennyire egyenértékűek. A fejezet további részei a geometriai (Kähler típusú) kvantálás fogalmait ismerteti, kitérve az egyértelműség kérdésének matematikai problémáira általában. Az előbbiek által motiválva, a 7. fejezet a (konnexióval ellátott) sima és analitikus Hilbert-mezők általános elméletét vezeti be és tárgyalja részletesen. Ezzel a Hilbert-nyalábokhoz

képest általánosabb és jobban használható fogalmat kapunk. A 8. fejezetben a paraméterezett geometriai (Kähler típusú) kvantálás igényeihez idomulva ad eszközöket sima és analitikus Hilbert-mezők konstrukciójához, úgymond direkt képekként hozva létre Hilbert-mezőket. A 9. fejezetben ezen eszközök segítségével belátja, hogy kompakt, biinvariáns metrikával ellátott Lie-csoportok esetén a félformával korrigált geometriai kvantáláshoz társított megfelelő Hilbert-mező lapos, azaz a kvantálás független az adaptált komplex struktúra paraméterétől. Kiemelendő, hogy noha konkrét ad hoc formulák az izomorfizmusokra ismertek, a jelenlegi tudásunk szerint a Hilbert-mezők elmélete az egyetlen, mely képes matematikailag konzisztens módon realizálni az Axelrod, Della Pietra, Witten cikkében felvetett konceptuálisan „holonomikus" megközelítést. Ezután a kvantálás kérdését kompakt, egyszeresen összefüggő, irreducibilis Riemann szimmetrikus terekre vizsgálja tovább a szerző, de kiderül, hogy hacsak nem Lie-csoportokról van szó, ebben az esetben a megfelelő Hilbert-mező még csak projektíven sem lesz lapos.
A dolgozat számos eredményt tartalmaz. A többváltozós komplex függvénytan, a differenciálgeometria és a reprezentációelmélet különállóan is magas szintű fogalomalkotásait és módszereit használja fel, ezeket integrálja. A dolgozat alapos, körültekintő, de tömör stílusú. Az eredmények megfogalmazása elegáns és egyértelmű.

A hivatalos bírálók az disszertáció eredményeit egyhangúlag elfogadták és üdvözölték. A hivatalos bírálók értékelésükben az eredményeket egybehangzóan bőségesnek, a kutatás színvonalát nemzetközi szinten kiemelkedőnek minősítették, mely meglátásuk szerint bőségesen elegendő az MTA doktori cím megszerzéséhez. A hivatalos bírálók bírálataikban kérdéseket fogalmaztak meg, melyek mind a disszertációban szereplő eredménynek további kiterjeszthetőségéhez kapcsolódtak. Szabó Endre 1. kérdésében Chevalley tételének még általánosabb leképezésekre vonatkozó kiterjesztéséről kérdez. A jelölt kifejti, hogy a válasz a felvetett esetekben igenlő. Részletes válaszában a jelölt exponálja az általános problémát és hivatkozásokat biztosít a nemzetközi szakirodalomra is. Szabó Endre 2. kérdésében az adaptált komplex struktúrák geometriai kvantálásának, szimmetrikus tereken túlmenően, hiperkähler és kvaternió-kähler esetekre vonatkozó felhasználhatóságáról kérdez. Válaszában a jelölt az adaptált komplex struktúrából adódó görbületi megkötések, illetve a nemszimmetrikus példák hiánya nyomán a kompakt lapos eseteket azonosítja, mint a vizsgálódás lehetséges tárgyát. Ezekben az esetekben a nem egyszeres összefüggőség miatt az előkvantum vonalnyaláb viszont nem lesz egyértelmű, komplikálva a helyzetet. Nagy Péter Tibor 1. kérdésében az adaptált Kähler-struktúrák geodetikus teljességéről és görbületi tulajdonságairól kérdez. A jelölt a kérdésben felvett szempontokat tételesen végigveszi és megválaszolja. Nagy Péter Tibor 2. kérdésében az adaptált komplex struktúrák leírását két újabban megjelent, érintőnyalábokon értelmezett Kähler-metrikákról szóló cikk kapcsán kérdezi. A jelölt kifejti, hogy az Oproiu és Papaghuic cikkében vizsgált megközelítésben az adaptált struktúrák megjelennek és megadja a konkrét előállító paraméterválasztásokat is. Az Albuquerque cikkében vizsgált metrikák azonban csak nagyon speciális választású adaptált komplex struktúrák előállítására alkalmasak. Muzsnay Zoltán a Hilbert-mezők nemtriviális holonómiájának esetéről kérdez. Válaszában a jelölt kifejti, hogy jelenlegi tudásunk szerint végtelen dimenziós esetben holonomikus interpretációt vagy egyáltalán csak Hilbert-nyaláb struktúrát csakis a projektíven lapos Hilbert-mezők esetében tudunk biztosítani vagy éppen értelmezni. A válaszában a jelölt továbbá kitér a félforma korrekció szerepére.

A nyilvános vita során a hivatalos bírálók a jelölt válaszait elfogadták, és fenntartották véleményüket. A nyilvános vita során a jelölt megfelelően válaszolt az írásban előre megfogalmazott kérdésekre.

A bírálóbizottság általános értékelése szerint a jelölt messzemenően teljesíti a MTA doktori címének megszerzéséhez szükséges feltételeket. A jelölt szakmai tevékenysége nemzetközi szinten kiemelkedő. Eredményei a nemzetközi kutatások frontvonalába eső, a nemzetközi matematikai közvélemény által nagyra értékelt kérdésekre irányulnak. Önálló és társszerzős publikációi egyaránt magas színvonalúak. A kutatásai során felhasznált eszközök és a bizonyított eredmények egyaránt sokrétűek, érdekesek és mélyek.