

Nemegyensúlyi termomechanika

Ván Péter

MTA Wigner FK RMI,
BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék,
Montavid Termodinamikai Kutatócsoport

2018. március 20.

Ajánlás: Beának.

Tartalomjegyzék

Előszó	v
1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika	1
1.1. Bevezetés - történeti megjegyzések	1
1.1.1. Termosztatika, mechanika és termodinamika	2
1.2. Termosztatika	3
1.3. Közönséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.	5
1.3.1. Folyadékok és gázok termosztatikája	5
1.3.2. Termodinamika	8
1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.	12
1.4.1. Példa: folyamatok Van der Waals-gázzal	14
1.4.2. Teljes és belső energia	15
1.5. Rugalmas anyag	17
1.5.1. Termodinamika	19
1.5.2. Lineárisan hőtáguló homogén rugalmas viszkoelasztikus test	20
1.6. Összefoglalás	22
2. Kontinuum-termodinamika	23
2.1. Bevezetés – történeti megjegyzések	23
2.1.1. Alapelvek	23
2.1.2. Gyökerek és irányzatok: klasszikus, racionális és kiterjesztett	24
2.2. Objektivitás	27
2.2.1. Történet: objektivitás és anyagi objektivitás	27
2.2.2. A Noll-féle definíció kritikája	29
2.3. Gyenge nemlokalitás időben és térben	31
2.3.1. Történet: túl a lokális egyensúlyon	31
2.3.2. Gyengén nemlokális nemrelativisztikus kontinuumok	34
2.4. Gyengén nemlokális belső változók	36
2.4.1. Elsőrendű gyenge nemlokalitás – relaxáció	37
2.4.2. Másodrendű gyenge nemlokalitás - a Ginzburg–Landau-egyenlet	40
2.4.3. Magasabbrendű gyenge nemlokalitás - a Cahn–Hilliard-egyenlet	42
2.5. Duális belső változók és tehetetlenség	44
2.6. Gyengén nemlokális extenzívek és klasszikus irreverzibilis termodinamika	51
2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben	53
2.7.1. Folyadékmechanika általában	53
2.7.2. Termodinamikai elemzés	54
2.7.3. Lokális és gyengén nemlokális egyensúly	58
2.7.4. Schrödinger–Madelung-folyadék	59

Tartalomjegyzék

2.7.5.	Összefoglalás	61
2.8.	Homogén és kontinuum	62
2.8.1.	Generikus stabilitás	63
2.8.2.	Kontinuum és homogén	66
2.9.	Relokalizálható kontinuumok – hővezetés	69
2.9.1.	Bevezetés – történeti megjegyzések	69
2.9.2.	Az entrópiaprodukció	72
2.9.3.	Lineáris vezetési törvények	73
2.9.4.	Speciális esetek	74
2.9.5.	Makroszkopikus univerzalitás	75
2.9.6.	Hőimpulzus kísérlet és Guyer–Krumhansl-egyenlet	76
2.9.7.	Eredmények	79
2.9.8.	Összefoglalás és kitekintés	80
2.10.	Lokális belső változó: rugalmasság és reológia	83
3.	Relativisztikus hidro- és termodinamika	89
3.1.	Bevezetés – történeti megjegyzések a hidrodinamikáról	89
3.2.	Az Eckart-elmélet	92
3.3.	Termodinamikai elemzés	95
3.4.	Kinetikus elmélet	99
3.5.	Generikus stabilitás	102
3.5.1.	Homogén egyensúly	103
3.5.2.	Linearizálás	103
3.6.	Homogenizálás – termodinamika	106
4.	Összefoglalás	109
A.	Objektivitás és téridő	111
A.1.	Galilei-relativitás, avagy a nemrelativisztikus téridő	111
A.1.1.	Anyagi sokaságok	114
A.2.	Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak	119
B.	Farkas lemmája és következményei	127
C.	Reynolds transzporttétele	131
D.	A mozgó testek hőmérséklete	133
D.1.	Történet – relativisztikus termodinamika	133
D.2.	Kölcsönható termodinamikai testek	137

Előszó

A legáltalánosabb értelemben vett termodinamika, mint fizikai elmélet kettős természetű. Egyrészt általános, mély és alapvető eredményekre vezet, amelyek messze kívül esnek az elmélet általánosan elfogadott érvényességi határain. Gondoljunk arra, hogy Planck termodinamikai megfontolások alapján jutott a kvantummechanika kapujába, vagy említhetjük Jacobson és Verlinde eredményeit a közelmúltból, a gravitációelmélet és a termodinamika közötti kapcsolatról [1, 2]. Mindkét eredmény elgondolkoztató a fizika elméleteinek általánosan elfogadott viszonyait illetően.

A termodinamika ugyanakkor a fizika egyik legalkalmazhatóbb elmélete. Az emberiség előtt álló nagy kihívások, az energiafelhasználás és elosztás kérdései, az ezekhez a folyamatokhoz kapcsolódó veszteségek, azaz az entrópiatermelés csökkentése: ezek mind termodinamikai kérdések. De az energiaváltozások és energiatranszport problémáin messze túlmutatnak a termodinamika különböző alkalmazásai. Azért alkalmazható, mert a makroszkopikus kontinuumok keretrendszerként egységbe foglalja a többi diszciplínát és összehangoltan kezelhetővé teszi kapcsolataikat, egyúttal pedig általános korlátokat és feltételeket szab az anyag tulajdonságait kifejező makroszkopikus összefüggésekre, a *konstitutív relációkra*. A nemegyensúlyi termodinamika a transzportjelenségek általános fenomenologikus elmélete.

Ez a kettősség, hogy a termodinamika valahogy egyszerre gyakorlati és alapvető, a legfontosabb megértendő tulajdonsága ennek a területnek. Magyarán jelenthet, hogy tudjuk, a természetben minden folyamat irreverzibilis és a termodinamika a valódi világ, az irreverzibilis folyamatok világának elmélete. A termodinamika második főtétele és az ehhez kapcsolódó fogalmak rendszere ezt a tökéletlenséget fogalmazza meg a fizika minden diszciplínájában. Ezért minden gondolatmenet, amely kizárólag a második főtételen alapul ilyen értelemben általános érvényű, azaz univerzális. Univerzális, mert független az egyes részdiszciplínáktól, az anyag szerkezetére vonatkozó különböző konkrét speciális feltevésektől. Pontosan annyira univerzális, amennyire általánosak az elvek, amikre épít. Ezt az univerzalitást elfogadjuk az abszolút hőmérséklet esetén, de a nemegyensúlyi termodinamika hasonló univerzalitását már sokkal kevésbé értjük. E dolgozatban ismertetett kutatásokat végső soron ennek, a második főtételben gyökerező univerzalitásnak a megértése motiválta.

Amikor az 1940-es évek végén a nemegyensúlyi termodinamika Eckart, Prigogine és Meixner munkássága révén kontinuumelméletként túllépett Onsager korábbi, homogén termodinamikai megfontolásain, akkor kutatói átlátták az elmélet fizikai diszciplínákat áthidaló, egyesítő erejét. A klasszikus irreverzibilis termodinamika korlátai azonban hamarosan világossá váltak, és a kezdeti lelkesedés csillapodásával manapság a fizikus közösség általában azt hiszi, hogy fejlődése megállt de Groot és Mazur 1962-ben kiadott monográfiájában rögzített szinten. Ennek az egyik oka – a divatok váltakozásán túl – véleményem szerint az alapelvek elégtelen megértettségében rejlik. A három terület, ahol a nemegyensúlyi termodinamika alapjainak vizsgálatára szükség van:

Előszó

- A második főtételek fizikai jelentése és annak formális megfogalmazása – ez már a homogén testek klasszikus elméletében is fontos.
- A konstitutív elmélet, azaz a második főtételek egyenlőtlenségének megoldási módszerei (a lineáris erő-áram szerkezet feltételei és meghaladása).
- Az objektivitás, azaz annak fizikai megértése és formális megfogalmazása, hogy a konstitutív, anyagra jellemző tulajdonságok valóban csak az anyagtól függhenek.

A továbbiakban ezeket a kérdéseket vizsgáljuk a termodinamika három diszciplináját tekintve, egységes alapokat és módszereket használva. Fejezetei ennek megfelelően tagolódnak: a homogén testek, a klasszikus kontinuumok és a relativisztikus folyadékok elméletét tárgyalom. Mindhárom esetben megmutatom, hogy a nemegyensúlyi termodinamika elmélet modellalkotó képessége jelentősen meghaladja a klasszikus irreverzibilis termodinamika lokális egyensúlyra, erő-áram konstitutív relációkra és relatív fejlődési egyenletekre alapozott lehetőségeit és számos példát mutatok az elmélet egységesítő erejére és gyakorlati alkalmazhatóságára.

Homogén és kontinuum

A homogén testek termodinamikája magában foglalja a klasszikus termodinamikát, amit termosztatika vagy egyensúlyi termodinamika neven ismerünk. Ugyanakkor érvényességi köre ennél kiterjedtebb, mert a nemegyensúlyi termodinamika a homogén testekre is vonatkozik, ugyanis a teljes klasszikus termodinamika felépíthető valódi időbeli folyamatokkal, közönséges differenciálegyenletekre alapozottan, például a megfelelő kontinuumelmélet homogenizálásával, a térbeli rész kiátlagolásával.

A dolgozat első fejezete a közönséges termodinamikát, azaz a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikáját tárgyalja két fontos részt kiemelve, amelyek jól megvázíthatóak már ilyen modellben is.

1. Megfogalmazásra kerül a második főtételek, mint az anyag stabilitásának törvénye (az 1.1. tétel és változatai az 1.3 és az 1.5 fejezetekben).
2. A mechanika és a termodinamika kapcsolata, különös tekintettel arra, hogy olyan fogalmak, mint tehetetlenség, sebesség, hogyan egyeztethetőek össze a második főtételekkel.

A következő, kontinuumokat tárgyaló fejezetek miatt az additivitás-extenzivitás tulajdonság segítségével bevezethető fajlagos és sűrűség jellegű mennyiségek hangsúlyosan szerepelnek.

Mindkét oldal fontos, a kontinuum és a homogén is. Itt is, mint a fizika számos kapcsolódó diszciplinájában (pl. fenomenologikus-statisztikus), nem egyszerű speciális-általános viszonyról van szó. Látszólag a kontinuumnak speciális esete a homogén, de a gyengén nemlokális kontinuumelméletekről általában azt gondoljuk, hogy nem lokalizálhatóak, azaz nem építhetőek fel homogén részekből. Látni fogjuk azonban, hogy a homogén elmélet kulcsa, a Gibbs-reláció, és rajta keresztül bizonyos értelemben a lokális egyensúly is remekül kiterjeszthető térderiváltakól függő entrópiafüggvények esetére is. Ezt majd kihasználjuk a 2.8.2, illetve a 3.6 fejezetekben. Ez pedig azt jelenti, hogy bonyolultabb esetekben is van értelme a diszkrét elemekből felépíthető kontinuum képnek. Haszna pedig, például a numerikus módszerek esetén kézenfekvő.

Általában az mondható, hogy homogén testek folyamatait tárgyaló vonatkozó *közönséges termodinamika* vizsgálata elvi szempontból különösen érdekes, műszaki, alkalmazási szempontból pedig kikerülhetetlen. Elvileg azért érdekes, mert ami ebben az egyszerű modellben sem érthető, attól nem nagyon várható, hogy a körülmények bonyolítása érthetővé teszi. Gyakorlatilag pedig azért kikerülhetetlen, mert már a legjobban ismert és legegyszerűbb kontinuumelmélet esetén, a Fourier-féle hővezetési egyenletet használva, nagy méretű és összetett rendszerek tervezésekor és felépítésekor homogén megoldásokra, hőátadási modellekre kell hagyatkoznunk. Egy teljes hőerőművet például értelmetlen és gyakorlatilag lehetetlen egészében kontinuumként modellezni.

Konstitutív elmélet

A második fejezet relatív kontinuumelméletekben vizsgálja a második főtétel szerepét a konstitutív relációkra. Ebbe beletartoznak klasszikus disszipatív elméletek termodinamikai általánosításai. Egyrészt az adott elméletben szokásosnál magasabb rendű térbeli deriváltak figyelembe vételével azok úgy nevezett gyengén nemlokális kiterjesztését tekintjük, másrészt tárgyaljuk a magasabbrendű időderiváltakat tartalmazó egyenleteket is. Három konstrukciós módszer alkalmazására kerül sor:

1. A *belső változók módszerével* magasabbrendű időderiváltakat tartalmazó fejlődési egyenleteket vezethetünk be a második főtétellel összhangban.
2. Az *áramszorzók módszerével* lokalizálható, transzport eredetű inhomogenitásokat tartalmazó egyenleteket kapunk.
3. *Függvényegyenlőtlenség-elemzés* pedig általános erős eszközt jelent a második főtétel egyenlőtlenségének megfelelő konstitutív függvények megtalálására. Ennek legáltalánosabb változata a feltételes egyenlőtlenségrendszerek Farkas Gyulától származó megoldási módszerét alkalmazza, amelynek speciálisan a második főtételre vonatkozó, nemegyensúlyi termodinamikai változatát Liu-eljárásnak nevezik.

Ezek a módszerek a második főtételre alapulnak, azaz a konstrukciójuk során már beépítik a második főtétel megfelelő formáját. Mindhárom esetben a termodinamikai erők és áramok jelentik a lehetőséget a konstitutív egyenletek egyszerű konstrukciójára.

Objektivitás és téridő

Az objektivitás, a vonatkoztatásirendszer-függetlenség követelménye a kontinuumfizika alapelvei között különös helyet foglal el. Egyrészt mindenki elfogadja, másrészt nincs egyetértés a pontos formáját illetően. Már a második fejezetben, illetve a függelékben is tárgyalom ennek néhány aspektusát, egyrészt megmutatva, hogy az objektivitás szokásos megfogalmazása hibás, illetve hiányos, másrészt a téridő motivációjú háttérrel adva a klasszikus objektív időderiváltaknak. Ennek az elemzésnek bizonyos következményeit már a hagyományos, vonatkoztatási rendszertől függő, relatív tárgyalás is figyelembe veszi, hisz a belső változók és az áramszorzók csak együtt adhatják az objektív entrópia sűrűség-áram megfelelő általánosítását, illetve a térbeli deriváltakon

Előszó

alapuló gyengén nemlokális kiterjesztés sikerének kulcsa, hogy a Galilei-relativisztikus téridő kovektorainak térszerű része független a vonatkoztatási rendszertől.

A harmadik fejezetben viszont a Galilei-relativisztikus és a speciális relativisztikus hidrodinamika kapcsán objektív, vonatkoztatásirendszer-független megfogalmazás adható és a relatív, azaz nem kovariáns tárgyalások számos buktatója kikerülhető. Itt, a disszipatív hidrodinamika elsőrendű stabil elméleteinek megfogalmazásában mindhárom kiemelten említett problematikus pontra adott válasz fontos: a második főtétele és a stabilitás viszonyának, a második főtétele modern elemzési módszereinek és az objektív tárgyalásmódnak egyaránt lényeges szerepe van.

Matematika és axiomatizálás

A termodinamikában és a kontinuumfizikában az axiomatizálásnak, illetve a matematika intenzív használatának nagyon erős hagyományai vannak. Véleményem szerint ezeket a hagyományokat nagyrészt a zavarosságnak az az alapélménye táplálja, amivel mindkét elmélet megtanulásakor találkozhatunk. A második főtétele, illetve az entrópia fogalma a statisztikus elmélet nélkül is sokrétű és a megértéshez közelítve jelentésének számos rétegét kell szétbontani és feltárni.

A matematika a fizikában nem eszköz és nem nyelv, illetve nemcsak az. A pontos matematikai fogalmak használata a termodinamikában nem csak azért fontos, hogy élesebb és erősebb szerszámaink legyenek. A matematikai objektumok a természetről alkotott modelljeink építő elemei és a szemléletességből adódó szubjektivitás formáltanná, összeilleszthetlenné teszi ezeket az elemeket. Ráadásul matematikai elemzés hiányában még azt sem könnyű felismerni, hogy nem illeszkednek.

Mindezzel együtt ez a dolgozat nem axiomatikus és nem is nagyon matematikai, a fizikai háttérrel hangsúlyozza. Viszont messzemenőig épít a matematikai elemzésekre, elsősorban Matolcsi Tamás közönséges termodinamikájára és a téridő modellszintű pontos fogalmára, illetve Clifford Truesdell racionálisként jellemzett kontinuumelméleti iskolájának eredményeire. Bizonyos szempontból azokat igyekszik továbbfejleszteni kevésbé matematikai módon.

Elmélet és technológia

A termodinamika, mivel a nem idealizált fizikai rendszerek törvényszerűségeivel foglalkozik, nagyon gyakorlati tudomány. Ebben a dolgozatban elméleti munkákat foglalok össze, így csak néhol tudom érzékeltetni azokat az eredményeket, amiket a kidolgozott modellek gyakorlati alkalmazásának irányába tettünk kollégáimmal közösen.

A körülmények és a szerencse úgy hozták, hogy a termodinamikai rendszerek közül elsősorban a kőzetmechanika anyagelmélete, reológiai, károsodási hőterjedési hatásokkal összefüggő gyakorlati problémái adták a motivációkat és a visszacsatolást az elmélet fejlesztéséhez. A kövek bonyolultak. Repedeznek, törnek, folynak, egyszóval ideálisak mindenféle nemideális jelenség tanulmányozására.

Köszönetek

Tanáraim és kollégáim, akik leginkább hatással voltak rám és akiktől a legtöbbet tanultam Asszonyi Csaba, Biró Tamás Sándor, Fülöp Tamás, néhai Gyarmati István, Matolcsi Tamás és Verhás József. Köszönet továbbá legkedvesebb munkatársaimnak,

akikkel együtt dolgozhattam, Kovács Róbertnek, Vásárhelyi Balázsnak, Arkadi Bere-zovskinak, Barnaföldi Gergelynek, Christina Papenfussnak, Antonio Cimmellinek, Wolfgang Muschiknak és Noa Mitsuinak. A támogatásukért hálás vagyok Lévai Pé-ternek, Gróf Gyulának és Wolf Györgynek. Lámer Gézának pedig a kézirat régebbi verziójának gondos átnézéséért. A hajdani BME Kémiai Fizika Tanszék, a hajdani RMKI Elméleti Fizika Főosztály (most Wigner FK RMI Elméleti Fizika Osztály) és a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék kollektívájának pedig köszönöm a helyet, ahol jó volt és jó dolgozni. Családomnak pedig köszönöm, hogy elviseli mindazt ami ezzel a munkával és életmóddal jár.

A munkát az OTKA K81161, K104260, illetve az NKFIH 116197, 124366, 123815 pályázataival támogatta.

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

1.1. Bevezetés - történeti megjegyzések

A klasszikus, egyensúlyi termodinamika (a továbbiakban *termosztatika*), a XIX. század folyamán alakult ki. Ebben az időszakban már a mechanika a természetfilozófia alapja és minden más új fizikai diszciplína mintája. A termodinamikai folyamatok az ideális mechanikai világkép keretei között nem érthetőek könnyen, származtatásuk nem variációs elveken alapul, ezért a termodinamika ilyen jellegű, folyamatokra alapozott tárgyalása máig erősen vitatott, de fontos része a nemegyensúlyi termodinamikának. Számunkra csak a teljes képnek csak néhány eleme fontos: Farkas Gyula második főtétellel kapcsolatos vizsgálataira [3] alapozva Fényes Imre általános axiomatikus tárgyalást dolgozott ki [4], majd kísérletet tett a nemegyensúlyi termodinamikába történő beágyazására Onsager munkái, illetve de Groot és Mazur monográfiája, [5], nyomán [6] könyvében. Ezután Truesdell és Bharatha [7] kutatásai tekinthetőek ebbe az irányba tett fontos lépéseknek.

A homogén testek nemegyensúlyi termodinamikájának nehézségeit mutatja az utóbbi évtizedekben megjelent úgynevezett *véges idejű*, illetve *endoreverzibilis* termodinamika is [8, 9, 10]. Ezek a rokon irányzatok valódi, időben zajló folyamatokat tárgyalnak homogén termodinamikai rendszerekben, de lényegében elvi megalapozás nélkül [11, 12, 13]. Fényes, illetve Truesdell és Bharatha munkáinak legfontosabb hiányossága, hogy a második főtételt nem teszik érthetőbbé, mint az egyensúlyi termodinamikai elmélet. Azt, hogy ez lehetséges, azaz hogy a második főtétel fizikailag világos és matematikailag is tiszta állításként jelenhet meg egy megfelelő nemegyensúlyi elméletben, Matolcsi Tamás mutatta meg [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Ebben a fejezetben röviden bemutatom a *közönséges termodinamikának* alapállítását, miszerint a II. főtétel a termodinamikai egyensúly aszimptotikus stabilitását biztosító feltételrendszer, ahol a termodinamikai rendszer teljes entrópiája a Ljapunov-függvény. Egy vázlatos általános keret ismertetése után gázokra és folyadékokra, illetve rugalmas anyagra levezetem a megfelelő entrópiaprodukciót. Ezek a termodinamikai rendszerek azok, ahol homogén testek esetén – a mechanikai tehetetlenség miatt – a termodinamikai tárgyalások általában nem teljesek, esetleg rosszak.

Az alábbi rövid bevezetés szükséges a termosztatika szerepének megértéséhez a kontinuumfizikában, azaz a lokális egyensúly értelmezéséhez a vonatkozó kontinuumelméletekben. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a fordított viszony is fontos: a kontinuumelméletekből egyszerű feltételek mellett visszakaphatjuk a homogén termodinamikai testek fejlődési egyenleteit és ennek fényében értelmezhetjük a benne szereplő paramétereket.

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

1.1.1. Termosztatika, mechanika és termodinamika

A termostatika kulcsfogalma az *egyensúly*, de mivel a termostatikában nincsenek igazi folyamatok, illetve az esetlegesen használt folyamatfogalmak – a kvázisztatikus, reverzibilis illetve irreverzibilis – homályosan definiáltak, ezért a termostatikai egyensúly fogalmában többféle dolog keveredik. Mindazonáltal a termodinamikai mennyiségeket minden bevezető termodinamika könyv egyensúlyban tekinti értelmessnek [6, 23, 24]. Egyensúly alatt többek között impliciten az időfüggetlenséget, homogenitást és disszipációmentességet is szokás érteni. A termodinamika nulladik főtétele hivatott tisztázni a feltételeit. A termostatikai egyensúly fogalma önkonzisztensen, mindenféle mikroszkopikus háttér nélkül itt fogalmazódik meg. Ebben a felfogásban, a nulladik főtétel alapján, az egyensúly a fizikai rendszerek *redukálhatóságát* és *szeparálhatóságát* jelenti. Redukálhatóságot, hiszen többnyire legalább 10^{20} - 10^{40} számú atomi, molekuláris, mezoszkopikus fizikai mennyiség együttes hatását jellemezzük néhány termodinamikai változóval, anélkül, hogy bármit is tudnánk azok részletes viselkedéséről. A termostatikai egyensúly tartalmazza, hogy ez a jellemzés egyáltalán megtehető, azaz az ettől való eltérés – újabb változók, memóriahatások vagy akár részecskeszintű leírás segítségével – már nem termostatikai egyensúlyi állapotot jelent. Az állapotter redukálhatóságához azonban sem az időfüggetlenség, sem a homogenitás, sem a disszipációmentesség nem szükséges, sőt még az sem feltétel, hogy a fizikai rendszer különösebben nagy, vagy összetett legyen. A redukálhatóság mellett a termodinamika nulladik főtétele szerint alapvető a *szeparálhatóság*, azaz, hogy a fizikai mennyiségek egyes termodinamikai testeket jellemeznek, tehát a fizikai valóság részenként modellezhető [25]. Ezt a feltételt elfogadva, a redukálhatóságot a dinamikai tulajdonságokon keresztül lehet igazán megérteni: a termodinamikai rendszerek hierarchiájában az egyszerűbb, de univerzálisabb modellek világos módon és feltételekkel részei a bonyolultabb, több változós elméleteknek. A redukálhatóságot, és az „egyensúly” bonyolult fogalomkomplexumát a nemegyensúlyi termodinamikai tárgyalás világosabbá teszi az időfüggetlenséget leválasztva az egyéb egyensúlyfogalmakról. Éppen ezért erre a kérdésre a fejezet végén térünk vissza.

Mint azt fentebb említettük, a "termodinamikai egyensúly" fogalmának az időfüggetlenség valójában nem lényeges eleme. A termodinamika és a termostatika viszonya nem nyilvánvaló, és értelmezéséhez különösen a termodinamikai potenciálok, elsősorban az entrópia dinamikai szerepét kell tisztáznunk. A termostatika alapállítása az entrópia, mint potenciál létezése. A továbbiakban mi is ebből fogunk kiindulni, és röviden összefoglaljuk a vonatkozó összefüggéseket.

A termodinamikai mennyiségek időbeli változásának leírására homogén testekben közönséges differenciálegyenleteket használhatunk, az adott változók *fejlődési egyenleteit*. Mivel mechanikai rendszereket – gázokat, folyadékokat és szilárd testeket – fogunk tárgyalni, ezek a fejlődési egyenletek néha speciálisan mozgásegyenletek, tehát a termodinamikai elmélet fejlődési egyenleteinek tartalmaznia kell a Newton-egyenlet megfelelő alakját is, disszipatív és nem disszipatív esetben egyaránt. Azaz a nemegyensúlyi termodinamika egy megfelelően teljes elmélete a tehetetlenségi hatásokat is tartalmazza.

Ebben az írásban nem céлом a termostatikai elmélet részletes bevezetése, kritikája, vagy egyes paradoxonjainak részletes feloldása. Ezekkel számos vonatkozásban részletesen foglalkoznak a fentebb már említett könyvek [7, 21, 22].

1.2. Termosztatika

Négy feltevést fogalmazzunk meg, nagyjából matematikai formában. A viszonylag pontos fogalmak itt éppen az érthetőség miatt fontosak. A teljesebb matematikai pontosság egyrészt összemosná a fontos és kevésbé lényeges részeket, másrészt a konkrét esetek részleteivel terhelné a tárgyalást, ezért nem törekszünk rá¹.

A1: *Vannak független termodinamikai testek. Ezeket extenzív állapothatározók és intenzív állapotfüggvények jellemzik.*

Ez a nulladik főtétel problémaköre². A termodinamikai testeket jellemző állapothatározók és állapotfüggvények létezése tartozik ide.

Egy termodinamikai testet n darab *extenzív termodinamikai állapothatározó* jellemez. Ezek Descartes szorzata feszíti ki az \mathbb{X} állapotteret, amelynek elemei az $X^A \in \mathbb{X}, A \in 1, 2, \dots, N$ módon jelölt extenzív állapothatározók. Minden egyes extenzív állapothatározóhoz tartozik egy $Y^A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ *intenzív állapotfüggvény*, amely az extenzíveknek függvénye és az állapottér duálisába képez. Az intenzív állapotfüggvények kísérletileg adottak. Itt a leglényegesebb feltevés a szeparálhatóság, tehát a termodinamikai testek saját, független állapothatározóik segítségével jellemezhetőek akkor is, ha fizikai kölcsönhatások, vagy megmaradási tételek miatt látszólag más termodinamikai testek, illetve a környezet hatása alatt állnak.

Az extenzív állapothatározók meghatározó tulajdonsága, hogy a termodinamikai test valamilyen méretével, például térfogatával, tömegével vagy részecskeszámával arányosak, amennyiben az a mérettípus értelmes a fizikai elméletben. (Relativisztikusan például a térfogat értelmezése kérdéses.) Ez a tulajdonság a téridő szimmetriák miatt a Noether-tétel alapján fellépő fizikai mennyiségekre elvárt [30], de nemcsak azokra igaz. Az entrópiát is ilyennek feltételezzük és látni fogjuk, hogy a belső változók az entrópiamérleg miatt szükségszerűen ilyen tulajdonságúak, mérlegegyenlet vonatkozik rájuk.

A2: *Az intenzív állapotjelzők vektortere potenciálos, a potenciál az entrópia.*

Azaz egy termodinamikai testre létezik egy $S : X^A \rightarrow \mathbb{R}$ entrópia függvény, amely a hozzá tartozó entrópiikus intenzív állapotfüggvények vektorterének potenciálja. Ezt fejezi ki a Gibbs-reláció:

$$dS = Y_A dX^A = Y_1 dX^1 + Y_2 dX^2 + \dots + Y_N dX^N. \quad (1.1)$$

Másképpen fogalmazva, az entrópiikus intenzív állapotfüggvények az entrópia parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial S}{\partial X^A}(X^1, X^2, \dots, X^N) = Y_A(X^1, X^2, \dots, X^N) \quad (1.2)$$

Ez a követelmény, a potenciálosság, feltételeket ró a kísérletileg meghatározott függvénykapcsolatokra: az intenzívek formális vektorterének deriváltja szimmetrikus, három dimenzió esetén örvénymentes.

¹ Például a továbbiakban minden függvényt megfelelő mértékig differenciálhatónak, invertálhatónak, stb. tételezek fel, holott jól tudjuk, hogy például a fázisok tárgyalása az értelmezési tartományok rögzítésén és határuk különféle tulajdonságain múlik [17].

² Érdekes módon a termodinamika alapigazságai közül a nulladik főtételt fogalmazták meg utolsónak, vagy legalábbis legkésőbb emelkedett főtétel szintjére [26, 27]. Fontosságát talán leginkább a nemadditív termodinamikai rendszerek vizsgálata mutatja meg [28, 25, 29].

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

A3: Az entrópia extenzív.

Ez a feltétel a termodinamika kontinuumokra történő alkalmazásához elengedhetetlen, *lokalizálhatósági feltételnek* fogjuk nevezni és a következő ekvivalens módokon fogalmazzuk meg:

(i) Az entrópia elsőrendű Euler-homogén függvénye változóinak:

$$S(\lambda X^A) = \lambda S(X^A), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \quad (1.3)$$

(ii) Bármely skalár X^1 extenzívra vonatkoztatva bevezethető az $s = S/X^1$ entrópiasűrűség, amely a megfelelő fajlagos extenzív állapothatározók függvénye:

$$S(X^A) = X^1 s \left(\frac{X^B}{X^1} \right), \quad B = 2, \dots, n, \text{ és } X^1 \text{ skalár.} \quad (1.4)$$

(iii) Érvényes az *extenzivitási reláció*:

$$S = Y_A X^A = Y_1 X^1 + Y_2 X^2 + \dots + Y_N X^N. \quad (1.5)$$

(i)-ből (ii) következik $\lambda = 1/X^1$ választásával, (ii)-ből (iii) adódik az entrópia X^1 szerinti deriválásával az intenzívek definíciója alapján, (iii)-ből (i) pedig egyszerűen behelyettesítéssel ellenőrizhető.

(1.5) és (1.1) fontos következménye a Gibbs–Duhem-reláció:

$$0 = X_A dY^A = X_1 dY^1 + X_2 dY^2 + \dots + X_N dY^N. \quad (1.6)$$

A4: Termodinamikai stabilitás, azaz a fajlagos entrópia konkáv.

Ezért a fajlagos entrópia második deriváltja, $\partial_{AB}s(x^C)$, negatív definit. Itt ∂_{AB} a második derivált tenzort jelöli, $x^C = X^C/X^1$ pedig az X^1 -re fajlagosított extenzív állapothatározókat.

$A3$ miatt az entrópia második deriváltja negatív szemidefinit és magja éppen X^A . Ezt az (1.5) extenzivitási reláció deriválásával láthatjuk be: $\partial_A S = \partial_A (X^B \partial_B S) = \partial_A S + X^B \partial_{AB} S$, ezért $X^B \partial_{AB} S = 0$. Hasonlóan látható be az összefüggés, hogy $\partial_{AB} S = -X^C \partial_{ABC} S$.

A fenti feltételrendszer fizikai szempontból egyre gyengébb állításokat fogalmaz meg. Világos, hogy $A4$ nem mindig igaz, a fázisátalakulások esetén kimerítően tárgyaljuk azokat a jelenségeket, amelyek a termodinamikai stabilitás sérülésével kapcsolatosak. $A3$ például a fekete lyukak illetve általában gravitációs rendszerek termodinamikai tárgyalása esetén nem követelmény [31, 32], tulajdonképpen ez vezet a negatív hőkapacitás fellépéséhez ilyen rendszerekben³. Ugyancsak említésre méltó, hogy a Hill-féle kis rendszerek termodinamikája pontosan ennek a feltételnek az általánosítását vizsgálja olyan esetekben, ahol a térfogati és felületi hatások egyaránt jelentősek [34, 35]. Az elmélet lényege, hogy ilyen rendszerekre is formálisan kikényszerítjük az Euler-homogén entrópia létezését. Fontos még megjegyeznünk, hogy az itt tárgyalt lokalizálhatóság nem azonos az úgy nevezett nemextenzív termodinamika additív tulajdonságával. Ott különböző termodinamikai testekre együttesen bevezethető fizikai mennyiségekről van szó a kompozíciós szabályok kapcsán [36, 37]. Itt a fenti feltétel egyetlen termodinamikai test méretének hatására vonatkozik.

³ Ha van a fekete lyukaknak térfogata, mint ahogy számos javaslat szerint (pl. [33]) van, akkor a hőkapacitásuk sem negatív.

1.3. Közöséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

Az entrópia $A2$ -ben megfogalmazott definíciójától történő eltérésre nem tudunk példát, de vegyük észre, hogy maga a megfogalmazás egyáltalán vizsgálhatóvá teszi, hogy esetleg általánosabb, entrópiamentes módon is vannak-e fizikai rendszerek. Ez a lehetőség a második főtétel fizikai lényegét nem sérti [22].

$A1$ nem cáfolható, ez a fizika modellalkotásának alapja. Minden jelenlegi fizikai elméletünk fontos feltétele, hogy a világ egyes részeit leválasztva kezeljük az egésztől. Az $A1$ -et sértő elméletek nemcsak, hogy nem termodinamikaiak, de nem is fizikaiak.

Az alábbiakban, a legegyszerűbb példákön részletesen megmutatom hogy a fenti feltételek nem függetlenek, együttesen a termodinamikai rendszerek aszimptotikus egyensúlyának feltételrendszerét adják egy dinamikai elmélet keretei között. Ez pedig rávilágít arra, hogy a termodinamika milyen értelemben általános és miért része minden fizikai diszciplínának: az anyag aszimptotikusan stabil állapotainak létezése a kísérleti megismételhetőség és ezáltal az objektív természettudomány létezéséhez elengedhetetlen. A példákban a hagyományoknak megfelelően nemcsak az entrópia jelenik meg termodinamikai potenciálként, és a termodinamikai összefüggéseket is eltérő változórendszerekben célszerű megadni, mert az egyes állapotfüggvényeket nem egyformán jól tudjuk mérni.

1.3. Közöséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

Közöséges termodinamikában a termodinamikai testek homogének, a fizikai mennyiségek csak az időtől függenek. Ebből a szempontból a közöséges termodinamika analóg a tömegpontok mechanikájával.

1.3.1. Folyadékok és gázok termosztatikája

Gázokban és folyadékokban a klasszikus extenzív állapothatározók az E belső energia, a V térfogat és az N részecskeszám vagy az M tömeg. Az entrópia ezeknek a függvénye. Ebben az írásban nemrelativisztikus és relativisztikus termodinamikai megfontolásokat egyaránt használunk, ezért az anyagmennyiség jellemzésére a részecskeszámot vezetjük be az entrópia változójaként: $S(E, V, N)$. Állandó m részecsketömeg esetén a megszokottabb tömeges leírásra az $M = mN$ módon térhetünk át. Az entrópia termodinamikai potenciál, parciális deriváltjai az entrópikus intenzív állapotjelzők. Ezek függvényformája, extenzív mennyiségektől való függése mérhető, az entrópiát $A2$ alapján parciális deriváltjaival definiáljuk:

$$S(E, V, N), \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T}. \quad (1.7)$$

Ezeket a viszonyokat tömören nem az entrópikus intenzív állapotfüggvényekkel adott Gibbs-reláció segítségével, hanem a belső energiára vonatkoztatva szoktunk megadni,

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (1.8)$$

formában. A fenti formulákban T a hőmérséklet, p a nyomás, μ pedig a kémiai potenciál. Ezen kívül a termodinamikai mennyiségek között fennáll az (1.5) extenzivitási reláció gáz-folyadék termodinamikai testekre vonatkozó formája:

$$E = TS - pV + \mu N. \quad (1.9)$$

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

(1.8) és (1.9) következménye a Gibbs–Duhem-reláció:

$$SdT - Vdp + Nd\mu = 0.$$

Az

$$e = E/N, \quad s = S/N, \quad v = V/N \quad (1.10)$$

fajlagos extenzív állapothatározókra igaz, hogy

$$s = s(e, v), \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}, \quad (1.11)$$

és

$$de = Tds - pdv. \quad (1.12)$$

Az extenzivitási és a Gibbs–Duhem-reláció megfelelő formái egyszerűen következnek a fentiekből:

$$\mu = e - Ts + pv, \quad d\mu = -sdT + vdp. \quad (1.13)$$

Azaz a fajlagos mennyiségeket megkaphatjuk a kémiai potenciál (T, p) intenzív mennyiségek szerinti parciális deriváltjaiként. Hasonlóan, bevezethetjük az extenzívek V -fajlagos mennyiségeit, azaz sűrűségeit is

$$\rho_e = E/V, \quad \rho_s = S/V, \quad n = N/V \quad (1.14)$$

definíciókkal. A sűrűségekre az entrópiát definiáló parciális deriváltak és a Gibbs-reláció következő módon írhatóak:

$$\rho_s = \rho_s(\rho_e, n), \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_e} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial n} = -\frac{\mu}{T}, \quad (1.15)$$

illetve

$$d\rho_e = Td\rho_s + \mu dn. \quad (1.16)$$

Az extenzivitási tulajdonságot és a Gibbs–Duhem-relációt is érdemes felírunk:

$$p = -\rho_e + T\rho_s + \mu n, \quad dp = \rho_s dT + n d\mu. \quad (1.17)$$

Sűrűségek potenciálja tehát a nyomás, a (T, μ) változóiban.

Figyeljük meg, hogy a fentiekben elég lett volna két változóra bevezetni az entrópiát ((1.11) vagy (1.15) módon), ezután az extenzivitással kiterjeszthetjük három változóra. Egy változóra a potenciál létezése triviális, két változóra vonatkozóan a termodinamikai hagyományoknak megfelelően hőmérsékletre vonatkozó, úgy nevezett kalorikus állapotfüggvényt úgy vezetjük be, hogy az entrópia létezen, azaz integráló osztóként. Ekkor a potenciál létezése matematikai tétel. Az entrópia létezése csak ennél több változóra jelent fizikai feltételt. Ezt Farkas Gyula bizonyította [3, 4].

Gázok esetén az állapothatározó fajlagos mennyiségek az e fajlagos belső energia és a v fajtérfogat. Az állapotfüggvényeket ezekkel a *kanonikus változókkal* adjuk meg. A termikus és kalorikus állapotfüggvények ekkor $p(e, v)$ és $T(e, v)$ a megfelelő állapotterren értelmezve. A fajlagos entrópiát, mint állapotfüggvényt, a fenti (1.11) formulákkal

1.3. Közönséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

definiáljuk, ami ekvivalens az (1.12) Gibbs-relációval (1.5) miatt. Az összes fenti megfogalmazás (1.13), illetve az extenzivitás segítségével megkapható.

Az intenzív állapotfüggvényekre két feltétel érvényes. Egyrészt az entrópia, mint potenciál létezésének következménye vegyes második parciális deriváltjainak egyenlősége, ez pedig megszorítást jelent a kalorikus és termikus állapotfüggvényekre. Esetünkben tehát (1.11), illetve (1.12) miatt fennáll, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{T} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e} \partial \mathbf{v}} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{p}{T}. \quad (1.18)$$

Ezt az összefüggést (illetve ennek többváltozós általánosítását) nevezzük *Maxwell-reláció(k)*nak. A fajlagos mennyiségek definícióját felhasználva a teljes termodinamikai testre vonatkozóan a fenti (1.18)-ból automatikusan három Maxwell-reláció vezethető le.

A másik feltételt a *termodinamikai stabilitás* A_4 követelménye jelenti. A fajlagos entrópia teljes második deriváltja,

$$D^2 \mathbf{s}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{1}{T} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{T} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{p}{T} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{p}{T} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

negatív definit. Könnyű belátni, hogy ez az alábbi egyenlőtlenségekkel kiértékelhető:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{v}}(T, \mathbf{v}) < 0. \quad (1.20)$$

Konkáv fajlagos entrópia, azaz termodinamikai stabilitás szükséges ahhoz, hogy az entrópiának maximuma lehessen termodinamikai egyensúlyban. Éppen ezért alapkövetelménynek tekintjük, az állapothatározók (\mathbf{e}, \mathbf{v}) teréből kizárjuk azt a tartományt, ahol a fenti egyenlőtlenségek sérülnek. Ideális gáz a teljes kanonikus állapotterén értelmezett, de például a Van der Waals-gáz már nem, az ún. spinodális görbe alatti terület a (p, \mathbf{v}) diagrammon például sérti a termodinamikai stabilitást.

Természetesen sűrűségekre is átfogalmazható a fenti feltételrendszer. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_e}(\rho_e, n) > 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial n}(T, n) \geq 0. \quad (1.21)$$

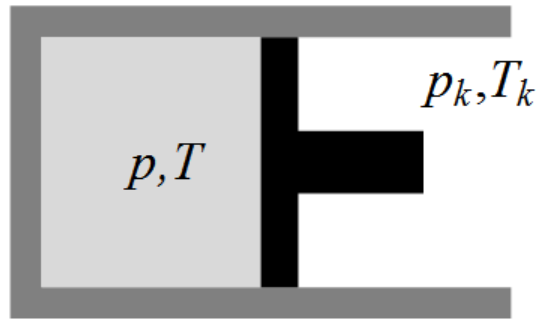
Az (1.7) összefüggésekkel meghatározott teljes entrópia második deriváltja nem lesz negatív definit, csak negatív szemidefinit a lokalizálhatósági feltétel miatt.

Láttuk, hogy a fenti definíció szerint értelmezett entrópia a mérhető fizikai mennyiségek tulajdonságaira ad megszorítást, egy állapotfüggvény nem lehet akármilyen. Ez a definíció lehetővé teszi, hogy egyszerűen bevezessük a *környezet entrópiáját* is. Egy termodinamikai testet környezetnek tekintünk, ha hőmérséklete és nyomása, ebből következően pedig kémiai potenciálja időben állandó. Legyen ez az állandó hőmérséklet T_k , az állandó nyomás pedig p_k . Fajlagos entrópiája ekkor (1.11) alapján egyszerűen kiszámolható:

$$\mathbf{s}_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{T_k} \mathbf{e}_k + \frac{p_k}{T_k} \mathbf{v}_k + \mathbf{s}_0, \quad (1.22)$$

ahol \mathbf{e}_k és \mathbf{v}_k a környezet fajlagos belső energiája és fajtérfogata, \mathbf{s}_0 pedig állandó. A szokott fizikai intuíción alapuló kijelentéseket a környezet – hőtartály vagy nyomástartály – nagyságáról vagy változatlanóságáról egy dinamikai elmélettel természetesen bizonyítani lehet, és a feltételei is megadhatóak.

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika



1.1. ábra. Egyszerű termodinamikai rendszer.

1.3.2. Termodinamika

Ha a homogén testekre vonatkozó termodinamikában időbeli változásokkal kívánunk foglalkozni, akkor ezt a megfelelő termodinamikai változókra vonatkozó differenciálegyenletekkel tudjuk kényelmesen megtenni. Elvárható, hogy legyen egy ilyen elméletünk, amely képes leírni mondjuk egy bögre forró tea hőmérsékletének időbeli változását szobahőmérsékletű környezetben. A térbeli változásokat is leíró elméletet majd a kontinuumok tárgyalásakor fogalmazzuk meg.

Az első főtétel, azaz a belső energia mérlege, kapcsolatba hozható egy differenciálegyenlettel, amennyiben azt

$$\dot{e} = q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \dots) + w(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \dots) \quad (1.23)$$

formában írjuk fel. Itt a pont az időderiváltat jelöli, azaz \dot{e} a termodinamikai test fajlagos belső energiájának időegységre eső megváltozását jelenti, q a fajlagos hőteljesítmény (heating) az időegység alatt átadott termikus energia, w pedig a fajlagos mechanikai teljesítmény, az időegység alatt a homogén testen végzett munka fajlagos értéke (working). A hőt és a munkát jellemző mennyiségek nem értelmezhetőek, csak akkor, ha vizsgált termodinamikai test kapcsolatban van a környezetével. q és w a kölcsönhatást jellemző mennyiségek. Éppen ezért a környezet, vagy szomszédos termodinamikai test, testek jellemzőitől is függeniük kell. A továbbiakban az 1.1 ábrán látható egyszerű termodinamikai rendszert fogjuk vizsgálni, egy gáztestet termikus és mechanikai kölcsönhatásban a környezetével. Ebben az esetben a fenti (1.23) formulában szereplő kipontozott helyekre a környezet jellemző paraméterei kerülnek.

Általában a Gibbs-relációt a termodinamika könyvek azonnal kapcsolatba hozzák az első főtétellel. Olyasféle formulákkal találkozhatunk, mint

$$dE = \delta Q + \delta W = TdS - pdV,$$

ahol d teljes differenciál (matematikailag 1-forma, ahogy eddig), illetve δ nem teljes differenciált, hanem csak valami változást jelöl. Itt nem célunk ennek az egyenlőségnek, a benne szereplő mennyiségeknek a részletes értelmezése, ezt számos különböző módon megteszik a termosztatikai tankönyvek, mind matematikai, mind fizikai szempontból [7]. A folyamatok tárgyalása szempontjából csak egyetlenegy dologra hívjuk

1.3. Közönséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

fel a figyelmet. A mi fenti jelöléseinkkel, időbeli változásokat tartva szem előtt a következő értelmezést tehetjük:

$$\dot{e} = q + w \stackrel{?}{=} T\dot{s} - p\dot{v} = \dot{e}. \quad (1.24)$$

Az utolsó egyenlőség pontosan igaz, az (1.12) Gibbs-reláció következményeként. Az első egyenlőség az energia megmaradása a fenti fajlagos mennyiségekre. Viszont hogyan állhat fenn a $q = T\dot{s}$ összefüggés, azaz miként lehet egyenlő a fajlagos hőáram – a test és a környezet adataitól egyaránt függő fizikai mennyiség –, a test hőmérsékletének és a testet jellemző entrópia időderiváltjának szorzatával? Milyen feltételek mellett és miért lesz $w = -p\dot{v}$? A $T\dot{s}$ szorzat csak az 1.1 ábra hengerébe zárt gáz termodinamikai adataitól függ és semmi köze a környezethez, holott q nyilvánvalóan környezetfüggő! Ez a fizikai kérdés független az időderiváltakkal felírt fenti formulától, a differenciálok bármilyen matematikai értelmezése mellett feltehető. Pontos választ fogunk adni rá.

A továbbiakban, az 1.1. ábrán látható termodinamikai rendszerre vonatkozóan, az első főtételt a homogén termodinamikai testre vonatkozó mérlegként értelmezzük a kontinuumelméletek szellemében a következő módon:

$$\dot{e} = q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) + w(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k). \quad (1.25)$$

Itt szembesülünk először egy tipikus termodinamikai problémával: a kitűzött feladat alulhatározott, több változónk van, mint egyenletünk, és a kölcsönhatási függvényeket sem ismerjük [7]. Az általános termodinamikai hozzáállás az, hogy tegyük fel a legáltalánosabb, kezelhető formában a hiányzó egyenleteket és függvényeket (figyelembe véve minden rendelkezésünkre álló fizikai kényszert és információt), ekkor a második főtétel konstruktív módszert ad a hiányzó fejlődési egyenletek és anyagfüggvények levezetésére. A fajtérfogat időbeli változását megadó mozgásegyenlet is kellene, hiszen (1.25) mellett szükség van egy másik differenciálegyenletre ahhoz, hogy teljes dinamikai törvényt kapjunk. A közönséges termodinamika feltételezi, hogy ez a differenciálegyenlet a következő általános formában írható:

$$\dot{\mathbf{v}} = f(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k), \quad (1.26)$$

ahol f az előbbiek szerint egy általános kölcsönhatási függvény. Ez a klasszikus termodinamika implicit alapfeltevése, a legegyszerűbb tárgyalható eset. Ennél általánosabb feltevéssel is élhetünk azonban, látni fogjuk, hogy sok szempontból természetesebb másodrendű differenciálegyenletet előírni a fajlagos térfogatváltozásra, ezáltal figyelembe véve a közeg mozgásának tehetetlenségét is. A klasszikus termodinamika pontosan azért robusztus elmélet, mert érvényes állításokat fogalmaz meg, a térfogatváltozásra felírható differenciálegyenlet konkrét formájától gyakorlatilag függetlenül.

Az *egyensúly* egy dinamikai elméletben egyszerűen időfüggetlenséget jelent. Ez a kölcsönhatási függvényekben határozódik meg, az intenzív állapotjelzőkkel szoktuk kapcsolatba hozni. Elvárjuk, a hőmérsékletek és a nyomások egyenlősége esetén a termodinamikai rendszer állapota ne változzon, azaz, hogy a fenti (1.25)–(1.26) differenciálegyenletnek ekkor egyensúlyi megoldását kapjuk. Ezért fel fogjuk tételezni, hogy a kölcsönhatásra jellemző mennyiségek az extenzív állapotjelzőktől az intenzíveken

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

keresztül függenek, és nullák, ha az intenzívek egyenlők:

$$q(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = q(T(\mathbf{e}, \mathbf{v}), p(\mathbf{e}, \mathbf{v}), T_k, p_k) \quad \text{és} \quad q(T_k, p_k, T_k, P_k) = 0, \quad (1.27)$$

$$f(\mathbf{e}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k) = f(T(\mathbf{e}, \mathbf{v}), p(\mathbf{e}, \mathbf{v}), T_k, p_k) \quad \text{és} \quad f(T_k, p_k, T_k, P_k) = 0. \quad (1.28)$$

Vegyük észre, hogy ez a bonyolultnak tűnő állítás szinte minden termodinamika könyvben szerepel, általában a nulladik főtétele részeként megfogalmazva és dinamikai állításokkal keveredve: [24] 36. oldal, [38, 39, 30, 40, 11].

A *mechanikai munkavégzésről* feltesszük, hogy ideális, azaz a következő formába írható:

$$w = -pf \quad (1.29)$$

Mindezek után a fenti (1.25)–(1.26) differenciálegyenlet rendszernek egyensúlyi megoldásait kapjuk a

$$T(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = T_k, \quad p(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = p_k \quad (1.30)$$

egyenletrendszer megoldásaival, amelyet $(\mathbf{e}_e, \mathbf{v}_e)$ módon jelölhetünk. Ha egy adott környezeti hőmérséklethez és nyomáshoz nemcsak egyetlen egyensúly tartozik, akkor beszélhetünk ugyanazon anyag különféle fázisairól.

