

Bírálati vélemény a Tóth Árpád által benyújtott "Cycle Integrals of Modular Forms (Moduláris formák ciklusintegráljai)" című doktori munkájáról

A 125 számozott oldalt tartalmazó, angol nyelvű disszertáció bevezetőből, 6 számozott fejezetből, irodalomjegyzékből és egy Appendixből áll. A téziszűzet 7 számozott fejezetből és irodalomjegyzéket tartalmaz. A tézisek jól emelik ki a disszertáció lényeges eredményeit, amelyek a moduláris formák zárt görbék menti integráljaival foglalkoznak. A klasszikus megközelítésben ezek a görbék zárt geodetikuskok a Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus sík egy speciális Γ diszkrét csoportjára nézve. Ezt "lefordítva", ha a hiperbolikus síkot a

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$$

felső felsíkkal modellezzük, a hiperbolikus sík irányítástartó egybevágóságainak csoportja

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\},$$

a speciális diszkrét csoport

$$\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}.$$

Ezek az algebrai csoportok a

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Möbius-transzformáció által hatnak a felső félsíkon. A Γ pályáiból álló faktorteret $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ -val jelöljük. Ebben a modellben a geodetikuskok a valós középpontú félkörök és a függőleges félegyenesek. A Jelölt eredményeiben szereplő ciklusok azok a geodetikuskok, amelyek a $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ faktortérben önmagukba záródnak. Bebizonyítható, hogy ezek a zárt geodetikuskok egész együttíthatós kétváltozós indefinit kvadratikus alakokkal írhatóak le. Ez a kölcsönhatás a számelmélet, geometria és az analízis között jól szemlélteti Tóth Árpád munkásságának mélységét. Az értekezésben fontos szerepet játszanak az $1/2$ -súlyú moduláris formák is. Shimura fedezte fel, hogy létezik egy lineáris leképezés a négyzetesen integrálható $1/2$ -súlyú moduláris formák és a Γ -invariáns függvények között. A Katok-Sarnak formula köti össze az $1/2$ -súlyú moduláris forma Fourier-együtthait és a Shimura-kapcsolt függvény ciklusintegráljait.

A Jelölt egyik legfontosabb eredménye, hogy az invariáns függvényekre vonatkozó átlagolási eljárásra, a Poincaré-sorokra ad olyan formalizmust, amelynek segítségével a Katok-Sarnak formula új bizonyítására és kiterjesztésére nyílik lehetőség.

Ezen túl az új nézőpont lehetővé tesz új alkalmazásokat, amelyeket részletesen tárgyal a szerző. Ezek alapvetően 4 csoportba sorolhatóak, lásd a doktori értekezés 4., 5., 6. és 7. fejezetét:

- számelméleti definícióval megadott immertált felületek egyenletes eloszlása a $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ faktortéren,
- a Sallé-féle exponenciális összegek szögei egyenletesen oszlanak el,
- a Ramanujan-féle ál-moduláris formák egyszerű konstrukciója a Klein-féle invariáns ciklusintegráljával,
- az $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$ faktortéren a geodetikus folyam periodikus pályáiból képzett szimmetrikus linkek burkolódási számának kifejezése ciklusintegrálok segítségével.

A benyújtott disszertáció magas színvonalú, valamennyi, a Jelölt által jegyzett, társszerzőként illetve önállóan nyert eredményét kiemelkedő szintű tudományos munkásságnak fogadom el. A téziszüzetben sorszámommal rendelkező 10 tétel közül hétben olyan társszerzőkkel ér el a téma területet jelentősen előre vivő eredményeket, mint Duke és Imamoglu. Jól mutatja a minőséget, hogy a téziszüzetben említett négy cikk közül kettő az Annals of Mathematics-ben, egy-egy pedig a Duke Mathematical Journal-ben illetve az International Mathematical Research Notices-ben jelent meg.

A doktori művet nyilvános vitára ajánlom, az MTA Doktora cím odaítélését támogatom.

Debrecen, 2019. november 18.



Pintér Akos