TÓTH ÁRPÁD: "CYCLE INTEGRALS OF MODULAR FORMS" C. MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉSÉRŐL

OPPONENSI VÉLEMÉNY

Az értekezés 125 oldalon foglalja össze a szerző utóbbi években elért tényleg kiemelkedő eredményeit a moduláris formák elméletében. A doktori mű öt fő fejezetből, valamint egy bevezetésből és egy függelékből áll, és egy 137 elemű bibliográfiával zárul. A tárgyalt anyagban a szerző hat cikke van feldolgozva, ezek közül kettő az *Annals of Mathematics* (35+42 oldal), és egy-egy a *Duke Math. J.* (42 oldal), az *International Math. Research Notices* (31 oldal), az *Abhandlungen Math. Semin. Univ. Hamburg* (12 oldal), és a *Proc. Amer. Math. Soc.* (3 oldal) hasábjain jelent meg, tehát összesen 165 oldalon. Kiemelendő, hogy ezeken felül is a szerzőnek számos fontos cikke jelent meg olyan abszolúte a legjobbaknak számító lapokban, mint az *Inventiones*, *International Math. Research Notices*, *Manuscripta Math.*, *Compos. Math.*, *Fundamenta Math.*.

A bevezetés és a függelék együttes célja a csak szakértők számára emészthető, nagyon széleskörű technikai tudást és előképzettséget, többféle matematikai terület mély megértését követelő fő eredmények bevezetése. Mint ilyennek, elvileg alkalmasnak kéne lennie arra, hogy a moduláris formákhoz nem értő olvasó – köztük a jelen opponens – számára összefoglalja azokat az ismereteket, amelyek segítségével a később ismertetendő új fogalmak, saját kutatási eredmények, bizonyítási módszerek érthetőek lehetnek. Ez nyilván egy nehéz kihívás, és, tekintve, hogy a témából világviszonylatban is számos rosszul megírt könyv, jegyzet, "lecture notes" van forgalomban, talán nem lehet azon sem csodálkozni, hogy a jelen próbálkozás sem tekinthető átütő sikernek.

A szerzőt nyilván feszítette, hogy a terjedelmi korlátok betartása mellett, a saját eredményeknek engedve át a fő teret, és a bevezetést arányosan kis terjedelemre szorítva, elég nehéz bemutatni a modern matematika évszázados fejlődésének egyik legnehezebb és legmélyebb elméleti területét, ahol az operátorelmélet, a komplex függvénytan, a diffrenciálgeometria, a csoportelmélet, a reprezentációelmélet, a harmonikus analízis, a számelmélet, és tulajdonképpen a fél matematika beépítésével jutunk el a fogalmakhoz és problémákhoz, struktúrákhoz és tételekhez, és már a kezdeti lépések megtétele is olyan felkészültséget és átlátást kíván, amelyekkel pl. a maga idejében egy Selberg rendelkezett.

Mindezen nehézségek – mondhatni a feladat lehetetlensége – ellenére azonban úgy gondolom, hogy *a szerző még a lehetőségekhez képest is kifejezetten rosszul oldotta meg nehéz feladatát.* Tekintve, hogy az értekezés – és ennek megfelelően a bírálat – fő tárgya is a szerző új eredményeinek bemutatása és értékelése, és a jelen értekezés nem habilitációs munka, amelynek különösebben hangsúlyos értékelési szempontja volna az előadói, tárgyalási részletek minősége, én inkább egy függelékben indokolnám meg ezt a sommás véleményt.