Ezek után a második főtételehez már csak egyetlen, az előbbiektől független feltétel szükséges. Nevezetesen azt kell biztosítanunk, hogy a termodinamikai rendszer – egyetlen test kapcsolatban a környezetével – entrópiája együttesen növekedjen, figyelembe véve a további kényszereket. Ezek a kényszerek a következők:

1. A termodinamikai test és a környezet részecskeszáma állandó, azaz a test és környezete zárt rendszert alkot és nincs anyagátadás a test és a környezet között:

$$N = \text{áll.} \quad \text{és} \quad N_k = \text{áll.} \quad (1.31)$$

2. A termodinamikai rendszer össztérfogata állandó: $V + V_k = V_0 = \text{áll.}$ Ebből a fajlagos mennyiségekre az következik, hogy

$$N\dot{v} + N_k\dot{v}_k = 0. \quad (1.32)$$

3. A termodinamikai rendszer összes belső energiája állandó: $E + E_k = E_0 = \text{áll.}$, és nincs más energiafajta. Ekkor

$$N\dot{e} + N_k\dot{e}_k = 0. \quad (1.33)$$

Ezek után a termodinamikai test és a környezet entrópiájának időegységre eső változása – az entrópiatermelés, vagy entrópiatermelés (entropy rate) – a következő módon írható:

$$\begin{aligned} (S + S_k)^\bullet &= \frac{d}{dt}(S + S_k) = \frac{d}{dt}(N\mathfrak{s}(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + N_k\mathfrak{s}_k(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}_k)) = \\ &= N \left(\frac{1}{T}\dot{e} + \frac{p}{T}\dot{v} - \frac{1}{T_k}\dot{e} - \frac{p_k}{T_k}\dot{v} \right) = N \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) (q - pf) + N \left(\frac{p}{T} - \frac{p_k}{T_k} \right) f = \\ &= \frac{N}{T_k} \left((T_k - T) \frac{q}{T} + (p - p_k) f \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.3. Közönséges termodinamika - homogén gázok és folyadékok I.

Itt egyrészt felhasználtuk először az (1.31)–(1.33) megmaradási kényszereket, majd a test és a környezet entrópiáinak (1.11) és (1.22) definícióit, végül pedig a (1.25)–(1.26) dinamikai törvényt. (1.34) a teljes entrópia (1.25)–(1.26) differenciálegyenlet-rendszer szerinti deriváltja, amelyre a \dot{s} speciális jelölést alkalmaztuk. Ha az entrópia növekszik a fenti dinamikai törvénnyel leírható folyamatok esetén, akkor igaz a következő, úgynevezett *disszipációs egyenlőtlenség*:

$$(T_k - T) \frac{q}{T} + (p - p_k) f \geq 0. \quad (1.35)$$

Ezt az egyenlőtlenséget a q és az f kölcsönhatási függvényekre vonatkozó megszorítás-ként érdemes felfogni. Egyenlőség csak egyensúlyban állhat fenn benne. Fizikai értelemben világos és kézenfekvő. Például $f \equiv 0$ esetén a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy a hőáram iránya ellentétes a test és a környezet hőmérsékletének különbségével, ezért (1.35) a második főtétel Clausius-féle megfogalmazásának egy pontos alakja [21]. Másrészt, ha $q \equiv 0$, akkor az adódik, hogy a térfogatváltozás a nyomáskülönbség irányába változik. Azaz, ha a test nyomása nagyobb, mint a környezeté, akkor a térfogata nő, illetve ha kisebb, akkor a térfogata csökken, mivel állandó a részecskeszám.

A fenti feltételrendszert – az entrópia konkávitását, az egyensúlyra vonatkozó (1.27) előírást és a növekedés (1.35) követelményét – egységes keretbe foglalja a termodinamika második főtételének következő megfogalmazása:

1.1. Tétel (2. főtétel). *Az (1.25)–(1.26) differenciálegyenlet (1.30) egyenletrendszerrel definiált egyensúlyi megoldása aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. *Belátjuk, hogy $L(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (S(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + \hat{S}_k(\mathbf{e}, \mathbf{v}))/N$ Ljapunov-függvénye az egyensúlynak. Itt $\hat{S}_k(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = S_k((U_0 - \mathbf{e}N)/N_k, (V_0 - \mathbf{v}N)/N_k)$, azaz a környezet entrópiája a test entrópiájával kifejezve a megmaradási kényszerek segítségével.*

Egyrészt igaz, hogy L deriváltja nulla az egyensúlyban, másrészt pedig a második deriváltja megegyezik a test entrópiájának második deriváltjával, ami konkáv a termodinamikai stabilitás követelményének értelmében. Azaz L -nek szigorú maximuma van a termodinamikai egyensúlyban.

Másrészt L -nek az (1.25)–(1.26) differenciálegyenlet szerinti deriváltjának szigorú minimuma van, az (1.35) disszipációs egyenlőtlenség szerint.

Azaz, a termodinamika entrópiára vonatkozó szokásos feltételezései:

- az entrópia, mint termodinamikai potenciál létezése,
- a termodinamikai stabilitás, azaz az entrópia konkávitása,
- a kölcsönhatásokra előírt tulajdonságok, amelyek az entrópia növekedését biztosítják,
- a környezet entrópiájának értelmezése a megmaradási kényszerekkel

együttesen a környezettel történő egyensúly aszimptotikus stabilitását, azaz stabilitását és vonzását biztosító feltételrendszert eredményeznek. Mindez azt mutatja, hogy a homogén testek termodinamikája valóban dinamika, értelmesen tárgyalható egy fejlődési egyenlet(-rendszer), egy dinamikai törvény segítségével.

A fenti dinamikai törvény – a mechanikai részre vonatkozó elsőrendű differenciálegyenlettel – pontos értelmezését adja az *egyensúlyi, avagy kvázisztatikus folyamat*

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

paradox fogalmának is. Hiszen a test folyamatait kontrollálni tudjuk a környezettel: bármely folyamat során a környezet hőmérsékletét és nyomását a test adott pillanatbeli hőmérsékletével és nyomásával egyenlővé téve a test egyensúlyba kerül, azaz megszűnik az energia- és térfogatváltozás, a folyamat megáll. A folyamat ilyenkor termodinamikai egyensúlyok sorozatán keresztül halad⁴.

Tanulságos kiszámolni a termodinamikai test (nem a teljes rendszer) entrópiatermelését, azaz differenciálegyenlet szerinti deriváltját:

$$\dot{s} = Ds \cdot (q - pf, f) = \frac{1}{T}(q - pf) + \frac{p}{T}f = \frac{q}{T}. \quad (1.36)$$

Ez pedig analóg a 'reverzibilisnek' nevezett folyamatok esetén megkövetelt, szokásosan $dS = \delta Q/T$ alakban írt összefüggéssel. Vegyük észre, hogy ezzel egyúttal érthetővé tettük a fentebb említett, az első főtétel és a Gibbs-reláció összekötését megnehezítő paradoxont. Most már világos egyenlőséget írhatunk elő:

$$\dot{e} = q + w = T\dot{s} - p\dot{v}. \quad (1.37)$$

A megváltozások időbeli megváltozásokat jelentenek, igaz, az entrópia esetén nem tetszőlegesen, hanem a fenti (1.25)–(1.26) differenciálegyenlet mentén értve! Az entrópia ilyen változása folyamatfüggő.

Egy dinamikai elmélet számos szempontból ad többet egy sztatikainál. Csak az itt tárgyalt legegyszerűbb termodinamikai testnél maradván: vizsgálható és értelmezhető olyan termodinamikai test, amelynek nincs entrópiája, de a második főtétel mégsem sérül, az egyensúly aszimptotikusan stabil marad. Vizsgálható, illetve egyáltalán felmerül a munka és a disszipációs egyenlőtlenség általánosításának lehetősége és a fázisok és fázishatárok is új fényben tűnnek fel a rájuk vonatkozó stabilitási kérdésekkel együtt. Termodinamikai testek rendszere is könnyen tárgyalható, különféle érdekes következményekkel. Praktikusan talán a legfontosabb, hogy termodinamikai folyamatokat optimalizálhatunk, a legjobb külső nyomás vagy hőmérséklet időfüggő vezérlést megkeresve standard matematikai módszerekkel.

A továbbiakban egyetlen speciális szempontra szorítkozom, amely talán a legelősebben mutatja a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikájának, a közönséges termodinamikának, egyrészt az erejét, ugyanakkor a korlátait is: a termodinamikai test folyamatainak tehetetlenségével és a belső energia jelentésével.

1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.

A közönséges termodinamika (1.26) differenciálegyenlete mechanikai viselkedésre vonatkozik. Ebből a szempontból már első pillantásra látszik, hogy nem kielégítő. Egyfajta 'arisztotelészi', sűrűlódásvezérelt dinamikát jelent, mert hőtranszport nélkül az egyensúlyi fajtérfogatot monoton közelíti a termodinamikai test fajtérfogata. Mechanikai rendszerekben viszont a folyamatoknak tehetetlensége van, fenti rendszerünk

⁴Másrészt reverzibilis is abban az értelemben, hogy a környezeten keresztül tudjuk szabályozni az irányát. Ugyanakkor adott kezdeti feltételek mellett visszafordíthatatlanul tart az egyensúlyhoz: ezt bizonyítja a fenti 1.1 tétel. A mechanikából eredő 'időtükroztetéses' reverzibilitásfogalom láthatóan különbözik ettől.

1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.

pedig mechanikai rendszer is. Ennek bevezetéséhez a fenti megfontolásokat általánosítanunk kell.

A termosztatika előzőekben vázolt alapösszefüggései, az állapotfüggvények formája érvényes marad itt is: a fajlagos entrópia az e fajlagos belső energia és a v fajtérfogat függvénye. A termosztatikai összefüggéseket összefoglaló Gibbs-reláció változatlanul (1.12) marad, azaz az entrópiafüggvénye definíciója továbbra is az (1.11).

A dinamikai törvény mechanikai részére viszont másodrendű egyenletet vezetünk be, az energiára vonatkozó egyenlet formálisan nem változik:

$$\dot{e} = \tilde{q} - \tilde{p}\dot{v}, \quad (1.38)$$

$$\gamma\dot{v} = \tilde{p} - p_k. \quad (1.39)$$

Itt γ állandó paraméter, a \tilde{q}, \tilde{p} jelölések jelentéséhez pedig a következőket vegyük figyelembe. A kiterjesztett közönséges termodinamika fenti dinamikai törvénye több vonásában is különbözik az előző (1.25)–(1.26) egyenletrendszerétől. A legfontosabb különbség, hogy az állapottér, a differenciálegyenlet megoldásához szükséges változók száma, megnőtt. A fajtérfogatváltozás sebessége, \dot{v} , is állapothatározóvá lép elő, kezdeti feltételként szükséges az egyenletrendszer megoldásához. Az egyensúlyban mérhető állapothatározók tere kiterjedt egy nemegyensúlyi – egyensúlyban nulla értékű – változóval.

Ennek megfelelően az állapotfüggvények és kölcsönhatási függvények is általában a teljes, kiterjesztett, (e, v, \dot{v}) , állapot függvényei. Az itt szereplő \tilde{q} fajlagos hőteljesítmény illetve \tilde{p} nyomás nem azonos az (1.25)-ben szereplő q -val, illetve az (1.11)-ben szereplő p sztatikai nyomással. Ezek a függvények már a kiterjesztett állapottér új változójától, a \dot{v} térfogatváltozási sebességtől is függhetnek. Ez a lehető legegyszerűbb kiterjesztése a közönséges termodinamikának, az első főtétel és a Newton-egyenlet közvetlen, a fogalmi szerkezetet (erő, munka) teljesen megőrző általánosítása. A környezettel történő kölcsönhatás esetén állandó tömegű termodinamikai test esetén az osztérfogat és az összenergia megmarad, ezért fajlagosan is:

$$\begin{aligned} v + v_k &= v_0 = \text{áll.}, \\ e + e_k + \frac{\gamma}{2}\dot{v}^2 &= e_0 = \text{áll.} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Itt v_k a környezetre jellemző fajtérfogat, v_0 pedig az állandó összfajtérfogat, illetve e_k a környezetre jellemző fajlagos belső energia és e_0 pedig az állandó teljes fajlagos energia, figyelembe véve a mozgási energiát is.

Ebben az esetben a test és a környezet összes entrópiája

$$s_T(e, v, \dot{v}) = s(e, v) - \frac{1}{T_k} \left(e + \frac{\gamma}{2}\dot{v}^2 \right) + \frac{p_k}{T_k} v + \text{állandó}. \quad (1.41)$$

Ennek a függvénynek az első deriváltja egyensúlyban nulla, a második pedig negatív definit, ha $\gamma > 0$, mert s konkáv. Az (1.38)–(1.39) differenciálegyenlet-rendszer szerinti

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

deriváltja adja a disszipációs egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_T &= \frac{1}{T}\dot{e} + \frac{p}{T}\dot{v} - \frac{1}{T_k}\dot{e} - \frac{p_k}{T_k}\dot{v} - \frac{\dot{v}}{T_k}\gamma\ddot{v} = \\
 &= \frac{1}{T}(q - \tilde{p}\dot{v}) + \frac{p}{T}\dot{v} - \frac{1}{T_k}(q - \tilde{p}\dot{v}) - \frac{p_k}{T_k}\dot{v} - \frac{\dot{v}}{T_k}(\tilde{p} - p_k) = \\
 &= q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) - \frac{1}{T}(\tilde{p} - p)\dot{v} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Ha az egyenlőtlenség fennáll, akkor a kiterjesztett termodinamikai test egyensúlya aszimptotikusan stabil. A fenti entrópiatermelés erre a rendszerre vonatkozóan mutatja, hogy a differenciálegyenletben szereplő teljes \tilde{p} nyomás és az entrópia deriváltjaként kapható sztatikus p nyomás különbsége, a *viszkózus nyomás*, csillapítja a térfogatváltozás sebességét. Ezzel egyszerű példát adhatunk az állapotter kiterjesztése miatt fellépő állapotfüggvényre:

$$\tilde{p}(e, v, \dot{v}) = p(e, v) - \eta\dot{v}. \tag{1.43}$$

Ez az egyenlet a kontinuumelmélet Navier–Stokes-egyenletébeben szereplő Newton-féle nyomástenzor közönséges termodinamikai változata. η a csillapítási együttható, kontinuumoknál ez felel meg a viszkozitásnak. Ez az entrópiatermelés teljesen analóg a hidrodinamikában fellépő (2.108) entrópiatermelés-sűrűséggel.

1.4.1. Példa: folyamatok Van der Waals-gázzal

Tekintsünk egy konkrét, ismert termodinamikai testet, a Van der Waals gázt. Ennek kiterjesztett közönséges termodinamikai tárgyalása jól szemlélteti a kvázisztatikus folyamatok szerepét és jellegét. A jól ismert redukált Van der Waals-gáz kalorikus és termikus állapotfüggvényei, az összes fizikai mennyiséget a kritikus állapot értékeivel dimenziótlanítva a következők:

$$T = e + \frac{3}{v}, \quad p = \frac{8T}{3v-1} - \frac{3}{v^2}. \tag{1.44}$$

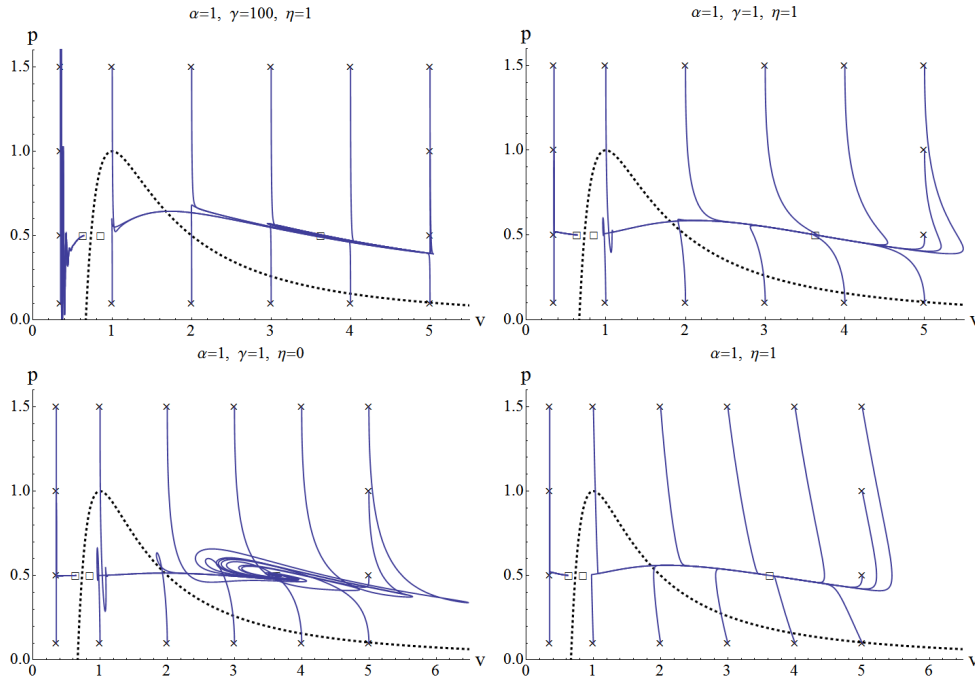
Vezessük be továbbá az (1.43) kiterjesztett állapotegyenletet is, az η csillapítással. A (1.38)–(1.39) fejlődési egyenletben pedig tekintsünk Newton-féle hőátadást,

$$q = -\alpha(T - T_k). \tag{1.45}$$

állandó α hőátadási tényezővel. A redukált külső hőmérséklet és nyomás számszerűsítve legyenek $T_k = 0.9$ és $p_k = 0.5$. Három egyensúlyi pontot kapunk az (e, v) -térben, az egyensúlyi redukált fajtérfogatok értéke: $v_e = \{0.641, 0.859, 3.634\}$.

Az 1.2 ábrán a szaggatott vonal a spinodális, amely alatt a termodinamikai stabilitás egyenlőtlensége sérül. A három egyensúlyi pont egyike a folyadékfázisban, a másik gázfázisban, a harmadik pedig az instabil tartományban található. Az ábrán a fenti fejlődési egyenlet keresszettel jelzett kezdeti értékekkel indított megoldásait ábrázoltuk a nyomás-fajtérfogat síkon különböző γ tehetetlenségi paraméter és η csillapítás esetén. Megfigyelhető, hogy a termodinamikailag nem megengedett tartományban levő egyensúlyi pont instabil dinamikailag is, míg a másik két egyensúlyi pont vonzó. Ez következik az egyensúlyi bebizonyított aszimptotikus stabilitásából. A bal felső ábrán

1.4. Kiterjesztett közönséges termodinamika – homogén gázok és folyadékok II.



1.2. ábra. Egy Van der Waals-gáz folyamatai különböző kezdeti feltételekkel, normálkoordinátákban. A különböző kezdeti értékekkel indított folyamatok a $T_k = 0.9$ környezeti hőmérséklet, illetve a $p_k = 0.5$ környezeti nyomás által meghatározott egyensúlyokhoz tartanak.

nagy a tehetetlenség és a csillapítás, $\alpha = 1, \gamma = 100, \eta = 1$. Látható, hogy megoldások gyakorlatilag állandó fajtérfogaton egy lassú sokaságra relaxálnak és utána annak mentén tartanak az egyensúlyhoz. Figyeljük meg a nyomásingadozást a folyadékfázisban. A jobb felső részen látható megoldásokban a tehetetlenségi paraméter kisebb, $\gamma = 1$, a lassú sokaságra kevésbé izochor módon relaxál a rendszer. A bal alsó ábrán pedig a csillapítást lecsökkentve erős térfogati és hőmérsékleti rezgéseket figyelhetünk meg a gőzfázisban levő egyensúlyi pont körül.

Végül pedig a jobb alsó részen a fajtérfogatban elsőrendű differenciálegyenletet tartalmazó, azaz közönséges termodinamikai (1.25)-(1.26) egyenletrendszer megoldásait láthatjuk a kölcsönhatási függvények előbbihez hasonló választásával ($\eta = \delta = 1$):

$$q = \alpha(T - T_k), \quad w = -pf, \quad f = (p - p_k)/\delta. \quad (1.46)$$

Az (1.25)-(1.26) differenciálegyenlet rendszernek fold bifurkációja van a kritikus pontban, ennek megfelelően különféle egyszerű kényszerekkel hiszterézis és vasvilla bifurkációt is megfigyelhetünk.

1.4.2. Teljes és belső energia

Tanulságos az előző fizikai rendszer egyenleteit a e belső energia helyett az előzőekben bevezetett $e_t = e + \frac{\gamma}{2}\dot{v}^2$ teljes fajlagos energia segítségével is röviden megfogalmazni. A fajlagos entrópia ekkor nemcsak az energia és a fajtérfogat, hanem a fajtérfog-

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

gat időderiváltjának is függvénye. Azaz a termosztatikai összefüggéseket összefoglaló Gibbs-reláció a következő:

$$de_t = Tds - pdv + \gamma \dot{v} dv. \quad (1.47)$$

Ezzel egyenértékűen írhatjuk, hogy

$$s(e_t, v, \dot{v}), \quad \frac{\partial s}{\partial e_t} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \dot{v}} = -\frac{\gamma \dot{v}}{T}. \quad (1.48)$$

A dinamikai egyenletek közül (1.39) változatlan marad, az első főtétel pedig a következőképpen módosul:

$$\dot{e}_t = \tilde{q} - p_k \dot{v}. \quad (1.49)$$

Azaz a külső nyomás teljesítménye növeli a teljes energiát. A megmaradó mennyiségek:

$$\begin{aligned} v + v_k &= v_0 = \text{áll.} \\ e_t + e_k &= e_0 = \text{áll.} \end{aligned} \quad (1.50)$$

A teljes fajlagos entrópia

$$s_t(e_t, v, \dot{v}) = s(e_t, v, \dot{v}) - \frac{1}{T_k} e_t - \frac{p_k}{T_k} v + \text{állandó}. \quad (1.51)$$

Ennek az (1.49) és (1.39) differenciálegyenletek szerinti deriváltja adja a disszipációs egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \blacksquare s_t &= \frac{1}{T} \dot{e}_t + \frac{p_k}{T} \dot{v} - \frac{\gamma \dot{v}}{T} \ddot{v} - \frac{1}{T_k} \dot{e}_t - \frac{p_k}{T_k} \dot{v} = \\ &= \frac{1}{T} (q - p_k \dot{v}) + \frac{p}{T} \dot{v} - \frac{\dot{v}}{T} (\tilde{p} - p_k) - \frac{1}{T_k} (q - p_k \dot{v}) - \frac{p_k}{T_k} \dot{v} = \\ &= q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) - \frac{1}{T} (\tilde{p} - p) \dot{v} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Nem meglepő módon ugyanazt kapjuk, mint előbb. Ismét kiírjuk a belső és a teljes energia viszonyát:

$$e_t = e + \frac{\gamma}{2} \dot{v}^2. \quad (1.53)$$

A teljes energia és belső energia fenti értelmezése megmutatja, hogy a térfogatváltozási sebességet tartalmazhatja a Gibbs-reláció a többi mennyiség megfelelő értelmezése esetén. Látható, hogy itt nem a kiterjedt termodinamikai test tömegközépponti energiáját vesszük figyelembe. Ha a rendszer nem túlszillapított, akkor a fenti értelemben vett tehetetlensége többféle mechanizmussal is felléphet. Ez a legegyszerűbb memóriahatás: a folyamatokat nem tudjuk többé a külső-belső nyomás és hőmérséklet kiegyenlítésével pillanatszerűen leállítani.

Ez a kérdés, tehát, hogy a sebességek termodinamikailag tárgyalandóak és tárgyalhatóak, a legfontosabb eleme annak, hogy a mechanika termodinamikai beágyazottságát értsük. Látni fogjuk, hogy ez kulcsfontosságú a kontinuumok mechanikájában,

kapcsolatos az objektivitás kérdésével és a relativisztikus termodinamika nehézségei is részben erre vezethetők vissza [41]. A fenti vonatkozásban, nemrelativisztikus rendszerekre Horváth tárgyalta [42].

Természetesen másféle differenciálegyenletek is lehetségesek gázok és folyadékok közönséges termodinamikájában a fajtérfogatra vonatkozó fejlődési egyenletként. Különösen reológiai tapasztalatok alapján kézenfekvő, hogy magasabbrendű időderiváltak is fellelnek. Nyilvánvalóak a közönséges termodinamikanak, mint modellcsaládnak a további korlátai is. A homogén rendszerek irreverzibilitásai származhatnak inhomogenitásokból, és így az egyszerű disszipatív folyamatok – hőtranszport, súrlódás, viszkozitás – közönséges termodinamikai leírása nem éri el egy kontinuumelméleten alapuló leírás modellezési részletességét. A második, kiterjesztett modellünk láthatóan részletesebb, mint az első, de az például, hogy a térfogatváltozás tehetetlenségét egyetlen γ paraméterrel írjuk le biztosan nem igaz, ha ez a γ tömeg túlnyomórészt a gáz mozgásának effektív tehetetlenségét jelenti. A termodinamikai rendszerünk alrendszerre bontása pontosíthatja a modellt. Azonban mielőtt a kontinuumok tárgyalására térnénk át, vizsgáljuk meg a térbeli homogenitás modellfeltételének egy tanulságos gyengítését, a rugalmas szilárd testek mechanikájához tartozó termodinamikát is, ahol a térfogat már nem megfelelő állapothatározó.

1.5. Rugalmas anyag

Termosztatika

Míg a gázok és folyadékok kontinuumelméletének kiindulópontja a megfelelő termosztatikai Gibbs-reláció a lokális egyensúly hipotézisének megfelelően, addig a rugalmas anyagok kontinuummechanikája általában nem alapoz a homogén termodinamikai megfontolásokra. A rugalmas anyagok termosztatikája legfeljebb termodinamikai tankönyvek végén, egyfajta egzotikumként fordul elő, ahol tárgyalásakor az (1.12) Gibbs-relációban a fajlagos térfogatváltozást egyszerűen a deformációval helyettesítik [24, 43, 44, 45]. A kontinuummechanikai könyvek viszont egyáltalán nem foglalkoznak homogén testekkel [46, 47, 48]. Ennek legfontosabb oka, hogy a rugalmas testek mechanikájában a homogenitás csak kivételesen teljesül, a kinematikai alapmennyiség, a deformáció, csak lokálisan definiált. A mechanika Truesdell, Coleman, Noll és munkatársaik által alapított racionális irányzata a kontinuumelmélet megalapozásakor figyelmen kívül hagyja a termosztatikában felhalmozott ismereteket, és általában is rendkívül szkeptikus a homogén testek termodinamikájával kapcsolatban, csak kontinuumokkal foglalkozik [43]. A rugalmas testek kontinuumelmélete ugyanis a nagy (véges) deformációs kinematikára épül és annak termodinamikai elmélete túlmutat ennek a dolgozatnak a keretein, illetve szigorúan véve és objektív módon még nem létezik. A véges deformációs kinematika fő problémája, hogy a rugalmas test energiaváltozásait jellemző lokális hosszváltozások keverednek a lokális forgásokkal. Mivel a belső hosszváltozások által meghatározott Riemann-metrika – aminek segítségével az alakváltozás értelmezhető [49, 50] – lokálisan választja le az alakváltozásokat a forgásoktól, ezért az extenzivitás csak speciális egydimenziós deformációk esetén lesz érvényes.

A következőkben látni fogjuk, hogy ennek ellenére a deformálható testek mechanikájában termosztatikai összefüggések könnyen felírhatóak és értelmezhetőek, legalábbis

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

kis deformációk esetén. Ekkor az előző fejezetben vázolt termodinamikai potenciálok a fajlagos mennyiségekre a szokásos módon érvényesek maradnak, viszont ügyelnünk kell az extenzivitási tulajdonságra, illetve óvatosan kell bánnunk a belső energia fogalmával. Speciális esetekben (nyújtás, egyszerű nyírás) természetesen lehet homogén a deformáció és ezek az egyszerű esetek a mérnöki gyakorlatban nagyon fontos szerepet játszanak. Azonban a gázok és folyadékok esetén megszokott többi feltétel és fogalom, mint például környezeti állapothatározók, értelmezése odafigyelést kíván. Mindezek ellenére a helyes termosztatikai összefüggések a kontinuumelméletekben is hasznosak, sőt, mit ahogy azt a következő fejezetekben megmutatjuk, a klasszikus elméletek általánosításait is megalapozhatják [51].

Ahogy már említettük, a deformáció nem extenzív és nem is fajlagos mennyiség. Itt nem foglalkozunk a pontos megalapozásával, és a lényegében problémamentes kis deformáció fogalmát használjuk, ε^{ij} jelölést használva rá. A fajlagos entrópia definíciós formuláit általában következőképpen írhatjuk:

$$s = s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}), \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \varepsilon^{ij}} = -\mathbf{v} \frac{\sigma^{ij}}{T}. \quad (1.54)$$

Itt σ^{ij} a sztatikus feszültség, \mathbf{v} pedig a fajtérfogat. Az indexes jelölésmóddal az Einstein-konvenciót követjük, azonos indexek összegzést jelölnek. A Gibbs-reláció ennek megfelelően a következő

$$d\mathbf{e} = T ds + \mathbf{v} \sigma^{ij} d\varepsilon^{ij}. \quad (1.55)$$

Az extenzivitási reláció

$$\mathbf{e} = T s + \mathbf{v} \sigma^{ij} \varepsilon^{ij} + \mu \quad (1.56)$$

formában írható, ahol μ a kémiai potenciál. Ezzel a formulával lényegében a kémiai potenciált értelmezzük. A továbbiakban szükségünk lesz a sűrűségekre felírt termodinamikai összefüggésekre is. A rugalmas termodinamikai test sűrűségekre vonatkozó Gibbs-relációja és extenzivitási relációja:

$$d\rho_e = T d\rho_s + \sigma^{ij} d\varepsilon^{ij} + \left(\mu + \frac{\sigma^{ij} \varepsilon^{ij}}{\rho} \right) d\rho, \quad (1.57)$$

$$\rho_e = T \rho_s + \sigma^{ij} \varepsilon^{ij} + \mu \rho. \quad (1.58)$$

Itt $\rho = 1/\mathbf{v}$ a sűrűség. Ezeket az összefüggéseket könnyen beláthatjuk (1.55) és (1.56) alapján, (1.55) és (1.56) pedig a kis deformáció értelmezése és a gáz-folyadék termodinamikával történő kompatibilitás alapján következik. Fontos, hogy a kis deformációs esetben is számolni kell a sűrűségváltozással, és emiatt a pontos összefüggésekben fellép a kémiai potenciál is. A teljes testre jellemző mennyiségekre vonatkozó termodinamikai formulákat kiszámolva láthatjuk, hogy az extenzivitási követelményt úgy lehet biztosítani, hogy a deformációt beszorozzuk a test M tömegével és ekkor $M\varepsilon^{ij}$ lesz a rugalmas test mechanikai kölcsönhatását jellemző extenzív állapothatározó. Megjegyezzük, hogy a kontinuummechanika szakirodalma a kémia potenciál explicit bevezetését elkerüli, és az $f = \sigma^{ij} \varepsilon^{ij} + \mu \rho$ Helmholtz-féle szabadenergia-sűrűséget használja helyette, ha kell [51].

Figyeljük meg, hogy a felületi hatásokat leíró mechanikai feszültség és deformáció beilleszthetőek a térfogati viszonyokat leíró extenzivitási tulajdonságok közé. Ehhez hasonló ötleten alapul Verlinde sötét anyag elmélete is, amely az anyagi sokaságokon alapuló modern mechanikai kontinuumelmélet alapművét, Eshelby klasszikus munkáját tekinti mintának [52, 53].

Megjegyezzük továbbá, hogy a kontinuummechanikában található termodinamikai megfontolások többnyire nem az entrópiára, hanem a Helmholtz-féle szabadenergia-sűrűsége felírt termodinamikai relációkat használják (lásd pl. [54, 48]). Ha csak mechanikai állapotváltozásokat és adiabatikus vagy izotermikus folyamatokat vizsgálunk, akkor ez valóban egyszerűsít bizonyos számításokat és formulákat. Altalában, a deformációval együtt az azt kísérő energia- és hőmérsékletváltozások teljes tárgyalásakor, célszerűbb az entrópia használata.

1.5.1. Termodinamika

A dinamikai törvényt, tehát az energiamérleget és a mechanikai változóra vonatkozó mozgásegyenletet a kiterjesztett közönséges gáz-folyadék rendszer (1.38)-(1.39) egyenletrendszerének analógiájára kaphatjuk, ha figyelembe vesszük az előző fejezet mechanikai munkára vonatkozó összefüggéseit:

$$\dot{e} = q + \frac{\tilde{\sigma}^{ij}}{\rho} \dot{\varepsilon}^{ij}, \quad (1.59)$$

$$\rho_A \dot{\varepsilon}^{ij} = \frac{\sigma_k^{ij}}{\rho_k} - \frac{\tilde{\sigma}^{ij}}{\rho}. \quad (1.60)$$

Itt ρ_A -t állandónak tekintjük és alaktehetetlenségnek nevezzük (dimenziója m^2), ρ_k a környezeti sűrűség. Vegyük észre, hogy az előző fejezet kiterjesztett közönséges gáz-folyadék rendszeréhez hasonlóan megkülönböztettük a σ_k^{ij} 'külső feszültséget' az impulzus és munka definíciójában szereplő $\tilde{\sigma}^{ij}$ feszültségtől és a σ^{ij} sztatikus feszültségtől.

A II. főtétel, azaz a stabilitási tulajdonságok tárgyalásához tekintsünk környezetével termikus és mechanikai kapcsolatban álló termodinamikai rendszert. Ekkor az energiamegmaradás törvényében a test e illetve a környezet e_k fajlagos belső energiája mellé a rendszer mozgási energiáját is hozzávesszük. Tehát

$$e + e_k + \frac{\rho_A}{2} \dot{\varepsilon}^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} = e_0 = \text{áll.} \quad (1.61)$$

Bevezetjük továbbá a 'környezet deformációját', azzal a feltételezéssel, hogy

$$\varepsilon^{ij} + \varepsilon_k^{ij} = \varepsilon_0^{ij} = 0. \quad (1.62)$$

A környezet deformációja átveszi a test deformációját, összességében a rendszer alakja állandó, ezért deformációja nulla. Ez egy mesterségesebb feltevés, mint a gáz-folyadék termodinamikai testeknél a térfogat állandósága, nem is mindig értelmezhető. Speciális esetekben, mint például egyirányú nyújtás, viszont jól működik. (1.61)-(1.62) segítségével a termodinamikai követelmények és a második főtétel a gázokkal teljesen analóg módon írhatók és érthetők. A 2.10. fejezetben pedig látni fogjuk, hogy a rugalmas-reológiai kontinuumok esetén pontosan ezek a formulák adják – a nem homogén, csak lokális, nem statikai – de termosztatikai hátteret.

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

A környezeti entrópiát ezek után a következő formában írhatjuk:

$$s_k(\mathbf{e}_k, \varepsilon_k^{ij}) = \frac{\mathbf{e}_k}{T_k} - \frac{\sigma_k^{ij}}{T_k} \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{T_k} \left(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e} - \frac{\rho_A}{2} \dot{\varepsilon}^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} \right) - \frac{\sigma_k^{ij}}{\rho_k T_k} (\varepsilon_0^{ij} - \varepsilon^{ij}). \quad (1.63)$$

Mindezeket figyelembe véve a teljes rendszer entrópiatermelése, az összentrópia fenti (1.59)-(1.60) differenciálegyenletek szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} (\dot{s} + s_k) &= \dot{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) + \dot{s}_k(\mathbf{e}_k, \varepsilon_k^{ij}) = \frac{\dot{\mathbf{e}}}{T} - \frac{\sigma^{ij}}{\rho T} \dot{\varepsilon}^{ij} - \frac{1}{T_k} (\dot{\mathbf{e}} + \rho_A \dot{\varepsilon}^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij}) + \frac{\sigma_k^{ij}}{\rho_k T_k} \dot{\varepsilon}^{ij} = \\ &= \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) q + \frac{1}{T} \dot{\varepsilon}^{ij} (\dot{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ezzel a homogén, kis deformációs közeg közönséges termodinamikájának kulcspontjait megadtam. A (1.59)-(1.60) differenciálegyenlet, együtt az anyag sztatikai tulajdonságait meghatározó entrópiafüggvénnyel, illetve az entrópiatermelés egyenlőtlenségét teljesítő q , σ^{ij} kölcsönhatási függvényekkel egy zárt differenciálegyenlet rendszert eredményez, amelynek egyensúlya (ha létezik) aszimptotikusan stabil.

1.5.2. Lineárisan hőtáguló homogén rugalmas viszkoelasztikus test

Ebben a fejezetben a termorugalmasság példáján keresztül megadunk egy teljes statikus és kölcsönhatási állapotfüggvény-rendszert a hozzá tartozó dinamikai törvénnyel együtt. A kölcsönhatási állapotfüggvények pedig konstruktívan, az entrópiatermelés egyenlőtlenségének lineáris megoldásával kaphatóak meg legkönnyebben.

A termorugalmasság Duhamel–Neumann-törvénye (például [48]) a térfogati hőtágulást a következő deformáció- és hőmérsékletfüggő sztatikus feszültség segítségével vezeti be:

$$\frac{\sigma^{ij}}{\rho} = 2\mu \varepsilon^{ij} + \nu \varepsilon^{kk} \delta^{ij} - \alpha(3\nu + 2\mu)(T - T_0) \delta^{ij}. \quad (1.65)$$

Itt μ és ν a Lamé-állandók, α a lineáris hőtágulási tényező, δ^{ij} a Kronecker delta, T_0 pedig állandó referencia hőmérséklet. Ehhez a sztatikus feszültséghez a következő fajlagos entrópiafüggvény segítségével jutunk:

$$s(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) = \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} + c \ln \left(\frac{\mathbf{e} - \mu \varepsilon^{ij} \varepsilon^{ij} - \frac{\nu}{2} (\varepsilon^{ii})^2 - \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} T_0}{\mathbf{e}_0} \right), \quad (1.66)$$

ahol \mathbf{e}_0 egy állandó fajlagos energia érték, c pedig az izodeformációs fajhő. Valóban, (1.54) szerint a hőmérsékletet ebből könnyen megkaphatjuk:

$$T(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}) = \frac{1}{c} \left(\mathbf{e} - \mu \varepsilon^{ij} \varepsilon^{ij} - \frac{\nu}{2} (\varepsilon^{ii})^2 - \alpha(3\nu + 2\mu) \varepsilon^{ii} T_0 \right), \quad (1.67)$$

illetve az entrópia deformáció szerinti parciális deriváltjából adódik az (1.65) Duhamel–Neumann-törvény. A fenti entrópiafüggvény konkáv, ha a fajhő és a rugalmassági együtthatók pozitívak. Láthatóan a lineáris hőtágulást és rugalmasságot akkor kapjuk, ha a belső energiából levonjuk a deformáció legáltalánosabb másodrendű izotrop skalárértékű függvényét és így képezünk egy belsőbb energiát.

A kölcsönhatást jellemző állapotfüggvényeket, az úgynevezett konstitutív egyenleteket az entrópiaprodukciónak egyenlőtlenségének segítségével kaphatjuk meg a nem-egyensúlyi termodinamika módszertana szerint. Termodinamikai erőket és áramokat azonosítunk, és ezek közötti lineáris függvénykapcsolatok segítségével az egyenlőtlenséget megoldjuk. A legegyszerűbb és a gyakorlatban legfontosabb megoldásokat akkor kaphatjuk, ha a szóban forgó függvényeket differenciálhatónak és Taylor-soruk első tagjaival közelíthetőnek tételezzük fel, hasonlóan a rugalmasságtanhoz. Jelen esetben az entrópiaprodukciónak termikus és mechanikai kölcsönhatásra vonatkozó tagok összege:

$$\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k}\right) q + \frac{1}{T} \dot{\varepsilon}^{ij} (\tilde{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}) = X_T J_T + X_M J_M \geq 0. \quad (1.68)$$

A T hőmérséklet és a σ^{ij} sztatikus feszültség az állapothatározók adott függvényei, mert az entrópia deriváltjai. Ugyancsak az állapothatározók egyike a deformáció idő-deriváltja. A q fajlagos hőáram határozatlan, ugyanúgy a $\tilde{\sigma}^{ij}$ feszültség is. Azaz a fenti egyenlőtlenség ezek alakjára vonatkozóan ad megszorítást, illetve ezeket a függvényeket tudjuk meghatározni a segítségével. Termodinamikai terminológiát használva azt mondhatjuk, hogy erőket és áramokat vezetünk be. Az erő egy, az állapottéren értelmezett adott függvény, az áram pedig határozatlan függvény, amelynek a változóját tulajdonképpen az egyenlőtlenség megoldásával azonosítjuk, célszerű az erő függvényének tekinteni. Jelen esetben a termodinamikai erők és áramok a következők:

	Termikus	Mechanikai	
Erő	$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k}$	$\frac{\dot{\varepsilon}^{ij}}{T}$	(1.69)
Áram	q	$\tilde{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij}$	

Vegyük észre, hogy a mechanikai kölcsönhatáshoz tartozó termodinamikai áram – azaz a statikus és dinamikai feszültség különbsége – mechanikailag erő jellegű. Ez utóbbi megállapítás ugyan szokatlannak tűnik, de világos, ha arra gondolunk, hogy feszültség, illetve a nyomás, az impulzus árama (lásd pl. (2.194)). Az entrópia növekedése izotrop esetben legegyszerűbben a következő konstitutív függvényekkel biztosítható:

$$q = \Lambda \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_k} \right) = -\Lambda_N (T - T_k),$$

$$\tilde{\sigma}^{ij} - \sigma^{ij} = 2\eta T \dot{\varepsilon}^{ij} + \eta_v T \dot{\varepsilon}^{kk} \delta^{ij}. \quad (1.70)$$

Itt $\Lambda_N = \Lambda/(TT_k)$ a Newton-féle hőátadási együtthatót jelenti. Megjegyezzük, hogy alacsony hőmérsékleten jelentősége van annak, hogy a reciproknak hőmérsékletek különbsége, nem pedig a hőmérséklet-különbség a termodinamikai erő. Feltételeztük továbbá, hogy a rugalmas anyag izotrop, η és η_v a nyíró és a térfogati viszkozitást jelöli.

Tehát összességében az (1.59) energiamérlegben és a deformációra vonatkozó (1.60) egyenletben (az impulzusz mérlegben) az (1.68) entrópiaprodukciónak (azaz a disszipációs egyenlőtlenség) segítségével a hőátadásra () és a viszkozitásra vonatkozó (1.70) kölcsönhatási függvényekre jutottunk. A hőtáguló rugalmas anyag (1.65) sztatikus feszültségére és (1.67) hőmérsékletére vonatkozó állapotfüggvényekkel együtt megkaptuk a hőtáguló, ideálisan rugalmas viszkozus termodinamikai test homogén fejlődési

1. Termodinamikai folyamatok homogén testekben – közönséges termodinamika

egyenleteit. A rugalmas-viszkózus testet Kelvin-testnek nevezi a reológia (hőtágulás nélkül). A 2.10. alfejezetben megadom, hogyan kapható meg ettől általánosabb reológiai testek rendszere az itteniekhez hasonló termodinamikai megfontolásokkal, de kontinuumokban.

1.6. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a kontinuumok termodinamikájának előkészítéseként a homogén testek nemegyensúlyi termodinamikáját mutattam be. Differenciálegyenleteket vezettem be a termodinamikai mennyiségek időbeli változásának jellemzésére. Kiderült továbbá, hogy a második főtétele értelmezhető az egyensúly aszimptotikus stabilitására vezető feltételrendszerként. Ennek legfontosabb elemei az entrópia létezése, mint a megfelelő intenzív állapotjelzők potenciálja; az entrópia konkávitása, azaz a termodinamikai stabilitás; és az összentrópia növekedése a differenciálegyenlet megoldásai mentén, azaz az entrópiatermelés nemnegatív volta. Ez utóbbi feltétel lehetővé teszi a dinamikai tulajdonságokra vonatkozó konstitutív függvények meghatározását a nemegyensúlyi termodinamika kontinuumelméletében megszokott módon és eredményeivel teljesen összhangban. Mindezt gázok és folyadékok, illetve rugalmas testek esetén is bemutattam.

2. Kontinuum-termodinamika

"A theory is the more impressive the greater the simplicity of its premises is, the more different kinds of things it relates, and the more extended is its area of applicability. Therefore the deep impression which classical thermodynamics made upon me. It is the only physical theory of universal content concerning which I am convinced that, within the framework of the applicability of its basic concepts, it will never be overthrown."

Albert Einstein

2.1. Bevezetés – történeti megjegyzések

2.1.1. Alapelvek

A homogén testekhez hasonlóan a kontinuumelméletekben is az alapegyenleteknek két fajtáját különböztetjük meg. A továbbiakban *fejlődési egyenleteknek* nevezem az alapvető mezők téridőbeli változását leíró parciális differenciálegyenleteket, akkor is, ha az ismeretlen mezők száma meghaladja az egyenletek számát, azaz ha nem zárt az egyenletrendszer. Ilyen fejlődési egyenletek például az extenzív mennyiségek fundamentális mérlegei. Anyagfüggvényeknek, vagy konstitutív relációknak nevezem a fejlődési egyenletekbe helyettesítendő, azokat megoldható parciális differenciálegyenletrendszerre kiegészítő függvényeket, illetve relációkat. A helyzetet az bonyolítja, hogy a konstitutív relációk maguk is lehetnek idő- és térderiváltakat tartalmazó parciális differenciálegyenletek.

A nemegyensúlyi termodinamika térelméletében is a második főtétel értelmezése és használata az első kulcskérdés. A homogén testek esetében láttuk, hogy annak fizikai tartalma az anyag stabilitása, pontosabban a fejlődési egyenletek egyensúlyának aszimptotikus stabilitása. A kontinuumelméletek esetén ezek alapján minimálisan elvárható, hogy a termosztatikai határesetnek megfelelő homogén egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabil legyen, csak és egyedül termodinamikai feltételek következtében. Általában ennek matematikai vizsgálata nehéz. Szükséges feltétele, hogy a linearizált egyenletekre ugyanez igaz legyen. Ezt a követelményt, azaz a homogén egyensúly lineáris aszimptotikus stabilitását *generikus stabilitásnak* fogjuk hívni a továbbiakban. Az elnevezés a speciális relativisztikus hidrodinamikából származik, ahol a generikus stabilitás a megfelelő alapegyenletek egyik kiválasztási kritériuma [55] (lásd a 3. fejezetet).

A kontinuumelméletek specialitása a második főtétel konstruktív használata. Az entrópiaprodukció egyenlőtlenségét a benne szereplő anyagfüggvények megfelelő formája biztosítja. Ilyen anyagfüggvények például a klasszikus irreverzibilis termodinamika erő-áram konstrukciójával kaphatók. Természetesen ez a második főtétel egy

2. Kontinuum-termodinamika

értelmezését jelenti: nem folyamatokra vonatkozó megszorításként, hanem az anyag tulajdonságaként értendő (Coleman-Mizel-, illetve Muschik-Ehrentraut-értelmezés [56, 57]). A továbbiakban a második főtétel konstruktív használatának lehetőségeit és feltételeit elemezzük, ennek az értelmezésnek a segítségével. A nemegyensúlyi termodinamika fundamentális szinten módszertant ad fejlődési egyenletek és konstitutív relációk konstrukciójára.

A kontinuumok második alapkérdése a második főtétel mellett a téridő beágyazottság, azaz az objektivitás. Ez alatt az értendő, hogy az anyagot jellemző konstitutív függvények, illetve az elméletben szereplő fizikai mennyiségek és az alapegyenletek rendszere független legyen a vonatkoztatási rendszertől. Relativisztikusan kovarianciának hívják ennek a követelménynek egy részét.

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy a fenti két alapelv pontosításával a nemegyensúlyi termodinamika alkalmazhatósága a lokális egyensúlyon túlmenően jelentősen kibővíthető. Egyrészt bemutatom, hogy az objektivitás hagyományos megfogalmazása rossz, és példát adok a javítására. Ezután megmutatom a második főtétel konstruktív alkalmazásának megfelelő módját gyengén nemlokális kontinuumok esetén. Bevezető példaként a Ginzburg-Landau-egyenlet termodinamikai származtatása, illetve a klasszikus irreverzibilis termodinamika szerepel. Ezután a konstrukciós módszer további alkalmazásaként duális belső változók és egykomponensű hővezető folyadékok következnek. Más jellegű tanulságokat jelent a hővezetési egyenlet egy gyengén nemlokális általánosítása, illetve a rugalmasságtan és reológia termodinamikai belső változókra épített tárgyalása.

A fejezetben ismertetett módszer és alkalmazásai saját kutatási eredmények, eredeti megjelenésükre az egyes alfejezetek címében hivatkozok.

2.1.2. Gyökerek és irányzatok: klasszikus, racionális és kiterjesztett

A nemegyensúlyi termodinamika Lars Onsager munkáival kezdődött [58, 59]. Onsager fő érdeme, hogy a statisztikus megfontolásokkal felismerte és bizonyította, hogy a különböző makroszkopikus transzportok között a reciprocitási relációk formájában szoros kapcsolat van. Az elmélet kontinuum része, azaz a mérlegegyenletekből az entrópiaprodukciónak származtatása és a termodinamikai erők és áramok közötti kapcsolat kontinuum tárgyalása Eckart nevéhez köthető [60, 61, 62, 63], aki egyúttal a relativisztikus disszipatív folyadékok elméletét is megalapozta ezzel a módszerrel (erről bővebben az 5. fejezetben). A lokális egyensúly hipotézisének alapuló *klasszikus irreverzibilis termodinamikát* ezután Prigogine és de Groot könyvei foglalták össze először, és de Groot és Mazur monográfiája adja máig egyik legjobb áttekintését [64, 65, 5].¹

Ezzel párhuzamosan Clifford Truesdell elkezdte a klasszikus kontinuummechanika megújítását *racionális mechanika* néven. A jelző arra utal, hogy Truesdell és követői

¹Nem Onsager, nem Meixner és nem Prigogine, hanem Eckart a nemegyensúlyi termodinamika megalapozója. Onsager egy fontos *statisztikus fizikai* megfigyeléssel adott magyarázatot a *homogén* rendszerek közötti együtthatókra [58, 59]. A kontinuum vezetési együtthatók közötti viszonyokra Meixner és Prigogine alkalmazta Onsager elméletét (mellesleg nem igazán meggyőzően, az Onsageri reciprocitási relációk származtatása nemegyensúlyi viszonyok között a kinetikus elméletből ma is vizsgált terület, lásd pl. Sharipov munkáit [66, 67, 68, 69, 70]). Eckart nem maradt ezen a területen, valószínűleg ezért nem kapta meg a megérdemelt elismerést [71]. A tekintélyes pályatársak félrevezető (szándékosan kisebbitő?) megjegyzései biztosan sem segítették ezt elő [72].

számára a mechanika a matematika része, módszertanuk, vizsgálati módszereik ennek megfelelőek. A cél az elmélet egyszerűsítése, homályos fogalmaktól történő megtisztítása, és az akkoriban fontossá váló új reológiai jelenségek beillesztése az alapelvek pontosabb megfogalmazásával és megértésével. Ennek megfelelően a racionális irányzat a második főtételt, illetve az objektivitást több szempontból is kimerítően vizsgálta. Truesdell 1956-ban megalapítja az Archive for Rational Mechanics and Analysis címmel az irányzat vezető folyóiratát és 1965-re, több, mint 10 évi munka után megjelenik Walter Noll-al közösen írt könyvük, a kontinuummechanika nagy hatású alapműve "Non-linear Field Theories of Mechanics" címmel [73]. Ebben a könyvben a második főtétel, illetve a termodinamikai megfontolások a mechanikai konstitutív elmélet kihagyhatatlan részét képezik.

