Szőke Róbert Doktori Értekezésének Bírálata

Elöljáróban

Fontos kérdés, hogy egy M Riemann-sokaságot hogyan lehet „komplexifikálni”, azaz „természetes módon” beágyazni egy N komplex sokaságba. Az exponenciális leképezés azonosítja M egy N-beli környezetét egy érintőnyalábbeli környezettel. Kézenfekvő tehát, hogy a komplexifikációt az érintőnyalábban keressük.

Az *adaptált komplex struktúra* éppen ilyen: az érintőnyalábon, az M környezetében élő komplex struktúra, ami kielégít bizonyos nagyon természetes feltételeket. Ezért nagyon hasznos eszköz arra, hogy a legkülönbözőbb szituációkban vizsgáljuk a „komplexifikáció” létezését, egyértelműségét.

A disszertációban a szerző 5 önálló, és 4 társ-szerzős cikk, valamint egy önálló (még nem publikált) kézirat eredményeit ismerteti. A cikkek színvonalas újságokban jelentek meg, számos új eredményt tartalmaznak, jelentős mértékben hozzájárulnak a komplex analízis fejlődéséhez.

Érdemes kiemelni, hogy a konstrukciónak lényeges következményei vannak az elméleti fizikában is. A disszertáció egyik fő eredménye arról szól, hogy a „geometriai kvantálás” mennyire független a választásoktól. Fontos példákat ad a függetlenségre is, meg arra is, amikor a jelenlegi (matematikai) módszerek még nem elegendőek a függetlenség belátásához.

A disszertáció felépítése logikus, jól követhető. A szükséges alapfogalmakat, előismereteket kellő mélységben ismerteti, a bonyolultabb részeket jól érthető magyarázatokkal hozza közelebb az olvasóhoz.

Részletek

A disszertáció két fő részből áll. Az első részben (1.– 5. fejezetek) az adaptált komplex struktúrák létezésével és egyértelműségével foglalkozik, illetve kapcsolatot talál más (természetes) komplex struktúrákkal. Központi téma ebben a részben a homogén terek vizsgálata. A második részben pedig (6.–9. fejezetek) a fizikai alkalmazás, azaz a geometriai kvantálás kerül terítékre.

Az 1. fejezet jól összefoglalja az előzményeket, bevezeti a szükséges alapfogalmakat. A 2. fejezet azt vizsgálja, hogy különböző szituációkban az adaptált komplex struktúrák mennyire egyértelműek, és mennyire határozzák meg az eredeti M sokaságot. A 3. fejezet kompakt, normális homogén tereken vizsgálja az adaptált komplex struktúrákat. A 4.1 szakasz 1 rangú homogén tereken az adaptált komplex struktúrából határértékként állít elő más ismert komplex struktúrákat. A 4.2 szakasz kiterjeszti ezt a határértékkonstrukciót magasabb rangú homogén terekre – itt komplex struktúra helyett (általánosabb) involutív struktúrákat kap. Az 5.1 szakasz Chevalley kiterjesztési tételét általánosítja. Az 5.2 szakasz szimmetrikus tereken konstruál hiper-Kähler struktúrákat – adaptált komplex struktúrák segítségével.

A 6. fejezet elmagyarázza az adaptált komplex struktúrák és a geometriai kvantálás kapcsolatát. A 7. fejezet bevezeti a Hilbert-mezők fogalmát. Kiderül, hogy ezek sokkal alkalmasabbak a geometriai kvantálás tanulmányozására, mint a hagyományos Hilbert nyalábok. A 8. fejezet Hilbert-mezőt rendel minden fibráláshoz, és jól használható kritériumokat ad arra, mikor lesz ez a mező analitikus. A 9. fejezet belátja, hogy az egyszeresen összefüggő kompakt szimmetrikus terek közül pontosan a Lie-csoportok azok, amelyekhez tatozó Hilbert-tér mező projektívan lapos. Ez az eredmény azért fontos, mert a geometriai kvantálás egyértelműségét (jelenleg) éppen ennek a Hilbert-tér mezőnek a projektívan laposságával tudjuk igazolni. Tehát kapunk olyan példákat is, ahol a geometriai kvantálás (bizonyítottan) egyértelmű, meg olyan példákat is, ahol ez a bizonyítási séma nem dönti el a kérdést.

Kérdések

(1) Az 5.1.1 Tétel W-invariáns $a \to a$ leképezéseket terjeszt ki (egyértelműen) K-invariáns $p \to p$ leképezésekké. Lehet-e ezt általánosítani más $GL(a)$-reprezentációkra? Például: W-invariáns $a \to S^n(a)$ illetve $a \to \bigwedge^n a$ leképezéseket ki lehet-e (egyértelműen) terjeszteni K-invariáns $p \to S^n(p)$ illetve $p \to \bigwedge^n p$ leképezésekké?

(2) A disszertáció alaposan tárgyalja a szimmetrikus terek geodetikus áramának geometriai kvantálását. Van remény arra, hogy bizonyos hiper-Kähler, vagy kvaternió-Kähler sokaságok esetében is használható ez a módszer?

Összefoglalás

A doktori értekezés téziseit értékes, új eredményeknek fogadom el, és bőségesen elegendőnek tartom a doktori cím megszerzéséhez. A nyilvános vita kitűzését javaslom.

Budapest, 2019. június 3. Szabó Endre