Mindazonáltal ezt a negatív megjegyzést előrebocsátom mentegetőzésképpen is azért, hogy kívülállóként kevés esélyem volt teljes mélységében megérteni és feldolgozni a szerző eredményeit. Azzal a becsületes szándékkal fogtam hozzá az értekezés bírálatához, hogy – ha már a sors különös szeszélye folytán az MTA olyan opponenst bízott meg, aki soha egyetlen cikket sem publikált a moduláris formák elméletéhez kapcsolódóan, vagy akár csak azokat felhasználva sem – akkor rászánom az időt és megpróbálom a disszertációt alaposan átolvasva, eredményeit többé-kevésbé megértve, érdemben eleget tenni opponensi feladataimnak. Ez az erőfeszítésem jórészt sikertelen maradt. A bírálat elkészítésekor mérlegelnem kellett, hogy az MTA sürgetése és a szerző jogos várakozása mennyi időt enged még arra, hogy megpróbáljam – kissé megkésve – megtanulni (valahonnan máshonnan) a moduláris formák elméletét, utánanézni fő fogalmainak, megérteni a leírtakat. Mivel ehhez a mű maga nem adott jó támpontot, végül is az idő és a tudásszomj feszültségében kétséges értékű kompromisszum született, amelyet értőbb bírálatok beérkezése esetén nyugodtan tekinthet a bizottság másodlagosnak.

A dolgozat sok, mély, egymásra épülő fogalmat, módszert és eredményt tartalmaz, és maga a szerző saját kutatási eredményeiből vett eszköztár, fogalom-alkotás és az új felfedezések, tételek köre is olyan terjedelmű és mélységű, hogy azok épkézláb leírásához több oldal szükségeltetik. Ezért a tartalom ismertetését is külön függelékben részletezem, itt csak nagyon elnagyolt vázlatát adva annak.

A bevezetés után az érdemi kutatómunkáról következő első két fejezet – tehát a 2. és 3. fejezetek – Katok és Sarnak egy alapvető fontosságú formuláját messzemenően általánosítja úgy, hogy az új formula minden d, d' fundamentális diszkrimináns értékre érvényes, és a $d = 1$ esetben adja vissza a Katok-Sarnak formulát. A formula azt fejezi ki, hogy adott $\varphi(z)$ páros Hecke-Maass csúcs formához egyértelműen hozzárendelhető egy olyan L^2-normált, $\Gamma_0(4)$-re nézve $1/2$ súlyú moduláris forma, amelynek tetszőleges d, d' fundamentális diszkrimináns párokra vett Fourier-együtthatói komplex skalárszorzata az eredeti φ függvény génuszkarakterekkel kombinált ciklusintegráljainak konkrétan megadott összegeként áll elő. A formula jobb oldalán szereplő ciklusintegrálok d és d' előjeleitől függően φ egyetlen diszkrét pontbeli értéke (a szummációban szereplő Q binér kvadratikus alak törtideál-osztályát generáló z_Q pontban), vagy φ deriváltjának a C_Q zárt geodetikus görbe menti integrálja, vagy magának a φ függvénynek az integrálja. Ennek a nagyon is konkrét előállításnak a segítségével számos geometriai illetve egyenletes eloszlási kérdést, közte új invariánsok bevezetését és vizsgálatát tartalmazza a 3. fejezet, megmutatva, hogy az A ideálosztályok fundamentális tartományainak területei, jellemző primitív geodetikus ciklusai ívhossz szerinti, illetve a fent említett diszkrét z_Q pontsorozatok diszkrét eloszlása a $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ hiperbolikus felületen (lényegében a fundamentális tartományon) egyenletes minden egyes "generában", azaz a $Cl^+(\mathbb{K})/(Cl^+(\mathbb{K}))^2$ ekvivalencia-osztályaiban külön-külön is.

A 4. fejezet az $1/2$ súlyú ú.n. "hamis moduláris formák" terének leírásával általánosított csavart nyomformulákkal foglalkozik pozitív diszkriminánsokra, és az $1/2$ súlyú hamis moduláris formák $\{f_D\}$ bázisából Shimura-felemeléssel és formális deriválással adódó $\{F_D\}$ rendszerrel, amelyről nem csak megmutatja, hogy ezek 2 súlyú holomorf moduláris formák, hanem periódusfüggvényeit, és így ezek racionalitását is kiszámítja.