A termodinamika, és különösen a nemegyensúlyi termodinamika többszintű kihívást jelent mindenki számára, aki egységes alapelveket szeretne látni a fizikában. Ennek egyik oldalát jelentik a mechanika ismételt kísérletei arra, hogy a disszipáció eredetét megmagyarázza abból az alapfeltevésből, hogy a fizika törvényei mikroszkopikus szinten nem disszipatívok (lásd például [74, 75, 76]). A másik, ehhez kapcsolódó kérdéskör, hogy a nemegyensúlyi termodinamika disszipatív mozgásegyenleteit (például Fourier hővezetési egyenletét, vagy a Navier–Stokes-egyenletet) lehet-e származtatni variációs elvek segítségével [77]. Az alapproblémát az jelenti, hogy a leginkább bevált Hamilton elv csak a nem disszipatív, reverzibilis esetekre működik és ettől eltérő eredeti ötletek (például a két legérdekesebb [78, 79]) nem terjednek el. A nemegyensúlyi termodinamika feltételeket ad mozgásegyenletek és anyagfüggvények lehetséges formájára és módszert ad a származtatásukra: legyenek a fizika törvényei olyanok, hogy a második főtételnek – az entrópiánövekedés törvényének – megfeleljenek. Ezt a problémát a lokális egyensúly egyszerű eseteiben konstruktívan oldja meg az irreverzibilis termodinamika: az anyagtörvényeket *megkapjuk* az entrópiatermelés egyenlőtlenségének egy megoldásaként. A kérdés az, mennyire általános és általánosítható ez a módszer? A termodinamika második főtétele mennyit segít új fizikai törvények felírásában? A kihívások régóta jelen vannak: a hővezetés Fourier-törvényének számos kiterjesztését, például a Guyer-Krumhansl-egyenletet, nem a nemegyensúlyi termodinamika módszereivel vezették le. A Ginzburg-Landau- és a Cahn-Hilliard-egyenletek a fizika több különböző területén felbukkannak mint általános struktúraképző egyenletek – félig meddig termodinamikai megfontolásokra alapozva. A mechanikába a Cosserat fivérek bevezették a hiperkontinuumokat, világos fizikai jelentésű, belső struktúrális hatásokat leíró változókkal kiegészítve a mechanikát [80]: a mozgásegyenleteit a rugalmasságtan analógiájára alapozzák, Mindlin, illetve Eringen és Suhubi általánosításai további hiperkontinuumok származtatására pedig variációs elvet, illetve sztochasztikus módszereket használnak. Ha a nemegyensúlyi termodinamika a klasszikus kontinuumok általános elmélete, akkor a rendszerébe legalábbis be kell tudni illeszteni ezeket az elméleteket, de méginkább – az egységes elveknek köszönhetően és a második főtétel kényszerítő erejénél fogva – kiterjesztésükre és általánosításukra is módszert kell adjon. Ráadásul, amennyiben a nem disszipatív határesetre is képes az egyenletek származtatására, akkor egységes módszertannal alternatívát jelent a variációs elveknek, világosabb fizikai és elvi háttérrel.

Tehát a nemegyensúlyi termodinamika szerepe legalább kétféle módon érthető és értékelhető a fizika egésze szempontjából, attól függően, hogy mit gondolunk a irreverzibilitás eredetéről. Lehet, hogy az irreverzibilitás az ideális, reverzibilis alaptörvé-

2. Kontinuum-termodinamika

nyek szerint mozgó mikrovilág véletlenszerűségeinek kivételése, ekkor ezeket a vetítési módszereket kell alaposan tanulmányoznunk a reverzibilis alapegyenletek disszipatív kiegészítéséhez. Lehet ugyanakkor, hogy a világ általában tökéletlen, és az ideális, reverzibilis törvények speciális és idealizált határesetet jelentenek. Ekkor érdemes az irreverzibilis törvényeket a lehető legáltalánosabb módon származtatni és így speciálisan megkaphatjuk az ideális határesetet is. Az első nézőpont gyakorlatilag egyeduralkodó a fizikában, a második nézőpont a fizika alapkérdéseivel vagy a termodinamikával többet foglalkozók kis csoportjainál szokott felbukkanni. Természetesen a két nézőpont jól összeegyeztethető.

1960-as évek vége és 70-es évek eleje különösen érdekes a fenti problémakör szempontjából, mert ekkor válik nyilvánvalóvá, hogy az anyagtörvények nemcsak függvények, hanem differenciálegyenletek is lehetnek. Tehát a klasszikus kontinuumfizika általánosítható, és ehhez a termodinamika második főtétele a kulcs. Az első fontos lépést az irreverzibilis termodinamika oldaláról Onsager és Machlup munkái jelentik, ahol a tehetetlenség hatását veszik figyelembe egyszerű esetekben [81, 82]. Másik fontos lépés a racionális oldalról Coleman és Gurtin eredménye a belső változók bevezetéséről [83]. Ezzel párhuzamosan Ingo Müller a kinetikus elmélet szerkezetére alapozva veti fel a termodinamika kiterjesztésének gondolatát [84, 85, 86]. Érvelése egyrészt fizikai: a parabolikus egyenletek végtelen jelterjedési sebessége ellentmond a relativitáselmélet univerzális véges terjedési sebességének. Másrészt Truesdell tanítványaként matematikai: az igazi fizikai törvényeket parabolikus egyenletek helyett hiperbolikus egyenletek írják le.² Mindkét gondolat nagyon fontos szerepet játszik a nemegyensúlyi termodinamika további fejlődésében. Ugyanez az időszak, amikor a racionális termodinamika háborút hirdet a fizikaibb irányzat ellen: megjelenik Truesdell könyve a termodinamikáról [87], vitriolos kritikával az irreverzibilis termodinamika minden nem pontos fogalma és állítása ellen. Például a termodinamikai erők és áramok kiválasztásának módjával kapcsolatban ezt írja:

„What this theorem is, we may have some difficulty in divining, since the terms „interact” and „couple” do not occur in algebra and are never defined by Onsagerists, although they do occur frequently in The Arabian Nights.”

Truesdell kritikája számos szempontból jogos, de ezzel máig hatóan megosztja a nemegyensúlyi termodinamikát. Nem minden homályos elmélet tartalmatlan, ráadásul a homálynak több rétege is lehet. Ez utóbbi szempont ami véleményem szerint általában fontos a termodinamika kapcsán és ami a racionalitás csapdájának bizonyult a „truesdellizmusban”. Ugyanis bizonyos kérdésekben az elemzésük nem elég alapos, de a pontosság illúziója miatt a tévedés rejtett. Látni fogjuk, hogy milyen problémás például az objektivitás definíciójuk, vagy a gyengén nemlokális elméletek elvetése a második főtétele alapján. Ezekben az esetekben a racionális iskola nem volt képes a fizikai alapok újragondolására (lásd például [88, 48], illetve Müller kritikáit [40, 89]). Az irányzat megmerevedésének a matematikai módszerek két oldalról is okai. Egyrészt a túlzott és sok esetben formális matematizálás miatt az alapfeltevéseket megmerevíti és nehezen átgondolhatóvá teszi a formalizmus. Másrészt az elégtelen, nem teljes matematizálás miatt az elméletbe belekövül fizikailag homályos részeket

²Ez a gondolat Hadamard-tól származik. Szerinte a fizika feladatai matematikailag korrekt kitűzésű problémák kell legyenek. Ugyanakkor az egyenletek hiperbolicitása szükséges feltétel a variációs elvek létezéséhez, tehát a fizika többségi alapállásával is összhangban van.

nehéz felismerni.

Ennek megfelelően az 1970-es években Ingo Müller által elindított *kiterjesztett termodinamikának* egyből két iskolája születik. Mindkét irányzat a kinetikus elmélettel való kompatibilitásra épül. A kinetikus elmélettel való kapcsolatot szigorúbban használja, a momentum-sorfejtéses formával feltétlen kompatibilitást keres a *racionális kiterjesztett termodinamika*, míg az irreverzibilis termodinamikából kinövő *kiterjesztett irreverzibilis termodinamika* ebben a tekintetben lazább. A különböző hozzáállást jól tükrözi az objektivitás kérdésének kezelése a két irányzatban. A Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet Noll értelemben nem objektív, ezért a racionális álláspont szerint megengedhető, hogy a kinetikus elmélet maga sem legyen objektív [90, 91]. Ezzel ellentétben a kiterjesztett irreverzibilis termodinamika a Boltzmann-egyenlet objektivitása mellett próbál érvelni [92]. Mindkét kiterjesztett termodinamika a kinetikus elmélet miatt alapfeltevésként használja, hogy

- csak lokális elmélet megengedett,
- a mezők fejlődési egyenletei csak mérleg formájúak lehetnek,
- új mezők csak az előző változók áramai lehetnek.

Ennek megfelelően megmagyarázza az elsődleges motivációul szolgáló hővezetés Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenletének [93, 94, 95] termodinamikai hátterét, de nehézkesen tudja beilleszteni rendszerébe a gyengén nemlokális Guyer-Krumhansl-egyenletet [96, 97, 98, 91].

A nemegyensúlyi termodinamika magyar művelői és képviselői közül Fényes Imre sztatikai variációs elve, a le Chattellier-Braun-elv és a termodinamikai stabilitás kapcsolata illetve a homogén rendszerek nemegyensúlyi termodinamikája kapcsán említendő [6]. Részben ő motiválta a nemegyensúlyi termodinamikai megalapozású reológiai-közvetmechanikai kutatásokat is [99, 100]. Gyarmati István variációs elve és a klasszikus térelmélet kifejtése révén [78], illetve munkatársai ehhez kapcsolódó munkásságával a hazai kutatásokat a nemzetközi élvonalba emelte.³ A termodinamika hullámelmélete pedig a kiterjesztett irreverzibilis termodinamikának adott új alapokat [101]. Gyarmati az általánosított Gibbs-reláció helyett hőáramsűrűségtől függő entrópiafüggvényt javasol. Ez a konzekvensebb megalapozás azóta beépült az elméletkörbe [102].

2.2. Objektivitás

2.2.1. Történet: objektivitás és anyagi objektivitás

A fizika törvényei függetlenek a leírásukra használt vonatkoztatási rendszerektől. Ennek az állításnak az alkalmazására és értelmezésére vonatkozó vizsgálatok alapvetőek a speciális és az általános relativitáselmélet eredeti és mai megfogalmazásában is.

A klasszikus, azaz nemrelativisztikus kontinuumfizikának is ez az egyik alapja. Itt a fenti, filozófikusan általános nézőpont majdnem általánosan elfogadott: kevesen kételkednek komolyan abban, hogy a rugalmas anyag ugyanúgy kell viselkedjen akkor is,

³ A 60-as évek végének tudományos életében zajló, fentebb említett nemzetközi harcaival párhuzamosan Magyarországon is ekkoriban vészett össze a nemegyensúlyi termodinamika két legtekintélyesebb hazai kutatója, Fényes Imre és Gyarmati István.

2. Kontinuum-termodinamika

ha egyenes vonalban egyenletes sebességgel elhaladva figyeljük meg, vagy ha körülötte keringünk. Ennek megfelelően az ilyen irányú vizsgálatok is nagyon régiak. A kontinuumfizika első általános elmélete a mechanikát, reológiát, kémiát, hővezetést együtt tárgyaló elmélet [103], amely már az energia- és entrópiamérleget is tartalmazza, attól a Jaumanntól⁴ származik, aki – nemrelativisztikus kereteken belül – vizsgálta a vonatkoztatásirendszer-függetlenséget is. Az együttforgó objektív időderivált máig az ő nevét viseli. A kérdéskör további történetét 1965-ig bezáróan kimerítően tárgyalja Truesdell és Noll [73], az azt követő történetet pedig Frewer [105]. Az objektivitás Walter Nolltól származó, általánosan elfogadott definíciója szerint objektív egy fizikai mennyiség, ha merev megfigyelők ugyanolyannak látják [106].

A vonatkoztatási rendszertől való függetlenség alapvetően háromféle módon jelentkezik a klasszikus kontinuumfizikában.

1. *Kinematika.* A kontinuummechanika mozgást jellemző alapváltozóinak kiválasztása nem triviális. Például a rugalmasságtanban végtelen számú deformáció-, illetve alakváltozás-fogalmat lehet bevezetni, de ezek közül a Noll-féle transzformációs objektivitás-definíció kitüntet egy szűk családot (a jobb Cauchy-Green deformáció négyzetgyökét szokás ezek közül használni).
2. *Objektivitás.* Felhasználjuk az anyagfüggvények változóinak, illetve általában a megfelelő fizikai mennyiségek kiválasztására. Alapvetően elvárjuk, hogy ezek objektív mennyiségek legyenek például a Noll-féle értelemben. Mivel az anyagfüggvények főleg az alapváltozók deriváltjaitól függhetnek, ezért kiemelten fontos az *objektív időderiváltak* megtalálása. A térderiváltak objektívek általában, és ezért speciálisan a Noll-féle definíció értelmében is, ezért ezekről nem szoktak beszélni külön. Ha az anyagi eredetű fejlődési egyenleteket (pl. Maxwell-Cattaneo-Vernotte) speciális, deriváltakat tartalmazó anyagfüggvényként fogjuk fel, akkor ezeknek az objektivitása is kérdéses.
3. *Anyagi objektivitás.* A fentiekén kívül elvárjuk az anyagfüggvények, illetve konstitutív relációk objektivitását is. Ezt a kérdést a racionális elméletek kiemelten kezelik.

Az első két kérdésben a Noll-féle megfogalmazás és definíció nagyjából elfogadott. A harmadik kérdés, az anyagi objektivitás elve viszont máig vitatott, számos egymásnak ellentmondó megfogalmazása létezik a szakirodalomban [107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 105]. Az evidens szóbeli állítás és a Noll-féle matematikai megfogalmazás közötti ellentmondásokat jól összefoglalja Ryskin cikke [118]. Noll maga is több ízben próbálta pontosítani az elvet, legutóbbi javaslata például implicit módon affin tereket vezet be a téridőbe [119, 120, 121]. Az elv következményei nagyon szer-teágazóak és a megfogalmazás hiányosságai súlyos fizikai állításokat eredményeznek.

⁴Ez nem egészen véletlen. Jaumann Gusztáv (magyar? fizikus) Mach asszisztense volt. Érdekesen tanulságos, hogy 1911-ben Einsteinnel együtt pályázott a Prágai Egyetem professzori székére. Miután kiderült, hogy az egyetem első jelöltje Einstein, Jaumann visszavonta pályázatát a következő indoklással: "If Einstein has been proposed as the first choice because of the belief that he has greater achievements to his credit, then I will have nothing to do with a university that chases after modernity and does not appreciate merit." Végül Einstein sem kapta meg a katedrát [104, 71].

Egyik ilyen fontos kijelentés szerint például a kinetikus elmélet nem objektív [90, 71], ahogy már említettük.

Az objektív fizikai mennyiségek kiválasztására szolgáló Noll-féle definíciónak két szembetűnő hiányossága van:

- Csak merev megfigyelőkre vonatkoztatott invarianciát követel meg. Elvárható, azonban az is hogy az anagyttörvényeknek, például a Hooke-törvénynek, minden megfigyelő számára ugyanaz legyen a fizikai tartalma. Ez nem feltétlen invarianciát, hanem megfelelően definiált kovarianciát jelent.
- Egy szembetűnően négydimenziós téridő-transzformációt szűkít le három dimenzióra. Ezért aztán egyáltalán nem általánosítható relativisztikus kontinuumokra.

Az objektivitás másféle megfogalmazására és kezelésére több javaslat is van (például Mariano általános transzformációkra javasol invarianciát [122]). Ezek közül talán a legelterjedtebb az anyagi sokaság fogalmának bevezetése [123, 43], illetve ebben a dolgozatban egy teljesen vonatkoztatási rendszer mentes, téridőre alapozott elméletet adunk meg.

2.2.2. A Noll-féle definíció kritikája

⁰ A továbbiakban röviden bemutatom, hogy Noll objektivitás definíciója [106] nem következetes, pontosan végiggondolva másfajta objektivitás-fogalom következik belőle, mint amit Noll maga javasolt és mint ami az irodalomban elterjedt. Az inerciális és merev megfigyelőket megfelelően választott vonatkoztatási rendszerek közötti transzformációs tulajdonsággal írjuk le. Jelöljük az egyik és a másik vonatkoztatási rendszerben ugyanazt az időpontot és helyzetet (t, x^i) -el, illetve (t', x'^i) -vel, ahol $i \in \{1, 2, 3\}$. Ha a két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képest merev mozgást végez, a következő transzformációs szabállyal térhetünk át az egyik koordinátáiról a másik koordinátáira:

$$t' = t, \quad x'^i = h^i(t) + Q_j^i(t)x^j, \quad (2.1)$$

ahol $h^i(t)$ a két középpont relatív helyvektora, $Q_j^i(t)$ pedig a forgást leíró másodrendű ortogonális tenzor. A merev megfigyelő középpontjának mozgása és a forgása is időfüggő. Az objektivitás Noll-féle megfogalmazása szerint egy fizikai mennyiség objektív, ha a fenti szabálynak megfelelően transzformálódik. Mivel az idő abszolút, nem transzformálódik, ezért csak a második formulát, mint térből-térbe történő leképezést tekintik, és vonatkoztatási rendszer váltásakor ennek Jacobi-mátrixa, azaz Q_j^i , segítségével transzformálják a fizikai mennyiségeket, tenzori rendjüknek megfelelően. A szokásos érvelés szerint tehát például egy inerciális megfigyelő szerinti A^i vektor objektív, ha egy, az előzőhöz képest forgó megfigyelő $A'^i = Q_j^i A^j$ komponenseit méri. A relatív sebesség ezek szerint nem objektív, mert

$$v'^i(t) = \frac{d}{dt}x'^i(t) = \frac{d}{dt}h^i(t) + \frac{d}{dt}(Q_j^i(t)x^j(t)) \neq Q_j^i(t)\frac{d}{dt}x^j(t).$$

A fenti, (2.1) objektivitás-transzformációt célszerű a következő formába átírunk:

$$x'^0 = x^0, \quad x'^i = h^i + Q_j^i x^j; \quad \text{röviden} \quad x'^a = x'^a(x^b), \quad (2.2)$$

⁰ Ez a fejezet a [124] publikáción alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

ahol $a, b \in \{0,1,2,3\}$, $i, j \in \{1,2,3\}$ és Einstein megállapodását használom az azonos indexek összeejtésére. Itt is, mint az előbbieken, felső és alsó indexekkel a kontra- és kovariáns (illetve a vektor- és kovektor-) komponenseket különböztetjük meg. A differenciálgeometriából jól ismert (lásd pl. [125]), hogy c^a egy négydimenziós objektív vektor, ha vonatkoztatási rendszer váltásnál a transzformációs szabálya

$$c'^a = J'^a_b c^b, \quad \text{ahol} \quad J'^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \quad (2.3)$$

a transzformáció Jacobi-mátrixa.

Jelen esetben ez a következő blokkmátrix formába írható:

$$J'^a_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j & Q^i_j \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Ennek megfelelően egy (c^0, c^i) négyesvektor objektív, ha

$$\begin{pmatrix} c'^0 \\ c'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j & Q^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

azaz

$$c'^0 = c^0, \quad c'^i = (\dot{h}^i + \dot{Q}^i_j x^j) c^0 + Q^i_j c^j. \quad (2.6)$$

Ha a négyesvektor térszerű, azaz $c^0 = 0$, akkor visszkapjuk a szokott összefüggést:

$$c'^i = Q^i_j c^j, \quad (2.7)$$

általában azonban a térszerűség kivétel, számos fontos fizikai mennyiség nemrelativisztikusan is négyesvektor. Például tekintsük egy tömegpont mozgását leíró, egy t időponthoz az r^i helyzetet rendelő függvényt. Ezt egy időt is magában foglaló leírásban a $(t, r^i(t))$ négyesvektorral adhatjuk meg adott vonatkoztatási rendszerben. Ennek időderiváltja $(1, v^i)$, ahol $v^i = \dot{r}^i$. Ekkor (2.2) alapján

$$r'^i = h^i + Q^i_j r^j,$$

ezért

$$v'^i = \dot{h}^i + \dot{Q}^i_j r^j + Q^i_j \dot{r}^j.$$

Tehát (2.6) alapján láthatjuk, hogy az

$$u^a = (1, v^i) \quad (2.8)$$

egy objektív mennyiség a Noll-féle értelemben. A szokásos hármas sebesség, amelyet négyesvektorként $(0, v^i)$ formába írhatunk, viszont nem objektív.

A fenti egyszerű gondolatmenet azt mutatja, hogy a vektorokra, kovektorokra és másodrendű tenzorokra vonatkozó részletes transzformációs szabályok ezek után újragondolhatóak, csak figyelembe kell vennünk, hogy a nemrelativisztikus téridőt nem lehet egyszerűen tér és idő Descartes-szorzataként modellezni. Vegyük észre, hogy

a Galilei-transzformáció a (2.1) formula része, tehát a merev megfigyelőre vonatkozó transzformációs szabály érvényesítése erősebb követelményt jelent, mint a Galilei-transzformáció alapú klasszikus fizikában szokásos. Ráadásul elvileg világos, hogy az objektivitást nem csak merev, hanem tetszőleges vonatkoztatási rendszerek között is meg kellene követelnünk. Ezt a vizsgálatot a nemrelativisztikus téridő egy olyan matematikai modelljében lehet elvégezni, ahol a fizikai mennyiségeket és fizikai törvényeket vonatkoztatási rendszertől és megfigyelőtől *függetlenül* definiálhatjuk [126, 127]. Erre alapozva az A függelékben vázlatosan ismertetem a legegyszerűbb ilyen nemrelativisztikus téridőmodellt és levezetem skalár, vektor, kovektor, tenzor, kotenzor és vegyes tenzor jellegű mezők deriváltjainak transzformációs tulajdonságait. Ettől teljesebb vizsgálatot tartalmaznak a [128, 129] publikációk, ahol megmutatom, hogy a teljes disszipatív Fourier-Navier-Stokes egyenletrendszer hogyan tárgyalható vonatkoztatási rendszertől függetlenül és szerzőtársaimmal keressük ennek mérhető következményeit és a kapcsolódó elméletekhez való viszonyát. A vonatkoztatási rendszer mentes tárgyalás a kontinuumfizika alapfogalmait új megvilágításba helyezi. Például a mozgási energia az objektív energia megfelelő Galilei-transzformációs szabályának a része.

Megjegyzendő, hogy anyagi sokaságok, azaz a kontinuum mozgásához rögzített vonatkoztatási rendszer bevezetése és lényegében téridő alapú tárgyalása önmagában nem elegendő, akkor sem, ha formálisan négyesvektorokat használ. Ennek oka, hogy az anyagi sokaság feltételezi, hogy a kontinuumnak van egy idealizált, relaxált, feszültségmentes alapállapota, amit egy referencia időpontban fel is vesz. A gyakorlatban ez csak kivételesen lehet igaz, és végső soron nem is fontos [49, 50].

Ebben a részben tehát feltártuk Noll definíciójának hibáit [124], és megmutattuk, hogy a Galilei-relativisztikus téridőt figyelembe véve hogyan lehet javítani rajta. Ezáltal a nemegyensúlyi termodinamika konstitutív elméletében új modellalkotási lehetőségek tárultak fel. A továbbiakban egyelőre a szokásos relatív kontinuumelméletet vizsgáljuk, az itt általánosított Noll-féle objektivitásfogalom fenti négydimenziós, (2.6) transzformáción alapuló általánosításának csak két fontos következményét használjuk:

- A négyessebesség objektív, ezért lehetnek sebességfüggő anyagfüggvények.
- A térbeli deriváltak objektívek (mert négyes kovektorok), ezért a térbeli gyengén nemlokális kiterjesztései a termodinamikának problémamentesek objektivitási szempontból.

2.3. Gyenge nemlokalitás időben és térben

2.3.1. Történet: túl a lokális egyensúlyon

A racionális termodinamika megpróbálta teljes általánosságban megfogalmazni a idő- és térbeli nemlokalitást: memóriafunkcionálokra építkező és integrálisan nemlokális elméleteket állított fel. Ez az úgynevezett *erős nemlokalitás* irányzat gyakorlati szempontból kudarcnak tekinthető; túlságosan általános a konstitutív elmélet, hogy a kísérleteknek támpontot adjon (lásd pl. [130, 43]).

Az alternatív stratégia szerint *gyengén nemlokális* konstitutív függvényeket keresünk, amelyek az alapváltozóknak a klasszikus elméletekben megjelenőnél magasabb rendű tér- és időderiváltjaitól függhetnek. Speciálisan fontos esetet jelentenek a belső változók, ahol a fejlődési egyenletek is konstitutívak.

2. Kontinuum-termodinamika

A gyenge nemlokalitás ötletének is mély történeti gyökerei vannak. Az *időben gyenge nemlokalitás* és a Hooke-törvény magasabb rendű időderiváltakkal történő kiegészítése számos anyag viselkedésének magyarázatát adja a reológiában, a folyékony és szilárd viselkedést egyaránt mutató anyagok tudományában⁵. Legegyszerűbb modelljei nem véletlenül viselik Maxwell-, Kelvin- és Poynting–Thomson-test nevet.

Ugyancsak régóta léteznek a deformáció térderiváltjaitól függő feszültségeket alkalmazó, azaz *térben gyengén nemlokális* mechanikai elméletek (másod- és magasabbfokú folyadékok és rugalmasságtan), ezek legismertebb példáját jelentik Van der Waals kapillaritáselméletét általánosító úgynevezett Korteweg-folyadékok [134, 135]. Gyenge nemlokalitás alatt legtöbbször ezt, azaz a térben gyenge nemlokalitást szokás érteni.

A gyengén nemlokális kontinuumelméletek termodinamikai kompatibilitásának vizsgálatához nem jók a klasszikus módszerek. Például az irreverzibilis termodinamika heurisztikus erő-áram módszere sem működik ebben az esetben minden további nélkül és meg kell értenünk a második főtétel jelentését is. Két olyan módszertan alakult ki, amely a termodinamikai követelményeket figyelembe veszi: a racionális és a GENERIC.

A *racionális mechanika* kényszerfeltételes függvényegyenlőtlenségek vizsgálatára a Coleman–Noll-eljárást [136] vagy a Liu-eljárást [137] alkalmazza együtt a második főtétel Coleman–Mizel-féle értelmezésével [138, 57]. Ez utóbbi szerint a második főtétel anyagi tulajdonság, azaz az anyagfüggvények (hőáram, feszültség) formája kell biztosítsa Gibbs–Duhem-egyenlőtlenség érvényességét (a racionálisok nem szeretik az entrópiaprodukció szót), minden egyéb feltétel, például a mérlegek, mint kényszerek figyelembe vételével. A Coleman–Noll- és a Liu-eljárások módszert adnak a feltételes függvényegyenlőtlenség megoldására. A viszonyuk olyan, mint a feltételes szélsőérték-problémák esetén a direkt behelyettesítés és a Lagrange-szorzókat használó módszerek viszonya, a Coleman–Noll-eljárás a kényszereket behelyettesítve keresi a megoldás feltételeit, a Liu-eljárás pedig multiplikátorokkal veszi figyelembe a kényszereket. A két módszer lényegében ekvivalens [139].

A racionális módszertan több fontos eredményre vezetett [140, 141, 142], viszont szembevetendő hiányosságai is vannak. Például Coleman–Noll-eljárással kapott egyik első eredmény az, hogy a második főtétel szerint a rugalmasságtan csak lokális lehet, a feszültségtenzor nem függhet a deformáció gradiensétől [143], illetve elvileg nemlokális képlékenység sem létezhetne [144]. Ezek a megállapítások jó ideig irányt szabtak és szabnak ma is a rugalmasságtan és a képlékenységtan fejlődésének (pl. a Fleck–Hutchinson-elmélet csak 2001-ben született meg és Gurtin is csak ezután talált egy módszert saját negatív eredményének megkerülésére [145]). A racionális módszertan másik fontos hiányossága, hogy nem képes az időbeli nemlokalitások kezelésére, elsősorban a Noll-féle objektivitás előzőleg említett problémái miatt.⁶ Hasonló problémát jelent a belső változók fejlődési egyenleteinek gyengén nemlokális kiterjesztése. Itt csak további elvek (mikroerő-mérleg, intersticiális-munka) bevezetésével lehet megkerülni azokat a feltételeket amelyeket második főtétel túl szigorú megfogalmazása miatt csak közönséges differenciálegyenleteket eredményeznek a belső változók fejlődési egyenleteként [83, 147, 140]. Látni fogjuk, hogy az entrópiáram általánosítása

⁵ A reológia létéről talán azért kényelmes elfelejtkezni, mert akkor nem kell alaposabban belegondolni, hogy mi is a halmazállapot [131, 132, 133].

⁶ A Liu-eljárást először Liu önállóan és Müllerrel együtt is, először időben és térben gyengén nemlokális konstitutív függvények származtatására próbálta használni [137, 146].

nélkül a racionális termodinamika erős matematikai módszerei kizárják az elmélet gyakorlati kérdésekre alkalmazható általánosítását.

A Grmela és Öttinger által kidolgozott *GENERIC elmélet* (General Equation of Non-Equilibrium Reversible and Irreversible Coupling) [148, 149, 130] a hamiltoni mechanikát és az irreverzibilis termodinamikát egyenrangúan kezeli. Minden elméletet szétszed egy variációs elvből származtatható mechanikai részre és egy entrópiát produkáló disszipatív részre. Ezt a két részt algebrailag összekapcsolja Poisson-zárójelekkel az ideális mechanikai, és úgynevezett disszipatív zárójelekkel a termodinamikai részre. Ezáltal a termodinamikai követelményeket érvényesítő keretelméletet kapunk, amely alkalmazható a teljes kontinuumfizikára, a kinetikus elméletre és még attól is általánosabban. A konstrukció lényegét a Ginzburg–Landau-egyenlet következő fejezetben megmutatott hagyományos levezetésével érthetjük meg. Öttinger és munkatársai számos példát adtak arra, hogy ezzel az elméleti kerettel valóban megfoghatóak disszipatív és nemdisszipatív elemeket együtt tartalmazó elméletek. A reológiai indítatású *GENERIC* magasabbrendű idő- és térderiváltakat is bevezet az egyenletekbe. A módszer hiányossága egyrészt az elméleti alapfeltevések megduplázása (termodinamika és mechanika együttesen kell) és az, hogy nem konstruktív (pl. a variációs elvet meg kell sejtteni, a Poisson-struktúra is utólag ellenőrizhető igazán) [150]. Az elmélet az objektivitási követelményeket általában nem tárgyalja, illetve legfeljebb Galilei-transzformációk szintjén [129].

Természetesen vannak más, a termodinamikai követelményekkel nem nagyon foglalkozó elképzelések is, mint például a *fázismező-elméletek* [151, 152, 153], amely csak térbeli gyengén nemlokalitással foglalkoznak és fejlődési egyenleteiket nem teljesen egységes módon, hanem variációs elvekkel, illetve félig statisztikus módszerekkel származtatják. Ezek az elméletek még a *GENERIC*-nél is következetlenebbek, mert a disszipatív-konzervatív részek módszertani és elvi szétválasztásán túl a második fő-tételt nem, vagy következtelenül alkalmazzák az univerzális fizikai törvényekhez való kritikus hozzáállásuk miatt. Ennek egyik következménye például az a módszer, hogy a legegyszerűbb disszipatív kontinuumelméleteket (pl. Navier-Stokes-egyenletet) tekintik érvényesnek mezoszkopikus szinten és ezek statisztikus vizsgálatával származtatják ugyanennek az elméletnek az általánosításait. Gurtin kritikáját is idézhetjük: a variációs elvek intuitívak és világosak, de mivel disszipatív elméletet nem lehet variációs elvből levezetni, ezért nem lehetnek alapvetőek, legfeljebb valamilyen teljesebb elmélet előfutárainak tekinthetőek [147]. Objektivitásról szó sem esik a fázismező-elméletekben.

Egy konstitutív elmélettől elvárható, hogy ne csak statikus anyagszerkezetet, hanem annak változásait is képes legyen modellezni. Ennek termodinamikai módszertana a belső változók alkalmazása. A *belső változók* olyan fizikai mennyiségek, amelyeket a hagyományos fizikai jellemzőkön felül vezetünk be és a többi mezőhöz kapcsolva az anyag szerkezeti változásait írjuk le segítségükkel. Sok esetben konkrétan azonosíthatók, mint például a mikrorepedezés esetén a 'fabric' tenzor, vagy képlékenységi esetén maga a képlékeny deformáció. Általában viszont a fizikai jelentésüket és a fejlődési egyenletüket is termodinamikai modellezéssel kapjuk meg. Az általános fejlődési egyenletet olyan módon megszorítva, hogy a termodinamika második fő-tétele ne sérüljön. Mind a *GENERIC*, mind a racionális és a kiterjesztett termodinamika esetében találkozunk a belső változókkal. A nemegyensúlyi termodinamika heurisztikus alkalmazása relaxációs típusú közönséges differenciálegyenleteket eredményez fejlődési

2. Kontinuum-termodinamika

egyenletként, a racionális elmélet – mint említettem – ráadásul megracionalizálja ezt, megtiltja, hogy a fejlődési egyenlet parciális differenciálegyenlet legyen [83]. A kiterjesztett termodinamika csak mérlegegyenleteket enged meg további változók fejlődési egyenleteként [102] és az újabb változók minden esetben a mérlegek áramsűrűségei lesznek (ezért nem is belső változóknak nevezik ezeket). Azok az elméletek, amelyek mechanikai variációs elveket használnak (GENERIC reverzibilis része, vagy például [154]) időben másodrendű differenciálegyenletekre vezetnek, kizárva az elsőrendű relaxációs típusú egyenletek lehetőségét.

Magyarországon a termodinamikának mély gyökerei vannak a matematikai módszertant illetően is. Farkas Gyulának az integráló osztó létezésére vonatkozó munkáját [3] már említettük. Ő azonban nem erről, hanem a lineáris egyenlőtlenségrendszerek alaptételének, a Farkas-lemmának bizonyításáról ismert világszerte. Meglepő módon ez az eredménye a nemegyensúlyi termodinamika megalapozásában is szerepet játszik. Ugyanis a fent említett Liu-eljárás lineáris algebrai alapállítása az affin Farkas-lemma speciális esete, ahogy erre Hauser és Kirchner rámutatott [155] (részletesebben lásd B függelék).

Verhás Józsefnek dinamikai szabadsági fokokra (speciális belső változókra) vonatkozó elmélete, illetve annak reológiai (és egyéb) alkalmazásai [156, 44] az időbeli gyenge nemlokalitások általános bevezetésének tekinthetőek. A térbeli gyenge nemlokalitást illetően Verhás nemegyensúlyi termodinamikai elmélete a különféle folyadékkristályokra vonatkozóan (Franck–Oseen-féle nemlokális entrópiasűrűséggel) a nemegyensúlyi termodinamika egyik első fontos eredménye. Verhás és Nyíri entrópiaáramra vonatkozó úttörő megfontolásai [157, 158] nyilvánvalóvá tették a racionális irányzat egyik fő korlátját, azt, hogy az entrópiaáram nem lehet mindig a hőáram és a hőmérséklet hányadosa, hanem az is konstitutív mennyiség.

2.3.2. Gyengén nemlokális nemrelativisztikus kontinuumok

⁰Ebben a fejezetben a nemrelativisztikus kontinuumok fejlődési egyenleteit vizsgálom a második főtétellel kompatibilis gyengén nemlokális kiterjesztések szempontjából. A cél egységes, általános, szigorú és prediktív módszer kidolgozása, amely lehetővé teszi, hogy a fizika mezőelméleteinek fejlődési egyenleteit magasabbrendű tér- és időderiváltakkal egészítsük ki a hagyományos tagokon túl, illetve (és ezáltal) maguknak a fejlődési egyenleteknek a származtatása. A módszer alkalmazható kell legyen nemrelativisztikus és relativisztikus kontinuumokra, lokális egyensúlyban és attól távol. Továbbá tartalmaznia kell az ismert klasszikus példákat a gyengén nemlokális rendszerekre külön speciális feltevések (mint például variációs elvek, vagy mérleg forma) nélkül; minimális számú független feltevésen kell alapuljon; és konstruktív számítási módszert kell adjon a magasabbrendű kiterjesztések szisztematikus bevezetéséhez. Mindezek az elvárások együtt azt eredményezik, hogy az elmélet jóslatai kísérletileg jól ellenőrizhetőek lesznek.

Ezeknek a követelményeknek megfelelőhetnek a racionális termodinamika matematikai eljárásaira alapozott módszerek. A Coleman-Noll és a Liu-eljárások ugyan eleendően általánosak, de eredeti alkalmazási feltételeikkel nem elég teljesítőképesek. A gyengén nemlokális kiterjesztések származtatására történő alkalmazásukhoz három

⁰ Ez a fejezet a [159] munkámon alapul.

megfigyelés szükséges:

- Az entrópia áramsűrűsége is konstitutív mennyiség.
- Az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez a kényszerek térderiváltja is kényszert jelenthet, a konstitutív állapottér rendjétől függően.
- Több csatolt változó időben magasabbrendű egyenletet eredményezhet.

A termodinamikai elméletekben az entrópia mérlege mindig másodlagos, származtatandó és kiszámítható. A fizikai rendszerről a termodinamikai megfontolásaink előtt általában már rendelkezünk valamilyen ismeretekkel. Elsősorban tudjuk, mik az alapváltozóink, és ezekre vonatkozó fejlődési egyenletekről is általában tudunk valamit. Ha ismereteink teljesek, azaz a differenciálegyenletekkel kapcsolatban korrekt matematikai feladatok – például kezdetiérték problémák – tűzhetőek ki, akkor az entrópiaprodukció kiszámításával ellenőrizhetjük az addigi feltevéseink helyességét. Ha ismereteink nem teljesek, azaz a differenciálegyenletek nem záródnak – több ismeretlen fizikai mennyiségünk van, mint ahány egyenlet, – akkor a második főtétel segítségével találhatunk megfelelő függvényeket. A második főtétel erőteljesen megszorítja az anyagi tulajdonságokat rögzítő, úgynevezett konstitutív függvények és feltételek rendszerét.

Az itt ismertetendő termodinamikai modellezés esetén az első lépés a kinematikai keretek megadása, azaz először le kell rögzítenünk az alapváltozókat, kijelölni az *alapváltozók terét*. Valójában ez a lépés a legnehezebb, egy fizikai elmélet megfelelő változóinak megtalálása hosszú tapasztalatszerzés – megfigyelések, kísérletek és elméleti megfontolások – után lehetséges. Ezután az ismert feltételek (például mérlegek) figyelembe vételével meg kell keresnünk az anyagi, konstitutív függvényeket és eldönteni, hogy fizikai feltételeink szerint mi a *konstitutív állapottér*, az anyagfüggvények mitől függenek. A konstitutív állapottér, a módszertan szerint, az alapváltozók és azok deriváltjai feszítik ki. Az entrópia és az entrópiaáram szintén anyagi tulajdonságokat rögzít, anyagfüggvény. Az entrópiaprodukciót kiszámítva az egyenlőtlenséget kielégítő feltételeket keresünk. Az egyenlőtlenség megoldásának egyszerű heurisztikus módszere például az úgynevezett termodinamikai erők és áramok azonosítása. Ennél alaposabb elemzés a konstitutív függvények értelmezési tartományának vizsgálatával szűkíti azok lehetséges formáját. Mi a továbbiakban a Liu-eljárást fogjuk használni. Az eljárás a B függelék lineáris algebrai tételeit használja ki, felismerve, hogy az alapváltozók konstitutív állapottérben szereplőknél magasabb rendű deriváltjai algebrai értelemben függetlennek tekinthetők, hiszen a kezdeti és peremfeltételektől függően értékük bármekkora lehet [137, 136]. Ezen kívül egyes speciális esetekben, például a Cahn-Hilliard egyenlet levezetésekor megmutatjuk, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika módszertana, a divergenciák leválasztása [5, 160] is kiválóan alkalmazható gyengén nemlokális esetben, amennyiben a termosztatikát megfelelően általánosítjuk. Ez az alfejezet általában rámutat az alkalmazott matematikai módszerek szükségességére: erősebb módszerekkel kevesebb feltevésből több munkával kaphatunk fizikailag releváns, a kísérletekkel összevethető ismereteket, míg gyengébb módszerekhez több feltevést kell elfogadnunk de gyorsabban kapunk eredményt.

2.4. Gyengén nemlokális belső változók

⁰A belső változók esetén a termodinamikailag keresett és levezetett konstitutív összefüggés maga a fejlődési egyenlet. A továbbiakban több lehetőséget vizsgálunk. Először a lokális konstitutív állapotteret, azután másodrendűen gyengén nemlokális konstitutív állapotteret tekintünk egyetlen belső változó esetén mindenféle kényszer nélkül, majd mérleg kényszer figyelembe vételével. Végül a duális belső változók specialitásait mutatom meg.

A gyenge nemlokalitás jelentésének szemléltetésére a legegyszerűbb példát a Ginzburg–Landau-egyenlet adja. A Ginzburg–Landau-egyenletre nemcsak, és nem elsősorban mint a szupravezetés speciális egyenletére gondolunk, hanem mint a legegyszerűbb struktúráképző egyenletre, amely számos, nagyon különböző területen bizonyult jó modellnek a jelenségek leírására. A Ginzburg–Landau-egyenlet ugyanakkor a belső változókra vonatkozó homogén relaxációs egyenlet első gyengén nemlokális kiterjesztése⁷. A Ginzburg–Landau-egyenlet hagyományos levezetése karakterisztikus keveréke variációs és termodinamikai megfontolásoknak: variációs elvet alkalmazunk a sztatikus részre, majd a funkcionálderiváltakat termodinamikai erőként használjuk egy relaxációs típusú egyenletben.

Jelöljük ξ -vel egy nemrelativisztikus kontinuum valamely fizikai tulajdonságát leíró skalármezőt (egy skalár belső változót, vagy speciálisan egy másodrendű fázisátalakuláshoz tartozó rendparamétert). Feltételezzük, hogy az F szabadenergia-sűrűség a belső változótól és gradiensétől is függ $F(\xi, \partial_i \xi)$. Sok esetben a Ginzburg–Landau-szabadenergiát a következő speciális – gradiens négyzetes – formában vezetjük be:

$$F(\xi, \partial_i \xi) = F_0(\xi) + \gamma(\partial_i \xi)^2/2, \quad (2.9)$$

ahol γ skalár anyagi paraméter, F_0 pedig a szabadenergia gradiensfüggetlen része, $(\partial_i \xi)^2 = \partial_i \xi \partial^i \xi$. Ismétlődő indexek továbbra is összegzést fognak jelenteni, de az A függelékben kifejtett absztrakt értelemben, általában koordinátarendszertől függetlenül⁸. Vezessük be továbbá a ∂_ξ jelölést a ξ változó szerinti parciális deriváltra. Ekkor, a szokásos érvelés szerint feltételezzük, hogy ξ változási sebessége egy V térfogatrészben negatívan arányos az anyag szabadenergia változásával:

$$\frac{d}{dt} \int_V \xi dV = -l \delta \int_V F(\xi, \partial_i \xi) dV. \quad (2.10)$$

Itt δ a teljes szabadenergia variációját jelöli. Ha feltételezzük, hogy a fenti egyenlőség minden V térfogatrészre érvényes, akkor megkapjuk az általános *Ginzburg–Landau-egyenletet* a következő formában:

$$\partial_t \xi = -l \frac{\delta F}{\delta \xi} = -l [\partial_\xi F - \partial_i (\partial_{\partial_i \xi} F)], \quad (2.11)$$

ahol ∂_t a parciális időderivált, $\frac{\delta}{\delta \xi}$ a variációs számítást rövidítő funkcionálderivált, l pedig anyagi együttható. Fentebb feltételeztük, hogy a közeg nyugalomban van.

⁰ Ez a fejezet a [159, 161, 51, 162] munkáimon alapul.

⁷ Ezt az egyenletet (időderiválttal) először Landau és Khalatnikov vezette le [163].

⁸ A kontinuummechanikában szokásos index nélküli jelölés kettőnél magasabbrendű tenzorokkal végzett összetett számítások esetén nagyon nehézkessé válik.

Speciálisan a (2.9) szabadenergiával pedig az egyenlet klasszikus formája adódik:

$$\partial_t \xi = -l[\partial_\xi F_0 - \gamma \partial^i \xi]. \quad (2.12)$$

Látni fogjuk, hogy ebben a levezetésben felesleges a variációs elv és a funkcionálderiváltak használata. A fenti egyenlet tisztán termodinamikai megfontolásokkal is megkapható.

A fázismező elméletek másik fontos alappéldája a szilárd fázisban lezajló fázisátalakulások leírására használt Cahn–Hilliard-egyenlet, amelyet megmaradó rendparaméterhez tartozó dinamikai egyenletként vezetnek be [151]. Tehát az előző esettől eltérően nem minden feltétel nélkül keressük a fejlődési egyenletet, hanem az alapmező most extenzív, azaz egy mérleg, illetve speciálisan, egy megmaradási törvény érvényes rá. A szokásos levezetése hasonló, mint a Ginzburg–Landau-egyenleté, formálisan a parciális deriváltat funkcionálderiválttal helyettesítjük. Tehát ξ áramsűrűségét j_ξ^i -vel jelölve feltételezzük, hogy

$$\partial_t \xi + \partial_i j_\xi^i = 0, \quad (2.13)$$

ahol az irrverzibilis termodinamika alapján az áramsűrűség a megfelelő intenzív mennyiség gradiense, amit jelöljünk A_ξ -vel. Az intenzív mennyiség a szabadenergia extenzív szerinti parciális deriváltja, azaz $A_\xi = \frac{\delta F}{\delta \xi}$. Tehát a vonatkozó konstitutív egyenlet:

$$j_\xi^i = -\kappa \partial^i A_\xi. \quad (2.14)$$

Ebben az esetben is a szabadenergia sűrűséget a (2.9) formában feltételezve az előbbi parciális derivált helyett az intenzív mennyiséget funkcionálderivált segítségével adjuk meg, azaz

$$A_\xi = \frac{\delta F}{\delta \xi}.$$

Ezt behelyettesítve a fenti mérlegbe kapjuk a Cahn–Hilliard-egyenletet:

$$\partial_t \xi - \kappa \partial_i \partial^i A_\xi = 0. \quad (2.15)$$

Ezek a levezetések egyszerűek, elegánsak és fizikailag világosak, azonban láthatóan két független feltevést kell összeilleszteni bennük: variációs extrémum elvet és a nem-egyensúlyi termodinamikai keretelméletet. Az alábbiakban megmutatom, hogy ehhez a termodinamika önmagában is elegendő.

2.4.1. Elsőrendű gyenge nemlokális relaxáció

Tekintsük az $a(t, x^i)$ skalár térmennyiséget egy kontinuumban, amely nyugalomban van valamely inerciális megfigyelőhöz képest. Tegyük fel, hogy a fejlődési egyenletére nincs más fizikai megszorítás a második főtételen kívül. A fejlődési egyenletet általánosan a következő formában keressük:

$$\partial_t a + \hat{f} = 0, \quad (2.16)$$

ahol az \hat{f} tetszőleges konstitutív függvény, változóinak rögzítése a modellezés kiindulópontja. Itt és a továbbiakban az előzőekhez hasonlóan a parciális időderiváltat ∂_t -vel jelöljük, a konstitutív mennyiségeket pedig ilyen kalappal: $\hat{\cdot}$.

2. Kontinuum-termodinamika

A fenti fejlődési egyenlet nem lehet tetszőleges, valódi fizikai folyamatok esetén nem sértheti a második főtételt és ez a követelmény megszorítja lehetséges formáját. A második főtétel, jelen esetben az entrópiamérleg egyenlőtlensége a következő:

$$\partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i \geq 0. \quad (2.17)$$

Itt az \hat{s} entrópiasűrűség és a \hat{J}^i entrópiáramsűrűség a fenti \hat{f} -hez hasonlóan konstitutív mennyiségek. Az alábbiakban feltételezzük, hogy az a alapváltozótól és annak $\partial_i a$ gradiensétől függenek, azaz a konstitutív állapotter elsősorúan gyengén nemlokális. Tehát

- az *alapváltozók terét* a ,
- a *konstitutív állapotteret* $(a, \partial_i a)$ feszíti ki,
- a *konstitutív függvények* pedig \hat{s} , \hat{J}^i és \hat{f} .

Ekkor eddigi feltevéseinket figyelembe véve az entrópiamérleg a következő formájú:

$$\partial_a \hat{s} \underline{\partial_t a} + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \underline{\partial_{it} a} + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \underline{\partial_{ij} a} \geq 0. \quad (2.18)$$

Itt a konstitutív függvények parciális deriváltjait rövidítve jelöltük, pl. $\frac{\partial \hat{s}}{\partial a} = \partial_a \hat{s}$. A fenti egyenlőtlenségre most Liu-tételét alkalmazzuk a B függelékben ismertetett módon. Az alapmezők aláhúzott parciális deriváltjai nincsenek benne a konstitutív állapotterben, ezek független algebrai mennyiségek és az ún. *folyamatirány-teret* feszítik ki. Azaz, a függelék jelöléseivel $\mathbf{p} = (\underline{\partial_t a}, \underline{\partial_{it} a}, \underline{\partial_{ij} a})$, az együtthatóként szereplő konstitutív mennyiségeket pedig \mathbf{a} és \mathbf{b} vektoroknak feleltetjük meg. Vezessük be a $\hat{\lambda}$ Lagrange–Farkas-szorzót a (2.16) evolúciós egyenlethez, mint kényszerhez. Ekkor az entrópiaegyenlőtlenség átírható a következő formába:

$$0 \leq (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}) \underline{\partial_t a} + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \underline{\partial_{it} a} + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \underline{\partial_{ij} a} + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a - \hat{\lambda} \hat{f}. \quad (2.19)$$

A $\hat{\lambda}$ Lagrange–Farkas-szorzó létezése Liu tételének következménye. Ezek után kihasználjuk, hogy a folyamatirányok a konstitutív állapotter elemeitől függetlenek (algebrailag), abban az értelemben, hogy ezeknek a deriváltaknak az értéke más és más lehet, ugyanazon konstitutív állapot értékeknél (például a (2.16) differenciálegyenlet kezdeti értékeitől függően). Ekkor az aláhúzott tagok szorzói (2.19)-ben nullák és a Liu-egyenleteket adják:

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}, \quad (2.20)$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = 0^i, \quad (2.21)$$

$$\partial_{ij} a : \quad \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i = 0^{ij}. \quad (2.22)$$

Az utolsó egyenletben az indexek melletti zárójelek a jelölt másodrendű tenzor szimmetrikus részét jelölik $A^{(ij)} = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji})$, illetve általában az adott tenzorszorzatkomponensek szimmetrizáltját egy magasabb rendű tenzor esetén. Az első egyenlet az entrópia deriváltjaként határozza meg a Lagrange–Farkas-szorzót, a második azt mutatja, hogy az entrópiasűrűség lokális, azaz nem függ a gradiensétől. A harmadik egyenlet egy megoldását adja, ha az entrópiaáram szintén lokális. A Liu-egyenleteknek

és megoldásaiknak felhasználásával az egyenlőtlenség ekkor a következő alakra egyszerűsödik:

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i(a) - \partial_a \hat{s}(a) \hat{f}(a, \partial_i a). \quad (2.23)$$

További feltevésünk, hogy a maradék entrópiaáram nulla; $\hat{\mathfrak{J}}^i \equiv 0^i$. Izotrop anyagok esetén ez mindig igaz, az izotrop vektorfüggvények reprezentációs tétele értelmében [164]. Ezért az entrópiaegyenlőtlenség egy határozatlan konstitutív függvény és az entrópia deriváltjának szorzatára egyszerűsödött. Mivel az entrópiát és deriváltjait általában meghatározottnak tekintjük, hiszen sztatikai mérésekkel meghatározható, ezért termodinamikai áramot és termodinamikai erőt azonosíthatunk a klasszikus irreverzibilis termodinamikai értelemben. Tehát az egyenlőtlenség megoldását kapjuk, ha a konstitutív függvény – a termodinamikai áram – pozitív szorzóval arányos a termodinamikai erővel.

$$\hat{f} = -\hat{l} \partial_a \hat{s}, \quad \hat{l} > 0. \quad (2.24)$$

Ez kétszer differenciálható \hat{f} esetén nem közelítés, hanem általános megoldás Lagrange középértéktételének megfelelően (lásd pl. [147]). Nem szoktuk kihasználni az ebben rejlő általánosságot, legtöbbször állandó \hat{l} együtthatóra szorítkozva a fenti megoldást lineáris közelítésként értelmezzük.

Tehát izotrop anyag skalár belső változójára vonatkozó fejlődési egyenlet a termodinamika második főtétele értelmében egy relaxációs típusú közönséges differenciálegyenlet:

$$\partial_t a = \hat{l} \partial_a \hat{s}. \quad (2.25)$$

Az eljárás legfontosabb lépései tehát a következők voltak:

- Az alapváltozók, az alapkényszerek és a konstitutív függvények azonosítása és a konstitutív állapotter rögzítése. Ez utóbbi is fizikai kérdés, például a nemlokális kölcsönhatások szintjét, azaz a szereplő térderiváltak maximális rendjét kell eldöntenünk a kísérleti és egyéb modellezési tapasztalatok függvényében.
- Az entrópiaegyenlőtlenség felírása, parciális deriválások után a folyamatiránytér rögzítése és szükség esetén további, derivált kényszerek bevezetése.
- Liu tételének alkalmazása.
- A Liu-egyenletek és a disszipációs egyenlőtlenség megoldása.

További kényszerek bevezetését a fizikai, modellezési feltételek többféle módon is szükségessé tehetik. Például a magasabb rendű állapotterek alapvetően fizikai feltételezése, némiképp rejtett módon, matematikailag vezet további, differenciálegyenletekkel adott kényszerekre, ahogy a következő példában látni fogjuk.

Vegyük észre továbbá, hogy az utolsó pont, a Liu-egyenletek és a disszipációs egyenlőtlenség explicit megoldása általában nem lehetséges. Ebben az egyszerű példában is csak több matematikai egyszerűsítés után értünk célt. Ennek megfelelően a fenti megoldás számos ponton általánosítható, illetve tovább vizsgálható. Például a lokális entrópiaáram feltételezése (2.22)-nek nem általános megoldása, és az antiszimmetrikus deriváltak fizikai szerepe lehet. Hővezető, izotrop, szilárd anyagok esetén Liu ennek segítségével bizonyította, hogy a hőáram nem lehet örvényes [116], bár a Fourier-egyenlet más levezetései (például a klasszikus irreverzibilis termodinamika)

2. Kontinuum-termodinamika

ezt elvileg nem zárják ki. Fontos azt is látni, hogy az olyan kézenfekvőnek tűnő matematikai feltevések, mint a konstitutív függvények kétszer folytonos deriválhatósága is fizikai következményekkel járnak. Erre legfontosabb példa a képlékenység termodinamikai elmélete, amely Ziegler munkásságából fejlődve a termodinamikai erőkben nem kvadratikus tagokkal oldja meg az entrópiaprodukciónak az egyenlőtlenségét, másodrendű Euler-homogenitást helyett elsőrendű homogenitást feltételez (lásd [165, 43], illetve az Onsageri értelmezést illetően egy másik lehetőséget mutat [166]). Itt a termodinamikai erők függvényében nem differenciálható termodinamikai áramokra (mint konstitutív függvényekre) láthatunk példát.

A továbbiakban a második főtétel egyenlőtlenségének explicit megoldásait keressük, ezért általában nem használjuk ki teljesen a matematikai általánosság modellezési lehetőségeit. Konkrétan nem törekszünk arra sem, hogy a Liu-egyenletek feltételeknek megfelelő legáltalánosabb megoldását adjuk meg. Például mindig fel fogjuk tételezni, hogy:

- a Liu-egyenletekben nemcsak a szimmetria érvényes;
- nincs maradék entrópiaáram;
- megfelelő mértékig differenciálhatóak a konstitutív függvények.

2.4.2. Másodrendű gyenge nemlokalitás - a Ginzburg–Landau-egyenlet

Ebben az esetben a probléma hasonló, a (2.16) általános fejlődési egyenletre vonatkozó termodinamikai követelményeket határozzuk meg, de most másodrendű gyengén nemlokális konstitutív állapotteret feltételezésével, amelyet az a alapállapotmező és annak első és második térderiváltjai, $\partial_i a$ és $\partial_{ij} a$ feszítenek ki.

Tehát ebben a példában

- az alapváltozók terét, az alapállapotteret a ,
- a konstitutív állapotteret pedig $(a, \partial_i a, \partial_{ij} a)$ feszíti ki,
- a konstitutív függvények pedig \hat{s} , \hat{J}^i és \hat{f} .

A folyamatirány-teret a következő deriváltak feszítik ki: $(\partial_t a, \partial_{ti} a, \partial_{tij} a, \partial_{ijk} a)$. Megfigyelhető, hogy ezek a deriváltak most nem függetlenek: (2.16) gradiense egy lineáris egyenlet a folyamatirány-téren. Tehát az entrópiaegyenlőtlenségre vonatkozó további feltételként figyelembe kell vennünk, hogy

$$\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f} = 0_i. \quad (2.26)$$

A (2.16) egyenletre bevezetjük a $\hat{\lambda}$, a (2.26) egyenletre vonatkozóan pedig a $\hat{\Lambda}^i$ Lagrange–Farkas-szorzókat. Ezután pedig a Liu-eljárást alkalmazzuk az előbbiekhöz

hasonlóan:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i - \hat{\lambda} (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}^i (\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f}) = \\
&= \partial_a \hat{s} \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ij} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i \partial_{ijk} a - \\
&\quad - \hat{\lambda} (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}^i (\partial_{ti} a + \partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} \partial_{ijk} a) = \\
&= (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}) \underline{\partial_t a} + (\partial_{\partial_i a} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i) \underline{\partial_{it} a} + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \underline{\partial_{ij} a} + \\
&\quad + (\partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f}) \underline{\partial_{ijk} a} + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a - \\
&\quad - \hat{\Lambda}^i (\partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a) - \hat{\lambda} \hat{f}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Látható, hogy a degeneráció most más, mint az előző esetben. A (2.27) egyenlőtlenség aláhúzott parciális deriváltjainak a szorzói adják a Liu-egyenleteket:

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}, \tag{2.28}$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = \hat{\Lambda}^i, \tag{2.29}$$

$$\partial_{ij} a : \quad \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.30}$$

$$\partial_{ijk} a : \quad \partial_{\partial_{(jk} a} \hat{J}^i) = \hat{\Lambda}^{(i} \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f}. \tag{2.31}$$

Az első két egyenlet az entrópia deriváltjait hozza összefüggésbe a Lagrange–Farkas-szorzókkal. A harmadik egyenlet egy megoldása, ha az entrópia független a második térderiváltjától. Ezért a $\hat{\Lambda}^i$ Lagrange–Farkas-szorzó is független ettől a deriválttól és az utolsó egyenlet integrálható (ismét feltételezve, hogy nemcsak a szimmetrikus részére igaz az egyenlőség):

$$\hat{J}^i(a, \partial_i a, \partial_{ij} a) = \partial_{\partial_i a} \hat{s}(a, \partial_i a) \hat{f}(a, \partial_i a, \partial_{ij} a) + \hat{\mathfrak{J}}^i(a, \partial_i a), \tag{2.32}$$

ahol a maradék entrópia áram, $\hat{\mathfrak{J}}^i$, egy tetszőleges konstitutív függvény, a jelölt változóban, hasonlóan az előző fejezethez. Ez a Liu-egyenletek fenti, (2.28)–(2.31) rendszerének egy teljes megoldása, amelyet figyelembe véve a disszipációs egyenlőtlenség az alábbi formára egyszerűsödik:

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] \hat{f}. \tag{2.33}$$

Tegyük fel ismét, hogy a maradék entrópia áramsűrűség, $\hat{\mathfrak{J}}^i$, nulla. Ekkor a jobb oldalon egy erő-áram rendszert kaptunk. Ennek klasszikus megoldása

$$\hat{f} = \hat{l} [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}], \quad \hat{l} > 0. \tag{2.34}$$

Tehát egy belső változó termodinamikailag megengedett fejlődési egyenlete másodrendűen gyengén nemlokális konstitutív állapotterén a Ginzburg–Landau-egyenlet:

$$\partial_t a = \hat{l} [\partial_a \hat{s} - \partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s})]. \tag{2.35}$$

A gradiensben kvadratikus (2.9) entrópiásűrűséggel kapjuk az egyenlet szokásos formáját, ha γ állandó. $\gamma > 0$ az entrópia konkávitásának követelménye miatt. Más nemlokális termodinamikai potenciálok is használhatóak a fenti levezetésben, például

2. Kontinuum-termodinamika

a szabadenergia, viszont ebben az esetben a többi termodinamikai kölcsönhatáshoz történő kapcsolódást elővigyázatosan kell kezelnünk [152].

Érdekes összevetni a fenti levezetést a Ginzburg–Landau-egyenlet variációs levezetésével. Az utóbbi feltételezi, hogy az egyenlet sztatikus, egyensúlyi részét variációs elv segítségével kapjuk meg, az időbeli változást pedig stabilitásos, termodinamikai érveléssel szokták hozzátenni. Azonban a variációs elv eredete, a két rész összekapcsolása és főképpen a második főtétel szerepe önkényes és nem kompatibilis a kontinuumfizika általános mérlegegyenlet és anyagfüggvény szerkezetével. A fenti levezetésben ezeket az összetevőket egyetlen, termodinamikai gondolatmenetben egyesítettük, ráadásul megkaptuk az entrópiaáram formáját is. Megjegyzendő, hogy semmiféle variációs elvre nem hivatkoztunk közben, a sztatikus rész Euler–Lagrange-egyenlet formája is levezetett. A dinamikai rész relaxációs típusú, elsőrendű időderiváltat tartalmaz, nem kapható meg Hamilton-típusú variációs elvből minden további nélkül [167].

A Ginzburg–Landau-egyenletnek számos másféle, eltérő elveken alapuló levezetése van. A fenti levezetés azt mutatja, hogy származtatásához egyedül a második főtétel elegendő feltételt jelent és szükségtelen olyan további erős posztulátumokat használni, mint egy Hamilton-féle variációs elv, vagy mondjuk a Gurtin által javasolt mikroerő-mérleg [147].

2.4.3. Magasabbrendű gyenge nemlokalitás - a Cahn–Hilliard-egyenlet

A Cahn–Hilliard-egyenlet a fázismező elméletek második fontos alapegyenlete. A probléma hasonló, de most az alapváltozó fejlődési egyenlete nem tetszőleges, hanem meghatározott formája van. Jelöljük továbbra is a -val az alapváltozót. Ekkor erre vonatkozóan egy mérleg áll fenn, azaz

$$\partial_t a + \partial_i \hat{j}^i = 0, \quad (2.36)$$

ahol \hat{j}^i az a áramsűrűségét jelöli. Világos, hogy a konstitutív függvények \hat{s} , \hat{J}^i és \hat{j}^i , az entrópiasűrűség, az entrópia fluxus és az a mező fluxusa. A konstitutív állapot-tér meghatározásához visszatekintve (2.15) egyenletre látjuk, hogy legalább negyedrendűen gyengén nemlokális állapotteret kell figyelembe vennünk, ezután elvileg a Ginzburg–Landau-egyenlethez teljesen hasonló módon eljárva, a Liu-eljárás segítségével megkapjuk a termodinamikai feltételeknek megfelelő entrópiafluxust és fejlődési egyenletet. Ezt a némileg hosszadalmas és kevésbé szemléletes általános módszert megkerülve az alábbiakban megmutatjuk, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika heurisztikusabb módszere a felületi és térfogati tagok szétválasztásával egyszerűbben is a megfelelő eredményre vezet. Ezt a módszert alkalmazza de Groot és Mazur klasszikus munkája [5], illetve gyengén nemlokális esetben, az entrópiaáram általánosításával együtt Maugin javasolta használatát [168, 51].

Tegyük fel, hogy a ρ_s entrópiasűrűség az a mezőnek és térderiváltjának függvénye, $\rho_s(a, \partial_i a)$. Ekkor képezzük az időderiváltját és alkalmazzuk a (2.36) mérleget, mint

kényszert:

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_s(a, \partial_i a) &= \partial_a \rho_s \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \rho_s \partial_{t_i} a = -\partial_a \rho_s \partial_i j^i - \partial_{\partial_i a} \rho_s \partial_{i k} j^k = \\
&= -\partial_i (\partial_a \rho_s j^i) + \partial_i (\partial_a \rho_s) j^i - \partial_i (\partial_{\partial_i a} \rho_s \partial_k j^k) + \partial_i (\partial_{\partial_i a} \rho_s) \partial_k j^k = \\
&= -\partial_i (\partial_a \rho_s j^i + \partial_{\partial_i a} \rho_s \partial_k j^k - \partial_k (\partial_{\partial_k a} \rho_s) j^i) + \partial_i (\partial_a \rho_s - \partial_k (\partial_{\partial_k a} \rho_s)) j^i.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Az átrendezésben elválasztottuk a teljes divergencia alakú felületi tagokat a maradék produkciótól. Ez alapján az entrópiaáram legyen a divergencia alatti kifejezés:

$$J^i = (\partial_a \rho_s - \partial_k (\partial_{\partial_k a} \rho_s)) j^i + \partial_{\partial_i a} \rho_s \partial_k j^k, \tag{2.38}$$

az entrópiaprodukció pedig a maradék:

$$\Sigma = \partial_i (\partial_a \rho_s - \partial_k (\partial_{\partial_k a} \rho_s)) j^i \geq 0. \tag{2.39}$$

Ennek megoldása kézenfekvően a termodinamikai áram-erő lineáris kapcsolat feltételezésével izotróp esetben skaláris együtthatóval a vektori termodinamikai erő és áram között visszadja a (2.14) összefüggést:

$$j^i = -\kappa \partial_i (\partial_a \rho_s - \partial_k (\partial_{\partial_k a} \rho_s)), \tag{2.40}$$

ahol az entrópia növekedés törvénye $\kappa > 0$ esetén biztosított. Ez az egyszerű gondolatmenet megmutatja, hogy az entrópiaváltozás kiszámításakor a térfogati tagok leválasztása a kényszerek figyelembe vételével visszadja a stacionárius inhomogenitások lehetséges szerkezetét – hiszen a Ginzburg–Landau és a Cahn–Hilliard-egyenletek is elsősorban diffúzív fázishatárok modellezésére lettek kidolgozva. Mivel ugyanerre az eredményre jutunk a Liu-eljárás alkalmazásával, ez azt mutatja, hogy a fenti feltételekkel, azaz lényegében a második főtételel megkövetelve az állapotter kiterjesztésével egyértelműen a Cahn–Hilliard-egyenletet kapjuk [?]. Ez azt jelenti, hogy megmaradó mennyiségre vonatkozó minden konkrét disszipációs mechanizmus, amely nem sérti a második főtételel erre a fejlődési egyenletre vezet, ha a gyenge nemlokális fizikailag elvárható.

A gyengén nemlokális egyenletek termodinamikai kompatibilitására és levezetése fontos az általánosításuk és összetett körülmények közötti alkalmazásuk miatt. Az említett variációs módszerek a Cahn–Hilliard-egyenlet esetén is használhatóak [169, 170, 171]. Viszont semmit sem mondanak az entrópiaprodukcióról, illetve a második főtételelről, ahogy ezt Heida és társai részletesen elemzik [172]. A racionális termodinamikai módszerek, amennyiben nem használják a kényszerek deriváltjait magasabbrendű nemlokálisokra, akkor itt is további feltételek és fogalmak bevezetésére kényszerülnek. Ilyen ötletek például a felületközi (intersticiális) munka a belső energia általánosításával [173] vagy a mikroerő mérleg [174]). Egy másik megközelítés lazít a módszertanon és a divergenciák leválasztásának fenti de Groot–Mazur módszerét használja [172]. A magasabb rendű kényszerekkel viszont nagyon könnyű alkalmazhatatlanul bonyolult eredményekre jutni [175].

A következő szakaszban még mindig a termodinamikai fejlődési egyenleteket vizsgálva, a nem disszipatív határesetet vesszük szemügyre, elsősorban a mechanikai jellegű tehetetlenség termodinamikai értelmezésével.

2.5. Duális belső változók és tehetetlenség

⁰Az eddigiekben a gyenge nemlokalitás fellépésére koncentráltunk a belső változókkal kapcsolatban. A példákat a fázismező elméletből vettem, de a nemegyensúlyi termodinamika ott nem tudott az elmélet kialakulásakor hatást gyakorolni, más esetekben sokkal sikeresebbnek bizonyul a belső változók alkalmazása. A fő kérdés a fejlődési egyenletek meghatározása. Erre vonatkozóan két szokásos eljárás alakult ki.

Az egyik módszer alapján a belső változók fejlődési egyenletét az entrópiaegyenlőtlenség segítségével, kizárólag termodinamikai elvekkel határozzuk meg. Ekkor a megfelelő belső változókat szokás *belső állapotváltozóknak* nevezni [168]. A módszernek az az előnye, hogy csak termodinamikai fogalmakat használ (entrópia, termodinamikai erő), a hátránya viszont, hogy önmagában nem tud tehetetlenségi hatásokat modellezni. A belső változók termodinamikai elmélete nagyon régi (lásd a történeti megjegyzéseket [177]-ban). Az első többé kevésbé teljes termodinamikai elméletet Coleman és Gurtin javasolta [83], az elmélet általános elveinek egy tiszta bemutatását adta meg Muschik [178]. Belső állapotváltozókat nagyon változatos jelenségek modellezésére használjuk a fizika, biológia és anyagtudományok különböző területein. A termodinamikai elmélet teljes leírása, rengeteg alkalmazással található meg Verhás könyvében [44]. Verhás a belső állapotváltozóknak egy speciális formáját vezette be, amelyet *dinamikai szabadsági fokoknak* nevezett. Ezek olyan belső állapotváltozók, amelyek értéke egyensúlyban nulla és fizikai tulajdonságaikat csak termodinamikai feltételek korlátozzák, ezért, mint látni fogjuk, elsősorban tehetetlenségi hatások modellezésére használhatóak.

A belső változók fejlődési egyenletét megadó másik fő javaslat mechanikai módszertant használ, és Hamilton-féle variációs elvet vezet be, tehát benne az inerciális effektusok jelenléte elkerülhetetlen. A belső változókat ebben az esetben *belső szabadsági fokoknak* szokás nevezni. A disszipációt is variációs módon, disszipációs potenciálok segítségével adjuk hozzá az elmülethez. Ennek az elméleti keretnek az az előnye, hogy mechanikai fogalmakra épül (erő, energia). A módszert Maugin javasolta [154] és szintén nagyszámú alkalmazása van [43, 179]. A két eljárást élesen megkülönbözteti és számos alkalmazási területet említ Maugin és Muschik [177, 180], illetve Maugin [168].

A belső szabadsági fokoknál is kettős elméleti keret található: az alap Hamilton-elvből származtatott rész nem disszipatív, a disszipációs potenciálok variálása ettől független. A kontinuumfizika termodinamikai eredetű alapegyenleteinek alapvetően nincs variációs megfogalmazása [167]. Ez tükröződik a disszipációs potenciálok, mint független elméleti entitások megjelenésében a disszipációt is tartalmazó variációs elméletekben. Mindezekon túl pedig a termosztatika is része az elméletnek.

A továbbiakban megmutatom, hogy a Hamilton-elvből származó ideális mechanikai szerkezet, azaz a második időderiváltakat tartalmazó, Euler–Lagrange-formájú fejlődési egyenlet következik a termodinamikai elvekből. Ehhez duális belső változók bevezetésére van szükség, és a nemegyensúlyi termodinamika szokásos alapelveinek általánosítására: az Onsager–Casimir-féle reciprocitási relációkat nem tekintjük feltétel nélkül érvényesnek. Duális belső változókkal figyelembe tudjuk venni az inerciális hatásokat és visszakapjuk a dinamikai szabadsági fokokra vonatkozó fejlődési egyen-

⁰ Ez a fejezet a [176] munkán alapul.

leteket. Ez nem lehetséges egyetlen belső változóval. A fent kifejtett, kettős elméleti szerkezet helyett a változók megkettőzésével egyszerűbben célt érhetünk.

Tekintsünk egy termodinamikai rendszert, amelynek alapállapotterét két skalár belső változó mező feszíti ki, a és b . Ezekre a változókra a következő differenciálegyenleteket feltételezzük

$$\partial_t a + \hat{f} = 0, \quad (2.41)$$

$$\partial_t b + \hat{g} = 0. \quad (2.42)$$

Az \hat{f} és \hat{g} függvények a differenciálegyenlet jobb oldalán konstitutívák, és a termodinamika második főtétele miatt nem lehetnek akármilyenek. A korábbiakban már felírt (2.17) entrópiaegyenlőtlenséget kell figyelembe vennünk. A konstitutív állapotfüggvények értelmezési tartományát most az alapváltozók és azok első és második térderiváltjai feszítik ki. Tehát összefoglalva:

- az alapállapotteret (a, b) ,
- a konstitutív állapotteret pedig $(a, \partial_i a, \partial_{ij} a, b, \partial_i b, \partial_{ij} b)$ változók feszítik ki,
- a konstitutív függvények pedig $\hat{s}, \hat{J}^i, \hat{f}$ és \hat{g} .

Ez egy másodrendűen gyengén nemlokális állapotter mindkét alapváltozóban. A vonatkozó folyamatirányteret a $(\partial_t a, \partial_{ti} a, \partial_{tij} a, \partial_{ijk} a, \partial_t b, \partial_{ti} b, \partial_{tij} b, \partial_{ijk} b)$ deriváltak adják. A másodrendű konstitutív állapotter miatt a (2.41)–(2.42) fejlődési egyenletek gradiensei maguk is kényszereket jelentenek az entrópia egyenlőtlenségre:

$$\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f} = 0_i, \quad (2.43)$$

$$\partial_{ti} b + \partial_i \hat{g} = 0_i. \quad (2.44)$$

Bevezetjük a $\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b$ Lagrange–Farkas-szorzókat a (2.41)–(2.42) egyenletekre és $\hat{\Lambda}_a^i, \hat{\Lambda}_b^i$ szorzókat pedig a derivált, a (2.43)–(2.44) egyenlőségekre. A Liu-eljárás ezek után lényegében egy megduplázott Ginzburg–Landau-szerkezetet eredményez:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i - \hat{\lambda}_a (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}_a^i (\partial_{ti} a + \partial_i \hat{f}) - \hat{\lambda}_b (\partial_t b + \hat{g}) - \\ & - \hat{\Lambda}_b^i (\partial_{ti} b + \partial_i \hat{g}) = \\ = & \partial_a \hat{s} \partial_t a + \partial_{\partial_i a} \hat{s} \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ij} a + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jka}} \hat{J}^i \partial_{ijk} a - \\ & - \hat{\lambda}_a (\partial_t a + \hat{f}) - \hat{\Lambda}_a^i (\partial_{ti} a + \partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jka}} \hat{f} \partial_{ijk} a + \\ & + \partial_b \hat{f} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{f} \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jkb}} \hat{f} \partial_{ijk} b) + \\ & + \partial_b \hat{s} \partial_t b + \partial_{\partial_i b} \hat{s} \partial_{it} b + \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} \partial_{ij} b + \partial_b \hat{J}^i \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{J}^i \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jkb}} \hat{J}^i \partial_{ijk} b - \\ & - \hat{\lambda}_b (\partial_t b + \hat{g}) - \hat{\Lambda}_b^i (\partial_{ti} b + \partial_b \hat{g} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{g} \partial_{ij} b + \partial_{\partial_{jkb}} \hat{g} \partial_{ijk} b + \\ & + \partial_a \hat{g} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{g} \partial_{ij} a + \partial_{\partial_{jka}} \hat{g} \partial_{ijk} a). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2. Kontinuum-termodinamika

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 \leq & (\partial_a \hat{s} - \hat{\lambda}_a) \partial_t a + (\partial_{\partial_i a} \hat{s} - \hat{\Lambda}_a^i) \partial_{it} a + \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} \partial_{ijt} a + \\
& + (\partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} - \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{g}) \partial_{ijk} a - \hat{\lambda}_a \hat{f} - \\
& - \hat{\Lambda}_a^i \left(\partial_a \hat{f} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{f} \partial_{ij} a + \partial_b \hat{f} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{f} \partial_{ij} b \right) + \\
& + \partial_a \hat{J}^i \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{J}^i \partial_{ij} a + \\
& + (\partial_b \hat{s} - \hat{\lambda}_b) \partial_t b + (\partial_{\partial_i b} \hat{s} - \hat{\Lambda}_b^i) \partial_{it} b + \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} \partial_{ijt} b + \\
& + (\partial_{\partial_{jk} b} \hat{J}^i - \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{f} - \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{g}) \partial_{ijk} b - \\
& - \hat{\lambda}_b \hat{g} - \hat{\Lambda}_b^i \left(\partial_b \hat{g} \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{g} \partial_{ij} b + \partial_a \hat{g} \partial_i a + \partial_{\partial_j a} \hat{g} \partial_{ij} a \right) + \\
& + \partial_b \hat{J}^i \partial_i b + \partial_{\partial_j b} \hat{J}^i \partial_{ij} b.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Itt is a folyamatiránytér szorzói adják a Liu-egyenleteket

$$\partial_t a : \quad \partial_a \hat{s} = \hat{\lambda}_a, \tag{2.47}$$

$$\partial_{it} a : \quad \partial_{\partial_i a} \hat{s} = \hat{\Lambda}_a^i, \tag{2.48}$$

$$\partial_t b : \quad \partial_b \hat{s} = \hat{\lambda}_b, \tag{2.49}$$

$$\partial_{it} b : \quad \partial_{\partial_i b} \hat{s} = \hat{\Lambda}_b^i, \tag{2.50}$$

$$\partial_{ijt} a : \quad \partial_{\partial_{ij} a} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.51}$$

$$\partial_{ijt} b : \quad \partial_{\partial_{ij} b} \hat{s} = 0^{ij}, \tag{2.52}$$

$$\partial_{ijka} : \quad \partial_{\partial_{jk} a} \hat{J}^i = \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{f} + \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} a} \hat{g}, \tag{2.53}$$

$$\partial_{ijkb} : \quad \partial_{\partial_{jk} b} \hat{J}^i = \hat{\Lambda}_b^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{g} + \hat{\Lambda}_a^i \partial_{\partial_{jk} b} \hat{f}. \tag{2.54}$$

Az első négy egyenlet megmutatja a Lagrange–Farkas-szorzókról, hogy azok az entrópia deriváltjai. Az ötödik és hatodik szerint az entrópia független a és b második térderiváltjaitól. Következésképpen $\hat{\Lambda}_a^i$ és $\hat{\Lambda}_b^i$ Lagrange–Farkas-szorzók is azok, és ezért az utolsó két egyenlet integrálható és megkapjuk az entrópiaáramot:

$$\hat{J}^i = \partial_{\partial_i a} \hat{s} \hat{f} + \partial_{\partial_i b} \hat{s} \hat{g} + \hat{\mathcal{J}}^i(a, \partial_i a, b, \partial_i b). \tag{2.55}$$

A $\hat{\mathcal{J}}^i$ maradék entrópiaáram-sűrűség a jelölt változóktól függő tetszőleges konstitutív függvény lehet. Ezzel a Liu-egyenletek (2.47)–(2.54) rendszerének egy teljes megoldását adtuk meg. Ennek felhasználásával a disszipációs egyenlőtlenség leegyszerűsödik:

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathcal{J}}^i + [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] \hat{f} + [\partial_i (\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}] \hat{g}. \tag{2.56}$$

Feltételezve, hogy $\hat{\mathcal{J}}^i \equiv 0^i$, azaz a maradék entrópiaáram-sűrűség nulla, az egyenlőtlenség a következő formájú termodinamikai erő-áram rendszerre redukálódik:

$$a \text{ erő: } \hat{A} = \partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}, \quad a \text{ áram: } \hat{f},$$

$$b \text{ erő: } \hat{B} = \partial_i (\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}, \quad b \text{ áram: } \hat{g}.$$

Az egyenlőtlenség klasszikus megoldása az erők és áramok kapcsolatát adja, a következő csatolt Ginzburg–Landau-egyenletrendszer formájában:

$$\partial_t a = \hat{f} = \hat{l}_1 [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] + \hat{l}_{12} (\partial_i (\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}), \quad (2.57)$$

$$\partial_t a = \hat{g} = \hat{l}_{21} [\partial_i (\partial_{\partial_i a} \hat{s}) - \partial_a \hat{s}] + \hat{l}_2 [\partial_i (\partial_{\partial_i b} \hat{s}) - \partial_b \hat{s}]. \quad (2.58)$$

Az $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_{12}, \hat{l}_{21}$ vezetési együtthatók a második főtételek értelmében nem lehetnek tetszőlegesen. Általános esetben, azaz amennyiben nem tételezzük fel reciprocitási relációk érvényességét, a szimmetrikus és antiszimmetrikus részeket szétválaszthatjuk a következő együttható-kombinációk bevezetésével: $\hat{l} = (\hat{l}_{12} + \hat{l}_{21})/2$ és $\hat{k} = (\hat{l}_{12} - \hat{l}_{21})/2$. Az entrópiatermelés nemnegatív, ha

$$\hat{l}_1 \geq 0, \quad \hat{l}_2 \geq 0 \quad \text{és} \quad \hat{l}_1 \hat{l}_2 - \hat{l}^2 \geq 0. \quad (2.59)$$

A (2.57)–(2.58) fejlődési egyenleteket átírhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \partial_t a \\ \partial_t b \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l} + \hat{k} \\ \hat{l} - \hat{k} & \hat{l}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Természetesen felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet a reciprocitási relációkkal, azaz egyrészt jogos-e nem csak a szimmetrikus vagy antiszimmetrikus csatolást tekinteni, másrészt van-e ennek bármi fizikai szerepe?

A reciprocitási relációk a fő következményei Lars Onsager gondolatának, amely összekapcsolja a fluktuációkat a makroszkopikus termodinamikával [58, 59, 81, 82, 181]. Maga Onsager eredményeinek érvényességi körét a következőképpen értékeli [82]:

"A következő megszorítást tettük: egy kinetikus modellben a termodinamikai változók a nagyszámú molekuláris változó algebrai összegei, és szükséges, hogy páros függvényei legyenek azoknak a molekuláris változóknak, melyek páratlan függvényei az időnek (mint például a molekuláris sebességek)."⁹

A Casimir-típusú reciprocitási relációk is mikroszkopikus fluktuációkon alapulnak [181]. A legtöbb belső változó esetén nincs ilyen mikro-, vagy mezoszkopikus háttér. Például a károsodás jellemzésére bevezetett belső változók a legegyszerűbb esetekben is bonyolult szerkezeti rendezetlenséget, esetleg mikrorepedeztettség-formákat jellemeznek mezoszkopikus skálán (vagy mikrorepedeztettség-eloszlásokat). A termodinamikai változók és a mezoszkopikus szerkezet viszonya reménytelenül bonyolult minden gyakorlatilag érdekes, nem túlidealizált esetben. De még az ideálisan rugalmas kontinuumban található egyforma és szabályosan elrendezett mikrorepedések esetén sem egyszerű makroszkopikus mezőket találni [182]. Másrészt az Onsager-féle reciprocitás időtükrözési tulajdonságokat is feltételez vagy mikro-, vagy legalább makroszinten [183, 156]. Mivel belső változók esetén erről sem beszélhetünk, a reciprocitási relációk érvényességének egyik feltétele sem teljesül esetünkben, az általános eset feltételezése ezért nem ésszerűtlen. Ráadásul ezzel az elméleti kiegészítéssel tett predikciókat kísérletileg is ellenőrizhetjük, mint ahogy azt a 2.10 fejezetben deformáció és tenzoriális belső változó csatolására, vagy a hővezetés esetére a 2.9 fejezetben. Mindkét esetben az általános esettel érhetünk el egyezést a kísérletekkel.

⁹ "The restriction was stated: on a kinetic model, the thermodynamic variables must be algebraic sums of (a large number of) molecular variables, and must be *even* functions of those molecular variables which are odd functions of time (like molecular velocities)."

2. Kontinuum-termodinamika

Belső állapotváltozók

Ha a vezetési mátrix diagonális, azaz $\hat{l} = 0$ és $\hat{k} = 0$, akkor (2.57)–(2.58) két független egyenletté esik szét:

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \hat{l}_1 \hat{A}, \\ \partial_t b &= \hat{l}_2 \hat{B}.\end{aligned}$$

Ekkor két független Ginzburg–Landau-egyenletet kapunk.

Belső szabadsági fokok

Tegyük fel, hogy minden vezetési együttható állandó és a vezetési mátrix antiszimmetrikus, azaz $\hat{l} = l = 0$, továbbá $\hat{l}_1 = l_1 = 0$. Ekkor $\hat{l}_{12} = -\hat{l}_{21} = k$, tehát a Casimir-típusú reciprocitási relációk érvényesek.

Az egyszerűség kedvéért az entrópia változói legyenek additívan szeparáltak az alábbi K és W függvényekkel:

$$\hat{s}(a, \partial_i a, b, \partial_i b) = -K(b) - W(a, \partial_i a). \quad (2.61)$$

Ekkor a termodinamikai erők a következők:

$$\hat{A} = \partial_a W - \partial_i (\partial_{\partial_i a} W), \quad \hat{B} = K'(b),$$

ahol $'$ az egyváltozós függvény deriváltját jelöli. A (2.60) fejlődési egyenlet speciális formája

$$\begin{aligned}\partial_t a &= k \hat{B} = k K'(b), \\ \partial_t b &= -k \hat{A} + l_2 \hat{B} = -k \partial_a W + k \partial_i (\partial_{\partial_i a} W) + l_2 K'(b).\end{aligned} \quad (2.62)$$

A fenti egyenletrendszer Hamilton-dinamikát tartalmaz [184], a második egyenletben disszipációs taggal kiegészítve. Az \hat{s} entrópiásűrűség formálisan a Hamilton-függvény szerepét játssza, a az általánosított helyzet változó és b a hozzá tartozó impulzus, a szokásosnál csak egy kicsit általánosabban. A Lagrange-dinamikára történő transzformációja triviális, ha $K(b) = \frac{b^2}{2m}$ kvadratikus, ahol m állandó. Ugyanakkor a (2.62) egyenletrendszer formája és szerkezete a belső szabadsági fokokra javasolt fejlődési egyenletek szerkezetét adja, az alábbi Lagrange-függvénnyel és disszipációs potenciállal, ahogy az $k = 1$ esetben a [177]/(5.14)-el történő összehasonlításból látszik:

$$\mathcal{L}(\partial_t a, a, \partial_i a) = m \frac{(\partial_t a)^2}{2} - W(a, \partial_i a), \quad \text{és} \quad D(a, \partial_i a) = \frac{ml_2}{2} (\partial_t a)^2.$$

A termodinamikai módszer megadja az entrópiaáram-sűrűséget is. Az általános (2.55) a speciális (2.61) entrópiával a következő formájú:

$$J^i = -K'(b) \partial_{\partial_i a} s + \mathfrak{J}_0^i.$$

A fenti Lagrange-függvénnyel felírt Hamilton-típusú variációs elv természetes peremfeltételei a peremeken eltűnő entrópiaáram-sűrűségnek felelnek meg $\mathfrak{J}_0^i \equiv 0^i$ feltétellel.

Tehát a belső szabadsági fokok mechanikai motivációjú variációs módszere természetes módon beilleszkedik egy tisztán termodinamikai keretbe. A termodinamikai keret egyesíti a reverzibilis és a disszipatív részt, általánosabb, bizonyos együtthatók előjelét meghatározza és az entrópiaáram is számolható belőle. Emellett a variációs elv természetes peremfeltételei az entrópiaáram eltűnésének felelnek meg a peremen [176, 185].

További ötletek: disszipációs potenciálok és diffúz belső változók

Két további fogalom szemlélteti a területen alkalmazott módszerek sokféleségét. Egyrészt disszipációs tagok származtatására alkalmas a disszipációs potenciálok módszere, illetve diffúz belső változóknak nevezik a belső változókat, ha a relaxációs fejlődési egyenleteiket diffúziós tagokkal egészülnek ki, bármi is legyen a gyengén nemlokális kiterjesztés eredete.

A *disszipációs potenciálok* eredetileg Rayleigh disszipációs függvényeiként bukkannak fel [186]. Bizonyos feltételek teljesülése esetén fejlődési egyenleteink disszipatív részét tudjuk belőlük leszámaztatni. A variációs elvek kényelmesen kiegészíthetők velük, disszipatív hatások származtathatóak segítségükkel [81, 82]. Szimmetrikus, szigorúan lineáris vezetési egyenletek, vagy a nemlineáris Gyarmati-Li reciprocitási relációk [187, 188, 189] teljesülése esetén léteznek, tehát ilyen típusú disszipáció származtatható belőlük. Az Onsager-szimmetriák önmagukban, például kvázilineáris vezetési egyenletekre, ehhez nem elegendők. Egy Hamilton-típusú variációs elvnek a disszipációs potenciálok nem részei. Sokáig azt remélték, hogy megfelelő általánosításuk általános módszert ad disszipatív fizikai rendszerek egyenleteinek variációs származtatására [78].

Diffúz belső változókat önállóan [190, 191, 192] munkák értelmeznek. A továbbiakban a belső szabadsági fokokra és a belső állapotváltozókra vonatkozó fejlődési egyenletek közötti szoros viszonyra mutatunk példát.

Az előző szakasz vezetési együtthatóit megtartva (azaz, $l_1 = l = 0$, $k = 1$), speciálisan tekintsük az alábbi kvadratikus K és W függvényeket

$$K(b) = \frac{\beta}{2}b^2, \quad W(a, \partial_i a) = \frac{\alpha}{2}(\partial_i a)^2,$$

ahol α és β pozitív állandók a konkávitás követelménye miatt. Ebben az esetben a (2.62) fejlődési egyenlet a következő:

$$\begin{aligned} \partial_t a &= K'(b) = \beta b, \\ \partial_t b &= -\partial_a W + \partial_i(\partial_{\partial_i a} W) + l_2 K'(b) = \alpha \partial_{ii} a + l_2 \beta b. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Innen b -t kiküszöbölve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\alpha\beta} \partial_{tt} a - \frac{l_2}{\alpha} \partial_t a = \partial_{ii} a. \quad (2.64)$$

Ez egy telegráf (Maxwell–Cattaneo–Vernotte) típusú egyenlet az a belső változóra vonatkozóan. Egyrészt felfoghatjuk úgy, mint a diffúziós (hővezetési) egyenlet kiterjesztését egy tehetetlenségi taggal, de ugyanakkor és másrészt hullámegyenlet egy diffúziós taggal kiegészítve. Ez a kettősség szemléletesen mutatja a termodinamikai és mechanikai stratégiák irányát is az ilyen jellegű egyenletek származtatására.

Összefoglalás

A duális belső változókra vonatkozó gyengén nemlokális elmélet keretei között levezettük a belső dinamikai változók mechanikai jellegű fejlődési egyenleteit.

Általában elfogadott tévhit a belső változókra vonatkozóan, hogy mérhetőek, de nem szabályozhatóak [193]. Az eddigiek alapján ennek az állításnak két vonatkozása

2. Kontinuum-termodinamika

van. Egyrészt ha ismerjük a belső változók mögött a konkrét belső struktúrát és fizikai mechanizmust, akkor legtöbbször megtalálhatóak a szabályozás eszközei. Másrészt általában a belső változók többnyire klasszikus termodinamikai és/vagy mechanikai mezők viselkedését módosítják (reológia). Ebben az esetben ez igaz mindaddig, amíg fejlődési egyenleteik tisztán relaxációs, azaz csak időfüggésre vonatkozó egyenletek. Szabályozhatóság a peremfeltételekkel érhető el. Ha a belső változókra gyengén nemlokálisan kiterjesztett egyenletek érvényesek, akkor azok mechanizmustól függetlenül is szabályozhatóak lehetnek az alapváltozókon keresztül, például azok peremderiváltjainak, áramainak befolyásolásával.

A duális belső változók elméletének van egy természetes ellenőrzési lehetősége. Nevezetesen a mechanika hiperkontinuum-elméletei, az úgynevezett mikrokontinuum-elméletek [80, 194]. Itt az eredeti javaslat kinematikailag értelmezett változókat vezet be (mikrodeformáció, mikroforgás, mikronyúlás) vonatkozó fejlődési egyenleteket tisztán mechanikai módszerekkel származtatják, például variációs elvvel [195]. Ezt az elméletet a duális változók segítségével is tudnunk kell származtatni, sőt kiterjeszteni. Valóban duális belső változókkal természetes módon vezethetőek le ezek az egyenletek [196], sőt, az egész elméletcsalád beágyazható a nemegyensúlyi termodinamika keretei közé. Ezt a beágyazást a kontinuummechanika alapegyenleteit is kényszerként figyelembe véve Liu-eljárással megalapoztuk a [197] munkában, egyúttal a disszipatív kiterjesztést is megadtuk mikrodeformációs elmélet speciális eseteként, szimmetrikus másodrendű tenzori duális változók bevezetésével. Az elmélet más disszipatív tagokat eredményez, mint a szokásos Eringen-Suhubi elmélet, [198, 194], ez a predikció pedig ellenőrizhető. Az ellenőrzés egyik módja a generikus stabilitás vizsgálata [199] illetve a hullámterjedés és a diszperziós relációk elemzése. Ebben a tekintetben fontos megemlíteni az egységes alapelvekben és egyszerű levezetésekben rejlő szintetizálás lehetőségét: a kontinuumokban történő hullámterjedésére vonatkozó szinte összes egyenlet egyesíthető, a bennük szereplő tagok és azok összefüggése értelmezhető, és többféle tulajdonság magyarázható a duális belső változók rendszereként felfogott hierarchikus mikrostruktúra-modellezéssel [196]. Ezeket a lehetőségeket, megfelelő numerikus szimulációkkal szemléltetve bemutatja könyvünk, [51], számos konkrét jóslattal a lehetséges ellenőrzésre.

Az is érdekes, hogy antiszimmetrikus csatolású termodinamikai erők és áramok fizikai jelentése nem csak tehetetlenség lehet. Verhás gondolatébresztő munkáit fontos ezzel kapcsolatban megemlíteni [200, 201].

Végül, a szimmetriatulajdonságok nélküli vezetési egyenletekre jó példát jelenthet a teljes fenomenologikus reológia, ahol a lineáris, rugó-dugattyú elemekből összerakott modellek elemszámának növelésével képesek a kísérletekhez jobb illesztést elérni. Ez a fajta modellezés eredetileg nem használ termodinamikát, vagy termodinamikai feltételeket. Belső változókkal vizsgálva ezeket a modelleket, csak szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus vezetési egyenletek feltételezésével, a termodinamikai feltételek túl szigorúak, kizárnak valódi, megvalósuló lehetőségeket a lehetséges modellek közül [202]. A kísérletek alapján az általános lineáris vezetési törvény érvényes. Erre a kérdésre visszatérek a 2.10 szakaszban.

2.6. Gyengén nemlokális extenzívek és klasszikus irreverzibilis termodinamika

⁰Az előző fejezetben alkalmazott módszer általános, nemcsak belső változók esetén alkalmazható, hanem a klasszikus, szokásos egyenletek kiterjesztésére, illetve származtatására is. Ebben az esetben a kényszerek bonyolultabbak. Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika erő-áram rendszerre származtatható Liu-eljárással, egyúttal magyarázatot adva a levezetett egyenletek univerzalitására és ezáltal széleskörű alkalmazhatóságára.

Azt keressük, hogy extenzív fizikai mennyiségekre milyen feltételeket ró ki az entrópiatermelés egyenlőtlensége. Azaz tulajdonképpen a Cahn–Hilliard-egyenletnél elmondottakat kell itt más oldalról szemügyre vennünk, mert mérleg formájú fejlődési egyenlettel rendelkező mezők fejlődési egyenleteit keressük, a második főtéttel összhangban. Egy *megmaradó* fizikai mennyiségre vonatkozó mérleget általában a következő formában írunk

$$\partial_t \mathbf{a} + \partial_i \hat{\mathbf{j}}^i = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Itt az \mathbf{a} sűrűség tekinthető a szokásos extenzívek sűrűségei Descartes-szorzatának, azaz $\mathbf{a} = (\rho, e, \dots)$, ahol ρ a (tömeg-)sűrűség, e a belsőenergia-sűrűség, $\hat{\mathbf{j}}^i$ pedig a megfelelő \mathbf{a} -áramsűrűségek függvénye: $\hat{\mathbf{j}}^i = (\hat{j}^i, \hat{\mathbf{j}}_e^i, \dots)$, ahol az első tag a tömegáram, a második tag a belső energia teljes áramsűrűsége, a konvektív és konduktív áramsűrűségek összege.

A fenti kényelmes jelöléssel csak a számunkra fontos, a fejlődési egyenletek mérlegszerkezetét (azaz a téridő beágyazottságát) tükröző szabad indexeket használjuk. Az egyes konkrét fizikai mennyiségekre vonatkozó egyenleteknek a szokásos tárgyalásban vannak olyan további tulajdonságai, amelyeket most nem veszünk figyelembe. Az irreverzibilis termodinamika alapvető szerkezeté, az erő-áram párok megjelenése az entrópiatermelésben azonban nem ezen múlik. A mozgással kapcsolatos specialitásokat, azaz a relatív, megfigyelőre vonatkoztatott mennyiségek hatását, a továbbiakban a közeghez rögzített tárgyalással egyszerűsítjük. Ezért ebben a fejezetben pedig nyugvó kontinuumot tekintünk és elsőrendűen nemlokális állapotteret. Ekkor összefoglalva igaz, hogy

- az alapállapotteret \mathbf{a} feszíti ki,
- konstitutív állapotteret $(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a})$,
- a konstitutív függvények pedig az entrópia és áramsűrűsége, továbbá \mathbf{a} áramsűrűsége: \hat{s} , \hat{J}^i és $\hat{\mathbf{j}}^i$.

A fenti (2.65) fejlődési egyenlet nem tetszőleges, teljesülnie kell a termodinamika második főtételenek is, a (2.17) formában. Vezessük be a λ Lagrange–Farkas-szorzót a (2.65) fejlődési egyenlethez mint kényszerhez, és alkalmazzuk Liu eljárását a kons-

⁰ Ez a fejezet a [203] munkámon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

titutív függvényekre, hogy meghatározzuk megengedett formájukat:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \partial_t \hat{s}(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) + \partial_i \hat{J}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) - \hat{\lambda} \left(\partial_t \mathbf{a} + \partial_i \hat{\mathbf{j}}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) \right) = \\
&= \partial_{\mathbf{a}} \hat{s} \partial_t \mathbf{a} + \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} \partial_{it} \mathbf{a} + \partial_{\mathbf{a}} \hat{J}^i \partial_i \mathbf{a} + \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i \partial_{ij} \mathbf{a} - \hat{\lambda} \left(\partial_t \mathbf{a} + \partial_{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \partial_i \mathbf{a} + \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \partial_{ij} \mathbf{a} \right) = \\
&= \left(\partial_{\mathbf{a}} \hat{s} - \hat{\lambda} \right) \underline{\partial_t \mathbf{a}} + \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} \underline{\partial_{it} \mathbf{a}} + \left(\partial_{\mathbf{a}} \hat{J}^i - \hat{\lambda} \partial_{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \right) \partial_i \mathbf{a} + \left(\partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i - \hat{\lambda} \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i \right) \underline{\partial_{ij} \mathbf{a}}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Az alapmezők aláhúzott parciális deriváltjai nincsenek benne a konstitutív állapottérben, a folyamatirány-teret feszítik ki. Liu tétele értelmében nulla tagok együtthatói-ként felírható Liu-egyenletek a következők:

$$\partial_t \mathbf{a} : \quad \partial_{\mathbf{a}} \hat{s} = \hat{\lambda}, \tag{2.67}$$

$$\partial_{it} \mathbf{a} : \quad \partial_{\partial_i \mathbf{a}} \hat{s} = 0^i, \tag{2.68}$$

$$\partial_{ij} \mathbf{a} : \quad \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{J}^i = \hat{\lambda} \partial_{\partial_j \mathbf{a}} \hat{\mathbf{j}}^i. \tag{2.69}$$

Az első egyenlet a Lagrange–Farkas-szorzót az entrópia deriváltjaként határozza meg, a második értelmében az entrópia lokális, független az alapváltozó gradienseitől. A harmadik egyenlet egy megoldása a következő:

$$\hat{J}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) = \partial_{\mathbf{a}} s(\mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{j}}^i(\mathbf{a}, \partial_i \mathbf{a}) + \hat{\mathfrak{J}}^i(\mathbf{a}), \tag{2.70}$$

ahol $\hat{\mathfrak{J}}^i$ a maradék entrópiaáram. Maradék entrópiaáramot az irreverzibilis termodinamika keretei között általános formában több szerző is javasol (többek között megfeleltethető a Müller-féle K-vektornak [204]) különféle fizikai tartalommal a konkrét rendszerekben. Megjegyezzük, hogy a fenti, (2.70) forma még nem a teljes megoldása a (2.69) egyenletnek, és a teljes megoldás elemzése nem felesleges [205]. A disszipációs egyenlőtlenség ezek után

$$0 \leq \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + \hat{\mathbf{j}}^i \partial_i (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}). \tag{2.71}$$

Azonosan nulla maradék entrópiaáram feltételezésével $\hat{\mathfrak{J}}^i \equiv 0^i$, az entrópiaegyenlőtlenség a klasszikus irreverzibilis termodinamika szokásos erő-áram rendszerére egyszerűsödik. A fenti egyenlőtlenség legegyszerűbb megoldása ugyanis az extenzívek áramsűrűségére, mint konstitutív mennyiségre vonatkoztatva lineáris kapcsolatot ad a termodinamikai intenzív mennyiségek gradiensei, mint termodinamikai erők és az extenzívek áramsűrűségei, mint termodinamikai áramok között:

$$\text{Áram: } \hat{\mathbf{j}}^i, \quad \text{Erő: } \partial_i (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}).$$

Ezt a lineáris kapcsolatot szokás Onsager-féle vezetési törvényeknek nevezni [156]:

$$\hat{\mathbf{j}}^i = \hat{\mathbf{L}}^{ik} \partial_k (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s}). \tag{2.72}$$

Itt $\hat{\mathbf{L}}^{ik}$ szimmetrikus része pozitív definit. Ezek után az extenzív mennyiségekre vonatkozó mérlegek a következő egyenletre redukálódnak:

$$\partial_t \mathbf{a} + \partial_i [\hat{\mathbf{L}}^{ij} \partial_j (\partial_{\mathbf{a}} \hat{s})] = 0. \tag{2.73}$$

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

Láttuk, hogy a Liu-eljárás megadja az entrópiaprodukciónak irreverzibilis termodinamikában szokásos alakját, és ugyanakkor az entrópiaáram is levezetődik a második főtétel következményeként. Elsőrendű nemlokalitás feltételezésével a klasszikus formáját kapjuk. Az irreverzibilis termodinamika intuitív eljárását a Liu-eljárás megfelelően megalapozza. Megjegyzendő, hogy az entrópiaáram még az irreverzibilis termodinamika fenti legegyszerűbb feltételrendszere esetén sem egészen az, amit a racionális termodinamika és származék elméletei általánosan posztulálnak a Gibbs-Duhem-egyenlőtlenségben [73, 88, 48]. Vegyük továbbá észre azt is, hogy a tisztán térelméleti, kontinuum levezetésünk eredménye a *lokális egyensúly* – nem hipotézisként – mert az entrópiasűrűség csak extenzív változóktól függ és lokális, azaz független az alapváltozó gradiensektől, a (2.68) Liu-egyenlet szerint. A mérleg típusú alapegyenlet gyengén nemlokális kiterjesztéséhez a lokális egyensúly meghaladásával az állapotteret legalább negyedrendig kell kiegészítenünk, ahogy a Cahn–Hilliard-egyenlet bemutatásakor már említettük. A Liu-eljárás erre az esetre történő alkalmazásával belátható, hogy a konstitutív egyenletek explicit formájának követelménye, az erő-áram rendszer fellépése, a lokális egyensúlyt meghaladóan csak a Cahn–Hilliard-típusú egyenletekre vezethet [?].