Az 5. fejezet Ghys egy nevezetes kérdését oldja meg: kiszámítja két moduláris csomó egymással vett topológiai összefonódási számát, amihez fel kell építenie az általánosított Rademacher-szimbólumot is. Ezeket konkrét általánosított L-függvények megfelelően vett értékeivel azonosítva a Dedekind-szimbólum gyors kiszámítását lehetővé tevő reciprocitási formulát is igazol, és itt is pontosan kiszámítja a racionális periodicitást. *Nézetem szerint ez a fejezet a dolgozat legmélyebb, legnagyobb átlátást, tudást követelő része*, amiben a moduláris formák – amúgy sem egyszerű – vizsgálata olyan területen (egy topológiai kérdésben) van eredményre juttatva, amely területen még moduláris formák nélkül is éppen elég bonyolult a felmerülő kérdések kezelése. A leírás – legalább szerkezetileg – mégis többé-kevésbé átlátható, mert a szerző jó érzékkel magyarázza el az elmagyarázhatatlant, és a toplógiából felhasznált fogalmak és tételek követhető leírásával megadja az olvasónak azt a jó érzést, hogy kapiskálja a dolgokat.

Végül a 6. fejezet a szerző 2000-es *Int. Math. Res. Notices* cikkében közölt – sokak által eddigi *életműve fő eredményének tartott* – kiemelkedő számelméleti eredményét ismerteti. Nevezetesen, azt bizonyítja, hogy egy tetszőleges D diszkriminánsú f kvadratikus irreducibilis polinom mod p gyökeinek eloszlása a prímeken – sőt prímek tetszőleges számtani sorozatban vett részsorozatára nézve is – határértékben egyenletes lesz. Ez kiterjeszti a Duke-Friedlander-Iwaniecz által jegyzett $D < 0$ esetről tetszőleges D-re a sejtett eredményt, eközben több lépésben is új módszereket alakítva ki. A cikket a "könnyebb" $D < 0$ eset egyik szerzője, John B. Friedlander, igen komolyan méltatja a Mathematical Reviews hasábjain is – ezt az ismertetést csatolom az opponensi véleményhez. A fejezet tartalmazza a szerző egy saját bizonyítását is a Salié-összegek egy nevezetes formulájára, továbbá ismerteti, hogy a számelméleti egyenletes eloszlási tétel egy korolláriuma az, hogy ezen komplex értékű Salié-összegeknek az argumentuma is egyenletesen oszlik el.

Opponensi kérdés. Az értekezés címe, témája moduláris formák ciklusintegráljai, és valóban ez fogja össze az érdemi fejezetek majd mindegyikét. De az utolsó, 6. fejezetben én nem láttam a ciklusintegrálok jelenlétét, és a vonatkozó cikkek keletkezési ideje is arra látszik utalni, hogy a $\mathcal{C}_A$ zárt geodetikus görbéken vett ciklusintegrálok kiszámítása ebben az eredményben még nem kerülhetett felhasználásra. A kérdés tehát az: *Mi köze a 6. fejezetnek a moduláris formák ciklusintegráljaihoz, illetve a szerző ezzel kapcsolatos eredményeihez?*

Az opponens számára feltett szokásos és kötelező alapkérdés, hogy *újak-e a szerző eredményei?* A válasz hagsúlyos **igen**, mert a szerző eredményei megszületésük idején *több hatalmas lépéssel vitték előre a moduláris formák elméletének, de kijelenthető, hogy általánosan a matematikának a fejlődését is.* Az eredmények újdonság-értékéhez szorosan hozzá tartozik, hogy az értekezés legnagyobb részének eredményeit tekintve – a 2-5. fejezetben leírtakkal kapcsolatos cikkekben – azonos társszerzőkkel, William Duke-kal és Özlem Imamogluval közösen dolgoztak, de kérdésemre *mindkét társszerző messzemenően elismerően szólt Tóth Árpád hozzájárulásáról,* és *mindketten kiemelték, hogy nélküle ezek a közös eredmények nem jöhettek volna létre.* Opponensi véleményemhez csatolom ezeket a levélváltásokat is. Így kétség sem férhet hozzá, hogy *a jelölt saját, önálló hozzájárulása is igen jelentős matematikai értékkel bír.*