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

⁰Az eddigieknél összetettebb kényszerek szerepét a gyengén nemlokális kiterjesztések esetén itt egy még konkrétabb példán, gyengén nemlokális egy komponensű folyadékokra mutatjuk be. A relatív, vonatkoztatási rendszertől függő tárgyalás miatti problémákat úgy tudjuk elkerülni, ha csak a sűrűségben terjesztjük ki a konstitutív állapotteret magasabbrendű térderiváltakkal. Az egykomponensű folyadékok esetén a gyengén nemlokális kiterjesztés Van der Waals kapillaritáselméletére vezethető vissza [135], amelyet tanítványa, Korteweg illesztett össze a folyadékelmélettel [134]. Természetesen kézenfekvően nemcsak a sűrűségben, hanem a sebességben is kereshetünk magasabbrendű deriváltakat [208, 209, 210, 211], az egész problémakör régóta fontos kihívás a menegyensúlyi termodinamikai kutatások számára. A gondolatmenet további részletei [206, 212]-ben találhatóak, illetve a legfontosabb példák hasonló vizsgálatokra, de más irányból és más módszerekkel Dunn és Serrin, Capriz, Morro és Grmela munkái [140, 142, 213, 210].

2.7.1. Folyadékmechanika általában

Az egykomponensű folyadékmechanika alapállapotterét a ρ sűrűség, a v^i sebesség és az e_b belsőenergia-sűrűség feszíti ki. A hidrodinamika ezekre az alapmenyiségekre vonatkozó mérlegeken alapul (lásd pl. [160, 214]). A klasszikus folyadékmechanikában a konstitutív állapotteret, a konstitutív függvények értelmezési tartományát nem az alapváltozók és első deriváltjaik, $(\rho, v^i, e_b, \partial_i \rho, \partial_j v^i, \partial_i e_b)$ feszítik ki, ahogy az előző fejezet irreverzibilis termodinamikai megfontolásai alapján gondolhatnánk, mert az objektivitás miatt a konstitutív állapottérből kizárják a sebességet, a gradienseket viszont nem. Ugyancsak figyelemre méltó a belső energia szerepe az alapváltozók között.

⁰ Ez a fejezet a [206, 207] munkáimon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

A megmaradó teljes energia használata fel sem merül. A relatív sebesség kimaradása ésszerűnek tűnik [73], és a teljes energia, lévén a belső és a kinetikus energiák összege szintén nem látszik objektívnek. Ráadásul a termodinamikai megfontolások a lokális egyensúly használata miatt a belső energiát igénylik, és a sebességet egyáltalán nem kezelik. Az objektivitás kapcsán, illetve az 1.4.2 szakaszban azonban láttuk, hogy egyik érv sem állja meg a helyét, és ezek alkalmazása valójában leszűkíti a folyadékmechanika érvényességi körének megértését, kiterjeszhetőségét és általánosíthatóságát. Az első fejezet megmutatta, hogy a klasszikus termodinamika valójában tartalmazza a sebességet (vagy impulzust) mint termodinamikai változót, az általános elvek tárgyalásakor pedig rámutattam, hogy az objektivitási érvek is hamisak.

Ennek megfelelően a továbbiakban először megmutatom, hogy a Liu-eljárást közvetlenül a természetes változókra alkalmazva – a racionális termodinamika hozzáállításának megfelelően látszólag a lokális egyensúly hipotézise nélkül – hogyan tudjuk megadni a Korteweg-folyadékokra vonatkozó termodinamikai követelményeket. Ezek után pedig a megfelelő lokális termodinamikai megfontolásokkal, azaz a Gibbs-reláció közvetlen felhasználásával levezetem ugyanezeket az egyenleteket. Ez utóbbi levezetés jóval egyszerűbb, de kevésbé mutat rá saját korlátaira, és csak akkor alkalmazható, ha van homogén testekre vonatkozó elméletünk¹⁰. A klasszikus kontinuumok alapmérlegeiben azonosított fizikai mennyiségek fogják a megfontolásaink alapját képezni. A tömegmegmaradás:

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0, \quad (2.74)$$

ahol ρ a sűrűség, v^i pedig a baricentrikus sebesség, ezért a tömegnek nincs konduktív árama. Ez pontosan azon a megállapodáson múlik, hogy a nemrelativisztikus kontinuumok esetén a tömeghez rögzítjük a sebességmezőt, azaz a sebesség mindig a tömeg áramlását jellemzi.

Az impulzusmérleg, azaz a Cauchy-egyenlet

$$\partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\hat{P}^{ij} + \rho v^i v^j) = 0^i, \quad (2.75)$$

ahol ρv^i az impulzussűrűség és \hat{P}^{ij} a nyomástenzor, az impulzus konduktív áramsűrűsége. Az energia mérlege pedig

$$\partial_t e + \partial_i (\hat{q}^i + e v^i) = 0, \quad (2.76)$$

Itt e a teljes energia sűrűsége, és \hat{q}^i a konduktív áramsűrűsége, az energiafluxus.

2.7.2. Termodinamikai elemzés

A második főtétel értelmében az entrópia növekszik elszigetelt és forrásmentes fizikai rendszerekben, ezért következményeinek ellenőrzéséhez forrásmentes esetet vizsgálunk. Mivel folyadékokról van szó, az entrópiamérlegben is érdemes szétválasztanunk a konvektív és konduktív áramsűrűségeket, ezért (2.17) mérleget a következő formába írjuk:

$$\partial_t \hat{s} + \partial_i (\hat{J}^i + \hat{s} v^i) \geq 0. \quad (2.77)$$

Tehát most

¹⁰ A relativisztikus folyadékok esetén például nincs.

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

- az alapállapotteret (ρ, v^i, e) feszíti ki,
- a konstitutív állapotteret pedig $(\rho, \partial_i \rho, \partial_{ij} \rho, v^i, \partial_i v^j, e, \partial_i e)$,
- a konstitutív függvények a következők $\hat{s}, \hat{J}^i, \hat{q}^i$ és \hat{P}^{ij} .

Mivel a sűrűségben másodrendűen gyengén nemlokális állapotteret vettünk figyelembe, ezért a tömegmérleg (2.74) gradiensét is figyelembe kell vennünk további kényszerként az entrópia-egyenlőtlenségben

$$\partial_{it} \rho + \partial_{ij} (\rho v^j) = 0_i, \quad (2.78)$$

A (2.74), (2.78), (2.75) és (2.76) kényszerekhez a $\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}^i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\gamma}$ Lagrange–Farkas-szorzókat vezetjük be. Ezután Liu eljárásának kiindulópontja az előző fejezetekhez hasonlóan felírt kényszerekkel kiegészített egyenlőtlenség:

$$0 \leq \partial_t \hat{s} + \partial_i \hat{J}^i + \partial_i (\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} [\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i)] - \hat{\Lambda}^i [\partial_{it} \rho + \partial_{ij} (\rho v^j)] - \hat{\Gamma}_i [\partial_t (\rho v^i) + \partial_j (\hat{P}^{ij} + \rho v^i v^j)] - \hat{\gamma} [\partial_t e + \partial_i (\hat{q}^i + e v^i)]. \quad (2.79)$$

A konstitutív függvények parciális deriváltjait kifejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \partial_\rho \hat{s} \partial_t \rho + \partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_{ti} \rho + \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} \partial_{tij} \rho + \partial_{v^i} \hat{s} \partial_t v^i + \partial_{\partial_i v^j} \hat{s} \partial_{tj} v^i + \partial_e \hat{s} \partial_t e + \partial_{\partial_i e} \hat{s} \partial_{ti} e + \\ & + \partial_\rho \hat{J}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{J}^i \partial_{ij} \rho + \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{J}^i \partial_{ijk} \rho + \partial_{v^j} \hat{J}^i \partial_i v^j + \partial_{\partial_k v^j} \hat{J}^i \partial_{jk} v^i + \partial_e \hat{J}^i \partial_i e + \partial_{\partial_j e} \hat{J}^i \partial_{ij} e + \\ & + \partial_i (\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} (\partial_t \rho + \rho \partial_i v^i + v^i \partial_i \rho) - \\ & - \hat{\Lambda}^i (\partial_{it} \rho + \rho \partial_{ij} v^j + v^j \partial_{ij} \rho + \partial_i \rho \partial_j v^j + \partial_j \rho \partial_i v^j) - \\ & - \hat{\Gamma}_i (\rho \partial_t v^i + v^i \partial_t \rho + \rho v^i \partial_j v^j + \rho v^j \partial_j v^i + v^j v^i \partial_j \rho + \partial_\rho \hat{P}^{ij} \partial_j \rho + \partial_{\partial_k \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jk} \rho + \\ & + \partial_{\partial_{kl} \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jkl} \rho + \partial_{v^k} \hat{P}^{ij} \partial_j v^k + \partial_{\partial_l v^k} \hat{P}^{ij} \partial_{jl} v^k + \partial_e \hat{P}^{ij} \partial_j e + \partial_{\partial_k e} \hat{P}^{ij} \partial_{jk} e) - \\ & - \hat{\gamma} (\partial_t e + e \partial_i v^i + v^i \partial_i e + \partial_\rho \hat{q}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{q}^i \partial_{ji} \rho + \\ & + \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{q}^i \partial_{ijk} \rho + \partial_{v^j} \hat{q}^i \partial_i v^j + \partial_{\partial_k v^j} \hat{q}^i \partial_{ik} v^j + \partial_e \hat{q}^i \partial_i e + \partial_{\partial_j e} \hat{q}^i \partial_{ji} e) \geq 0. \end{aligned}$$

A tagok átrendezésével pedig ez adódik:

$$\begin{aligned} & (\partial_\rho \hat{s} - \hat{\lambda} - \hat{\Gamma}_i v^i) \partial_t \rho + (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i) \partial_{ti} \rho + \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} \partial_{tij} \rho + (\partial_{v^i} \hat{s} - \rho \hat{\Gamma}_i) \partial_t v^i + \\ & + \partial_{\partial_i v^j} \hat{s} \partial_{tj} v^i + (\partial_e \hat{s} - \hat{\gamma}) \partial_t e + \partial_{\partial_i e} \hat{s} \partial_{ti} e + \\ & + (\partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{P}^{li} - \partial_{\partial_{jk} \rho} \hat{q}^i) \partial_{ijk} \rho + \\ & + (\partial_{\partial_k v^j} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_k v^i} \hat{P}^{lj} - \hat{\gamma} \partial_{\partial_k v^i} \hat{q}^i \partial_{ik} v^j) \partial_{jk} v^i - \hat{\Lambda}^i \rho \partial_{ij} v^j + \\ & + (\partial_{\partial_j e} \hat{J}^i - \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_j e} \hat{P}^{lj} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_j e} \hat{q}^i) \partial_{ij} e + \\ & + \partial_\rho \hat{J}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{J}^i \partial_{ij} \rho + \partial_{v^j} \hat{J}^i \partial_i v^j + \partial_e \hat{J}^i \partial_i e + \\ & + \partial_i (\hat{s} v^i) - \hat{\lambda} (\rho \partial_i v^i + v^i \partial_i \rho) - \\ & - \hat{\Lambda}^i (\rho \partial_{ij} v^j + v^j \partial_{ij} \rho + \partial_i \rho \partial_j v^j + \partial_j \rho \partial_i v^j) - \\ & - \hat{\Gamma}_i (\rho v^i \partial_j v^j + \rho v^j \partial_j v^i + v^j v^i \partial_j \rho + \partial_\rho \hat{P}^{ij} \partial_j \rho + \partial_{\partial_k \rho} \hat{P}^{ij} \partial_{jk} \rho + \\ & + \partial_{v^k} \hat{P}^{ij} \partial_j v^k + \partial_e \hat{P}^{ij} \partial_j e) - \\ & - \hat{\gamma} (e \partial_i v^i + v^i \partial_i e + \partial_\rho \hat{q}^i \partial_i \rho + \partial_{\partial_j \rho} \hat{q}^i \partial_{ji} \rho + \partial_{v^j} \hat{q}^i \partial_i v^j + \partial_e \hat{q}^i \partial_i e) \geq 0. \end{aligned}$$

2. Kontinuum-termodinamika

Ekkor a Liu-egyenletek a folyamatiránytér tagjainak együttthatóiként olvashatóak le

$$\partial_t \rho : \quad \partial_\rho \hat{s} - \hat{\lambda} - \hat{\Gamma}_i v^i = 0, \quad (2.80)$$

$$\partial_{ti} \rho : \quad \partial_{\partial_i \rho} \hat{s} - \hat{\Lambda}^i = 0^i, \quad (2.81)$$

$$\partial_{tij} \rho : \quad \partial_{\partial_{ij} \rho} \hat{s} = 0^{ij}, \quad (2.82)$$

$$\partial_t v^i : \quad \partial_{v^i} \hat{s} - \rho \hat{\Gamma}_i = 0_i, \quad (2.83)$$

$$\partial_{tj} v^i : \quad \partial_{\partial_j v^i} \hat{s} = 0_i^j, \quad (2.84)$$

$$\partial_t e : \quad \partial_e \hat{s} - \hat{\gamma} = 0, \quad (2.85)$$

$$\partial_{tie} : \quad \partial_{\partial_i e} \hat{s} = 0^i, \quad (2.86)$$

$$\partial_{ijk} \rho : \quad \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{J}^i) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{P}^{li)} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{(kj} \rho} \hat{q}^i), \quad (2.87)$$

$$\partial_{jk} v^i : \quad \partial_{\partial_{(k} v^i} \hat{J}^j) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{(k} v^i} \hat{P}^{lj)} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{(k} v^i} \hat{q}_j) + \frac{\rho}{2} \hat{\Lambda}^l (\delta_l^j \delta_i^k + \delta_l^k \delta_i^j), \quad (2.88)$$

$$\partial_{ije} : \quad \partial_{\partial_{je} \rho} \hat{J}^i) = \hat{\Gamma}_l \partial_{\partial_{je} \rho} \hat{P}^{lj)} + \hat{\gamma} \partial_{\partial_{je} \rho} \hat{q}^i. \quad (2.89)$$

(2.82), (2.84) és (2.86) következtében az entrópiásűrűség nem függ $\partial_{ij} \rho$ -tól, $\partial_j v^i$ -től és $\partial_i e$ -től. (2.80), (2.81), (2.83) és (2.85) megadják a Lagrange–Farkas-szorzókat az entrópia deriváltjaiként. Ezért termodinamikai szempontból a Lagrange–Farkas-szorzók a szokásos és gradiens értelemben általánosított termodinamikai intenzív mennyiségeknek felelnek meg [215]. Figyeljük meg, hogy itt már az együttthatók szimmetriáját nem söpörhettük egy konstitutív függvénybe, a (2.88) egyenletben kihasználtuk azt. Ezek után megadhatjuk a (2.87)–(2.89) egyenletrendszer egy megoldását a következőképpen:

$$\hat{J}^i = \partial_e \hat{s} \hat{q}^i + \frac{\rho}{2} (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_j v^j + \partial_{\partial_j \rho} \hat{s} \partial_j v^i) + \frac{1}{\rho} \partial_{v^j} \hat{s} \hat{P}^{ji} + \hat{\mathfrak{J}}^i(\rho, \partial_i \rho, v^i, e), \quad (2.90)$$

ahol a $\hat{\mathfrak{J}}^i$ maradék entrópiaáram tetszőleges függvénye lehet változóinak. Ilyen módon a Liu-egyenletek teljesen megoldhatóak és a Lagrange–Farkas-szorzókon felül megszorításokat adnak az entrópiásűrűség és entrópiaáram lehetséges függvényalakjára vonatkozóan. A megoldást a disszipációs egyenlőtlenségre alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 \leq \sigma_s = \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + \hat{q}^i \partial_i (\partial_e (\rho \hat{s})) + \hat{P}^{ij} \partial_i (\partial_{v^j} \hat{s}) + \partial_j v^j \left[\hat{s} + e \partial_e \hat{s} - \rho \partial_\rho \hat{s} + \frac{\rho^2}{2} \partial_i (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s}) \right] + \partial_j v^i \left[\frac{\rho^2}{2} \partial_i (\partial_{\partial_j \rho} \hat{s}) \right].$$

Itt bevezettük a fajlagos entrópiát, $\hat{s} := \hat{s}/\rho$ jelöléssel. Az egyenlet hagyományos formájának felírásához a belső energiát kell definiálnunk a szokásos módon, a teljes és kinetikus energia különbségeként. Feltételezzük, hogy az entrópia a belsőenergia-sűrűség függvénye, azaz: $\hat{s} = \hat{s}(\rho, \partial_i \rho, e - \rho v^2/2)$. Továbbá az entrópiát, mint additív (extenzív) fizikai mennyiséget akarjuk definiálni, ezért a szokott módon megköveteljük, hogy a fajlagos entrópia csak az \mathbf{e}_b fajlagos belső energiától függjön:

$$\hat{s}(\rho, \partial_i \rho, v^i, e) = \rho \hat{s}(\rho, \mathbf{e}_b, \partial_i \rho), \quad (2.91)$$

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

ahol $\mathbf{e}_b = e/\rho - v^2/2$. Ezekkel a mennyiségekkel a disszipációs egyenlőtlenséget és az entrópiaáramot átírva kapjuk, hogy

$$0 \leq \sigma_s = \partial_i \hat{\mathfrak{J}}^i + (\hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ij}) \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(\hat{P}^{ij} - \left(p + \frac{T\rho^2}{2} \partial_k (\partial_{\partial_k \rho} \hat{s}) \right) \delta_j^i - \frac{T\rho^2}{2} \partial_j (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s}) \right) \partial_i v^j, \quad (2.92)$$

$$\hat{J}^i = (\hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ji}) \frac{1}{T} + \frac{\rho^2}{2} (\partial_{\partial_i \rho} \hat{s} \partial_j v^j + \partial_{\partial_j \rho} \hat{s} \partial_j v^i) + \hat{\mathfrak{J}}^i. \quad (2.93)$$

Láthatjuk, hogy mindkét kifejezésben felbukkan a belső energia árama a szokásos, elsőrendű elméletekben megszokott módon $q^i = \hat{q}^i - v_j \hat{P}^{ji}$.

Vizsgáljuk meg most a mechanikai szempontból disszipációmentes esetet, amikor a mechanikai kölcsönhatásra vonatkozó termodinamikai erő nulla. Ilyen folyadékok nyomását *reverzibilisnek* hívhatjuk:

$$\hat{P}_{rev}^{ij} = \frac{T\rho^2}{2} [(\partial_k \partial_{\partial_k \rho} \hat{s} - 2\partial_\rho \hat{s}) \delta^{ij} + \partial^i \partial_{\partial_j \rho} \hat{s}]. \quad (2.94)$$

Ha az elmélet lokális, az entrópia független a sűrűség deriváltjától és a reverzibilis nyomás

$$\hat{P}_{Euler}^{ij}(\rho) := -T\rho^2 \partial_\rho \hat{s}(\rho) \delta^{ij}. \quad (2.95)$$

Az ilyen folyadékot Euler-folyadéknak nevezik, és felismerhetjük a $p(\rho) = -T\rho^2 \partial_\rho \hat{s}(\rho)$ skaláris nyomást az egyenletben. Bevezetve a P_v^{ij} viszkózus nyomást megoldhatjuk a disszipációs egyenlőtlenséget, és a vezetési egyenleteket a szokásos lineáris formában írhatjuk elő:

$$\hat{P}_v^{ij} := \hat{P}^{ij} - \hat{P}_{rev}^{ij} = \hat{L}^{ijkl} \partial_k v_l. \quad (2.96)$$

Itt L^{ijkl} pozitív szemidefinit konstitutív függvény. Vegyük észre, hogy ha \hat{s} független a sűrűség gradiensétől, L^{ijkl} állandó, \hat{P}_v^{ij} pedig izotrop függvénye a sebességgradiensnek, akkor a hagyományos Navier–Stokes-folyadék egyenleteit kapjuk vissza.

A nyomás reverzibilis része, beleértve a gyengén nemlokális részt is, felfogható erőként is. Pontosabban létezik egy olyan \hat{U} skalár értékű függvény, hogy

$$\partial_j \frac{\hat{P}_{rev}^{ij}}{T} = \rho \partial^i \hat{U}. \quad (2.97)$$

\hat{U} a fajlagos entrópiából számolható:

$$\hat{U} = \partial_i (\rho \partial_{\partial_i \rho} \hat{s}) - \partial_\rho (\rho \hat{s}). \quad (2.98)$$

Ezért mechanikailag nem disszipatív folyadékok esetén az impulzusmérleg ekvivalensen átalakítható:

$$\rho \dot{v}^i + \partial_j \hat{P}_{rev}^{ij} = 0^i \iff \rho \dot{v}^i + T\rho \partial^i \hat{U} = \hat{P}_{rev}^{ij} : \partial_j \frac{1}{T}. \quad (2.99)$$

Ezzel megadtuk és jellemeztük a Korteweg-folyadékok egy termodinamikailag megengedett családját.

2. Kontinuum-termodinamika

2.7.3. Lokális és gyengén nemlokális egyensúly

Az előző fejezet általános módszert ad a Navier–Stokes-egyenletek gyengén nemlokális kiterjesztésének származtatására, nagyon kevés feltevéssel. Egy jóval egyszerűbb, de heurisztikusabb, azaz több feltevést igénylő levezetést kaphatunk, ha a kezdetektől megengedünk a kontinuumok esetén általános gradiensfüggő entrópiát és az ennek megfelelő Gibbs-relációt, hasonlóan ahogy azt a belső változók esetén láttuk. Azaz ebben a konkrét esetben a térderivált jellegű termodinamikai változókat is homogén testekkel analóg módon alkalmazzuk a kontinuumelmélet kidolgozására. Ez a klasszikus termodinamika gyengén nemlokális általánosításán alapuló térelmélet, a lokális egyensúly hipotézisének mintájára nevezhetjük a *gyengén nemlokális egyensúly* hipotézisének. Jelen esetben az előző fejezet alapján a fajlagos entrópia a fajlagos belső energia, a sűrűség és a sűrűséggradiens függvénye, $s(\mathbf{e}_b, \rho, \partial_i \rho)$, ezért világos, hogy a Gibbs-reláció helyes formája:

$$de_b = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho - A^i d(\partial_i \rho), \quad (2.100)$$

ahol T, p, A^i a fajlagos entrópia parciális deriváltjaival bevezetett intenzív mennyiségek és ahol egyedül az $A^i = T\partial_{\partial_i \rho} s$ sűrűséggradiens affinitás az új mennyiség. Ennek megfelelően az (1.5) extenzivitási reláció általánosítása, illetve a Gibbs–Duhem-reláció pedig a következő:

$$\mathbf{e} = Ts - \frac{p}{\rho} - A^i \partial_i \rho + \mu, \quad d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho}dp - \partial_i \rho dA^i. \quad (2.101)$$

A szokásos lokális egyensúly esetén az entrópia független a sűrűséggradienstől. Ebben az esetben természetesen visszkapjuk a Gibbs-reláció megszokott, (1.12) formuláját. Érdekességképpen megadjuk a megfelelő teljes termodinamikai testre vonatkozó Gibbs-reláció sűrűségben elsőrendűen nemlokális általánosítását is:

$$dE = TdS - p dV + \mu dN - A^i d(M \partial_i \rho), \quad (2.102)$$

ahol $M = Nm$ a tömeg, m a részecsketömeg, ahogy azt az 1.1.1. fejezetben láttuk. Az utolsó tag megmutatja, hogy a teljes termodinamikai testre vonatkozó megfontolásokkal, nem egészen kézenfekvő a sűrűséggradienshez tartozó „extenzív” mennyiség kiválasztása. A termosztatikában tett $A\beta$ lokalizálhatósági feltevés gyengén nemlokális kiterjesztésekor a térelméleti oldal az ésszerű kiindulópont. A Gibbs-reláció klasszikus állapotváltozók és belső változóktól és deriváltjaiktól függő alakjait részletesen tárgyalom az [51] könyvünk A függelékében.

A további gondolatmenethez érdemes szubsztanciális deriváltakat bevezetnünk. A tömegmegmaradás a lokális (2.74) helyett a következő:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i = 0. \quad (2.103)$$

A belső energia mérlegét a teljes és a kinetikus energia mérlegeiből kaphatjuk a szokott módon [78, 156]:

$$\rho \dot{\mathbf{e}}_b + \partial_i q^i = -P^{ij} \partial_i v_j. \quad (2.104)$$

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

Az entrópiaáram (2.93) formáját megsejthetjük a divergenciák leválasztásával. Ha ezt tudjuk, akkor az entrópia mérlege a következőképpen fejthető ki:

$$\begin{aligned}\rho\dot{s} + \partial^i j^i &= \rho \frac{\dot{e}_b}{T} + \frac{p}{T} \dot{\rho} - \rho \frac{A^i}{T} \frac{d}{dt} \partial_i \rho + \partial_i \left[\frac{q^i}{T} + \frac{\rho^2}{2T} (A^i \partial_j v^j + A^k \partial_k v^i) \right] \\ &= q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left[\hat{P}^{ij} - \left(p + \frac{T\rho^2}{2} \partial_k \left(\frac{A^k}{T} \right) \right) \delta_j^i - \frac{T\rho^2}{2} \partial_j \left(\frac{A^i}{T} \right) \right] \partial_i v^j \geq 0.\end{aligned}\quad (2.105)$$

Itt behelyettesítettük a (2.103) tömeg- és a (2.104) energiamérleg időderiváltjait, illetve felhasználtuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \partial_i \rho = -\partial_k \rho \partial_i v^k - \partial_i (\rho \partial_k v^k). \quad (2.106)$$

Láthatóan visszakaptuk az entrópiaprodukciónak (2.92) alakját, sokkal egyszerűbb számítások után.

Amenyiben az entrópiaáram és a Gibbs-reláció is a megszokott formájú, azaz

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad j^i = \frac{q^i}{T}, \quad (2.107)$$

akkor pedig visszakapjuk az entrópiaprodukciónak a szokott formában, ahogy a Navier-Stokes-Fourier-egyenletek származtatásához szükséges:

$$0 \leq \rho\dot{s} + \partial_i j^i = \rho \frac{\dot{e}_b}{T} + \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + \partial_i \left(\frac{q^i}{T} \right) = q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} (\hat{P}^{ij} - p\delta_j^i) \partial_i v^j. \quad (2.108)$$

2.7.4. Schrödinger–Madelung-folyadék

A termodinamikailag kompatibilis Korteweg-folyadékok családjából különösen érdekes az a speciális eset, amikor

$$\hat{s}_{\text{SchM}}(\mathbf{e}_b, \rho, \partial_i \rho) = \hat{s} \left(\mathbf{e}_b - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial_i \rho}{2\rho} \right)^2 \right), \quad (2.109)$$

ahol ν pozitív állandó. Szorítkozunk most a tisztán mechanikai esetre, azaz tegyük fel a továbbiakban, hogy a hőmérséklet homogén, $\partial_i T = 0$.

A reverzibilis nyomás ekkor

$$P_{rev}^{ij} = -\frac{\nu}{8} \left(\partial_k^k \rho \delta^{ij} + \partial^{ij} \rho - \frac{2\partial^i \rho \partial^j \rho}{\rho} \right), \quad (2.110)$$

A potenciál:

$$U = -\frac{\nu}{4T_0 \rho} \left(\partial_k^k \rho - \frac{\partial_k \rho \partial^k \rho}{2\rho} \right) = -\frac{\nu}{2T_0} \frac{\partial_k^k R}{R}, \quad (2.111)$$

ahol T_0 a homogén hőmérséklet, és az $R = \sqrt{\rho}$ mennyiség bevezetésével látszik, hogy (2.111) egy m tömegű részecske de Broglie–Bohm-féle kvantumpotenciálja elosztva a T_0 hőmérséklettel, ha $\nu = \hbar^2/m^2$ [216, 217].

2. Kontinuum-termodinamika

A Schrödinger–Madelung-folyadék entrópiaáram-sűrűsége

$$J_{\text{SchM}}^i = -\frac{1}{T} \left[-q^i + v_k P_{rev}^{ki} + \frac{\nu}{8} (\partial^i \rho \partial_k v^k + \partial_k \rho \partial^i v^k) \right]. \quad (2.112)$$

Tehát megkaptuk a kvantummechanika Madelung-féle hidrodinamikai egyenleteit. A (2.97) nyomás-erő összefüggés miatt egyben megmutattuk, hogy az egyenletek ekvivalensek a Bohm-féle, Newton-egyenleten alapuló interpretáció egyenleteivel, mert (2.111) éppen a de Broglie–Bohm-potenciál. Mindehhez a termodinamikai feltételeken és a Planck-állandó rögzítésén túl az entrópiafüggvény sűrűségben gyengén nemlokális részének 2.109 formájú rögzítése kellett. Ennek speciális tulajdonsága a tömegskála invariancia, ami a Schrödinger-egyenlet linearitását eredményezi.

Schrödinger-egyenlet

Ha a Schrödinger–Madelung-folyadék örvénymentes, azaz $\partial^i v^j = \partial^j v^i$, akkor a tömeg- és impulzusmérlegek együtt a Schrödinger-egyenletre vezetnek. Ugyanis ekkor a (2.75) levezethető egy Bernoulli-egyenletből egy adott vonatkoztatási rendszerben. Bevezetve az S skalár sebességpotenciált a

$$v^i = \frac{\hbar}{m} \partial^i S \quad (2.113)$$

definícióval megkapjuk a Bernoulli-egyenletet, ha észrevesszük, hogy (2.99) második fele a

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U = 0 \quad (2.114)$$

egyenlet gradiense. Ezek után az úgynevezett Madelung-transzformáció segítségével bevezethetjük a $\psi = R e^{iS}$ függvényt, ahol $R = \sqrt{\rho}$ és i a képzetes egység. (2.74)-et megszorozva $i\hbar e^{iS}/(2R)$ -el, (2.114) egyenletet pedig $m R e^{iS}$ -el, egyetlen komplex egyenletbe egyesíthetjük a tömeg- és impulzusmérleget, és megkapjuk az m tömegű szabad részecskére vonatkozó Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_k^2 \psi. \quad (2.115)$$

Ez a speciális eset megmutatja, hogy vannak gyengén nemlokális folyadékok, és hogy a származtatásukra alkalmazott általános módszer fizikailag fontos feltételeket eredményez. A Schrödinger–Madelung-egyenlet fizikai rendszerek igen nagy családjának jó modellje.

Kontinuumok tömegpontra

Felmerül a kérdés, hogy mi különbözteti meg a Schrödinger–Madelung-folyadék (2.109) entrópiafüggvényét a többi lehetséges gyengén nemlokális entrópiafüggvénytől? A válaszhoz a kvantummechanika sajátosságait kell a kontinuumelméletben érvényesíteni. A sűrűséget itt valószínűsűrűségként interpretáljuk és azt akarjuk, hogy független részecskékre független egyenletek vonatkozzanak. Azaz ekkor a két

2.7. Egykomponensű folyadékok - másodrendű nemlokalitás a sűrűségben

folyadék (illetve részecske), együttes leírásához bevezetjük a $\rho_{12}(r_1^i, r_2^j)$ valószínűségi-sűrűséget a két folyadék(-részecske) együttes tartózkodási valószínűségének leírására a tér két, r_1^i és r_2^j pontjában. Két független folyadék esetén az egyfolyadék- és kétfolyadék-valószínűségi-sűrűségek közötti viszony természetes módon szorzat formájú: $\rho_{12}(r_1^i, r_2^j) = \rho_1(r_1^i)\rho_2(r_2^j)$, azaz röviden $\rho_{12} = \rho_1\rho_2$. Ilyen megfontolások természetesek a statisztikus fizikában, bár szokatlanok egy többkomponensű kontinuumelméletben.

Az entrópia viszont, ismét csak természetes módon, akkor ír le független fizikai rendszereket, ha ilyen változók esetén additív függvényként viselkedik. Gyengén nemlokális folyadék esetén tehát az entrópiától elvárjuk a következő tulajdonságot:

$$\hat{s}(\rho_1\rho_2, D(\rho_1\rho_2)) = \hat{s}(\rho_1, D(\rho_1)) + \hat{s}(\rho_2, D(\rho_2)), \quad (2.116)$$

Ahol $D = (\partial_{r_1^i}, \partial_{r_1^i})$ a valószínűségi-sűrűség teljes deriváltja. Ennek a függvényegyenletnek pedig egyértelmű (!) a megoldása [218]:

$$s(\rho) = k \ln \rho + \nu \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^2, \quad (2.117)$$

Itt k és ν skalár állandók, ha az entrópia izotrop függvény. Az első tag a szokásos logaritmikus entrópia, a második pedig a fajlagos Fisher-entrópia.

Az entrópia extenzív mennyiség, elsőrendű homogén függvénye a változóinak, ezért a fajlagos entrópia nulladrendű homogén függvénye a teljes entrópia eredeti változóinak, ezért csak a fajlagos mennyiségektől függhet, ahogy azt általában is láttuk az 1.2 fejezetben. Az extenzivitás viszont nem ad megszorítást $s(e_b, \nu, \partial_i \nu)$ formájára. Ha a sűrűség valóban egyetlen részecske tartózkodási valószínűségére jellemző, akkor egyenletesen megnövelve nem változtathatja a kontinuum entrópiáját. Azaz, ha különböző tömegű részecskéket ugyanazzal az egyenlettel akarunk leírni, akkor a fajlagos entrópiára igaz, hogy

$$s(e_b, \lambda\rho, \lambda\partial_i\rho) = s(e_b, \rho, \partial_i\rho). \quad (2.118)$$

Ez a tulajdonság, amelyet tömegskála-függetlenségnek nevezhetünk, kizárja a logaritmikus tagot (2.117)-ből és biztosítani fogja a részecskeszerű viselkedést. Ha a gradiensfüggést a belső energia korrekciójának tekintjük, $s(e_e, \rho, \partial_i\rho) = s(e_b - \nu(\rho)(\partial_i\rho)^2)$ formában, akkor a fenti tulajdonság, a tömegskála-függetlenség pontosan a (2.109) fajlagos entrópiára vezet. Az utolsó nyitott kérdés, hogy vajon a gyengén nemlokális tag az energia jellegű, mint azt a (2.109) formulában feltettük, vagy az entrópiáé, mint ahogy (2.117)-ben szerepelt. Erre a kérdésre jelenlegi tudásunk szerint nincs válasz, mert izoterm esetben a kettő között nincs különbség, a kvantumelmélet termodinamikájában pedig egyelőre másfajta összefüggésekkel foglalkoznak. Mindenesetre a belső változókkal és kémiai reakciókkal kapcsolatos eddigi kísérleti tapasztalatok alapján az entrópiikus intenzív állapotjelzők az elsődlegesek [219, 220, 51].

2.7.5. Összefoglalás

A Liu-eljárás nagyon általános feltételek mellett konstruktív módszert ad fizika törvényeinek elemzésére a második főtétel szempontjából. Jól alkalmazható ismert egyenletek kiegészítésére, általánosítására és új egyenletek konstrukciójára is. Fontos észrevennünk, hogy nemcsak a disszipatív, hanem a reverzibilis, nulla entrópiatermelésű részre is megszorításokat kaptunk. Olyan megszorításokat, amelyek általában

2. Kontinuum-termodinamika

Hamilton-típusú variációs elvből származtatott Euler-Lagrange-egyenlet formájúak [207].

Vegyük észre továbbá, hogy a valószínűségi folyadékokra levezetett (2.118) forma a klasszikus Boltzmann-Gibbs-entrópiásűrűség, egy Fischer-információs taggal kiegészítve. Ennek legegyszerűbb következményeit, az információs és fizikai entrópiákat összekötő Jaynes-féle gondolatmenet gyengén nemlokális entrópiafüggvényekre bevezetett általánosítását vizsgálja [218].

A termodinamikai módszertan sajátos rálátást biztosít a kvantummechanikára, annak interpretációs kérdéseivel kapcsolódva¹¹. A különféle interpretációkhoz kapcsolódó elméleti megfontolások többféle, egymással sokszor összevethetetlen kérdésben eltérnek és kidolgozottsági szintjük, általánosságuk is nagyon más. Az itt felmerült legegyszerűbb eset, az egyrészecke Schrödinger-egyenlet ekvivalens a Madelung- és a Bohm-egyenletekkel, ahogy azt itt is láttuk. Az egyetlen interpretációs kérdés, a sűrűség értelmezése is kézenfekvő: valószínűségi sűrűségnek fogadjuk el, mert egyetlen m tömegű részecske modelljének használjuk. Viszont már ezekre az egyenletekre is nagyon mások a vonatkozó matematikai problémák, például a peremfeltételek, illetve a fizikai kép. Más tanulságos szempontokat vetnek fel a következő munkák: [225, 226, 227]. A nemegyensúlyi termodinamika, illetve itt a hidrodinamikai interpretáció jellegzetessége, hogy csak általános mérlegeken alapul, amelyek a téridő szimmetriákkal való kapcsolatuk miatt minden fizikai elméletben teljesülnek. Ilyen módon a különböző diszciplínák közvetlenül összeilleszthetőek, például a Klein-Gordon-egyenlet is tanulságosan kapcsolható az általános relativitáselmülethez [228, 229].

Egy fontos szempontja a termodinamikai szemléletnek, hogy többféle disszipációs mechanizmus vezethető be és elemezhető segítségével, illetve a stabilitási tulajdonságok is tesztelhetőek. Egyszerűen megmutatható, hogy (2.117) logaritmikus tagot is tartalmazó teljes formája (disszipáció nélkül) logaritmikus kiegészítéshez vezet a Schrödinger-egyenletben. Ez az úgynevezett Bialyniczki-Birula-egyenlet, egyike a legtöbbit vizsgált nemlineáris kiegészítéseknek [230, 231]. A legegyszerűbb disszipációs kiegészítés (logaritmikus tag nélkül), amit vizsgálhatunk, a Newton-szerű Bohm-egyenlethez adott sebességgel arányos csillapítás. Ez az ún. Schrödinger-Langevin-egyenlet [232], amit kanonikus kvantálással is megkaphatunk. A fenti termodinamikai megfontolások segítségével ezekhez a disszipatív kvantummechanikákhoz Ljapunov-függvény konstruálható a stacionárius megoldások stabilitásának vizsgálatára adott peremfeltételek mellett [212]. A másik kézenfekvő disszipációs kiegészítésnek, amely a hidrodinamikai viszkozitás megfelelője, nincs közismert kvantummechanikai megjelenése.

2.8. Homogén és kontinuum

Az előző fejezetben már szó volt róla, hogy a homogén testekre vonatkozó egyenletek, illetve a Gibbs-reláció gyengén nemlokális általánosítása hogyan vezet a kontinuumelméletig. Ebben az alfejezetben röviden megvizsgáljuk a fordított viszonyt. Belátjuk a folyadék egyenletek generikus stabilitását, és megmutatjuk, hogy a termodinamikai test megfelelő definíciójával a kontinuumelméletből visszakaphatók a

¹¹ A hidrodinamikai modellt Madelung a Schrödinger-egyenlet megjelenése után kb. fél évvel publikálta [221, 222] és Jánossy Lajos vizsgálta részletesen [223]-...-[224].

közönséges termodinamika differenciálegyenletei.

2.8.1. Generikus stabilitás

⁰Ahogy a fejezet elején említettük, a homogén egyensúly lineáris stabilitása, az úgynevezett generikus stabilitás termodinamikai alapkövetelmény. Egy komponensű, hővezető, disszipatív folyadékok esetén részletesen megvizsgáljuk ezt a kérdést.

A relativisztikus jelölésekkel történő könnyebb összehasonlíthatóság végett a (2.74) tömegmérleget, a (2.75) impulzusrmérleget és a belső energia (2.104) mérlegét a következő formára alakítjuk:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i = 0, \quad (2.119)$$

$$\dot{z}^i + z^i \partial_j v^j + \partial_j P^{ij} = 0^i, \quad (2.120)$$

$$\dot{e} + e \partial_i v^i + \partial_i q^i = -P^{ij} \partial_j v_i. \quad (2.121)$$

ahol a pont a szubsztanciális deriváltat jelöli és $z^i = \rho v^i$ az impulzussűrűség. A (2.108) entrópiamérlegben a termodinamikai erők és áramok, azaz az energiaáram és a hőmérséklet gradiense, illetve a szimmetrikus, viszkózus feszültségtenzor és a sebességgradiens között lineáris összefüggést feltételezve kapjuk a Fourier-törvényt és a Newton-féle feszültségtenzort:

$$q^i = \lambda \partial^i \frac{1}{T} = -\lambda_F \partial^i T, \quad (2.122)$$

$$P^{ij} - p \delta^{ij} = \Pi^{ij} = -\eta (\partial^i v^j + \partial^j v^i - \frac{2}{3} \partial_k v^k \delta^{ij}) - \eta_v \partial_k v^k \delta^{ij}. \quad (2.123)$$

A nemnegatív entrópiaprodukciónak akkor teljesül, ha a λ_F Fourier-hővezetési tényező, a η nyíró és η_v térfogati viszkozitás pozitív:

$$\lambda > 0, \quad \eta > 0, \quad \eta_v > 0. \quad (2.124)$$

A termodinamikai stabilitást, azaz az entrópia konkávitásának sűrűségekre vonatkozó (1.21) feltételrendszerét kifejtve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} > 0, \\ \Delta = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T} = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \right)^2 \geq 0. \quad (2.125)$$

Itt felhasználtuk az entrópia második vegyes parciális deriváltjainak egyenlőségét $\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} = -\frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T}$, és bevezettük a Δ jelölést az entrópiasűrűség második deriváltjának determinánsára.

Egyensúly és linearizálás

Termodinamikai egyensúlyban a szubsztanciális időderiváltak és a disszipatív áramok egyaránt nullák: $q^i = 0$, $P^{ij} = p \delta^{ij}$. Ekkor (2.122) és (2.123) következtében $T(\varepsilon, \rho) =$ állandó, a sebességmező divergenciamentes és gradiensének szimmetrikus része is

⁰ Ez a fejezet a [233] munkámon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

nulla, azaz $\partial_j v^j = 0$ és $\partial_i v^j = \partial_j v^i$. Tehát (2.119) alapján a $\mu(\varepsilon, \rho)$ kémiai potenciál is állandó. A termodinamikai stabilitás (2.125) egyenlőtlenségei pedig biztosítják az állapotfüggvények megfelelő invertálhatóságát egyfázisú rendszerben, így e és ρ állnadók. Feltételezzük továbbá, hogy a sebességmező rotációmentes, tehát az előző feltételeket is figyelembe véve homogén és állandó. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül nullának tekinthetjük. Összességében az egyensúlyi mezők a következők

$$\begin{aligned} \rho(x^j, t) &= \bar{\rho} = \text{áll.}, & e(x^j, t) &= \bar{e} = \text{áll.}, & v^i(x^j, t) &= 0^i, \\ j^j(x^i, t) &= 0^j, & q^j(x^i, t) &= 0^j, & \Pi^{ij}(x^k, t) &= P^{ij}(x^k, t) - p(\bar{e}, \bar{\rho})\delta^{ij} = 0^{ij}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Jelölje a perturbált mezőket $(\delta\rho, \delta e, \delta v^i, \delta q^i, \delta\Pi^{ij})$. A (2.119)–(2.121) egyenleteket a fenti egyensúly körül linearizálva

$$0 = \dot{\delta\rho} + \bar{\rho}\partial_j\delta v^j, \quad (2.127)$$

$$0 = \dot{\delta e} + (\bar{\varepsilon} + \bar{p})\partial_j\delta v^j + \partial_j\delta q^j, \quad (2.128)$$

$$0^i = \bar{\rho}\delta\dot{v}^i + \partial_i p + \partial_j\delta\Pi^{ij} = \bar{\rho}\delta\dot{v}^i + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\varepsilon}\partial^i\delta e + \frac{\partial\bar{p}}{\partial\rho}\partial^i\delta\rho \right) + \partial_j\delta\Pi^{ij}, \quad (2.129)$$

$$0^i = \delta q^i - \lambda\partial^i\frac{1}{T} = \delta q^i - \lambda\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{T}\partial^i\delta e + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{T}\partial^i\delta\rho \right), \quad (2.130)$$

$$0 = \delta\Pi^{ij} + \eta_v\partial_k\delta v^k\delta^{ij} + \eta\left(\partial^i\delta v^j + \partial^j\delta v^i + \frac{2}{3}\partial_k\delta v^k\delta^{ij} \right). \quad (2.131)$$

Felülvonással a megfelelő függvény egyensúlyi értékét jelöltük, pl. $\bar{p} = p(\bar{e}, \bar{\rho})$.

Az instabilitások vizsgálatához a megoldásokat a következő formában keressük: $\delta Q = Q_0 e^{\Gamma t + ikx}$, ahol Q_0 állandó, k valós és Γ komplex. Mivel az egyensúlyban nyugvó folyadék sebessége nulla, ezért a szubsztanciális időderivált parciális lesz $d/dt = \partial_t$. Ezekkel a feltételekkel a perturbált egyenletek a következők lesznek

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma\delta\rho + ik\bar{\rho}\delta v^x, \\ 0 &= \Gamma\delta e + (\bar{\varepsilon} + \bar{p})ik\delta v^x + ik\delta q^x, \\ 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^x + ik\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\varepsilon}\delta e + \frac{\partial\bar{p}}{\partial\rho}\delta\rho \right) + ik\delta\Pi^{xx}, \\ 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^y + ik\delta\Pi^{xy}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma\bar{\rho}\delta v^z + ik\delta\Pi^{xz}, \\ 0 &= \delta q^x - ik\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{T}\delta e + \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{T}\delta\rho \right), \\ 0 &= \delta q^y = \delta q^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{xx} + ik\left(\frac{8}{3}\eta + \eta_v \right)\delta v^x, \\ 0 &= \delta\Pi^{xy} + ik\eta\delta v^y, \\ 0 &= \delta\Pi^{xz} + ik\eta\delta v^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{yy} + ik\eta_v\delta v^y, \\ 0 &= \delta\Pi^{zz} + ik\eta_v\delta v^z, \\ 0 &= \delta\Pi^{zy}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

A fenti lineáris egyenletrendszer az alábbi mátrixformába írható:

$$M_B^A \delta Q^B = 0, \quad (2.134)$$

ahol δQ a Fourier–Navier–Stokes-folyadék perturbált komponensmezőit jelöli a következő módon:

$$\begin{aligned} \delta Q = & (\delta\rho, \delta e, \delta v^x, \delta q^x, \delta\Pi^{xx}; \\ & \delta v^y, \delta\Pi^{xy}, \delta\Pi^{yy}; \delta v^z, \delta\Pi^{xz}, \delta\Pi^{zz}; \\ & \delta\Pi^{yz}, \delta q^y, \delta q^z). \end{aligned}$$

A 14x14-es M_B^A mátrix ekkor az alábbi formájú

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

ahol \mathbf{I} a 3x3-as egységmátrix, az \mathbf{R} és \mathbf{N} almátrixok pedig a következőek:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho\Gamma & ik & 0 \\ ik\eta & 1 & 0 \\ ik\eta_v & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & ik\rho & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & ik(e+p) & ik & 0 \\ ik\frac{\partial p}{\partial \rho} & ik\frac{\partial p}{\partial e} & \Gamma\rho & 0 & ik \\ -ik\lambda\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{T} & -ik\lambda\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ik\tilde{\eta} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.137)$$

Itt $\tilde{\eta} = 8\eta/3 + \eta_v$, és a felülvonást elhagytuk az egyensúlyi mennyiségek felett.

Exponenciálisan növekvő amplitúdójú síkhullámokat – azaz instabilitás – akkor kapunk, ha Γ és k megoldása a

$$\det \mathbf{M} = (\det \mathbf{N})(\det \mathbf{R})^2 = 0 \quad (2.138)$$

egyenletnek, és Γ pozitív valós részű.

Az \mathbf{R} determinánsára vonatkozó egyenlet egyszerű, $\rho\Gamma + \eta k^2 = 0$, ezért Γ negatív vagy nulla, ha a nyíró viszkozitás nulla.