Végezetül az "új eredmények" kérdéshez tartozik az is, hogy a bemutatott eredmények mennyiben újak *a szerző doktori (PhD) értekezése óta.* A doktori fokozatot Tóth Árpád az 1997. évben írott "Equidistribution of roots of quadratic congruences" (Rutgers The State University of New Jersey - New Brunswick) című doktori értekezésével szerezte meg. Tehát *formailag* mindenképpen igennel kell válaszolni, hiszen a megjelent és itt feldolgozott cikkek a 2000-es évekből származnak. Ám tartalmilag – már a címekből is láthatóan – van tényleges átfedés a 6. fejezet és a PhD disszertáció között. Tekintettel azonban arra, hogy *az értekezés enélkül a fejezet nélkül is bőségesen tartalmaz nagyon kiemelkedő eredményeket,* összességében érdekességét veszíti ez az átfedés, és a végső értékelést nem befolyásolja.

Nagy szerencsémnek tartom, hogy a vonatkozó szabályzat nem kényszerít arra, hogy számszerű pontszámot javasoljak a hamarosan szavazni kénytelen bíráló bizottsági tagoknak. Még nagyobb szerencsének tartom, hogy a jelen művet nem egy egyetemi habilitációs eljárás keretében kell értékelni, ahol az előadás, a didaktikai és pedagógiai vonatkozások hangsúllyal szerepelnének. A szerző tudományos eredményeit kell értékeljük, és ennek a disszertáció csak bemutatási eszköze, de nem az értékelés fő tárgya.

Senki és semmi sem tökéletes – és inkább kell elismerni egy nem túl jól bemutatott, de mégiscsak *világviszonylatban kiemelkedő tudományos teljesítményt,* mint egy közepes vagy gyenge teljesítményt, ami egyébként nagyon szépen van leírva. Ezzel kapcsolatban Karinthy "Így írtok Ti"-jében a Szabolcska Mihályt kifigurázó versike jutott eszembe:

"Egyszerü és tiszta nóta
– Gólyafészek, háztető –
Nincsen benne semmi, ámde
Az legalább érthető."

Láttam olyan védést, ahol az volt az érzésem, hogy ennek jegyében zajlik a cselekmény. Ez most nagyon nem az az eset. A jelen értekezésre inkább Shakespeare Hamletjéből Polonius szavai idézhetőek:

"Őrült beszéd! Őrült beszéd: de van benne rendszer."

Határozottan úgy gondolom, hogy az értekezésben ismertetett eredmények – vagy akár csak azok egy része is – bőségesen elegendőek ahhoz, hogy az MTA doktora fokozatot a T. Bíráló Bizottság odaítélje. Ezért bízvást ki merem jelenteni, hogy Tóth Árpád számára az MTA doktora fokozat odaítélését, mint tudományos eredményeinek elismerését, mindenképpen melegen javaslom. Megjegyzendő – ha tetszik, hangsúllyal szóvá teendő – de mellékes körülményként tekintendő, hogy a disszertációban ezek bemutatása, a tárgyalás maga, hagyott némi kívánnivalót maga után. Remélhetőleg a jelölt megszívleli ezt a hangsúlyos megjegyzést, és akadémiai székfoglalójában majd gondosabban, érthetőbben, pontosabban mutatja be eredményeit. Ehhez további sok sikert kívánok neki.

Budapest, 2020. január 31-én,

Révész Szilárd