\mathbf{N} determinánsa a következő diszperziós relációt eredményezi:

$$\begin{aligned} & \rho\Gamma^3 + \\ & + k^2 \left(\eta - \lambda\rho\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} \right) \Gamma^2 + \\ & + k^2 \left(-k^2\eta\lambda\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} + (e+p)\frac{\partial p}{\partial e} + \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Gamma + \\ & + k^4 \rho\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial e}\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{T} - \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial e}\frac{1}{T} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

2. Kontinuum-termodinamika

A Routh-Hurwitz kritérium értelmében (lásd [234]) az $a_0\Gamma^3 + a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3 = 0$ harmadfokú polinom gyökeinek valós része pontosan akkor negatív, ha együtthatói pozitívak és $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$. Az együtthatók pozitivitása a (2.125) és (2.124) feltételek következménye, ha figyelembe vesszük a következő azonosságokat:

$$\partial_e p = -(e+p)T\partial_e \frac{1}{T} + nT\partial_e \frac{\mu}{T}, \quad (2.140)$$

$$\partial_n p = -(e+p)T\partial_n \frac{1}{T} + nT\partial_n \frac{\mu}{T}, \quad (2.141)$$

$$\partial_n \frac{1}{T} = -\partial_e \frac{\mu}{T}. \quad (2.142)$$

Az utolsó feltétel értelmében pedig

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_0a_3 &= \\ &= k^6 \left[-\eta\lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \left(\eta - \lambda\rho \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right) \right] + \\ &+ k^4 \left\{ (e+p)^2 \left[\rho\lambda \left(\frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right)^2 - \eta \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right] + (e+p)2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \left(-\eta + \rho\lambda \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{T} \right) + \right. \\ &\left. + \rho^2 \left[\eta \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} + \rho\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{T} \right)^2 \right] \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Itt az első tag láthatóan nem lehet negatív, ha a termodinamikai feltételek teljesülnek. Az utolsó két sor nemnegativitását legkönnyebben talán úgy láthatjuk, ha észrevesszük, hogy a kifejezés $(e+p)$ másodfokú polinomja. A négyzetes tag együtt-hatója pozitív, a Di diszkrimináns pedig a következő formára egyszerűsödik:

$$Di = 4\eta\rho^2 \left(-\eta + \rho\lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} \right) \Delta \leq 0 \quad (2.144)$$

Mivel a diszkrimináns negatív, a teljes másodrendű polinom pozitív. Ezzel belátuk a Fourier–Navier–Stokes- folyadék generikus stabilitását. Megjegyezzük, hogy az előzőekben vizsgált termodinamikai Korteweg-folyadék szintén generikusan stabil a termodinamikai stabilitás [212]-ben adott feltételeivel.

2.8.2. Kontinuum és homogén

Az előző fejezetekben láttuk, hogy a második főtétele közönséges termodinamikában megismert stabilitási értelmezése és az ott adott feltételrendszer hogyan jelenik meg a kontinuumok esetén, illetve, hogy a termosztatika a termodinamikailag konzisztens kontinuumegyenletek levezetésének alapja. Ebben a fejezetben pedig megmutatom, hogy a fordított gondolatmenet érvényes és érdekes, tehát közönséges termodinamika közönséges differenciálegyenletei természetes következményei a kontinuumelméletnek. Ilyen megfontolásokon alapul a relativisztikus hőmérséklet transzformációs szabályait megalapozó munkánk [235].

Ha a kontinuum termodinamika egyenleteiből homogén testekre vonatkozó egyenleteket akarunk származtatni, nem a legkézenfekvőbb megoldás vezet eredményre és a

peremfeltételekre is ügyelni kell. Ugyanis ha a fenti (2.119)–(2.121) egyenletekben minden mennyiséget homogénnek tekintünk, akkor azt kapjuk, hogy a megfelelő homogén mezők időfüggetlenek, így nem lehetnek folyamataik [14]. A termodinamikai test egy egyszerű modelljét kapjuk, ha egy összefüggő, a térszerű metszeteken sima határú térrészt tekintünk, amelynek kiterjedése változhat időben és ezt a változást egyetlen paraméterrel jellemezhetjük, célszerűen az idővel. Ilyen a dugattyú és a henger első fejezetben említett példája (1.1 ábra). Tekintsünk most ettől általánosabban a téridő egy t pillanatában egy összefüggő $H(t)$ halmazt, amelyre mindenféle jó tulajdonságot feltételezünk, hogy az alábbi matematikai műveletek értelmezhetőek legyenek rajta. Legyen ezen a halmazon – a termodinamikai testen – a termosztatikai nyomás és a belső energia is homogén: $\partial^i e = 0$ és $\partial^i p = 0$. Vizsgáljuk először a test energiájának változását, és ehhez rendezzük át a fenti (2.121) belsőenergia-mérleget:

$$\dot{e} + (e + p)\frac{\dot{v}}{v} = -\partial_i q^i - \Pi^{ij}\partial_i u_j. \quad (2.145)$$

Itt v a fajtérfogat, Π^{ij} pedig a viszkózus nyomás. Ezután integráljuk a fenti kifejezést $H(t)$ -re és alkalmazzuk Reynolds transzporttételét (C. függelék):

$$V\dot{e} + V(e + p)\frac{\dot{v}}{v} = \delta Q = -\oint_{\partial H(t)} q^i dA_i - \int_{H(t)} \Pi^{ij}\partial_i u_j dV. \quad (2.146)$$

Itt $V = V(t)$ a $H(t)$ halmaz térfogata és $v = V/M$, ahol M a V térfogatrész anyagának tömege. A jobb oldalon látható időtől függő kifejezést jelöltem δQ -val. Tegyük fel, hogy a termodinamikai test zárt, azaz tömege nem változik $M = \text{áll.}$, és térjünk át fajlagos belső energiára a belsőenergia-sűrűségről $e = e/v$. Ebben az esetben a fenti kifejezés bal oldala célszerűen átrendezhető:

$$V\dot{e} + V(e + p)\frac{\dot{v}}{v} = vM\frac{d}{dt}\left(\frac{e}{v}\right) + vM\left(\frac{e}{v} + p\right)\frac{\dot{v}}{v} = M\dot{e} + Mp\dot{v} = qM, \quad (2.147)$$

azaz

$$\dot{e} = q - p\dot{v}, \quad (2.148)$$

mely pedig nem más, mint az első főtétel (1.25) differenciálegyenlete, klasszikus mechanikai teljesítmény taggal, és a q fajlagos hőteljesítménnyel, amelyet (2.146) jobb oldala alapján értelmezünk.

Ezek után térjünk át a (2.120) impulzusmérleg vizsgálatára. Ennek $H(t)$ -re történő integrálása után kapjuk, hogy

$$\dot{Z}^i = -\oint_H P^{ij} dA_j, \quad (2.149)$$

ahol $Z^i = \int_H \rho v^i dV$ a termodinamikai test teljes impulzusa. Legyen speciálisan a $H(t)$ termodinamikai test a hengerbe zárt gáz az 1.1 ábra szerint, és válasszunk a dugattyú mozgásának irányába vett x tengellyel ellátott, a hengerhez képest nyugvó vonatkoztatási rendszert. Ebben az esetben az impulzusmérlegnek csak az x irányú komponense nem nulla, és az x irányú impulzus

$$Z = \frac{M}{2A}\dot{V} = \frac{M^2}{2A}\dot{v}, \quad (2.150)$$

2. Kontinuum-termodinamika

mert a gáz M tömege állandó, és a dugattyú elmozdulásának fele a gáz tömegközéppontjának elmozdulása. Itt A jelölte a henger keresztmetszetének nagyságát. Mivel (2.149) jobb oldalán a felületre integrált erő szerepel, és erő csak a dugattyúnál fellépő nyomáskülönbség miatt hat a rendszerre, ezért a (2.149) egyszerű termodinamikai rendszerünkben vett x komponense:

$$\frac{M^2}{2A}\ddot{v} = A(p - p_k). \quad (2.151)$$

Tehát visszakaptuk a kiterjesztett közönséges termodinamika (1.39) fajtérfogat változásra vonatkozó differenciálegyenletét, ahol a tehetetlenségi paraméter $\gamma = M^2/(2A^2)$.

2.9. Relokalizálható kontinuumok – hővezetés

2.9.1. Bevezetés – történeti megjegyzések

⁰A hővezetés a nemegyensúlyi termodinamika elméleteinek fő gyakorlóterepe. A parabolikus Fourier-egyenlet a termodinamikai eredetű fejlődési egyenletek prototípusa. Ennek fizikai és matematikai okait láttuk a 2.6 fejezetben: az elsőrendűen gyengén nemlokális állapotter forrásmentes mérlegegyenlettel, mint kényszerfeltétellel kikényszeríti az entrópiaprodukció klasszikus irreverzibilis termodinamikában megszokott formáját. Tehát univerzálisan, nagyon kevés feltétellel megkapjuk a Fourier-egyenletet, függetlenül a hővezetést létrehozó fizikai mechanizmusoktól és anyagszerkezettől. A Fourier-egyenlet azonban nem modellez jól minden hővezetési jelenséget. A második hang és a ballisztikus hővezetés a legismertebbek közülük: megértésükre és modellezésükre számos elmélet létezik, nagyon különböző feltevésekkel. A leggyakrabban hangoztatott elvi probléma a Fourier-egyenlettel kapcsolatban a végtelen jelterjedési sebesség, emiatt valamilyen hiperbolikus egyenlet közelítésének szokás tekinteni. Az ezzel kapcsolatos érvelések félrevezetőek és félreérthetőek, különösen, ha a relativitás elméletére és a fény sebességére mint elvi határra is hivatkoznak benne. Ugyanis egy hiperbolikus elmélet véges jelterjedési sebességet eredményez, de az akármekkora lehet, sokkal nagyobb is, mint a fénysebesség. Hiperbolikus kontinuumelméletekben a jelterjedési sebességek az anyagjellemző paramétereiktől függenek. Másrészt parabolikus elméletek is megfogalmazhatóak relativisztikusan, és az ilyen elméletek figyelembe veszik a fény véges terjedési sebességét [242]. Harmadrészt és legfőképpen pedig ezek az elméletek jól meghatározható érvényességi körrel rendelkeznek, például a hőmérséklet nem változhat nagyon a közepes szabad úthossznál kisebb távolságokon. Ez pedig azt jelenti, hogy túl éles kezdeti feltételek esetén valójában nem jelennek meg a tipikus végtelen sebességű megoldások, az elmélet érvényessége meghatározza a terjedési sebességüket. Például a hő ilyen módon meghatározott terjedési sebessége vízben nagyjából $14 \frac{m}{s}$. Ugyanez igaz a jelek megfigyelhetőségére is: a Fourier-egyenlet exponenciális megoldásainak megfigyelhetőségi, mérhetőségi határa adott sebességgel terjed (függetlenül a műszerek konkrét érzékenységtől), ez pedig megint csak anyagfüggő, és hétköznapi anyagokra messze van a fénysebességtől. Ez igaz mind relativisztikusan, mind nemrelativisztikusan [243, 244, 242, 245]. Ráadásul a hiperbolikus és parabolikus kontinuumelméletek egyfajta hierarchikus szerkezetet mutatnak akár önmagukban [246], akár a kinetikus elméleti háttérrel figyelembe véve [247], felváltva parabolikus és hiperbolikus egyenletekkel. Vagyis egy hiperbolikus elmélet felfogható speciális parabolikus elméletként és fordítva is, attól függően, hogy a hierarchia melyik szintjéről indulunk.

A kísérlet és az elmélet sajátos módon fonódik össze a hővezetés esetén [240]. A hullámszerű hővezetés, a második hang elméleti jóslat volt [93, 248, 249], amikor folyékony héliumban Peshkov először megmérte [250]. Ezután az eredeti kétfolyadék elmélettől eltérő, kinetikus gázelméleti megfontolások alapján [94, 251] merült fel a Guyer-Krumhansl egyenlet és a ballisztikus terjedés [252, 253, 96]. Ezeket a jóslatokat a jelenség kísérleti felfedezése követte speciálisan előállított szilárd nátriumfluorid és bizmut kristályokban [254, 255]. A méréseket azután ugyan részben megmagyarázták az elméletek, de pontosan nem modellezték [239, 256]. Manapság a mikro- és nano-

⁰Ez a fejezet a [236, 237, 238, 239, 240, 241, ?] munkákon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

technológia fejlődése szükségessé teszi a hővezetési jelenségek kis méretekben történő vizsgálatát, ezért a hővezetés elmélete intenzív kutatás tárgya [257, 258]. Több kísérlet mutat eltéréseket a Fourier-egyenletről [259, 260] és számos elméleti fejlemény igyekszik ezeknek az eltéréseknek a természetét megragadni, kísérleti előrejelzéseket tenni a kontinuumelmélet segítségével is [261, 262, 263, 264, 247, 265, 266, 267, 268, 269].

Az említett Fourier-egyenleten túli jelenségeket, elsősorban a második hangot magyarázó makroszkópikus elméletek közül (lásd pl. [270, 271, 263, 272, 258, 273, 274]) a nemegyensúlyi termodinamika kitüntetett szerepet játszik. Ugyanis itt hasonlóan a Fourier elmélethez, *univerzális*, azaz a konkrét anyagszerkezettől és a benne lezajló mechanizmusoktól független a fejlődési egyenlet származtatása. Ahogy azt láttuk az előző fejezetekben a Fourier-egyenlet származtatása a belső energia mérlegének és a második főtételek az érvényességén alapul. Ha az általánosítások levezetése is ilyen értelemben és feltételekkel érvényes, az várható, hogy a Fourier-törvénytől eltérések is szélesebb körben tapasztalhatóak, és nem kötődnek az alacsony hőmérsékletekhez és kis méretekhez. Azonban tiszta fenomenologikus levezetése sokáig csak a Maxwell-Cattaneo-Vernotte (MCV) egyenletnek volt [101], a nemegyensúlyi termodinamika vezető elméletei, mint a kiterjesztet irreverzibilis termodinamika [102], racionális kiterjesztett termodinamika [91] erősen kötődnek a kinetikus elmélethez és nem fejlesztik a fenomenologikus módszereket.

Minden hővezetéssel kapcsolatos vizsgálat sarokpontja a belső energia mérlege,

$$\rho \dot{e} + \partial_i q^i = \sigma_e, \quad (2.152)$$

ahol ρ a sűrűség, e a fajlagos belső energia, q^i a belső energia áramsűrűségének konduktív része, a hőáram, σ_e pedig a belső energia forrássűrűsége. Ez utóbbi a továbbiakban mindig nulla. A pont a szubsztanciális időderiváltat jelöli. Eddig következetesen jelöltük alsó és felső indexekkel a ko- és kontravariáns vektorokat és az azonos indexek összegzése is csak ilyen indexpárookra volt megengedett. Azonban a Fourier-törvény maga eleve szükségessé teszi egy alapvetően kovariáns térbeli derivált egyenlővé tételét egy kontravariáns hőáramsűrűség vektorral. Az azonosítást természetesen a közöttük levő arányossági tényező, a hővezetési együttható tenzor végzi el. Mivel számos további anyagi együttható kerül ebben a fejezetben bevezetésre, ezért a továbbiakban pongyola, de az olvasását megkönnyítő módon egyöntetűen felső indexszel fogjuk jelölni a vektorokat és a kovektorokat.

A Fourier-egyenlet fenomenologikus általánosításaiban a (2.153) konstitutív egyenlet módosítódik további tagokkal. A legfontosabb módosítási javaslatok a következők:

$$q^i = -\lambda \partial^i T, \quad (2.153)$$

$$\tau q^i + q^i = -\lambda \partial^i T, \quad (2.154)$$

$$\tau q^i + q^i = -\lambda \partial^i T + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i, \quad (2.155)$$

$$\tau q^i + q^i = -\lambda \partial^i T + b_2 \partial^i \dot{T}, \quad (2.156)$$

$$\tau q^i = -\lambda \partial^i T + a_2 \partial^{jj} q^i. \quad (2.157)$$

Itt (2.153) a klasszikus Fourier-törvény [275], (2.154) a Maxwell-Cattaneo-Vernotte-egyenlet (MCV) [93, 94, 95], (2.155) a Guyer-Krumhansl-egyenlet (GK) [96], (2.156) a Jeffreys-típusú vagy késleltetési (lagging) hővezetési egyenlet néven ismert

[270], és (2.157) a hővezetés Green–Naghdi-egyenletére vezet (GN) [272]. A hővezetési tényező λ , a relaxációs idő τ , a_1 , a_2 és b_2 pedig további anyagi paraméterek.

Ezeknek az egyenleteknek az eredete, levezetése és motivációja nagyon sokféle. A kinetikus elmélet többféle módon származtatja a Fourier- és az MCV-egyenletet. Például a Boltzmann-egyenlet momentum sorfejtése a Fourier-törvényt adja első rendben, másodrendben pedig az MCV-egyenletet [102, 91]. A GK-egyenletet először a Boltzmann-egyenletből a fonon-rács kölcsönhatásra vonatkozó speciális ütközési integrálokkal vezették le [96, 276].

A fenti egyenleteket származtató fenomenologikusabb elméletek is nagyon sokfélék [270, 271, 263]. A Fourier-törvény a nemnegatív entrópiaprodukció következménye a klasszikus irreverzibilis termodinamikában [5], az MCV-egyenlet megkapható hasonló módon, ha a lokális egyensúlytól való eltérést egy belső változóval jellemezzük [277]. A hőáramsűrűség konduktív része pedig egy olyan konkrét jelölt erre a belső változóra, amelyet a kinetikus elmélet jól megalapozott [101, 102, 91].

A gyengén nemlokális kiterjesztések eredete a fenomenologikus elméletekben is kérdéses. Az elméletek egy része a Guyer–Krumhansl-egyenletet az entrópia áramsűrűségnek a klasszikus formától való eltéréseivel hozza kapcsolatba [278, 279, 280]. A (2.156) késleltetési (lagging) hővezetési egyenletet reológiai analógia alapján javasolták [270], de az eredeti megfontolásokban a termodinamikával való viszonya nem világos [263]. GK-egyenletet vezethetünk le különféle egyszerű mechanizmusokkal is, mint például hőáramhasítás (heat flow splitting) [273], vagy kétlépéses relaxáció [281, 282]. A Jeffreys-típusú hővezetés mentes az MCV-egyenlet számos problémájától (a nemlokális tag miatt) [283]. Green és Naghdi elméletének sajátos a státusa, ugyanis ez egy speciális skaláris belső változón alapul, amelynek az időderiváltja a hőmérséklet, és az elmélet alkotói igen szokatlan módon vizsgálták a lokális egyensúlytól való eltérés termodinamikai következményeit [272]. Egy olyan hővezetési elméletet kaptak, amely nemtriviális módon tartalmazza a megszokott Fourier-törvényt, és amelynek van nulla entrópiaprodukciót eredményező alesete, azaz hővezetést jósol nulla disszipációval.

A fenti rövid áttekintésből is látható, hogy a Fourier-törvény gyengén nemlokális általánosításainak nagyon sokféle motivációja és levezetése létezik. Legtöbbjüket akkor tekintjük fizikai jelenségek érvényes modelljének, ha a mikroszkopikus levezetésük tiszta képet ad a módosítás hátteréről. Néhány fontos esetben, mint például a Jeffreys-típusú hővezetési egyenlet esetén, a második főtétel szerepe nem világos. Az összes termodinamikailag következetes levezetés bevezeti valahogy a lokális egyensúlytól való eltérést. A nemlokális kiterjesztések megengedik az entrópiaáram klasszikus formájától való eltérést.

A továbbiakban az előzőekben felsorolt konstitutív egyenleteket levezetjük az irreverzibilis termodinamika segítségével. Két egyszerű és általános feltevésre van ehhez szükségünk:

- a lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére, ezt egy vektori belső változó segítségével tesszük meg [44, 177, 180],
- az entrópiaáram klasszikus formájától történő eltérést pedig egy áramszorzónak elnevezett, a belső változókhöz hasonló mennyiséggel fogjuk jellemezni [158, 278].

Az alább tárgyalt lineáris közelítésben mind az áramszorzó, mind a belső változó kikü-

2. Kontinuum-termodinamika

szöbölhető, és egy általános konstitutív differenciálegyenletet vezethetünk le, melynek (2.153)–(2.157) mind bizonyos speciális esetei lesznek. Látni fogjuk, hogy a termodinamika II. főtételéből eredő megszorítások egyáltalán nem nyilvánvalóak, és csökkentik a látszólag megjelenő független együttthatók számát, annak ellenére, hogy reciprocitási relációkat nem tételezünk fel.

A csak általános feltevéseken alapuló termodinamikai tárgyalásnak fontos jellemzője, hogy mindaddig, amíg a lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére vonatkozó általános feltételeket egy mikro- vagy mezoszkopikus mechanizmus teljesíti, a következmények ugyanazok lesznek: ezt tekinthetjük a nemegyensúlyi termodinamikai tárgyalás univerzalitásának. Ezt a fontos tulajdonságot két példán mutatjuk be, melyek általános eredményünk speciális esetének bizonyulnak: egyrészt, ha a Fourier-törvénytől való eltérést egy skalármező gradienseivel jellemezzük, akkor a modell egyenletei az úgynevezett parabolikus kétlépéses modellre redukálódnak. Illetve, ha a Fourier-törvénytől való eltérést egy általános vektormezővel jellemezzük, akkor megmutatjuk, hogy ennek a vektormezőnek egy MCV-egyenletet kell kielégítenie.

2.9.2. Az entrópiaprodukció

A lokális egyensúlytól való eltérés jellemzésére egy, a továbbiakban ξ^i -vel jelölt vektorváltozót vezetünk be. Vizsgáljunk izotrop anyagokat. Két konstitutív hipotézist vezetünk be:

1. Feltételezzük, hogy a nemegyensúlyi entrópia kvadratikusan függ a ξ^i belső változótól:

$$s(e, \xi^i) = \hat{s}(e) - \frac{m}{2} \xi^2. \quad (2.158)$$

Itt az m skalár anyagi együttthatót termodinamikai induktivitásnak is nevezik [101]. A fenti forma állapotfüggő $m = m(e, \xi^i)$ induktivitással a Lagrange-középtértéktétellel és az entrópia konkávitásának a nemegyensúlyi állapottéren történő megkövetelésével indokolható. Ha ξ^i fizikai értelmezéséről semmiféle konkrét információnk nincs, akkor a Morse-lemma értelmében a változót átskálázva $m = 1$ általánosan elérhető [44]. Az entrópia konkávitása miatt $m \geq 0$. Ha m állandó, akkor a következő parciális deriváltakat kapjuk:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial e} \right|_{\xi^i} = \frac{1}{T}, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial \xi^i} \right|_e = -m\xi^i. \quad (2.159)$$

Itt T a hőmérséklet. A termodinamikai viszonyokat most is kényelmes a Gibbs-reláció segítségével kifejezni:

$$de = Tds + m\xi^i T d\xi^i. \quad (2.160)$$

2. A második feltevésünk az entrópiaáram-sűrűségét általánosítja. Megköveteljük, hogy ha nincs energiaáram, akkor ne legyen entrópiaáram sem egy tisztán hővezető rendszerben. Ezért az entrópiaáram-sűrűség, amennyiben kétszer folytonosan differenciálható függvénye a hőáramnak, akkor a Lagrange-féle középértéktétel értelmében a következő formába írható:

$$J^i = B^{ij} q^j, \quad (2.161)$$

ahol a B^{ij} konstitutív függvényt áramszorzónak nevezzük. Ezt a feltevést először Nyíri vezette be [158], hővezetésre történő alkalmazása a GK-egyenletre vezet [278]. Ez a feltevésünk teljesen kompatibilis a kinetikus elmélettel, ott például ritka gázok esetére láthatunk konkrét példákat az áramszorzókra, amennyiben az entrópiaáram kiszámításra kerül [91].

A fenti feltételekkel kiszámolhatjuk az entrópiaprodukciónak:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \partial^i J^i &= -\frac{1}{T} \partial^i q^i - \rho m \xi^i \dot{\xi}^i + \partial^i (B^{ij} q^j) = \\ &= \partial^i q^j \left(B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} \right) + (\partial^j B^{ij}) q^i - \rho m \xi^i \dot{\xi}^i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.162)$$

2.9.3. Lineáris vezetési törvények

Itt, az első tagban a konstitutív függvény a B^{ij} áramszorzó, a második tagban a konstitutív függvény q^i , a harmadik tagban pedig a belső változó időderiváltja, azaz a fejlődési egyenlete. Így izotrop kontinuumokban a legáltalánosabb lineáris kapcsolat a megfelelő termodinamikai erők és áramok között hét anyagi paramétert vezet be:

$$q^i = l_1 \partial^j B^{ij} - l_{12} \xi^i, \quad (2.163)$$

$$m \rho \dot{\xi}^i = l_{21} \partial^j B^{ij} - l_2 \xi^i, \quad (2.164)$$

$$B^{ij} - \frac{1}{T} \delta^{ij} = k_1 \partial^i q^j + k_2 \partial^j q^i + k_3 \partial^k q^k \delta^{ij}. \quad (2.165)$$

Itt $l_1, l_{12}, l_{21}, l_2, k_1, k_2, k_3$ skalár állandó vezetési együtthatók, és δ^{ij} az egységtenzort jelölő Kronecker-delta. Az entrópiaprodukciónemnegativitása a következő egyenlőtlenségeket adja az anyagi paraméterekre:

$$\begin{aligned} l_1 \geq 0, \quad l_2 \geq 0, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad k_3 \geq 0, \\ L = l_1 l_2 - \frac{1}{4} (l_{12} + l_{21})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Fontos, hogy a duális belső változókhoz hasonlóan itt sem tételezzük fel reciprocitási relációkat az utolsó két tagban szereplő vektori termodinamikai kölcsönhatások között [176, 284].

Az áramszorzó kiküszöbölhető (2.163)–(2.164)-ből (2.165) segítségével. Továbbá a belső változót is kiküszöbölhetjük (2.163)-ból és (2.164)-ből is. Ha $l_2 \neq 0$ és $m, l_1, l_{12}, k_1, k_2, k_3$ állandók, akkor a következő differenciálegyenlet rögzíti a konstitutív viszonyokat a hőmérséklet és az energiaáram-sűrűség között.

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} q^i + q^i &= \\ &= \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \frac{d}{dt} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right) + a_1 \partial^{ij} q^j + a_2 \partial^{jj} q^i + b_1 \frac{d}{dt} (\partial^{ij} q^j) + b_2 \frac{d}{dt} (\partial^{jj} q^i). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Ebben az egyenletben a szubsztanciális időderiváltat $\frac{d}{dt}$ -vel jelöltük és bevezettük a

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{m \rho}{l_2}, \quad \lambda_1 = l_1 - \frac{l_{12} l_{21}}{l_2}, \quad \lambda_2 = m \rho \frac{l_1}{l_2}, \\ a_1 &= \lambda_1 (k_1 + k_3), \quad a_2 = \lambda_1 k_2, \\ b_1 &= \lambda_2 (k_1 + k_3), \quad b_2 = \lambda_2 k_2 \end{aligned} \quad (2.168)$$

2. Kontinuum-termodinamika

jelöléseket. Látható, hogy (2.167) csak 5 független anyagi paramétert tartalmaz. k_1 és k_3 , illetve l_{12} és l_{21} nem jelenik meg külön. (2.168) egyik együtthatója sem negatív (2.166) egyenlőtlenségei miatt. A hővezetési tényezőt érdemes szemügyre venni, mert

$$l_1 l_2 - l_{12} l_{21} = l_1 l_2 - l_s^2 + l_a^2 \geq 0, \quad (2.169)$$

ahol $l_s = (l_{12} + l_{21})/2$ és $l_a = (l_{12} - l_{21})/2$ a szimmetrikus és antiszimmetrikus részei (2.163)–(2.164) egyenletek vezetési mátrixának. Ennek következményeképpen ha $\lambda_1 = 0$, akkor ebből következik, hogy $\lambda_2 = 0$. Amennyiben merev hővezetőről van szó a szubsztanciális és a ∂_t -vel jelölt parciális időderiváltak megegyeznek és felcserélhetőek a térderiváltakkal. Ebben az esetben a hőáramsűrűség kiküszöbölésével kapott hővezetési egyenlet a következő:

$$\tau \partial_t \left(\partial_t T + C_1 \alpha \partial^{ii} \frac{1}{T} - C_2 a \partial_t^{ii} T \right) + \partial_t T + \alpha \partial^{ii} \frac{1}{T} - a \partial_t^{ii} T = 0, \quad (2.170)$$

ahol $\alpha = \frac{\lambda_1}{\rho c}$, $a = a_1 + a_2$, $C_1 = \frac{\lambda_2}{\tau \lambda_1}$ és $C_2 = \frac{b_1 + b_2}{\tau a}$. Ez a forma mutatja az általános egyenlet alapvetően hierarchikus szerkezetét, amely a belső változók miatt lép fel.

2.9.4. Speciális esetek

A vezetési együtthatók értéke szerint speciális esetekként visszakapjuk a bevezetésben említett (2.153)–(2.157) egyenleteket:

1. *Fourier*. Ha $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ és $l_{12} = 0$, akkor a (2.163)–(2.165) egyenletekből közvetlenül megkapjuk a Fourier-törvényt a következő formában:

$$q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} = -\lambda \partial^i T, \quad (2.171)$$

ahol $\lambda = \lambda_1 / T^2 = l_1 / T^2$ a Fourier-féle hővezetési együttható. Ez a fajta kiküszöbölés nem látszik (2.167)-ből, mert (2.168) és (2.166) miatt $\tau = 0$, $\lambda_2 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ nem lehetséges.

2. *Maxwell–Cattaneo–Vernotte*. Gyakran megemlítik, hogy a kiterjesztett irreverzibilis termodinamikát [102] tulajdonképpen a hőáramsűrűségnek, mint speciális vektori belső változónak a választásával kapjuk, azaz $\xi^i = q^i$ lenne [177, 130]. Azonban esetünkben a kiterjesztett termodinamika fejlődési egyenletei a fenti általános egyenlet a eseteként adódnak, valóban, (2.167) mutatja, hogy $\lambda_2 = 0$, $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$ a (2.154) egyenlethez vezet. Tehát $l_1 = 0$, ezért, a belső változó arányos a hőáramsűrűséggel (2.163) szerint. Ezenkívül $\lambda_1 = l_a^2 / l_2$ pozitív, (2.166) utolsó egyenlőtlensége alapján. Az MCV-egyenletet akkor kapjuk, ha a hővezetést egy Casimir típusú keresztteffektus dominálja. A vonatkozó konstitutív fejlődési egyenlet:

$$\tau \partial_t q^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T}. \quad (2.172)$$

3. *Jeffreys-típusú*. Ha $a_1 = a_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$, akkor a hőáramra vonatkozó Jeffreys-típusú egyenlet termodinamikai változatát kapjuk a következő formában:

$$\tau \partial_t q^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \frac{1}{T} + \lambda_2 \partial_t \left(\partial^i \frac{1}{T} \right). \quad (2.173)$$

$l_1 \neq 0$ -ból $\lambda_2 \neq 0$ következik, és az MCV-egyenlet kiegészült egy Jeffreys-típusú egyenletté. Az egyenlet alapvetően nemlineáris természete nem küszöbölhető ki hőmérsékletfüggő együtthatók feltételezésével, ellentétben az egyszerű Fourier-törvény esetétől.

4. *Guyer–Krumhansl.* Ha $\lambda_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ és $\lambda_1 = \lambda T^2$, akkor kapjuk a GK-egyenletet (2.155). A GK egyenlet is hierarchikus hővezetési egyenletre vezet, a Fourier-egyenlet mellett annak időderiváltja szerepel benne:

$$\tau \partial_t (\partial_t T - C \alpha \partial^{ii} T) + \partial_t T + \alpha \partial^{ii} \frac{1}{T} = 0. \quad (2.174)$$

Here $C = \frac{\alpha}{\tau \alpha}$.

5. *Általános Green–Naghdi-típus.* Egy GN-típusú egyenletet kapunk, ha $l_2 = 0$. Ebben az esetben a Casimir-típusú reciprocitás (2.166) utolsó egyenlőtlenségének kövekezménye, és azt kapjuk, hogy

$$\hat{\tau} \frac{d}{dt} q^i = \hat{\lambda}_1 \partial^i \frac{1}{T} + \hat{\lambda}_2 \frac{d}{dt} \left(\partial^i \frac{1}{T} \right) + \hat{a}_1 \partial^{ij} q^j + \hat{a}_2 \partial^{jj} q^i + \hat{b}_1 \frac{d}{dt} (\partial^{ij} q^j) + \hat{b}_2 \frac{d}{dt} (\partial^{jj} q^i). \quad (2.175)$$

Itt a jelölések hasonlóak (2.167) jelöléséhez, de másfajta kombinációi a termodinamikai paramétereknek, mint (2.168)-ban.

6. *Green–Naghdi-típus.* Az egyszerű GN-típusú egyenlet az $l_2 = 0$, $l_1 = 0$ és Casimir-típusú reciprocitás $l = l_{12} = -l_{21}$ feltételezésével adódik. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\hat{\tau} \frac{d}{dt} q^i = \hat{\lambda}_1 \partial^i \frac{1}{T} + \hat{a}_1 \partial^{ij} q^j + \hat{a}_2 \partial^{jj} q^i. \quad (2.176)$$

A GN-típusú egyenlet lehet nemdisszipatív (nulla entrópiaprodukcióval), ha az entrópia áramsűrűség klasszikus, azaz $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Megjegyezzük, hogy a λ_1 hővezetési együttható a II. főtétel miatt sosem lesz negatív.

2.9.5. Makroszkopikus univerzalitás

A (2.167) általános hővezetési egyenletre is különböző fizikai mechanizmusok vezethetnek. Ebben a részben arra mutatunk két példát, hogy milyen speciális mechanizmusok eredményezhetnek eltérést az entrópiaáram klasszikus formájától. Csak a GK-egyenlet egy leegyszerűsített formáját vizsgáljuk, amikor a $\lambda_2 = 0$ és $b_1 = b_2 = 0$ feltételeken felül még $k_1 = k_2 = 0$ is fennáll. Ebben az esetben (2.167) a következő egyenletre egyszerűsödik:

$$\tau \dot{q}^i + q^i = \lambda_1 \partial^i \hat{B}, \quad (2.177)$$

ahol $\hat{B} = B^{ii}/3 = 1/T + k_3 \partial^k q^k$, $\tau = m\rho/l_2$ és $\lambda_1 = l_a^2/l_2$.

2. Kontinuum-termodinamika

Hőáramok

Első példánkban tegyük fel, hogy a Fourier-egyenlettől való eltérést a \hat{q}^i vektormezővel jellemezzük a következő módon:

$$\hat{q}^i := q^i + \lambda_S \partial^i T, \quad (2.178)$$

ahol λ_S állandó. Behelyettesítve q^i -t a (2.177) egyenletbe, a következő feltételt kapjuk az ismeretlen vektormezőre:

$$\tau \dot{\hat{q}}^i + \hat{q}^i = (\lambda_1 - \lambda_S T^2) \partial^i \frac{1}{T} + (\tau \lambda_S - \lambda_1 k_3 \rho c) \partial^i \dot{T}. \quad (2.179)$$

Itt alkalmaztuk a (2.152) egyenletet, és az $e = cT$ állapotegyenletet állandó c fajhővel. Ezért a $k_3 = \tau \lambda_S / (\lambda_1 \rho c)$ feltétellel a \hat{q}^i vektormező kielégít egy MCV-egyenletet a $\lambda = \lambda_S - \lambda_1 / T^2$ Fourier-féle hővezetési együtthatóval. Vagyis értelmezhetjük a tárgyalt esetet úgy, hogy a q^i teljes hőáramsűrűséget két részre bontottuk: $q^i - \hat{q}^i$ egy Fourier-törvénynek, és \hat{q}^i pedig egy MCV-egyenletnek tesz eleget, azaz a hővezetés két csatornán zajlik [273].

Két hőmérséklet

Egy másfajta jellemzését adhatjuk a Fourier-törvénytől való eltérésnek egy T_2 skalármezővel:

$$\beta \partial^i T_2 := q^i + \lambda_T \partial^i T, \quad (2.180)$$

ahol λ_T és β állandó együtthatók. Behelyettesítve q^i -t az egyszerűsített (2.177) egyenletbe a következő feltétel adódik:

$$\partial^i \left[\beta (\tau \dot{T}_2 + T_2 - T) \right] = [\lambda_1 + (\lambda_T - \beta) T^2] \partial^i \frac{1}{T} + (\tau \lambda_T - \lambda_1 k_3 \rho c) \partial^i \dot{T}. \quad (2.181)$$

Ezért $k_3 = \tau \lambda_T / (\lambda_1 \rho c)$, $\lambda_1 = (\beta - \lambda_T) T^2$ választással a T_2 skalármezőnek ki kell elégítenie egy hővezetési egyenletet. Látszólag kéthőmérsékletű rendszerrel van dolgunk, amelyek között hőtranszport jön létre. Ez jól ismert mechanizmusa a hővezetésnek olyan anyagokban, ahol az egyik komponens termikusan gerjeszthető, függetlenül a másiktól, például fémekben, ahol az elektrónhőmérséklet eltérhet a rácshőmérséklettől [281, 282].

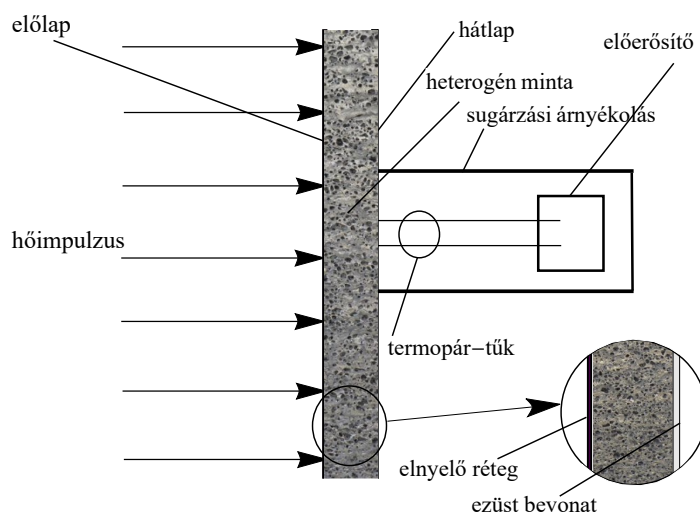
A fenti két példa mutatja, hogy a tisztán makroszkopikus alapelvekre épülő megfontolások esetén nemcsak mikroszkopikus mechanizmusok, mint például fonon ütközési mechanizmusok, hanem mezoszkopikus szintű okok is ugyanarra a fejlődési egyenletre vezetnek.

2.9.6. Hőimpulzus kísérlet és Guyer–Krumhansl-egyenlet

Az előző fejezetben bemutatott elmélet alapján az MCV-egyenlet kis disszipatív hatások mellett adhat mérhető effektust, de más esetben, például magas hőmérsékleten a hullámszerű terjedés nem feltétlenül érzékelhető. A kísérleti vizsgálatainkban az alapvető munkahipotézisünk az volt, hogy a keresett hulláme egyenletre jellemző kvalitatív effektusokat, mint az éles, frontszerű jelterjedés, vagy a hatásterjedés késleltetése

elnyomhatják a más, a klasszikus hővezetési tagon felül megjelenő disszipatív mechanizmusok. A termodinamikai együtthatókra ránézve azt láthatjuk, hogy az általános egyenlet, (2.170), $\lambda_2 = 0$ esetben kapott formája, azaz a Guyer–Krumhansl-egyenlet a következő fizikai közelítés, ezért a BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszéken végzett kísérleti kutatásinkat kezdettől fogva erre az egyenletre fókuszáltuk. Kezdetben a már említett [285, 286], ismert eredmények reprodukálásban reménykedtünk, de az nekünk sem sikerült. Ezek után számos más ötletet végigpróbálva, [238, 287, 288], a kísérleti és a modellezési munka kombinációjával végül klasszikus hőimpulzus kísérlet segítségével 2015-ben egyértelműen kimutattuk a GK-egyenletnek megfelelő hővezetési viselkedést [241], illetve a kísérleti pontosság növelésével, 2017-ben számos további mintán is kimutattuk a Fourier-féle hővezetéstől történő eltérést [?]. A felfedezés kulcsa az volt, hogy egyrészt a gyors és pontos mérőberendezés lehetővé tette, hogy elég nagyszámú mintán próbálkozhassunk, illetve a saját fejlesztésű, gyors numerikus módszer kidolgozásával az eredményeket megfelelően tudtuk elemezni, elkerülve a kereskedelmi programok numerikus problémáit.

A 2.1 ábrán vázolt kísérleti berendezésünkben egy villanófénylámpa generálja a hőimpulzust. Ez a mintán áthaladva megváltozik, a hővezetési egyenletnek megfelelően. A minta hátoldalán K-típusú termopárral mérjük a hőmérséklet változását. A termopár és az elektronika szigetelve van a hőimpulzustól és az elektromágneses zajoktól. A hőimpulzust magát a minta elejénél közvetlenül detektáljuk egy fotocellával, ezáltal pontosan tudjuk az impulzus indulásának időpontját. A tipikus jelalak 10 ms hosszú, éles felfutású háromszög.



2.1. ábra. A hőimpulzus kísérlet vázlata.

Mivel a tanulmányozott minták vastagsága jóval kisebb, mint az átmérőjük és a frontfelületet egyenletesen világítjuk meg, ezért a hővezetés lényegében egyirányú. Az egyenletes jó elnyelést és az esetleges átlátszóság megszüntetését a frontfelület fekete lefestésével értük el. A minták hátsó részén ezüst bevonatot alkalmazunk, így a heterogenitásoktól függetlenül a termopár az effektív hőmérsékletet méri. A kalibrációs mérések és az előzetes számítások [289] szerint ezeknek a bevonatoknak a hatása

2. Kontinuum-termodinamika

elhanyagolható.

Ennek a kísérletnek a modellezéséhez elegendő egy térdimenzióra szorítkoznunk. Ekkor a belső energia mérlege a következő:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.182)$$

Itt c a fajhő, T a hőmérséklet, ρ a sűrűség és q a hőáramsűrűség a hőterjedés irányában. A hőáram fejlődési GK-típusú egyenlete egy dimenzióban:

$$\tau \frac{\partial q}{\partial t} + q + \lambda_F \frac{\partial T}{\partial x} - l^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0. \quad (2.183)$$

Itt $\lambda_F = \frac{\lambda_1}{T^2}$ a Fourier-féle hővezetési együttható, τ a relaxációs idő és $l^2 = a_1 + a_2$ a nemnegatív GK együttható, amelyet az l karakterisztikus mérettel fejeztünk ki.

A mérések kiértékeléséhez fontos felismernünk a fenti (2.182)–(2.183) egyenlet hőmérsékletre kifejezett formájában a hierarchikus szerkezetet [284, 290, 246]:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - C \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.184)$$

Itt $\alpha = \frac{\lambda_F}{\rho c}$ a hődiffúzitási együttható, és a $C = \frac{l^2}{\tau \alpha}$ együttható jelzi a Fourier-féle hővezetéstől történő eltérés mértékét. Figyeljük meg, hogy a Fourier-egyenlet megoldásai a fenti (2.184) egyenletnek is megoldásai, ha $C = 1$, azaz, ha

$$\alpha = \frac{l^2}{\tau}. \quad (2.185)$$

A továbbiakban ezt *Fourier rezonancia feltételnek nevezzük*. Ha $C < 1$ akkor (2.182)–(2.183) megoldásai hullámtulajdonságokat mutatnak, ezt a tartományt aluldiffúziónak nevezzük. Ha $C > 1$, tartományt túldiffúziónak hívjuk [291, 239].

A továbbiakban a (2.182)–(2.183) egyenletrendszer megoldásait keressük kombinált hőimpulzus és hőátadási peremfeltételekkel a frontoldalon. Ezért

$$q(x=0, t) = \begin{cases} q_{\max} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{t_p} \right) \right) - B(T(0, t) - T_0) & \text{ha } 0 < t \leq t_p, \\ -B(T(0, t) - T_0) & \text{ha } t > t_p. \end{cases}$$

Itt t_p a hőimpulzus időtartama, T_0 a külső hőmérséklet és B a hőátadási együttható. A hőimpulzus pontos alakja nem befolyásolja a mérést mindaddig, amíg a hossza sokkal kisebb, mint a kísérlet időtartama [289]. Ezért használhatjuk a numerikusan kezelhetőbb, sima koszinuszfüggvényt a mért háromszögjel helyett. Az ábrán jobbra eső mérési felületet adiabatikusnak tekintjük: $q(L, t) = 0$, a hőszigetelés miatt. Kezdetben a mintában a hőmérsékleteloszlás egyenletes és a hőáram nulla, azaz $T(x, 0) = T_0$ és $q(x, 0) = 0$. Ezt a mérési eljárásunkkal biztosítottuk, két mérés között 30-60 perces szüneteket tartva.

A változókat dimenziómentes formában kifejezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{t}{t_p}, & \hat{x} &= \frac{x}{L}; \\ \hat{q} &= \frac{q}{q_{\max}}, & \text{ahol } q_{\max} &= \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} q_0(t) dt; \\ \hat{T} &= s \frac{T - T_0}{T_{\text{end}} - T_0}, & \text{ahol } T_{\text{end}} &= T_0 + \frac{q_{\max} t_p}{\rho c L}, \\ & & \text{és } s &= \frac{T_{\text{ref}} - T_0}{T_{\text{end}} - T_0}, \end{aligned} \quad (2.186)$$

ahol $q_0(t) = q(x=0, t) + B(T(0, t) - T_0)$ a peremfeltétel hőátadás nélkül. A T_{ref} referenciahőmérsékletet általában a mért maximális hőmérsékletnek választjuk és nem azonos az ismeretlen adiabatikus határhőmérséklettel, T_{end} -vel a minta hűlése miatt. Következésképpen a következő dimenziótlan paramétereket vezetjük be:

$$\hat{\tau} = \frac{\tau}{t_p}; \quad \hat{\alpha} = \alpha \frac{t_p}{L^2}; \quad \hat{l} = \frac{l}{L}; \quad \hat{C} = \frac{\hat{l}^2}{\hat{\tau} \hat{\alpha}} = b; \quad \hat{B} = B \frac{t_p}{\rho c L}. \quad (2.187)$$

Az egyenletek dimenziótlanított formája tehát:

$$s \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (2.188)$$

$$\hat{\tau} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + \hat{q} + s \hat{\alpha} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} - b \hat{\tau} \hat{\alpha} \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{x}^2} = 0. \quad (2.189)$$

A perem és a kezdeti feltételek pedig:

$$\hat{q}(x=0, \hat{t}) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi \cdot \hat{t}) - s \hat{B} \hat{T}(0, \hat{t}) & \text{ha } 0 < \hat{t} \leq 1, \\ -s \hat{B} \hat{T}(0, \hat{t}) & \text{ha } \hat{t} > 1. \end{cases}$$

$\hat{q}(1, \hat{t}) = 0$, $\hat{T}(\hat{x}, 0) = 0$ és $\hat{q}(\hat{x}, 0) = 0$. Itt a paraméterek τ , α és b anyagjellemzők, míg az s hőmérsékleti skálaparaméter és a B hőátadási együttható a környezetet jellemzi.

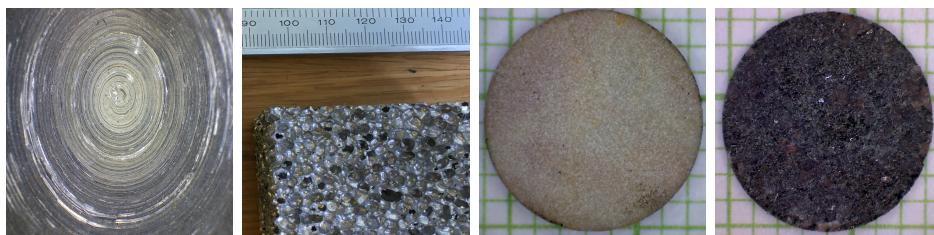
2.9.7. Eredmények

A vizsgált minták közül azt a négyet választottuk, amelyek esetén a Fourier-egyenlettel való eltérés legszembetűnőbb. A minták fényképei a 2.2 ábrán láthatók. Balról jobbra haladva: kondenzátorból kialakított minta, fémhab, villányi kristályos mészkő és leukokrata slírekkel (ez egy közettípus) anyagú minták láthatóak. A mért hátoldali hőmérsékleteket a 2.3 és 2.4 ábrákon figyelhetjük meg. A (2.188)–(2.189) egyenletrendszer iteratív megoldásával a paramétereket az adatokhoz illesztettük a Mathematica 11.0 beépített nemlineáris regressziós algoritmus segítségével.

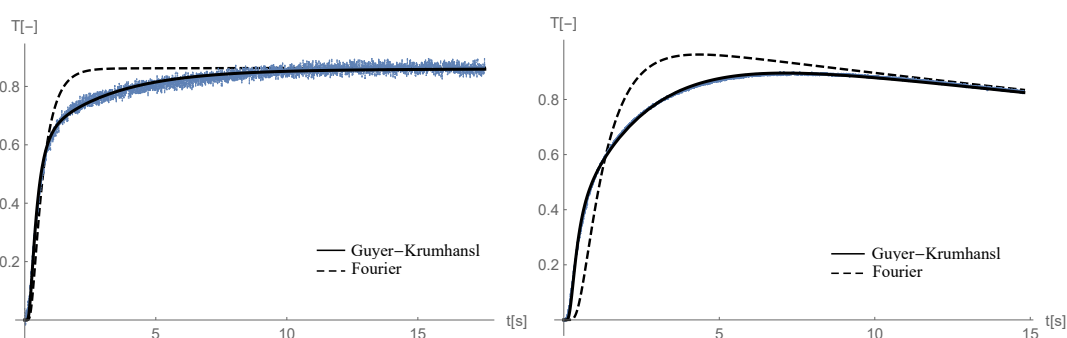
Az ábrákon a dimenziótlan hőmérséklet közelítőleg az adiabatikus határhőmérséklettel skálázik ($0.9T_{\max}$). Az adatokat három pontos futóátlaggal elősimítottuk. A folytonos vonal a legjobb GK-illesztés paramétereivel kapott megoldást mutatja, a szaggatott görbe pedig a legjobb Fourier-illesztést.

A dimenziótlan paramétereket a 2.1 táblázat, a vonatkozó fizikai paramétereket a 2.2 táblázat mutatja.

2. Kontinuum-termodinamika



2.2. ábra. A mért minták fényképein jól megfigyelhető a heterogenitás mértéke. Balról jobbra haladva: a mesterséges kondenzátor és fémhab mintákon jól látható a réteges, illetve habos szerkezet, a villányi mészkő és a leukokrata slírekkel minta viszont homogén ezen a méretskálán.



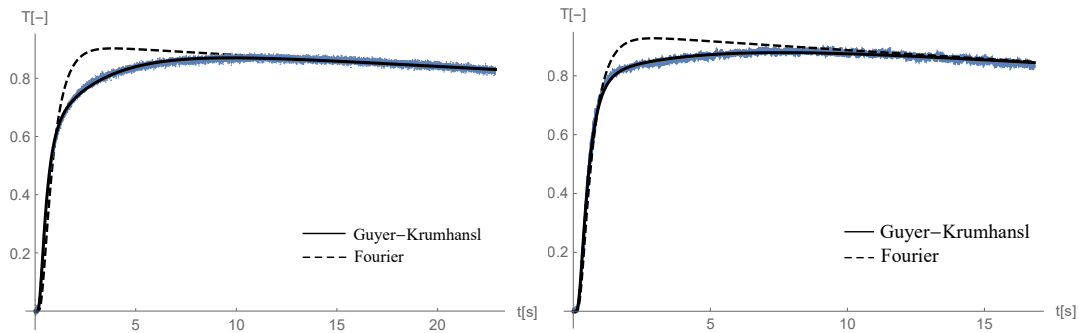
2.3. ábra. A mérési és modellezési eredmények összehasonlítása a mesterséges mintákon. Balra a kondenzátor, jobbra a fémhab hátoldali hőmérséklete az idő függvényében. A folytonos vonal a GK-illesztés, a szaggatott vonal a Fourier-illesztés eredményeit mutatja.

Mind a négy mérés Guyer–Krumhansl-típusú, túldiffuzív hővezetést mutat, mert $b > 1$. Figyelemre méltó, hogy a túldiffuzív esetben a Fourier-elméletnél gyorsabban terjednek a mérhető hőmérsékletváltozások, pont ellenkezőleg, mint az MCV-egyenlettel modellezett hullámszerű hőterjedés esetén elvárt.

2.9.8. Összefoglalás és kitekintés

Ebben a fejezetben megmutattam, hogy a nemegyensúlyi termodinamika belső változós módszertana általánosítja és egységes keretben magyarázza a Fourier-féle hővezetés ismert általánosításait. Az elmélet dinamikai univerzalitása által motivált kísérleti kutatásokban felfedeztük a Fourier-egyenlettől való eltérést és demonstráltuk az univerzalitást. A kísérleti eredmények eléréséhez kulcsfontosságú volt a GK-egyenlet hierarchikus szerkezetének felismerése, hogy a Fourier megoldások megjelenéséhez nem kell, hogy a relaxációs idő, a második időderivált együtthatója nulla legyen.

A kapott legáltalánosabb hővezetési egyenletet összevetve a fejezet elejének belső változós módszertanával kapott egyenletekkel, a (2.170) hővezetési egyenlet hiányosnak tűnik: a második hang csillapítására ugyan a szokásosnál több mechanizmust ad, de stacionárius esetben homogén megoldásra vezet, így nem tartalmaz például Cahn-Hilliard jellegű tagokat [274, 292, 51], illetve főképpen nem képes számot adni a



2.4. ábra. A mérési és modellezési eredmények összehasonlítása a természetes kőzet-mintákon. Balra a villányi mészkő, jobbra a leukokrata sírekkal hátoldali hőmérséklete az idő függvényében. A folytonos vonal a GK illesztés, a szaggatott vonal a Fourier illesztés eredményeit mutatja.

Minta	$\hat{\alpha} \times 10^3$	$\hat{\tau}$	b
kondenzátor	1.40	95.4	2.23
fémhab	0.912	40.2	3.04
mészkő	1.124	99.1	2.17
leukokrata	1.56	132.0	1.77

2.1. táblázat. Dimenziótlan paraméterek

ballisztikus hővezetéséről, azaz a kísérletileg tapasztalt hangsebességgel terjedő hőmérsékletváltozásokról [293, 294]. Ezt a jelenséget a fononok szabad terjedésével szokás magyarázni, és tipikusan a kinetikus elmélethez kötődő, kontinuumelmélettel nem modellezhető jelenségnek tartják [97, 91, 295, 296]. Lebon és munkatársai megmutatták, hogy kontinuum alapú leírás is adható [297, 298, 299]. Kovács Róberttel közösen a fent ismertetett nemegyensúlyi termodinamikai elmélet két változóra történő kiterjesztésével a tiszta ballisztikus hőterjedést is magyarázó modellt állítottunk fel, amely kompatibilis a kinetikus elmélettel, ráadásul az ismert kísérleti eredményeket képes kvantitatívan is leírni [239, 300, ?]. Ez az eredmény egyúttal a ballisztikus hővezetés univerzalizálásának irányába mutat, azaz az eddigiekkel összhangban azt várjuk, hogy szobahőmérsékletű, heterogén anyagok esetén van ballisztikus hővezetés.

2. Kontinuum-termodinamika

Minta	$L[mm]$	$\alpha_F \times 10^{-6}[\frac{m^2}{s}]$	$\alpha_{GK} \times 10^{-6}[\frac{m^2}{s}]$	$\tau[s]$	$l[mm]$
kondenzátor	3.9	3.45	2.13	0.954	2.79
fémhab	5.1	3.04	2.373	0.402	1.70
mészke	1.7	0.45	2.950	0.991	0.80
leukokrata	1.75	7.14	4.77	1.32	1.06

2.2. táblázat. Fizikai paraméterek. α_F Fourier-egyenlethez tartozó hődiffuzivitás (szaggatott vonal), α_{GK} a Guyer-Krumhansl-egyenlethez tartozó hődiffuzivitás (szaggatott vonal)

2.10. Lokális belső változó: rugalmasság és reológia

⁰A rugalmas testek mechanikája már valódi kihívást jelent az objektív kontinuumleírás szempontjából. Elsődlegesen a véges deformációs elmélet kinematikája az, ahol a Noll-féle definíció elégtelennek tűnik. Ezzel a kérdéssel munkatársaimmal régóta foglalkozunk (lásd a [305, 306] kötetekben található tanulmányokat), legutóbbi eredményünk szerint az egész kérdést fogalmilag újra kell alapozni, ugyanis a referenciakonfiguráció, mint az anyagi sokaság reprezentánsa, illetve az anyagi sokaság, a véges deformációs kinematika alapköve fizikailag helytelen és ráadásul felesleges objektum, mert az objektív tárgyalás az anyagi sokaságra történő visszahúzás nélkül, téridőn megtehető [49, 50]. Ennek a kinematikai eredménynek termodinamikai elméletbe történő beültetésén és kísérleti alátámasztásán azóta is dolgozunk, számos vonatkozásában Fülöp Tamás és munkatársai már tesztelték (lásd például [307, 308]). A legtöbb esetben kulcsfontosságú a reológiai hatások leválasztása a képlékenyedés és a hőtágulás okozta változásoktól. Ennek egy teljesen új kinematika segítségével történő átgondolása elméleti és kísérleti oldalról is folyamatban levő nagy munkánk. Az alábbiakban csak a kis deformációs rugalmasságtannal és reológiával kapcsolatos főbb eredményeimet vázolólok.

A reológiai hatások modellezésére egy másodrendű tenzor dinamikai változót érdemes bevezetnünk. Ebben a fejezetben a konstitutív állapottér elsőrendűen gyengén nemlokális, ezért a 2.4 és 2.6 fejezetek alapján a klasszikus irreverzibilis termodinamika módszereit alkalmazom, a gyengén nemlokális elmélet nem játszik szerepet.

A kinematikai alapváltozót, az ϵ^{ij} kis deformációt, például a H^{ij} mozgásgradiens (hagyományosan deformációgradiens, lásd A függelék) szimmetrikus részéből kaphatjuk

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(H^{ij} + H^{ji}) - \delta^{ij}. \quad (2.190)$$

A mozgásgradiens vegyes tenzor, ráadásul egyik indexe a referenciakonfiguráción (anyagi sokaságon) végzett deriválásból származik, mint ahogy az A függelékben ellenőrizhető. Azaz a fenti kifejezés csak a térbeli vektorok és kovektorok megfelelő azonosításával lehet érvényes. Ennek jelölése ebben a fejezetben is az előző fejezethez hasonlóan rontaná az olvashatóságot, ezért itt is eltérünk a következetes téridőjelölésektől. A kis deformáció a mozgásgradienshez hasonló fizikai mennyiség, anyagi deriváltja a szubsztanciális derivált, ahogy azt az A függelékben részletesen megmutattuk (A.66). (A.21) linearizálásával kapjuk a kis deformáció és a sebességmező közötti ismert összefüggést:

$$\dot{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2}(\partial^i v^j + \partial^j v^i). \quad (2.191)$$

A (2.74), (2.75) és (2.104) tömeg-, lendület- és belsőenergia-mérlegek változatlanok, de érdemes egyöntetűen szubsztanciális deriváltakkal felírni őket,

$$\dot{\rho} + \rho \partial^i v^i = 0, \quad (2.192)$$

$$\rho \dot{v}^i + \partial^j \tilde{P}^{ij} = 0^i, \quad (2.193)$$

$$\rho \dot{e} + \partial^i q^i = - \tilde{P}^{ij} \dot{\epsilon}^{ij}. \quad (2.194)$$

⁰Ez a fejezet a [301, 302, 303, 304, 51] munkákon alapul.

2. Kontinuum-termodinamika

Itt \tilde{P}^{ij} az impulzusról szereplő teljes nyomás, amelyet jelölésben megkülönböztetünk a termodinamikai potenciállal definiált statikus P^{ij} nyomástól. A fenti mérlegekből az entrópiatermelés kiszámításához csak az utolsóra, a belső energia mérlegére lesz szükségünk. Feltételezzük, hogy a fajlagos entrópia a deformáció függvénye, de ezen kívül bevezetünk egy tenzori dinamikai szabadsági fokot is, amelyet ξ^{ij} -vel jelölünk. Tehát az 1.5 fejezet (1.57) Gibbs-relációját a belső változóval kiegészítve a fajlagos entrópia definíciós formuláit általában következőképpen írhatjuk:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}), \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \varepsilon^{ij}} = \frac{P^{ij}}{\rho T}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi^{ij}} = -\frac{A^{ij}}{\rho T}. \quad (2.195)$$

Itt $P^{ij} = -\sigma_{\text{stat}}^{ij}$ a statikus nyomás, A^{ij} pedig a belső változóval kapcsolatos intenzív változó, affinitás. A Gibbs-reláció ennek megfelelően a következő

$$d\mathbf{e} = T d\mathbf{s} - \frac{P^{ij}}{\rho} d\varepsilon^{ij} + \frac{A^{ij}}{\rho} d\xi^{ij}. \quad (2.196)$$

Itt az A^{ij} affinitást úgy vezettük be, hogy az energia alapú formulák legyenek egyszerűbbek. Ez a leírás nem a legegyszerűbb termodinamikai oldalról, viszont a kontinuummechanikában megszokottabb. Ennek megfelelően és a legegyszerűbb konkáv fajlagos entrópia eseténél maradván a szokásos kvadratikusan függés a belső változótól a belső energiát korrigálja és így írható:

$$\mathbf{s}(\mathbf{e}, \varepsilon^{ij}, \xi^{ij}) = \mathbf{s}_e\left(\mathbf{e} - \frac{\xi^{ij}\xi^{ij}}{2}, \varepsilon^{ij}\right). \quad (2.197)$$

A belső változó a termodinamikai egyensúlytól való eltérést jellemzi, a kvadratikusan forma megőrzi az entrópia konkávitását a kiterjesztett állapotterén. Vegyük észre, hogy nem az entrópia, illetve belső energia Taylor-sorának első tagjáról van szó ebben az esetben, a fenti kvadratikusan tag együttthatója egy. Ez a Verhás-féle dinamikai szabadsági fokokra alkalmazott szokásos feltevés. Ugyanis a lokális egyensúlytól történő eltérést általában reprezentálva, az entrópia konkávitásán kívül minden más információt a belső változó hordoz. Azaz ekkor a Morse-lemma miatt ez mindig megtehető, nem jelent megszorítást [156, 309]. Másrészt a változót a továbbiakban ki fogjuk küszöbölni, a fejlődési egyenletekben közvetlenül nem fog megjelenni, azaz akármilyen további jellemzése kényelmetlenül felesleges. Amennyiben már a bevezetések valamely konkrét fizikai jelentéssel ruháznánk fel a fenti változót, akkor nem lenne megtehető a Morse-lemma által megkövetelt átskálázás. Ezt a gondolatmenetet követtük a hővezetésre vonatkozó előző fejezetben. Azonban az együttthatóval együtt kiküszöbölve ekkor is ugyanazokra a formulákra jutnánk.

Ezek után az entrópia mérlegével az entrópiaáramsűrűség klasszikus formájának feltételezésével számítjuk ki az entrópiatermelést:

$$J^i = \frac{q^i}{T}. \quad (2.198)$$

Ekkor

$$\rho \dot{\mathbf{s}} + \partial^i J^i = \frac{\rho \dot{\mathbf{e}}}{T} + \frac{P_r^{ij}}{T} \varepsilon^{ij} - \frac{\xi^{ij}}{T} \overset{\diamond}{\xi^{ij}} + \partial^i \frac{q^i}{T} = q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} (\tilde{P}^{ij} - P^{ij}) \varepsilon^{ij} - \frac{\xi^{ij}}{T} \overset{\diamond}{\xi^{ij}}. \quad (2.199)$$

2.10. Lokális belső változó: rugalmasság és reológia

Itt $\overset{\diamond}{\xi}{}^{ij}$ a belső változó objektív időderiváltját jelöli. Ez természetes módon jelenik meg az entrópiaprodukcióban a fajlagos skalár entrópiafüggvény szubsztanciális deriváltján keresztül (lásd A függelék, illetve [302]). Mivel a belső változó tenzori karaktere elvileg többféle is lehet (kotenzor, vegyes tenzor) ezért ez a derivált is többféle formájú lehet. Ebben a kifejezésben a konstitutív függvények a q^i hőáramsűrűség, P^{ij} nyomás és a dinamikai változó fejlődési egyenlete. Ennek megfelelően a termodinamikai erők és áramok:

	Termikus	Mechanikai	Reológiai
Erő	$\partial_i \frac{1}{T}$	$\dot{\varepsilon}^{ij}$	$-\overset{\diamond}{\xi}{}^{ij}$
Áram	q^i	$-(\tilde{P}^{ij} - P^{ij})/T$	$\frac{\overset{\diamond}{\xi}{}^{ij}}{T}$

Vegyük észre, hogy a homogén esetben is hasonló termodinamikai erőket és áramokat kaptunk (lásd (1.69)). A folyadékokhoz hasonlóan, (2.96), itt is bevezetjük a viszkózus nyomásnak megfelelő dinamikai és statikus nyomáskülönbséget:

$$P_v^{ij} = \tilde{P}^{ij} - P^{ij} \quad (2.200)$$

definícióval. Ideális mechanikai kontinuumra a rugalmas nyomás megegyezik a teljes nyomással. Ideális lineárisan rugalmas kontinuumban a feszültség arányos a deformációval, azaz

$$P^{ij} = -2\mu\varepsilon^{ij} - \lambda\varepsilon^{kk}\delta^{ij}, \quad (2.201)$$

ahol μ és λ a Lamé-együtthatók. A termodinamikai erők és áramok közötti lineáris kapcsolatok izotrop esetben keresztteffektust eredményeznek a másodrendű tenzori erők között. A hővezetés ettől független marad, vezetési egyenlete most is a (2.153) Fourier-törvény, mert az izotrópia miatt nem léphet fel csatolás a különböző tenzori rendű mennyiségek között, ellentétben a gyengén nemlokális esettel. Tekintsünk most izoterm folyamatokat, hogy a mechanikai-reológiai részt tisztán elemezhesük. Ekkor, izotrop esetben a két tenzornak a deviatorikus (szimmetrikus, nyom nélküli) és gömbi része (nyoma) egymástól függetlenül csatolódik, az izotrop függvényekre vonatkozó reprezentációs tételek szerint [310, 311], hiszen az entrópiaprodukció maga is izotrop függvénye változóinak:

$$P_v^{kk} = l_1\varepsilon^{kk} - l_{12}\xi^{kk}, \quad (2.202)$$

$$\overset{\diamond}{\xi}{}^{kk} = l_{21}\varepsilon^{kk} - l_2\xi^{kk}, \quad (2.203)$$

$$P_v^{(ij)} = k_1\dot{\varepsilon}^{(ij)} - k_{12}\xi^{(ij)}, \quad (2.204)$$

$$\overset{\diamond}{\xi}{}^{(ij)} = k_{21}\dot{\varepsilon}^{(ij)} - k_2\xi^{(ij)}. \quad (2.205)$$

Egy másodrendű tenzor szimmetrikus, nyom nélküli részét jelöltük az indexek zárójellezésével, $A^{(ij)} = (A^{ij} + A^{ji})/2 - A^{kk}\delta^{ij}/3$. Az együtthatókra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} l_1 &> 0, & l_2 &> 0, & l_1 l_2 - l_{12} l_{21} &\geq 0, \\ k_1 &> 0, & k_2 &> 0, & k_1 k_2 - k_{12} k_{21} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.206)$$

2. Kontinuum-termodinamika

Láthatóan itt sem tételeztünk fel szimmetriát a kereszteffektusok együtthatóira vonatkozóan, hasonlóan a duális belső változók esetén elmondottakhoz. A fenti egyenletekből kiküszöbölhetjük a belső változót, és közvetlen összefüggéseket kaphatunk a nyomás és a deformáció között. Ezt legegyszerűbb megtenni akkor, ha $l_{12} \neq 0$ és $l_2 \neq 0$. A fenti egyenletekből ekkor azt kapjuk, hogy

$$-\tau_0 \overset{\diamond}{P}{}^{kk} - P^{kk} = \tau_{d0} \dot{\varepsilon}^{kk} + 3K_v \dot{\varepsilon}^{kk} + 3K \varepsilon^{kk}, \quad (2.207)$$

$$-\tau \overset{\diamond}{P}{}^{(ij)} - P^{(ij)} = \tau_d \dot{\varepsilon}^{(ij)} + 2\eta \dot{\varepsilon}^{(ij)} + 2G \varepsilon^{(ij)}, \quad (2.208)$$

ahol az együtthatók:

$$\tau_0 = \frac{1}{l_2}, \quad \tau_{d0} = \frac{l_1}{l_2}, \quad 3K_v = \frac{1}{l_2} [(l_{11}l_2 - l_{12}l_{21}) + \lambda], \quad 3K = \lambda, \quad (2.209)$$

$$\tau = \frac{1}{k_2}, \quad \tau_d = \frac{k_1}{k_2}, \quad 2\eta = \frac{1}{k_2} [(k_{11}k_2 - k_{12}k_{21}) + 2\mu], \quad G = \mu. \quad (2.210)$$

A negatív előjellel a nyomások előtt ahhoz a tradícióhoz igazodunk, hogy ezeket az egyenleteket többnyire a feszültségekre, azaz negatív nyomásra szokás rendezni.

Poynting–Thomson-, Zener- vagy standard reológiai testnek nevezzük a (2.208) egyenlettel leírható kontinuumot, ha az objektív időderivált a szubsztanciális derivált, $\tau_d = 0$ és ezen felül a gömbi rész ideálisan rugalmas. *Deviatorikus Kluitenberg–Verhás test*nek nevezzük általában, ha $\tau_d \neq 0$. *Térfogati Poynting–Thomson-, térfogati Zener vagy térfogati standard* reológiai testnek nevezzük a (2.207) egyenlettel leírható kontinuumot, amennyiben $\tau_{d0} = 0$. *Térfogati Kluitenberg–Verhás test*nek nevezzük, ha $\tau_{d0} \neq 0$. Az általános eset a Kluitenberg–Verhás-test. A tehetetlenségi tagot reológiai egyenletekhez termodinamikai megfontolások alapján először Verhás javasolta ebben a formában [156, 303].

A fenti egyenletekkel modellezhető reológiai hatásokat az elmúlt években számos munkában elemeztem, mind kísérleti adatokkal történő összevetés, mind gyakorlati, elsősorban közetmechanikai alkalmazások szempontjából.

1. Az *objektív időderivált* lehetséges formáit a stacionárius egyszerű nyírás esetén tenzor jellegű belső változóval vizsgáltam [302, 312]-ben. A második viszkometrikus függvényre ez a modellválasztás nullát adott, ami jobban összhangban van a kísérletekkel, mint az egyébként jónak tartott Maxwell-modell, vagy az együttforgó deriváltas Jeffreys-modell [313, 314]. Megjegyzendő, hogy a hagyományos reológiai modellekben a különféle objektív deriváltakat teljesen szabadon, mindenféle elvi megfontolás (és termodinamikai háttér) nélkül szokták használni.
2. A standard Poynting–Thomson-test általánosítását jelentő *tehetetlenségi tag* szerepét célzottan vizsgálta, megoldásokat és kísérleti összevetést adott [315]. Ezek a vizsgálatok a tehetetlenségi tag jelenlétére utalnak. Ezen kívül Matsuki, Takeuchi illetve Lin és társai in situ közetfeszültség meghatározására kidolgozott ASR (Anelastic Strain Recovery = rugalmatlan deformáció visszanyerés) módszerben csak a teljes, térfogati és deviatorikus részben is tehetetlenségi Kluitenberg–Verhás-testtel tudtak megfelelő egyezést elérni a kísérleti adatokkal, egyszerűbb, három paraméteres reológiai modellekkel nem [316, 317, 318]. Ezek a kifinomult mérések közvetlenül, kísérletileg mutatják,

hogy a Kuitenberg–Verhás-test rugalmas testek reológiájában gyakorlatilag is fellép, habár standard laboratóriumi körülmények között nem sikerült eddig kimérni.

3. A fenti modell felállításánál nem tételeztünk fel sem szimmetriát, sem antiszimmetriát a vezetési egyenletekben, ellentétben [156]-al. Az általános alakú vezetési tenzor vizsgálatával beláttuk, hogy a modell együttthatóinak előjel viszonyai alapján eldönthető, hogy a szimmetrikus, vagy az antiszimmetrikus tag a domináns (ezt neveztük túl- illetve alulcsillapított esetnek). Beláttuk továbbá, hogy a szokott elemkombinációs módon előállított reológiai testek esetén a Verhás-elem nélkül nem fedhető le termodinamikailag lehetséges differenciálegyenlet-paraméterek tere [202, 319, 320]. Az előző pontban említett in situ kőzetfeszültség meghatározására szolgáló kísérleti vizsgálatokban a három paraméteres modellek elégtelensége azt jelenti, hogy önmagában sem szimmetrikus, sem antiszimmetrikus csatolás nem elegendő kőzet reológiai viselkedésének modellezésére.
4. Térfogati Poynting-Thomson standard test lehetőségét a kőzetmechanikában Dobróka vetette fel [321], tőle függetlenül és jóval később pedig Cristescu [322]. A csatolt térfogati és deviatorikus tehetetlenségi Poynting–Thomson-modellek egyenleteinek megoldását Szarka, Asszonyi és Fülöp adta meg [315]. A térfogati reológia lehetséges szerepét a hagyományos mechanikai paraméterek, a Young-modulus és a különösen a Poisson-tényező mérésében [323] tárgyalja. A kísérleti adatokkal történő összevetés, a képlékenység egyidejű figyelembe vételével [324, 308]-ban található. Ebben Docamid 6G-H-val¹² végzett laboratóriumi kísérletek esetén egyértelműen kimutathatók a térfogati reológiai hatások.
5. Ezeket a reológiai modelleket gyakorlati problémákra is alkalmaztuk. Az alagútnyitás kérdését a deviatorikus standard modell megoldásával tárgyalja [325]. Ennek jelentős általánosítását adja meg, tetszőleges deviatorikus és térfogati reológiai modellre megoldva az alagútnyitási problémát Fülöp és Béda [326], Asszonyi, Szarka és Béda pedig a Kluitenberg–Verhás test eseteit elemzi részletesen [327]. A teljes rugalmasságtani és reológiai problémát leginkább [328] vizsgálja, eredeti megoldási módszereket ad a Volterra-elv alkalmazására.
6. Közvetlen mérnöki, gyakorlati kérdések elemzésénél is hasznosnak bizonyul a reológiai hatások figyelembe vétele. Például a MOL fúrásmintáinak elemzésére (lásd [329, 330, 331, 332, 333], illetve a bátaapáti NRHT alagútjainak hosszútávú monitorozásakor [334, 335, 336]. Eddigi kutatásaink szerint ráadásul fontosnak bizonyulhat a harmadik generációs gravitációshullám detektorok esetén kiküszöbölendő newtoni zaj hatásának pontos modellezésekor [337, 338].

¹² Poliamid, szerkezeti műanyag.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

*La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit.
Mais c'est cet éclair qui est tout.*¹

Henri Poincaré

3.1. Bevezetés – történeti megjegyzések a hidrodinamikáról

Az előző fejezetekben láttuk, hogy a kontinuum- és a homogén termodinamikai elméletek hogyan egészítik ki egymást. A kontinuumelméletekhez hasznosnak bizonyult megkonstruálni a hozzá tartozó közönséges, avagy homogén termodinamikát, a Gibbs-relációval mint alapösszefüggéssel. Ez segített a gyengén nemlokális és a lokálisan nemegyensúlyi elméletek esetén is a második főtétel konstruktív alkalmazásában. Azt is láttuk, hogy a Gibbs-reláció kényelmes megfogalmazása annak, hogy az entrópia milyen változók függvénye. Bizonyos értelemben ez mindig a legnehezebb kérdés a termodinamikai modellezésben: az alapállapotér kiválasztása és a kinematikai tulajdonságok rögzítése. A speciális relativisztikus folyadékok jó példát mutatnak arra, hogy pusztán homogén rendszerek vizsgálatával az alapvető kinematikai tulajdonságokat is nagyon nehéz tisztázni. Az előzőekben azt is hangsúlyoztam, hogy a második főtétel miatt a homogén egyensúly aszimptotikusan stabil, és ez az a tulajdonság amely érthetővé teszi a termodinamikát. Látni fogjuk, hogy a relativisztikus folyadékok esetén ez a feltétel még fontosabb: kulcsszerepe van a helyes elmélet kiválasztásában.

A relativisztikus gáz és folyadék termodinamikai testek homogén relativisztikus kinematikájának tisztázása, azaz a változók kiválasztása elvileg már 1907-ben megtörtént, amikor Planck és Einstein a relativisztikus elektrodinamika és mechanika után a harmadik klasszikus elméletnek, a termodinamikának is megadták a relativisztikus megfogalmazását [339, 340]. Legfontosabb megállapításuk szerint a mozgó testek között energia-impulzus-csere zajlik és nem energia- vagy impulzuscserre: relativisztikusan energia vagy impulzus külön-külön csak vonatkoztatásirendszerfüggően létezik. A relativisztikus elméletekben természetes követelmény a kovariancia, a vonatkoztatásirendszer-függetlenség. Ez az előző fejezetekben tárgyalt a nemrelativisztikus objektivitás megfelelője. Ezért Planck és Einstein az energiáimpulzus-vektort vezette be a kiterjedt termodinamikai test állapothatározójaként, és ennek megfelelően módosították a Gibbs-relációt.² Ebben az időben azonban a nemrelativisztikus kontinuumelmélet (is) meglehetősen fejletlen volt. Ugyan Jaumann nyomán ekkortájt

¹ A gondolat csupán villám a hosszantartó éjszakában. De a villám a minden.

² A termodinamika mindkettőjük számára fontos volt: remény és minta a fizika egységes megalapozása felé [341].

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

került az alapvető mérlegek közé az entrópia és az energia [103], de munkássága a kontinuummechanikán kívül gyakorlatilag ismeretlen maradt.³ Carl Eckart találta ki a második főtétel alkalmazását az entrópiamérleggel az anyagtörvények származtatására, ráadásul egy csapásra relativisztikusan is és a rugalmas szilárd anyagok kontinuummechanikáját is beleértve [60, 61, 62, 63]. Eckart egységes levezetését adta a Fick-, Fourier-, Navier–Stokes-féle anyagtörvényeknek, és ezzel lényegében megalapozta a nemegyensúlyi termodinamikát, mint tisztán makroszkopikus elméletet.

Relativisztikus folyadékokra vonatkozó elméletében Eckart két korlátozó feltevést használt. Egyrészt a belsőenergia-sűrűségnek az energiaimpulzus-sűrűség tenzor idő-idő-szerű részét tekintette (ez tulajdonképpen ellentmond a Planck-Einstein-felfogásnak), másrészt pedig a folyadék sebességmezőjét a nemrelativisztikus gyakorlatnak megfelelően a részecskeszám-sűrűséghez kötötte. Ez utóbbi problematikus volt Landau és Lifsic ismerte fel, megállapítva, hogy a sebességmező választás kérdése is lehet, és egykomponensű folyadékok esetén is választhatunk másképp, például az energiát is tekinthetjük a sebességmezőt meghatározó fizikai mennyiségnek [342]. Jelenleg azt gondoljuk (nemrelativisztikusan is), hogy a sebességmező valamilyen anyagi mennyiség áramlását jellemzi – a részecskékét Eckart-áramlás esetén és az energiáét Landau–Lifsic-áramlás esetén – és a különféle áramlásokat szabadon választhatjuk, átszámolhatjuk egymásba. Ezt a szabadságot a kinetikus elmélet messzemenően kihasználja (pl. a momentum-sorfejtés technikái).

Eckart elméletét később két szempontból kritizálták. Egyrészt, a Fourier–Navier–Stokes-egyenletek relativisztikus általánosításaként parabolikus differenciálegyenletrendszerre vezet, elvileg végtelen jelterjedési sebességgel. Ez az érv eredetileg a hővezetés nemrelativisztikus elméletére vonatkozott elsősorban [84], de később a relativisztikus elmélet megváltoztatásához is fő motivációként szolgált [86]. Az első ilyen elképzelést, mely az egyenletek kiegészítésével megjavította ezt a hiányosságot, Müller–Israel–Stewart-elméletnek, illetve Israel–Stewart-elméletnek nevezik (a továbbiakban MIS) [343, 344]. Müller ötlete, illetve első javaslata alapján Israel és Stewart kidolgozták a folyadékelmélet kinetikus gázelméleti háttérét és egyszerű gázokra kiszámolták a másodrendű együtthatóit is [345, 346, 347]. Ezt erősítette az Eckart-elmélet generikus instabilitásának, azaz a homogén egyensúlyi megoldás kis perturbációkkal szemben fellépő instabilitásának felismerése [348], majd bizonyítása tetszőleges áramlás esetén [55, 349]. Később Hiscock és Lindblom bizonyították az Israel–Stewart-elmélet generikus stabilitását is [350, 351, 352], de csak Eckart-áramlás (részecskeszámhoz rögzített sebesség) esetén. A generikus stabilitás bonyolult feltételeket követel meg az állapot-egyenletre és az egyensúlytól való eltérést jellemző úgynevezett MIS-együtthatókra egyaránt.

A parabolikus differenciálegyenletek ellen egy fontos érv, hogy a folyadékelméletek kauzalitását szigorúan véve, azaz matematikailag is pontosan, csak akkor állíthatjuk, ha az elmélet differenciálegyenlete szimmetrikus hiperbolikus. Csak ilyen elméleteket fogad el érvényesnek a racionális kiterjesztett termodinamika [353]. A szimmetrikus hiperbolicitás bizonyítása általában nehéz, viszont az úgynevezett divergencia-típusú elméleteket eleve így konstruálják [354, 355, 356]. Ezek az elméletek az MIS-elmülethez hasonlóan a kinetikus elmélet momentum sorfejtésével kapott egyenletrendszerrel kompatibilisak, annak fenomenologikus általánosításai. Divergencia-típusú

³ Lásd az előző fejezet 4. lábjegyzetét.

3.1. Bevezetés – történeti megjegyzések a hidrodinamikáról

elméleteket csak mostanában alkalmaztak gyakorlati számításokra [357]. Megjegyzendő, hogy a MIS-elmélet nem divergencia-típusú, és nemhogy a hiperbolicitása, de még a szimmetriája sincs bizonyítva. Csak a linearizált változatára és csak Eckart-áramlás esetén bizonyított a szimmetrikus hiperbolicitás [358]. A hiperbolicitás manapság is számos disszipatív relativisztikus folyadékokkal foglalkozó kutatás legfontosabb célja [359, 360].

Fizikailag, a kauzalitás vizsgálatokor nemcsak az egyenletek szerkezetét, hanem érvényességi körét is figyelembe kell venni. Valójában a parabolikus egyenletek relativisztikus esetben sem zárhatóak ki elvi alapon az érvényes fizikai elméletek köréből. Ahogy a klasszikus hővezetés esetén már említettük, érvényességi körük korlátozza a jelterjedési sebességet. Egyrészt a kontinuum viselkedés megszűnik a közepes szabad úthosszhoz közeli távolságokon, másrészt az adott fizikai mennyiség (hőmérséklet, sűrűség) változása sem lehet akármilyen kicsi: az anyag szerkezete, és a véletlen ingadozások behatárolják azt, továbbá a jel megfigyelhetőségének is vannak korlátai. Ennek megfelelően fizikai jeltovábbítási sebesség általában sokkal kisebb, mint az elvileg lehetséges [243, 244, 242, 245].

Azt is fontos látni, hogy egy parabolikus elméletet mindig ki lehet terjeszteni magasabb rendű hiperbolikussá és viszont. Azonban az ilyen kiterjesztés csak generikusan stabil elméletek esetében értelmezhető jól. Vagyis az cseppet sem könnyű kérdés, hogy mondjuk a MIS-elmélet milyen értelemben közelítése a Fourier–Navier–Stokes-elméletnek, milyen feltételekkel azonos a fizikai tartalmuk, ha annak relativisztikus általánosítása, az Eckart-elmélet nem stabil [358, 361].

2005-től kezdve egyre bizonyosabbá vált, hogy a kvark-gluon plazma – ellentétben az előzetes elvárásokkal – nem ideális, hanem inkább disszipatív folyadékként modellezhető [362]. Ezt megerősítették elméleti jóslatok a nyíró viszkozitás minimumára vonatkozóan, részben tiszta kvantummechanikai érveléssel [363], illetve az AdS/CFT (anti-de Sitter téridő és konform térelmélet) kapcsolatra vonatkozó sejtésre alapozva [364, 365, 366]. Ezért a disszipatív speciális relativisztikus folyadékokra vonatkozó kutatások is felélénkültek [367].

Az elmélet szerkezetére vonatkozó vizsgálatok alapvetően két csoportra oszthatóak. A legtöbben elfogadják a Müller–Israel–Stewart-elméletet kiindulópontnak és nem gondolják, hogy a parabolikus elmélet javítható. Ezek a kutatások a MIS-elmélet kiegészítését keresik a kinetikus elméletre alapozva [368, 369, 370, 371, 372], de a gyengén nemlokális kiterjesztés egy sajátos fenomenologikus módszere, a gradiens sorfejtés (gradient expansion) is elfogadott és népszerű [373, 374, 375].

A vizsgálatok másik ága a parabolikus, elsőrendű elmélet javítását, elsősorban a stabilitás problémájának megoldását tűzte ki célul. Tsumura, Onoshi és Kunihiro az áramlás választhatóságban rejlő szabadságot használják ki, és ezt a Boltzmann-egyenlet renormálásán alapuló számolással támasztják alá [376, 377, 378, 379, 380, 381, 382]. Sandoval-Villalazo és Garcia-Colin, illetve Garcia-Percinante pedig a belsőenergia-mérlegnek az energiainpulzus-mérlegtől történő szétválasztásával próbálkozik [383, 384]. A második esetben felmerülő elvi problémákon túlmenően [385] mindkét javaslat közös jellegzetessége, hogy a kapott egyenletek generikus stabilitása feltételes marad, azaz a termodinamikai stabilitáson és a transzportegyütthatók pozitivitásán túlmenően további, elvileg nem indokolható fizikai feltételek esetén áll csak fenn.

Felmerülhet a kérdés, hogy ha a MIS elmélet problematikus, akkor hogyan adhatnak

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

az erre alapozott számítások mégis látszólag kielégítő eredményt a nehézion-ütközések szimulációiban? Ennek két oka van. Egyrészt az, hogy a kinetikus elméletből erős egyszerűsítésekkel kiszámolt együttthatók lényegében kielégítik a generikus stabilitás feltételeit, másrészt az, hogy az áramlás választása szinte kivétel nélkül a Landau–Lifsic-féle (gradiens sorfejtés nem is működhetne másként), a Landau–Lifsic-áramlás pedig, mint a következő fejezetekben látni fogjuk, kiküszöböli az instabilitást okozó tagokat.

A továbbiakban megmutatom, hogy az előző fejezetekben bemutatott termodinamikai elemzés ebben az esetben felszínre hozza az Eckart-elmélet hiányosságait, és rávilágít arra, hogy a belső energia nem megfelelő definíciója a stabilitási probléma oka. Megmutatom továbbá, hogy a kinetikus elmélettel való kompatibilitás követelménye tovább árnyalja a képet, és a második főtétel egyenlőtlenségének pusztán fenomenologikusan nehezen megtalálható megoldására mutat rá, ahol a Gibbs-reláció teljesen szokatlan formában jelentkezik. Látni fogjuk azt is, hogy az így kapott elsőrendű relativisztikus disszipatív hidrodinamikai elmélet generikusan stabil. Végül e hidrodinamikai megoldások homogenizálásával a relativisztikus hőmérsékletre vonatkozó eddigi elképzelések is érthető keretbe kerülnek.

Ezen kutatások alapján tehát egy kielégítő disszipatív hidrodinamikai elméletnek három dolgot kell egyszerre teljesítenie:

- A termodinamikai feltételeknek biztosítaniuk kell az elmélet generikus stabilitását. Azaz megköveteljük, hogy a linearizált hidrodinamikai egyenletek homogén egyensúlyi megoldásának aszimptotikus stabilitása következzen az állapotfüggvényekre vonatkozó termodinamikai stabilitási feltételekből és az entrópiaprodukció nemnegativitását biztosító vezetési egyenletekből.
- Kompatibilis legyen a kinetikus elmélet egykomponensű, homogén folyadékokra vonatkozó legegyszerűbb előírásaival.
- Eleget kell tegyen a második főtételnek, még hozzá egy szigorú konstitutív elemzés szerint is, azaz például az előző fejezetekben bemutatott Liu-eljárással kapott feltételeket ki kell elégítse.

3.2. Az Eckart-elmélet

Ebben az alfejezetben levezetjük Eckart elméletét, egy kicsit általánosabban, mint ő tette, nem Eckart-áramlással. A Lorentz-formára vonatkozóan a $diag(1, -1, -1, -1)$ előjel konvenciót fogjuk használni. A mértékegységeket olyan módon választjuk, hogy a Boltzmann-állandó és a fénysebesség értéke legyen az egység $c = 1$, $k_B = 1$. Csak egykomponensű és izotrop folyadékot tárgyalunk, amelynek nincs belső impulzusmomentuma.

A hidrodinamikai alaplmenyiségek az N^a részecskeszámsűrűség-vektor, és a T^{ab} energiainpulzus-tenzor. Ezeket egy tetszőleges u^a sebességmező segítségével általánosan a következő formában írhatjuk:

$$N^a = nu^a + j^a, \quad (3.1)$$

$$T^{ab} = eu^a u^b + u^a q^b + q^a u^b + P^{ab}. \quad (3.2)$$

Itt $n = u^a N_a$ a részecskeszámsűrűség-vektor u^a szerinti időszerű része, $j^a = \Delta^{ab} N_b$ pedig a térszerű része, ahol $\Delta^{ab} = g^{ab} - u^a u^b$. Itt és a továbbiakban minden esetben az u^a sebességmező szerinti lokálisan együttmozgó rendszerben vett n részecskeszámsűrűségről és j^a részecskeáram-sűrűségről beszélünk. Amennyiben különböző sebességmezők is szerepet játszanak a gondolatmenetben azt külön jelöljük. Hasonlóan a részecskeszám-sűrűséghez, $e = u_a u_b T^{ab}$ az energiaimpulzus-tenzor idő-időszerű része, az energiasűrűség, $q^a = u_c T^{cb} \Delta_b^a$ az idő-térszerű része az energiaáram, mely meg egyezik a tér-időszerű részével, az impulzussűrűséggel, mert belső impulzusmomentum hiányában az energiaimpulzus-tenzor szimmetrikus. Ugyanezen oknál fogva az energiaimpulzus-tenzor tér-térszerű része, a $P^{ab} = \Delta_c^a T^{cd} \Delta_d^b$ nyomás is szimmetrikus.

A sebességmező az általánosan elfogadott nézet szerint nem alapvető fizikai mennyiség, valamilyen konkrét anyagi tulajdonsághoz kell (lehet) rögzítenünk. Ha úgy adjuk meg, hogy $j^a = 0^a$, azaz $u_E^a = \frac{N^a}{\sqrt{N_a N^a}}$, akkor Eckart-áramlásról beszélünk⁴. Ha az energiát tekintjük a folyadék mozgását meghatározó mennyiségnek, akkor Landau-Lifsic-áramlásról beszélünk. Itt $q^a = 0^a$ és a definíció implicit: $u_{LL}^a = \frac{u_{LL}^b T_b^a}{\sqrt{u_{LL}^c T_{de}^c u_{LL}^e}}$. Megjegyzendő, hogy ez csak akkor tehető meg, ha az energiaimpulzus-tenzornak van időszerű sajátvektora (például az elektromágneses sugárzási tér energiaimpulzus-tenzorának nincs).

A nemrelativisztikusan már megismert $\frac{d}{d\tau} := u^a \partial_a$ szubsztanciális deriváltat itt legtöbbször együttmozgó deriváltnak nevezik, és pontozással jelölik. Ennek segítségével a részecskeszám és az energia-impulzus megmaradása a fenti relatív mennyiségekkel a következőképpen írható

$$\partial_a N^a = \dot{n} + n \partial_a u^a + \partial_a j^a = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_b T^{ab} = \dot{e} u^a + e u^a \partial_b u^b + \dot{q}^a + q^a \partial_b u^b + e \dot{u}^a + u^a \partial_b q^b + q^b \partial_b u^a + \partial_b P^{ab} = 0^a. \quad (3.4)$$

Az utóbbi egyenletet célszerű energia- és impulzusmegmaradásra bontani.

$$u_a \partial_b T^{ab} = \dot{e} + e \partial_b u^b + u_a \dot{q}^a + \partial_b q^b + u_a \partial_b P^{ab} = 0, \quad (3.5)$$

$$\Delta_c^a \partial_b T^{cb} = e \dot{u}^a + \Delta_b^a \dot{q}^b + q^a \partial_b u^b + q^b \partial_b u^a + \Delta_c^a \partial_b P^{cb} = 0^a. \quad (3.6)$$

A mechanikai disszipáció a folyadékokban lokális, a sebességmezőhöz viszonyított relatív mennyiségekkel írható fel, ezért kellett felírunk a mérlegeket mindenképpen idő és térszerű komponensekkel. A termodinamika itt is a lokális mennyiségek között mond viszonyokat, hasonlóan a nemrelativisztikus esethez.

Az Eckart-elméletben a lokális egyensúly definíciója egyszerű és ésszerű, a nemrelativisztikus eset legkézenfekvőbb általánosítása. Az entrópiásűrűség a lokálisan nyugvó vonatkoztatási rendszerben az ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben vett e energiasűrűség és n részecskeszámsűrűség függvénye, $s = s(e, n)$. Az Eckart-elmélet Gibbs-relációja az (1.16) nemrelativisztikus Gibbs-relációhoz hasonló

$$de = T ds + \mu dn, \quad (3.7)$$

ahol T a hőmérséklet, μ a kémiai potenciál, $s = u_a S^a$ az entrópiásűrűség a lokálisan nyugvó vonatkoztatási rendszerben, ahol S^a jelöli az entrópia négyesáram-sűrűséget.

⁴ Ez megfelel a nemrelativisztikus baricentrikus sebességnek, amennyire csak megfelelhet.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

A nemrelativisztikus és relativisztikus jelölést a hagyományok szerint és miatt különböztettük meg, például a belső energiasűrűség ρ_e volt nemrelativisztikusan, relativisztikusan pedig az előbbieken megadott e -vel jelöltük az energiainpulzus-tenzor idő-időszerű komponensét. Az entrópiát u^a szerinti idő- és térszerű részekre hasíthatjuk, azaz s entrópiasűrűsége és J^a entrópiaáram-sűrűsége:

$$S^a = s u^a + J^a. \quad (3.8)$$

Természetesen az extenzivitást érvényesnek tekintjük és ezért az (1.17) Gibbs-Duhem reláció és a nyomást definiáló extenzivitási tulajdonság is pontosan olyan, mint nemrelativisztikus folyadékoknál.

Eckart az entrópiamérleget állította tárgyalásának középpontjába és ennek segítségével definiálta a disszipativitást úgy, ahogy ez a nemegyensúlyi termodinamikában azóta általános. A konstruktív elmélethez a lokális egyensúlyon kívül az entrópiaáramot is valahogy meg kell állapítani. Ez utóbbiról is azt feltételezte, hogy a nemrelativisztikus esethez hasonlóan

$$J^a = \frac{q^a}{T} - \frac{\mu}{T} j^a \quad (3.9)$$

formában írható. Ekkor az entrópiaprodukció kiszámolható:

$$\partial_a S^a = \dot{s} + s \partial_b u^b + \partial_a J^a = \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{T} \dot{e} - \frac{\mu}{T} \dot{n} + \partial_a \left(\frac{q^a - \mu j^a}{T} \right) = \quad (3.11)$$

$$= -j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} \Pi^{ab} \partial_a u_b + q^a \left(\partial_a \frac{1}{T} + \frac{\dot{u}_a}{T} \right) \geq 0. \quad (3.12)$$

Itt $\Pi^{ab} = P^{ab} + \Delta^{ab} p$, ahol a p nyomást (1.17) alapján kapjuk. Ez az entrópiaprodukció analóg a nemrelativisztikus (2.108) formulával, termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatunk benne. Nemrelativisztikusan a diffúziós tag hiányzik, vitatott, hogy miért [129]. Kézenfekvően ebben a kvadratikus formulában is j^a , Π^{ab} és q^a a termodinamikai áramok, a konstitutív mennyiségek, szorzóik pedig a megfelelő termodinamikai erők. Ezek között lineáris kapcsolatot feltételezve izotrop anyagokra megkapjuk a nemrelativisztikus Fourier–Navier–Stokes anyagtörvények Eckart-féle relativisztikus általánosítását:

$$q^a = \lambda \Delta^{ab} \left(\partial_b \frac{1}{T} + \frac{\dot{u}_b}{T} \right), \quad (3.13)$$

$$j^a = -\zeta \Delta^{ab} \partial_b \frac{\mu}{T}, \quad (3.14)$$

$$\Pi^{ab} = 2\eta \partial^{(a} u^{b)} + \eta_v \partial_c u^c \Delta^{ab}. \quad (3.15)$$

ahol λ a hővezetési együttható, ζ a diffúziós együttható, η, η_v a nyíró és térfogati viszkozitások. A hővezetés és a diffúzió közötti keresztteffektust (Soret–Ludwig) itt és a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk. $\langle \rangle$ zárójel a zárójelezett indexekre vett térszerű, szimmetrikus, nyom nélküli részt jelöli itt is, azaz

$$\partial^{(a} u^{b)} = \Delta_c^a \Delta_d^b \left(\frac{\partial^c u^d + \partial^d u^c}{2} - \frac{1}{3} \partial_e u^e \Delta^{cd} \right).$$

Az entrópiaprodukció fenti formájának váratlan következménye a gyorsulásfüggő (3.13) Fourier–Eckart-törvény. A gyorsulás megjelenése az energiaáram részeként az energia-impulzus csere termodinamikai fontosságára utal.

3.3. Termodinamikai elemzés

⁰Az előző részben ismertetett gondolatmenet gyengeségei ugyanazok, amit a nemrelativisztikus vizsgálatoknál már említettünk. Miért pont így választjuk az entrópiaáram-sűrűséget? Lehetnek-e azok a konstitutív függvények változói, amelyek az erő-áram-párok kijelölése során megjelentek? Illetve meg kellene érteni a sajátos relativisztikus újdonságot, az energiaáramba került gyorsulást. Láttuk a nemrelativisztikus esetben, hogy a klasszikus irreverzibilis termodinamika heurisztikus feltevései pontos feltételekhez vannak kötve, bonyolultabb viszonyok között egy mélyebb elemzés segíthet ezeket a feltevéseket általánosítani. Ebben a fejezetben Liu eljárását alkalmazzuk gyengén nemlokális relativisztikus folyadékokra.

Az előző alfejezetben láttuk, hogy a (3.3) részecske- és a (3.4) energiáimpulzus-mérleg lesznek a kényszerek az entrópiamérleghez, ezért

- az *alaprólátók terét* (n, e, u^a) , a részecskeszám-sűrűség, az energiasűrűség és a sebességmező feszítik ki,
- a másodrendűen gyengén nemlokális *konstitutív állapotteret* a $(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n, \partial_{ab} e, \partial_{bc} u^a, \partial_{ab} n)$ változók feszítik ki,
- az *anyagfüggvények* pedig a j^a, q^a, P^{ab} részecskeáram, energiaáram és nyomás lesznek.

Eckarthoz hasonlóan a lokálisan nyugvó rendszerben vett mennyiségekkel keressük a termodinamikai összefüggéseket. Általában is igaznak tűnik, hogy a termodinamika mindig feltételez egy közeget, a disszipáció a közeg egyfajta ideális mozgására vonatkoztatva zajlik. A transzportegyenletek pontosan a térbeli inhomogenitások hatására létrejövő lokális változásokat írják le. Hangsúlyozzuk, hogy a lokális egyensúly nem azt jelenti, hogy lokálisan a folyadék minden pontjában az egyensúlyi impulzuseloszlás lesz érvényes, hanem azt, hogy az impulzuseloszlás torzulása a termodinamikai paraméterek gradienseivel, térszerű deriváltjaival leírhatóak. Ezért nem remélhető, hogy értelmes termodinamikai összefüggéseket kapnánk a sebességmező nélkül. A kérdés, hogy mi határozza meg ezt a sebességmezőt.

Az entrópiamérleg egyenlőtlenségében a részecskeszám-mérleget λ , az impulzusmomentum-mérleget Λ^a Lagrange–Farkas-szorzóval figyelembe véve kapjuk,

⁰ Ez a fejezet a [386] munkámon alapul.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

hogy:

$$\begin{aligned}
& \partial_a S^a - \Lambda_a \partial_b T^{ab} - \lambda \partial_a N^a = \\
& = \partial_e S^a \partial_a e + \partial_{u^b} S^a \partial_a u^b + \partial_n S^a \partial_a n + \partial_{\partial_b e} S^a \partial_{ab} e + \partial_{\partial_b u^c} S^a \partial_{ab} u^c + \partial_{\partial_b n} S^a \partial_{ab} n + \\
& + \partial_{\partial_{bc} e} S^a \partial_{abc} e + \partial_{\partial_{bc} u^d} S^a \partial_{abc} u^d + \partial_{\partial_{bc} n} S^a \partial_{abc} n - \\
& - \lambda \left(\partial_e N^a \partial_a e + \partial_{u^b} N^a \partial_a u^b + \partial_n N^a \partial_a n + \partial_{\partial_b e} N^a \partial_{ab} e + \partial_{\partial_b u^c} N^a \partial_{ab} u^c + \right. \\
& \left. + \partial_{\partial_b n} N^a \partial_{ab} n + \partial_{\partial_{bc} e} N^a \partial_{abc} e + \partial_{\partial_{bc} u^d} N^a \partial_{abc} u^d + \partial_{\partial_{bc} n} N^a \partial_{abc} n \right) - \\
& - \Lambda_a \left(\partial_e T^{ab} \partial_b e + \partial_{u^c} T^{ab} \partial_b u^c + \partial_n T^{ab} \partial_b n + \partial_{\partial_{ce}} T^{ab} \partial_{bc} e + \partial_{\partial_{cu^d}} T^{ab} \partial_{bc} u^d + \right. \\
& \left. + \partial_{\partial_{cn}} T^{ab} \partial_{bc} n + \partial_{\partial_{cde}} T^{ab} \partial_{bcd} e + \partial_{\partial_{cdue}} T^{ab} \partial_{bcd} u^e + \partial_{\partial_{cdn}} T^{ab} \partial_{bcd} n \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

A harmadrendű deriváltak együtthatóinak eltűnése a következő Liu-egyenleteket adja:

$$\partial_{abc} e : \quad \partial_{\partial_{bc} e} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} e} N^a - \Lambda_d \partial_{\partial_{bc} e} T^{da} = 0^{abc}, \tag{3.17}$$

$$\partial_{abc} u_d : \quad \partial_{\partial_{bc} u_d} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} u_d} N^a - \Lambda_e \partial_{\partial_{bc} u_d} T^{ea} = 0^{abcd}, \tag{3.18}$$

$$\partial_{abc} n : \quad \partial_{\partial_{bc} n} S^a - \lambda \partial_{\partial_{bc} n} N^a - \Lambda_d \partial_{\partial_{bc} n} T^{da} = 0^{abc}. \tag{3.19}$$

Itt az egyenlőség csak az abc -ben teljesen szimmetrikus részére áll fenn az egyenleteknek. Egy megoldásuk megadható, ha feltételezzük, hogy a Lagrange–Farkas-szorozók csak elsőrendűen nemlokális konstitutív függvények, azaz

$$(\lambda, \Lambda^a) = (\lambda, \Lambda^a)(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n) \tag{3.20}$$

Ez természetesen nem a legáltalánosabb lehetőség. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$S^a - \lambda N^a - \Lambda_b T^{ab} - A^a = 0^a, \tag{3.21}$$

ahol $A^a = A^a(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$ tetszőleges elsőrendűen gyengén nemlokális konstitutív függvény lehet, amelynek u^a szerinti tér- és időszerű részét $\alpha^a = \Delta_b^a A^b$ -vel, illetve $a = u^b A_b$ -val jelöljük, azaz $A^a = a u^1 + \alpha^a$. A továbbiakban fontos szerepet játszik a Λ_a multiplikátor tér- és időszerű részre történő hasonló felbontása, amit a következőképpen teszünk meg:

$$\Lambda^a = \frac{u^a + w^a}{T}, \tag{3.22}$$

ahol $w^a u_a = 0$. Vegyük észre, hogy ez a felbontás teljesen általános, csak kiemeltük a vektor időszerű részét és annak abszolút értékét, $1/T$ -vel jelöltük. Vezessük be továbbá ezen kívül a következő jelöléseket: $\lambda = \mu/T$ és $a = -p/T$. Ezek után a fenti, (3.21) összefüggést a következőképpen bonthatjuk idő és térszerű részre:

$$\frac{1}{T} \left(Ts + \mu n - e - w_b q^b - p \right) u^a + J^a + j^a \frac{\mu}{T} - \frac{q^a}{T} - w_b P^{ab} + \alpha^a = 0^a. \tag{3.23}$$

Az időszerű rész ezek szerint azt adja, hogy:

$$e + w_a q^a = (u_a + w_a) E^a = Ts + \mu n - p, \tag{3.24}$$

ahol $E^a = u_b T^{ab}$ az energiainpulzus-vektor. A térszerű rész nulla volta pedig az entrópiaáramot teszi kiszámíthatóvá. Itt ismét egy speciális feltétellel élve megköveteljük, hogy a nyomás legfeljebb elsőrendű gyengén nemlokális függvény legyen, azaz $P^{ab} = P^{ab}(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$. Illetve feltesszük, hogy $\alpha^a = w_b P^{ab}$, ezért az entrópiaáram sűrűsége:

$$J^a = \frac{q^a}{T} - j^a \frac{\mu}{T}. \quad (3.25)$$

Ennek az egyenlőségnek a felhasználásával a (3.16) entrópiaprodukció a következő formára egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \sigma = & \partial_a e \left[u^a \left(\partial_e s - \frac{1}{T} - \frac{w_b}{T} \partial_e q^b \right) + q^a \partial_e \frac{1}{T} - j^a \partial_e \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_b \partial_e P^{ab} \right] + \\ & + \partial_a u^b \left[u^a \left(\partial_u^b s - \frac{w_b}{T} e + \frac{q_b}{T} - \frac{w_c}{T} \partial_u^b q^c \right) + \right. \\ & + q^a \partial_u^b \frac{1}{T} - j^a \partial_u^b \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_u^b P^{ca} + \frac{P_b^a + \Delta_b^a p - w_b q^a}{T} \left. \right] + \\ & + \partial_a n \left[u^a \left(\partial_n s - \frac{1}{T} - \frac{w_b}{T} \partial_n q^b \right) + q^a \partial_n \frac{1}{T} - j^a \partial_n \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_b \partial_n P^{ab} \right] + \\ & + \partial_{ab} e \left[u^a \left(\partial_{\partial_b e} s - \frac{w_c}{T} \partial_{\partial_b e} q^c \right) + q^a \partial_{\partial_b e} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b e} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_{\partial_b e} P^{ca} \right] + \\ & + \partial_{ab} u^c \left[u^a \left(\partial_{\partial_b u^c} s - \frac{w_d}{T} \partial_{\partial_b u^c} q^d \right) + q^a \partial_{\partial_b u^c} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b u^c} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_d \partial_{\partial_b u^c} P^{ad} \right] + \\ & + \partial_{ab} n \left[u^a \left(\partial_{\partial_b n} s - \frac{w_c}{T} \partial_{\partial_b n} q^c \right) + q^a \partial_{\partial_b n} \frac{1}{T} - j^a \partial_{\partial_b n} \frac{\mu}{T} - \frac{1}{T} w_c \partial_{\partial_b n} P^{ca} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ha $s = s(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n)$ elsőrendűen gyengén nemlokális, akkor további egyszerűsítés után:

$$\begin{aligned} \sigma = & \left(\dot{s} - \frac{\dot{e}}{T} + \frac{\mu}{T} \dot{n} - \frac{w_b}{T} \dot{q}^b + \frac{q_b - e w_b}{T} \dot{u}^b \right) + \\ & + q^a \partial_a \frac{1}{T} - j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} (P^{ab} + p \delta^{ab}) \partial_a w_b - \frac{w_b}{T} (\partial_a P^{ab} + q^a \partial_a u^b) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ennek az egyenlőtlenségnek keressük a lokális egyensúllyal összeegyeztethető megoldásait. Ez azt jelenti, hogy az entrópia parciális deriváltjait az első, zárójeles kifejezésben kell megfelelően rögzítenünk. Kínálkozik, hogy az entrópia közvetett módon függjön az állapottér derivált változóitól, azaz $s = s(e, q^a(e, u^a, n, \partial_a e, \partial_b u^a, \partial_a n), n)$ módon. Tehát a Lagrange–Farkas-szorzókat, azaz a T, μ, w_a függvényeket az entrópia deriváltjaival azonosítjuk:

$$\partial_e s = \frac{1}{T}, \quad \partial_n s = -\frac{\mu}{T}, \quad \partial_{q^a} s = \frac{w_a}{T}. \quad (3.28)$$

Ezek után, ha nem szeretnénk, hogy az entrópiasűrűség közvetlenül a sebességtől is függjön, akkor a zárójeles kifejezés további része a következő parciális differenciálegyenletre vezet:

$$\frac{q_b - e w_b}{T} = q_b \partial_e s - e \partial_{q^b} s = 0. \quad (3.29)$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Ennek a parciális differenciálegyenletnek általános megoldása $s(e, q^a, n) = \hat{s}(e^2 + q^a q_a, n)$. Amennyiben pedig elvárjuk, hogy az entrópiasűrűség homogén nulladrendű függvénye legyen az energiasűrűségnek, azaz megőrizzük az extenzivitást, akkor $s(e, q^a, n) = \hat{s}(\sqrt{e^2 + q^a q_a}, n) = \hat{s}(\|E^a\|, n)$. Tehát az entrópiasűrűség csak az energiainpulzus-vektor abszolút értékétől függhet.

A vonatkozó Gibbs-reláció a következő lesz:

$$de + \frac{q_a}{e} dq^a = T ds + \mu dn. \quad (3.30)$$

Belátható, hogy lokális egyensúly ezen Gibbs-reláción alapuló definíciójából származtatott hidrodinamikai elmélet generikusan stabil általános áramlások mellett [233], de a következő 3.4. alfejezetben látni fogjuk, hogy nem kompatibilis a kinetikus elmélettel.

A kinetikus elmélettel való kompatibilitást úgy érhetjük el, ha a (3.27) első zárójelében levő összeg nem nulla, hanem egyenlő $pw_a \dot{u}^a/T$ -vel. Mivel az entrópiának a sebességmezőtől való közvetlen függését el szeretnénk kerülni, ezért ez a következő feltételhez vezet:

$$q^a = (e + p)w^a. \quad (3.31)$$

Tehát bevezetve a $h = e + p$ entalpiasűrűséget, a fenti Gibbs-reláció módosításaként azt kapjuk, hogy

$$de + \frac{q_a}{h} dq^a = T ds + \mu dn. \quad (3.32)$$

Ezek után már csak az a kérdés, hogyan definiáljuk az entrópiaáramsűrűséget, az entrópiavektor térszerű részét. Az első lehetőség, hogy ismét a klasszikus, (3.25), kifejezésnél maradunk, vagy tovább elemezzük a lehetséges követelményeket és feltételeket. Mindenképpen fontos látnunk, hogy a Gibbs-reláció akármelyik, (3.30), vagy (3.32) módosításával jó úton járunk, mert az elmélet generikus stabilitását jelentősen javítottuk, illetve lényegében helyreállítottuk. Ugyanis a [245] publikációban beláttuk, hogy a (3.30) Gibbs-reláció és klasszikus, (3.25), entrópiaáramsűrűség esetén az elmélet csak a termodinamikai feltételekkel generikusan stabil, azaz a termodinamikai stabilitás és a nemnegatív transzportegyütthatók miatt, hasonlóan a nemrelativisztikus disszipatív hidrodinamikához. A [387] publikációban azt bizonyítottuk, hogy ugyancsak Eckart-áramlás esetén, de a kinetikusan kompatibilis (3.32) Gibbs-reláció és klasszikus, (3.25), entrópiaáramsűrűség esetén az elmélet szintén generikusan stabil.

Ez utóbbi esetben az entrópiatermelést kiszámolva a következő összefüggést kapjuk:

$$\sigma = q^a \left[\partial_a \frac{1}{T} + \frac{1}{hT} (h\dot{u}_a + \dot{q}_a + q_a \partial_b u^b) \right] - j^a \partial_a \frac{\mu}{T} + \frac{1}{T} (P^{ab} + p\delta^{ab}) \partial_a u_b \geq 0. \quad (3.33)$$

Ennek kiszámításához már nincs szükség a Liu-eljárásra. A lineáris erő-áram rendszert figyelembe véve láthatjuk, hogy az Eckart-elmélet vezetési egyenletei, (3.14) a részecskeáramra és (3.15) a viszkózus nyomásra érvényben maradnak, viszont az energiaáramra vonatkozó (3.13) módosul:

$$q^a = \lambda \Delta^{ab} \left[\partial_b \frac{1}{T} + \frac{1}{hT} (h\dot{u}_b + \dot{q}_b + q_b \partial_c u^c) \right]. \quad (3.34)$$

Tehát az energiaáramot meghatározó termodinamikai erő az ideális hidrodinamikai impulzusról egy részével korrigálódott. A termodinamikai elemzés lényege, mindkét Gibbs-reláció módosítás eredménye, hogy az energiaimpulzus-sűrűség tenzorban, annak szimmetriája miatt megkülönböztethetetlen impulzussűrűség és hőáramsűrűség között a termodinamika különbséget tett, de ennek következtében az impulzusról közvetlenül is figyelembe kellett vennünk az entrópiáról kiszámításakor, és nem dughattuk el a belső energiában, mint nemrelativisztikus esetben!

Viszont mégsem lehetünk maradéktalanul elégedettek. Ahhoz, hogy jól érthető legyen ennek az oka, alaposan szemügyre kell vennünk a már emlegetett kompatibilitást a kinetikus elmélettel, amelyre hivatkozva a (3.32) Gibbs-relációt bevezettük.

3.4. Kinetikus elmélet

⁰Tehát vizsgáljuk meg, hogy a (3.31) feltételt miként kényszeríti ki a kompatibilitás a kinetikus elmélettel. Egykomponensű Boltzmann-gázt tekintünk, külső mezők nélkül, $h = 1$ tömegegység választással. A részecskék nyugalmi tömegét jelölje m , impulzusát pedig p^a , $\sqrt{p^a p_a} = m$. Az $f(x^a, p^a)$ egyrészecske eloszlásfüggvényre vonatkozó Boltzmann-egyenlet a következő:

$$p^a \partial_a f = C(f) = \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega' d\omega'_1 [f' f'_1 W(p', p'_1 | p, p_1) - f f_1 W(p, p_1 | p', p'_1)], \quad (3.35)$$

ahol $f_1 = f(x, p_1)$, $f' = f(x, p')$, $f'_1 = f(x, p'_1)$, $C(f)$ a fenti Boltzmann-féle ütközési integrált jelöli, benne $d\omega = \frac{d^3 p}{p^0}$ az impulzustérbeli mérték (az állandó m hosszúságú impulzusvektorok hiperfelületén vett mérték). $W(p, p_1 | p', p'_1)$ jelöli a (p, p_1) impulzusú részecskepárokhoz (p', p'_1) impulzusú részecskepárok keletkezésének átmeneti valószínűségét [389].

A részecskeszám-sűrűség négyesvektor, az energiaimpulzus-sűrűség tenzor és az entrópiásűrűség négyesvektor definíciói a következők:

$$N^a = \int d\omega p^a f, \quad (3.36)$$

$$T^{ab} = \int d\omega p^a p^b f, \quad (3.37)$$

$$S^a = - \int d\omega p^a f (\ln f - 1). \quad (3.38)$$

A relativisztikus kinetikus elmélet a lokális egyensúlyt a megmaradó entrópia feltételével definiálja ([389], 43.o.). Ez a *kinetikus lokális egyensúly* nem az, ahogyan a nemegyensúlyi termodinamika fenomenologikusan a lokális egyensúlyt általában érti, hiszen definíciójából adódóan a kinetikus lokális egyensúly ideális folyadékokra vonatkozik.

Itt tegyünk egy rövid kitérőt és pillantsunk vissza a lokális egyensúly dolgozatbeli értelmezésére. A klasszikus, 2. fejezetben megadott (illetve lásd például [78]) definíciója szerint a *lokális egyensúlyt* végső soron a Gibbs-reláció érvényessége határozza meg a

⁰ Ez a fejezet a [388, 387] munkákon alapul.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

„szokott, egyensúlyban jól definiált” változókbán. A belső változókra és dinamikai szabadsági fokokra kiterjesztve az értelmezést, a *kiterjesztett lokális egyensúlyt* a Gibbs-reláció érvényessége definiálja az újabb változókbán. Végül pedig a gyengén nemlokális rendszerekre érvényes értelemben *gyengén nemlokális egyensúlyt* a homogenizálhatóság, tehát megint csak a Gibbs-reláció érvényessége definiálja a térbeli deriváltakat is megengedő értelemben. A Gibbs-reláció használhatósága pedig azt jelenti, hogy az entrópiasűrűség a rendszert jellemző extenzív mennyiségek sűrűségeinek, illetve általában a releváns változóknak a függvénye. A kinetikus elmélet fényében mindez úgy értelmezhető, hogy az egyensúlyi eloszlástól való eltérést a kontinuum-alapváltozók deriváltjaival lehet jellemezni. A nemrelativisztikus esetben, csak térbeli deriváltakat figyelembe véve ez a Chapman–Enskog-sorfejtés alapfeltevése. A relativisztikus esetben ezt nem lehet ilyen egyértelműen eldönteni. Ugyanis a feltételezett eloszlásfüggvény-korrekciók a termodinamikai erőkkkel kapcsolatosak, és láttuk, hogy látszólag a gyorsulás is szerepet játszik az energiaáramra vonatkozó termodinamikai erőben. Fontos továbbá az is, hogy maga a Chapman–Enskog-sorfejtés is csak első rendben tekinthető megbízhatónak, már a másodrendben kapott Burnett-egyenletek használhatósága is megkérdőjelezhető és elvi problémái is vannak [390]. Vagyis, a kontinuum-elméletben világosan megfogalmazható lokális egyensúly-fogalmak közül egyelőre csak néhánynak van relativisztikus kinetikus megfeleltetése. A fő dilemmát a mozgásra jellemző impulzussűrűség megjelenése jelenti a Gibbs-relációban, mert így a nemrelativisztikusan tiszta belső és teljes energia fogalmai összekeverednek.

Visszatérve a disszipációmentesség követelményével meghatározott kinetikus egyensúlyra, az következik, hogy az eloszlásfüggvény logaritmusában ebben az esetben ütközési invariáns kell legyen. Azaz

$$f_0(x^a, p^b) = e^{\alpha - \beta_c p^c} \quad (3.39)$$

teszőleges $\alpha(x^a)$ és $\beta^c(x^a)$ mezők esetén. Az egyensúlyi eloszlásfüggvényre a részecskeszám-mérleg

$$\partial_a N_0^a = \int d\omega p^a \partial_a f_0 = N_0^a \partial_a \alpha - T_0^{ab} \partial_a \beta_b = 0. \quad (3.40)$$

A termodinamikai relációk levezetéséhez számoljuk ki a (3.38) Boltzmann-Gibbs-entrópiát az egyensúlyi eloszlással:

$$S_0^a = \int d\omega p^a f_0 (\ln f_0 - 1) = (1 - \alpha) N_0^a + \beta_b T_0^{ab}. \quad (3.41)$$

(3.40) és (3.41) alapján ekkor

$$\partial_a S_0^a + \alpha \partial_a N_0^a - \beta_b \partial_a T_0^{ab} = 0. \quad (3.42)$$

Vegyük észre, hogy (3.42) bizonyos értelemben triviális összefüggés, hiszen a lokális egyensúlyt az entrópia megmaradásával definiáltuk, és a részecskeszám-mérleg és energiimpulzus-mérleg szintén könnyen beláthatóan teljesül a Boltzmann-egyenlet miatt. Viszont (3.40) és (3.42) önmagukban a származtatott kontinuummennyiségekre jelentenek követelményt, azaz az egyensúlyi eloszlás α, β_a paramétereire és az entrópia-, részecskeszám-, energiimpulzus-sűrűség négyesvektorokra és tenzorra vonatkozóan. Pontosan ezeket a követelményeket akarjuk most megállapítani.

Éppen ezért a fenti összefüggéseket önmagukban kell tekinteni, és első pillantásra úgy tűnhet, hogy egyfajta Legendre-transzformáció látható a négyes mennyiségek között. Azonban (3.42) nem értelmezhető általánosított Gibbs-relációként azért, mert nem a deriváltak között, hanem csak a divergenciák között ad meg kapcsolatot. Ezért a termodinamikai relációk megállapításához, a kontrakció figyelembe vételéhez szükség van egy áramlásra, a kontinuum sebességmezőjére.

A (3.39) egyensúlyi eloszlásfüggvény szokásos interpretációja szerint (lásd pl. [75, 389, 391]) a β^a vektorral párhuzamos sebességmezőt vezetünk be. Ez azonban egy rejtett, implicit követelmény, semmilyen oka nincs, azon kívül, hogy technikailag kényelmes. Tekintheszük az általános esetet is, amikor β^a -t a sebességmezővel párhuzamos és merőleges részre bontjuk:

$$\beta^a = \frac{u^a + w^a}{T}. \quad (3.43)$$

Itt $1/T = \beta_a u^a$ és $w^a = \Delta_b^a \beta^b / \beta_c u^c$. A továbbiakban néha használjuk a $g^a = u^a + w^a$ jelölést is. Látható, hogy ilyen módon $g^a u_a = 1$ és $w^a u_a = 0$, sőt, $w_a w^a \leq 1$, mert β^a , és ezért g^a is időszerű. Bevezetve a $\mu = \alpha T$ jelölést, az egyensúlyi eloszlásfüggvényt írhatjuk a következő módon is:

$$f_0 = e^{\frac{\mu - p^a (u_a + w_a)}{T}}. \quad (3.44)$$

A kinetikus egyensúlyban érvényes részecskeszámsűrűség-négyesvektor és energiasűrűség-tenzor egyszerűen kiszámolható, ha egyidejűleg bevezetjük a sebességmező hagyományos interpretációját:

$$\hat{u}^a = \frac{\beta^a}{\sqrt{\beta^a \beta_a}} = \frac{u^a + w^a}{\sqrt{1 - w^2}},$$

ahol $w^2 = -w^a w_a$. A továbbiakban ezt, a hagyományos interpretációnak megfelelő speciális \hat{u}^a sebességmezőt *természetes*, vagy *hőmérőáramlásnak* nevezzük.

Az általános esetben az N_0^a kinetikus egyensúlyi részecskeszám sűrűség vektor és a T_0^{ab} energiaimpulzus-tenzor a következő lesz

$$N_0^a = n g^a = n u^a + n w^a, \quad (3.45)$$

$$T_0^{ab} = (e + p) g^a g^b - p \delta^{ab} = e u^a u^b + q^a u^b + q^b u^a - p \Delta^{ab} + \frac{q^a q^b}{e + p}. \quad (3.46)$$

Az általános áramlás szerinti nyugalmi rendszerben vett fizikai mennyiségek (kalap nélkül) és a természetes áramlás szerinti nyugalmi rendszerben vett fizikai mennyiségek (kalappal) viszonya rövid számolás után: $T = \sqrt{1 - w^2} \hat{T}$, $\mu = \sqrt{1 - w^2} \hat{\mu}$, $n = \hat{n} / \sqrt{1 - w^2}$, $p = \hat{p}$, $e = (\hat{e} + \hat{p} w^2) / (1 - w^2)$ [388]. Az impulzussűrűség és a részecskeszám-sűrűség közötti kapcsolatra megkapjuk a szokásos, általánosan érvényesnek tekintett

$$q^a = (e + p) w^a = \frac{e + p}{n} j^a \quad (3.47)$$

formulát. Ez mutatja, hogy ideális, disszipáció mentes folyadékokra az Eckart- és a Landau-Lifsic-áramlások egybeesnek. Behelyettesítve (3.45) és (3.46) összefüggéseket

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

(3.41)-be kapjuk, hogy

$$S_0^a = \frac{g^a}{T} \left(nT - \mu n + E^b g_b \right), \quad (3.48)$$

ahol $E^a = eu^a + q^a$ az energiáimpulzus-vektor. Az entrópiaáramsűrűség-vektor az általános áramlásban párhuzamos g^a -val. A megfelelő termodinamikai relációkat (3.45) és (3.46) (3.42)-be történő helyettesítésével kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial_a S_0^a + \alpha \partial_a N_0^a - \beta_b \partial_a T^{ab} &= \\ &= \frac{g^a}{T} \left(T \partial_a s + \mu \partial_a n - g_b \partial_a E^b - p w^b \partial_a u_b \right) + \frac{\partial_a g^a}{T} \left(T s + \mu n - g_b E^b - p \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Itt a jobb oldal első tagjában nincsenek divergenciák ezért az entrópiasűrűségre vonatkozó függvénykapcsolatok megállapítására alkalmas. Látható, hogy az általános áramlás szerinti entrópiasűrűség a részecskeszám-sűrűségnek, az energiáimpulzus-vektornak és a sebességmezőnek a függvénye $s = s(E^a, n, u^a)$, a következő parciális deriváltakkal:

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \alpha = \frac{\mu}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial E^a} = \frac{g_a}{T}, \quad \frac{\partial s}{\partial u^a} = \frac{p w_a}{T}. \quad (3.50)$$

Ugyanezt a differenciálokra vonatkozó Gibbs-relációval is felírhatjuk:

$$g_a dE^a + p w_a du^a = de + w_a dq^a + [(e + p)w_a - q_a] du^a = T ds + \mu dn. \quad (3.51)$$

Felhasználva a (3.47) egyenletet, a relativisztikus folyadékok általános áramlása esetén érvényes lokális egyensúlyt meghatározó Gibbs-reláció

$$de + \frac{q_a}{h} dq^a = T ds + \mu dn, \quad (3.52)$$

ahol $h = e + p$ az entalpiasűrűség. Ha $w^a = 0^a$, akkor megkapjuk az Eckart által feltételezett (3.7) Gibbs-relációt, mint speciális esetet. A Legendre-transzformációs tulajdonságok is teljesülnek, ha (3.49) második felét is figyelembe vesszük. Ez nulla lesz, amennyiben

$$p + g_a E^a = p + e + \frac{q^a q_a}{h} = T s + \mu n. \quad (3.53)$$

Összevetve ezt az egyenletet (3.41)-el megkapjuk az ideális gáz termikus állapotegyenletét: $p = nT$ marad általános áramlás esetén is.

Tehát a kinetikus elmélet közvetlen igazolást adott (3.32)-re általános áramlás feltételezésével. Az előző fejezetben láttuk, hogy a Gibbs-reláció ilyen formája a gyenge nemlokalitás termodinamikai feltételrendszerével is kompatibilis, bár abból az irányból, tisztán fenomenologikusan nem könnyű felismerni.

3.5. Generikus stabilitás

⁰Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a (3.3), (3.5) és (3.6) mérlegek és a (3.14), (3.15) és a (3.34) konstitutív egyenletek által megadott disszipatív hidrodinamika generikus

⁰ Ez a fejezet a [233, 387] munkák alapján íródott.

stabilitását, azaz a linearizált egyenletek homogén egyensúlyi megoldásának aszimptotikus stabilitását.

3.5.1. Homogén egyensúly

A fenti egyenletrendszer egyensúlyi megoldását akkor kapjuk, ha a lokálisan együttmozgó vonatkoztatási rendszerben vett időderiváltak nullák és az entrópiaprodukció is nulla, mert a termodinamikai áramok nullák:

$$\Pi^{ab} = 0^{ab}, \quad j^a = 0^a \quad \text{és} \quad q^a = 0^a. \quad (3.54)$$

Ebben az esetben a mérlegek és a konstitutív egyenletek alapján a folyadék egyensúlyban van, ha

$$\begin{aligned} n = \text{áll.}, \quad e = \text{áll.} \quad \Rightarrow \quad T = \text{áll.}, \quad \mu = \text{áll.}, \quad p = \text{áll.}, \\ \partial_a u_a = 0, \quad \partial_a u_b + \partial_b u_a = 0_{ab}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ezekon a feltételeken felül a sebességmező homogenitását is megköveteljük:

$$u_a = \text{áll.} \quad (3.56)$$

3.5.2. Linearizálás

Az egyensúlyi mezőket felülvonással, a perturbációkat δ -val jelölve a mezők általában $Q = \bar{Q} + \delta Q$ formában írhatóak. Itt Q lehet az n , e , u^a , q^a , j^a és Π^{ab} fizikai mennyiségek bármelyike. A (3.3), (3.5), (3.6), (3.34), (3.14) és (3.15) egyenletek linearizálása a (3.54)-(3.56) egyensúly körül a következő egyenletrendszert eredményezi:

$$0 = \dot{\delta n} + \bar{n} \partial_a \delta u^a + \partial_a \delta j^a, \quad (3.57)$$

$$0 = \dot{\delta e} + \bar{h} \partial_a \delta u^a + \partial_a \delta q^a, \quad (3.58)$$

$$0 = \bar{h} \dot{\delta u}^a + \Delta^{ab} \partial_b \delta p + \delta \dot{q}^a + \Delta_c^a \partial_b \delta \Pi^{cb}, \quad (3.59)$$

$$0 = \delta q^a - \lambda \Delta^{ab} \left(\partial_b \delta \frac{1}{T} - \frac{h \dot{\delta u}_b + \delta \dot{q}_b}{T} \right), \quad (3.60)$$

$$0 = \delta j^a + \xi \Delta^{ab} \partial_b \delta \frac{\mu}{T}, \quad (3.61)$$

$$0 = \delta \Pi^{ab} - \eta_v \partial_c \delta u^c \Delta^{ab} - \eta \Delta^{ac} \Delta^{bd} (\partial_\gamma \delta u_d + \partial_d \delta u_c - \frac{2}{3} \partial_e \delta u^e \Delta_{cd}). \quad (3.62)$$

A perturbált változók öröklik az eredetiek ortogonalitási tulajdonságait a linearizáció után:

$$0 = u^a \delta q_a = u^a \delta u_a, \quad 0_b = u^a \delta \Pi_{ab}, \quad 0_{ab} = \delta \Pi_{ab} - \delta \Pi_{ba} \quad (3.63)$$

A stabilitásvizsgálathoz időben exponenciális térben síkhullám alakú megoldásokat keresünk: $\delta Q = Q_0 e^{\Gamma t + i k x}$ formában, ahol Q_0 állandó, k valós, Γ pedig komplex szám, t és x pedig az egyensúlyi sebességmező által kijelölt idő-, illetve egy tetszőleges térszerű koordináta. Ezért $u^a \partial_a = \partial_t$.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

Ezekkel a feltevésekkel a perturbált egyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma \delta n + ikn \delta u^x + ik \delta j^x, \\
0 &= \Gamma \delta e + hik \delta u^x + ik \delta q^x, \\
0 &= \Gamma h \delta u^x + ik(\partial_e p \delta e + \partial_n p \delta n) + \Gamma \delta q^x + ik \delta \Pi^{xx}, \\
0 &= \Gamma h \delta u^y + \Gamma \delta q^y + ik \delta \Pi^{xy}, \\
0 &= \Gamma h \delta u^z + \Gamma \delta q^z + ik \delta \Pi^{xz}, \\
0 &= \delta q^x + ik \tilde{\lambda} (\partial_e T \delta e + \partial_n T \delta n) + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^x + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^x, \\
0 &= \delta q^y + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^y + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^y, \\
0 &= \delta q^z + \tilde{\lambda} T \Gamma \delta u^z + \frac{\tilde{\lambda} T}{h} \Gamma \delta q^z,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \delta j^x + ik \xi \left(\partial_e \frac{\mu}{T} \delta e + \partial_n \frac{\mu}{T} \delta n \right), \\
0 &= \delta j^y = \delta j^z, \\
0 &= \delta \Pi^{xx} + ik \tilde{\eta} \delta u^x, \\
0 &= \delta \Pi^{xy} + ik \eta \delta u^y, \\
0 &= \delta \Pi^{xz} + ik \eta \delta u^z, \\
0 &= \delta \Pi^{yy} + ik \tilde{\eta}_v \delta u^y, \\
0 &= \delta \Pi^{zz} + ik \tilde{\eta}_v \delta u^z, \\
0 &= \delta \Pi^{zy}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Itt bevezettük az $\tilde{\eta} = \eta_v + \frac{4}{3}\eta$, $\tilde{\eta}_v = \eta_v - \frac{2}{3}\eta$ és $\tilde{\lambda} = \lambda/T^2$ rövidített jelöléseket. A fenti egyenletrendszer mátrix formában a következő alakú:

$$M^A_B \delta Q^B = 0^A, \tag{3.66}$$

ahol δQ^B a folyadék perturbációját leíró mezőket jelenti

$$\begin{aligned}
\delta Q^B &= (\delta n, \delta e, \delta u^x, \delta q^x, \delta \Pi^{xx}, \delta j^x; \\
&\delta u^y, \delta q^y, \delta \Pi^{xy}, \delta \Pi^{yy}; \delta u^z, \delta q^z, \delta \Pi^{xz}, \delta \Pi^{zz}; \\
&\delta j^y, \delta j^z, \delta \Pi^{yz}).
\end{aligned}$$

A 17x17-es M^A_B mátrix blokkdiagonális formájú:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Itt \mathbf{I} a 3x3-as egységmátrix, \mathbf{R} és \mathbf{N} pedig a következők:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} h\Gamma & \Gamma & ik & 0 \\ \tilde{\lambda} T \Gamma & 1 + \Gamma \frac{T \tilde{\lambda}}{h} & 0 & 0 \\ ik\eta & 0 & 1 & 0 \\ ik\tilde{\eta}_v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & ikn & 0 & 0 & ik \\ 0 & \Gamma & ikh & ik & 0 & 0 \\ ik\partial_n p & ik\partial_e p & \Gamma h & \Gamma & ik & 0 \\ ik\tilde{\lambda}\partial_n T & ik\tilde{\lambda}\partial_e T & \Gamma\tilde{\lambda}T & 1 + \frac{\tilde{\lambda}T}{h}\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik\tilde{\eta} & 0 & 1 & 0 \\ ik\xi\partial_n \frac{\mu}{T} & ik\xi\partial_e \frac{\mu}{T} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

(3.66) exponenciálisan növekvő megoldásokat ad, ha Γ és k kielégíti a

$$\det \mathbf{M} = (\det \mathbf{N})(\det \mathbf{R})^2 = 0 \quad (3.70)$$

feltételi egyenletet pozitív valós részű Γ -val. Ennek az egyenletnek a gyökeit megkapjuk, ha az \mathbf{N} és az \mathbf{R} determinánsára vonatkozó karakterisztikus egyenleteket megoldjuk. \mathbf{R} determinánsával a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(h + k^2 \frac{\tilde{\eta}\tilde{\lambda}T}{h} \right) \Gamma + \tilde{\eta}k^2 = 0. \quad (3.71)$$

Ennek az egyenletnek a gyöke negatív. \mathbf{N} determinánsa a következő feltételt adja:

$$\begin{aligned} & \Gamma^3 \left(h + k^2 \frac{\tilde{\lambda}T}{h} \tilde{\eta} \right) + \\ & + \Gamma^2 k^2 \left(\tilde{\eta} + h\xi\partial_n \frac{\mu}{T} - \tilde{\lambda}n\partial_n T + \frac{\tilde{\lambda}T}{h} n\partial_n p + k^2 \frac{\tilde{\eta}\xi T \tilde{\lambda}}{h} \partial_n \frac{\mu}{T} \right) + \\ & + \Gamma k^2 \left[h\partial_e p + n\partial_n p + k^2 \tilde{\eta} \left(\xi\partial_n \frac{\mu}{T} + \tilde{\lambda}\partial_e T \right) \right] + \\ & + k^4 \left[\lambda n (\partial_n p \partial_e T - \partial_e p \partial_n T) + \xi h \left(\partial_e p \partial_n \frac{\mu}{T} - \partial_n p \partial_e \frac{\mu}{T} \right) + \right. \\ & \left. + k^2 \tilde{\eta} \tilde{\lambda} \xi \left(\partial_n \frac{\mu}{T} \partial_e T - \partial_e \frac{\mu}{T} \partial_n T \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

A Routh–Hurwitz-kritérium szerint [234], az $a_0\Gamma^3 + a_1\Gamma^2 + a_2\Gamma + a_3 = 0$ polinom gyökeinek valós része akkor és csak akkor negatív, ha

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (3.72)$$

A nemrelativisztikus esethez hasonlóan ezeket a feltételeket is biztosítják a termodinamikai stabilitás egyenlőtlenségei és a transzport-együtthatók nemnegativitása. Az előbbiek az esetünkben a következők

$$\partial_e \frac{1}{T} = -\frac{\partial_e T}{T^2} < 0, \quad (3.73)$$

$$\partial_n \frac{\mu}{T} > 0, \quad (3.74)$$

$$\Delta_T := \partial_e \frac{1}{T} \partial_n \frac{\mu}{T} - \partial_n \frac{1}{T} \partial_e \frac{\mu}{T} = -\frac{1}{T^2} \left[\partial_e T \partial_n \frac{\mu}{T} - \left(\frac{\partial_n T}{T} \right)^2 \right] < 0. \quad (3.75)$$

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

A nemrelativisztikus esethez hasonlóan a következő egyenlőtlenségek hasznosak az átalakításokban

$$\partial_e p = -hT \partial_e \frac{1}{T} + nT \partial_e \frac{\mu}{T}, \quad (3.76)$$

$$\partial_n p = -hT \partial_n \frac{1}{T} + nT \partial_n \frac{\mu}{T}, \quad (3.77)$$

$$\partial_n \frac{1}{T} = -\partial_e \frac{\mu}{T}. \quad (3.78)$$

Ez utóbbit már láttuk a (3.75) egyenlőtlenségénél. A fenti azonosságokkal (3.72) utolsó egyenlőtlenségének az igazolása is kézenfekvő (bár hosszadalmas) [387, 233].

Összességében bebizonyítottuk, hogy a fenti folyadék generikusan stabil általános áramlás esetén.

3.6. Homogenizálás – termodinamika

⁰Az előző fejezetekben kiderült, hogy a hidrodinamikai elmélet generikus stabilitása a termodinamikai kapcsolatok pontosabb felismerésén múlik, figyelembe véve a kontinuum- és a kinetikus elmélet követelményeit és feltételeit. Az alapvető termodinamikai összefüggés, a Gibbs-reláció megváltoztatása viszont a relativitáselmélet egyik elsőként vizsgált problémakörét érinti, a relativisztikus termodinamikát, azaz többek között a mozgó testek hőmérsékletének kérdéskörét [340, 339]. A kontinuumok oldaláról lehetőség van a két legfontosabb fogalom tisztázására, azaz a relativisztikus termodinamikai test értelmezésére és a vonatkozó Gibb-reláció levezetésére. Ezt legyszerűbben az energiamérleg homogenizálásával tehetjük meg, hasonlóan a (2.8.2) fejezetben ismertetett nemrelativisztikus esethez. Az itt levezetett Gibb-reláció kölcsönhatásra és a transzformációs tulajdonságokra vonatkozó következményeit, és a relativisztikus termodinamika fordulatos történetét a D függelékben ismertetem.

Tekintsük ismét a (3.4) energiaimpulzus-mérleget a sebességmező segítségével felírt speciális formájában. A homogenizálódás és a homogén változások szétválasztása érdekében a teljes időderiváltakat jelöljük a szokott módon $d/d\tau = u^a \partial_a$, illetve vezessük be az u^a -társzerű deriváltakat, azaz a gradienst: $\nabla^a = \partial^a - u^a u^b \partial_b$. Ezek segítségével az energiaimpulzus-mérleg a következő

$$\begin{aligned} \partial_b T^{ab} &= (eu^a + q^a) + (eu^a + q^a) \partial_b u^b + p (\dot{u}^a + u^a \partial_b u^b) - \\ &\quad - \dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) + \nabla_b (-p \delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) = 0^a \end{aligned} \quad (3.79)$$

A nyomást felbontottuk két részre a $P^{ab} = -p \Delta^{ab} + \Pi^{ab}$ definícióval. Az alsó sorban elkülönített tagokat egyrészt disszipatív teljesítményként, másrészt felületi hőáramként és felületi disszipatív munkavégzésként interpretálhatjuk. Tegyük fel, hogy a sebességmezőt Eckart definíciója adja meg, ezért a sebesség divergenciája a (3.3) részecskeszám-mérlegből kifejezhető:

$$\partial_a u^a = -\frac{\dot{n}}{n} = \frac{\dot{v}}{v}, \quad (3.80)$$

⁰ Ez a fejezet a [25] munkán alapul.

ahol bevezettük a $\mathbf{v} = 1/n$ moláris, részecskére vonatkoztatott, térfogatot. Ezt behelyettesítve a fenti (3.79) egyenletbe és beszorozva \mathbf{v} -vel kapjuk, hogy

$$\dot{e}^a + p(u^a \mathbf{v}) = \left[\dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) - \nabla_b (-p\delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) \right] \mathbf{v} =: A^a \dot{s} + Q^a. \quad (3.81)$$

Itt bevezettük az $\mathbf{e}^a := e u^a + \chi^a = \mathbf{v}(e u^a + q^a)$ definícióval a moláris energiainpulzusvektort, illetve a jobb oldalon a fajlagos entrópiát s jelöléssel. Az A^a és Q^a vektormezők ortogonálisak. Vegyük észre, hogy az $s = s(e^a, \mathbf{v} u^a)$ kétváltozós függvény bevezetéséhez $\dot{u}^a = 0^a$ esetben semmilyen fizikai feltételezés nem kell, ekkor az A^a vektor integrálósorozóként létezik (mert p -t is megfelelően választhatjuk le a teljes nyomásból). Ha a sebességmező gyorsulós, akkor viszont az entrópia ilyen bevezetése fizikai feltevés. Érdemes megjegyezni továbbá, hogy a szögletes zárójelben látható kifejezés konkrétan értelmezi az entrópiaváltozás lehetséges forrását, lényegében fordított módon, mint az entrópiaprodukciónál tettük.

Ezek után a fenti entrópiafüggvény parciális deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{e}^a} = \frac{A_a}{A^b A_b}, \quad \frac{\partial s}{\partial (\mathbf{v} u^a)} = p \frac{A_a}{A^b A_b}. \quad (3.82)$$

Bontsuk fel A^a -t a sebességmezővel párhuzamos és merőleges részekre a következő módon bevezetve a már ismerős jelöléseket:

$$T = \sqrt{A^b A_b}, \quad \frac{A_a}{\sqrt{A^b A_b}} = \frac{u^a + w^a}{\sqrt{1 + w^a w_a}} = \frac{g^a}{\sqrt{1 + w^a w_a}}, \quad (3.83)$$

ahol $u^a w_a = 0$, és vegyük észre, hogy ezzel csak a jelölést tettük kényelmesebbé, semmiféle megszorítást nem vezetünk be. Ezután az időderiváltakat tartalmazó (3.81) egyenlet alapján áttérünk a termodinamikában megszokottabb differenciálos jelölésekre:

$$d\mathbf{e}^a + p d(u^a \mathbf{v}) = A^a ds + Q^a. \quad (3.84)$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát g^a -val:

$$g_a [d\mathbf{e}^a + p d(u^a \mathbf{v})] = T ds. \quad (3.85)$$

Tovább alakítva a fenti kifejezést kapjuk, hogy

$$d\mathbf{e} + p d\mathbf{v} + w_a d\chi_a + ((\mathbf{e} + p\mathbf{v})w_a - \chi_a) du^a = T ds. \quad (3.86)$$

Ha az entrópia független a sebességtől, akkor $\chi_a = (\mathbf{e} + p\mathbf{v})w_a$ és

$$d\mathbf{e} + \frac{\chi_a}{\mathbf{e} + p\mathbf{v}} d\chi^a = T ds - p d\mathbf{v}, \quad (3.87)$$

ami megegyezik az előző fejezetekben kapott (3.32) és (3.52) kifejezésekkel, ha a fajlagos mennyiségekről áttérünk sűrűségekre és felhasználjuk a kémiai potenciál definíciójaként (3.53)-t.

A fenti gondolatmenettel álcázott homogenizálást végeztünk, kijelöltük a termodinamikai test egy fogalmát és ezzel az előző fejezetekben kapott Gibbs-relációra egy új, független levezetést adtunk.

3. Relativisztikus hidro- és termodinamika

A homogenizálást expliciten is végrehajthatjuk Reynolds transzporttételének megfelelő alkalmazásával (v.ö. 2.8.2. szakasz). A (3.79) egyenlet integrálásához olyan sebességmezőt kell találni, amely egyetlen paraméterrel jellemezhető térszerű felületet térszerűen fejleszt. Vagyis tekintsünk egy sima sebességmezőt és egy olyan összefüggő H hiperfelületet, amely merőleges a sebességmezőre, és sima a határa. Tegyük fel, hogy ez a hiperfelület egyetlen τ paraméterrel jellemezhetően változik, és eközben továbbra is merőleges marad az u^a sebességmezőre. A nyomás legyen állandó ezen a hiperfelületen, azaz $\nabla^a p = 0^a$, de a sebesség ne legyen az (ezért aztán inerciális sebességmező nem megfelelő, ilyen sebességmezőt ad meg például [127], 224. oldal). Ebben az esetben integráljuk (3.79)-et erre a $H(\tau)$ hiperfelületre. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{H(\tau)} (eu^a + q^a) + (eu^a + q^a)\partial_b u^b + p(\dot{u}^a + u^a\partial_b u^b) dV = \\ = \int_{H(\tau)} \dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) + \int_{H(\tau)} \nabla_b (-p\delta^{ab} + \Pi^{ab} + u^a q^b) dV. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Reynolds transzporttételét alkalmazva

$$\dot{E}^a + p(\bar{u}^a V) = \int_{H(\tau)} \dot{u}_b (\Pi^{ab} + u^a q^b) dV + \oint_{\partial H(\tau)} (\Pi^{ab} + u^a q^b) dA_b. \quad (3.89)$$

Itt dA_b a ∂H -vel jelölt H határán vett felületi mérték, a H -ra vett átlagmennyiségeket pedig a következő módon értelmezzük:

$$E^a = E\bar{u}^a + G^a = \int_{H(\tau)} (eu^a + q^a) dV, \quad \bar{u}^a = \frac{1}{V} \int_{H(\tau)} u^a dV. \quad (3.90)$$

Ugyanazzal az indoklással, mint fentebb, mondhatjuk, hogy (3.89) bal oldala az entrópia megváltozásával kapcsolatos. De az is világosan látszik, hogy ez a megváltozás csak részben a felületi hőátadás és disszipatív munkavégzés következménye, (3.89) bal oldalának első tagja a disszipatív térfogati effektusokat tartalmaz. Viszont ettől függetlenül van olyan S függvény, amely egy teljes derivált szorozva egy vektormezővel, azaz

$$\dot{E}^a + p(\bar{u}^a V) = A^a \dot{S}. \quad (3.91)$$

Ez az összefüggés pedig rögzíti az entrópia parciális deriváltjait, és átírható differenciális formába is:

$$dE^a + p d(\bar{u}^a V) = A^a dS, \quad (3.92)$$

ahol (3.83) módon új jelöléseket bevezetve és a fenti egyenlet mindkét oldalát g^a -val megszorozva kapjuk, hogy

$$g_a dE^a + g_a p d(\bar{u}^a V) = T dS = dE + w_a dQ^a + p dV + [(E + pV)w_a - Q_a] du^a. \quad (3.93)$$

Ha az entrópiát sebességfüggetlennek tételezzük, akkor $(E + pV)w_a = Q_a$, és megkapjuk a teljes, zárt termodinamikai testre vonatkozó Gibbs-relációt:

$$dE + \frac{Q_a}{\mathcal{H}} dQ^a = T dS - p dV, \quad (3.94)$$

ahol $\mathcal{H} = E + pV$ az entalpia.

4. Összefoglalás

Doktori disszertációmban a nemegyensúlyi termodinamika homogén testekre, nemrelativisztikus és relativisztikus kontinuumokra vonatkozó egységes elméletének alapjait vázoltam. Kutatásaimban és elért eredményeimben fontos szerepet játszott az elvi kérdések vizsgálatával a különböző területek közötti kirajzolódó szoros kapcsolat.

Homogén testek és kontinuumok kapcsolata kölcsönös. A Gibbs-reláció, vagyis a termodinamikai állapotter rögzítése, a kulcsa a homogén testekre vonatkozó termodinamikai ismeretek kontinuumokra történő átvitelének (lásd 2.4.3, 2.7 fejezeteket a gyengén nemlokális esetre, illetve 2.10 fejezetet a rugalmasságtanra, 3.2 és 3.4 fejezeteket a relativisztikus disszipatív folyadékokra vonatkozóan), illetve a kidolgozott kontinuumelmélet visszahomogenizálásával a Gibbs-reláció és akár a megfelelő homogén dinamikai törvények is megkaphatóak. Például a problémás relativisztikus homogén elméletben az Einstein-Planck-Ott dilemma elemzéséhez jó kiindulópont a kontinuum (3.6 fejezet), vagy a közönséges termodinamika dinamikai törvényeiben az együtthatók értelmezésében segít (2.8.2 fejezet). A homogén fizikai rendszerek és a megfelelő kontinuum közötti átmenet termodinamikailag konzisztens lehetőségét szokás lokális egyensúly hipotézisének nevezni. Ennek legfontosabb eleme az entrópia elsőrendű Euler-homogenitása, az 1.2 fejezetben megfogalmazott *lokalizálhatósági feltétel*. Alapfeltételként történő alkalmazásának következményeit az [51] és [392] munkák mutatják.

A termodinamika második főtétele legkönnyebben úgy érthető meg, ha az anyag stabilitásának feltételrendszereként fogjuk fel. Ezzel a szemlélettel bizonyíthatjuk, illetve ezt az állítást demonstrálhatjuk homogén termodinamikai rendszerek és kontinuumok esetén is. Belátható, hogy egyszerű, homogén termodinamikai testek egyensúlya aszimptotikusan stabil (1.3 és 1.4 fejezetek), illetve tisztán termodinamikai feltételek (konkáv és növekvő entrópia) biztosítják a homogén egyensúly lineáris aszimptotikus stabilitását nemrelativisztikus (2.8 fejezet) és relativisztikus folyadékokra egyaránt (3.5 fejezet).

Az entrópia növekedésének követelménye konstruktívan kiaknázható gyengén nemlokális konstitutív állapotterek esetén is. Ehhez az entrópiaáramot konstitutív függvényként kell kezelni. A Liu-eljárás segítségével általános módszer adható a második főtételnek megfelelő anyagtörvények – akár fejlődési egyenletek – elemzésére és konstrukciójára. A 2.3–2.4 fejezetben láttuk ezt a módszert és utána számos példát alkalmazására, többek között a relativisztikus esetben is (2.5, 2.6, 2.7 és 3.3 fejezetek).

Ahhoz, hogy az anyagtörvények valóban csak az anyagra jellemző kapcsolatokat fogalmazzanak meg, a téridőhöz való viszonyukat kell tisztázni. Ebből a szempontból nagyon fontos, hogy az anyagi objektivitás klasszikus megfogalmazása helytelen, illetve hiányos (2.2.2 szakasz). Ennek az alapvető megállapításnak egyes következményei a nemrelativisztikus (és relativisztikus) téridő matematikai modelljeinek segítségével az anyagtörvények konstrukciós módszerében jelennek meg. A pontos megfogalmazást [49, 50] munkák tartalmazzák véges deformációs rugalmasság és képlékenység

4. Összefoglalás

esetén. A hagyományos elméletek megfelelő újraértékelése, a következmények vizsgálata hosszú folyamat, ebben a munkában a helyes megfogalmazásnak csak bizonyos elemeit használtam a 2.7 és 2.10 fejezetekben és a gyengén nemlokális nemrelativisztikus állapottereknél, a relativisztikus esetben is. Ezeknek a tapasztalatai alapján és következményeként Galilei-relativisztikus disszipatív Fourier-Navier-Stokes folyadékokra abszolút, azaz teljesen vonatkoztatási és áramlási rendszer mentes tárgyalást adok meg [128] munkában, illetve ennek további következményeit elemzi [129].

A Természet nem redukálódik részterületekre, azok csak a fejünkben léteznek. A különbözőnek tekintett részterületek egységes módszertannal történő tárgyalása nélkül fontos összefüggéseket egyszerűen nem lehet észrevenni, sok esetben az egyik részterületen történt előrelépést a másik terület problémáinak megoldása során lehet kamatoztatni. Ez a dolgozat több példát is mutat erre vonatkozóan. A relativisztikus disszipatív hidrodinamikában a termodinamika stabilitási felfogásából következik, hogy a generikus stabilitás feltételei nem lehetnek erősebbek a termodinamikában megszokott előírásoknál, a Liu-eljárás alapján nemrelativisztikus általános módszer adaptálása a relativisztikus téridőre megadja a kiindulópontot az elmélet módosításhoz és az egyenletek kiátlagolásával a relativisztikus homogén elmélet, illetve a relativisztikus hőmérsékletfogalom egy új megközelítését kapjuk.

Ugyanennyire fontos, hogy az itt bemutatott elméleteket igazoljuk abban az értelemben, hogy konkrét jelenségeket jelezzünk előre és kísérletekre vonatkozó jóslatokat fogalmazzunk meg. Ebben a dolgozatban két gyakorlati területen is bemutatom az ilyen jellegű kutatásaink eredményeit. Egyrészt a szobahőmérsékletű, makroszkópikus nem-Fourier hővezetés felfedezésére vezető elméleti és kísérleti munkánkat foglalom össze röviden, erről sokkal részletesebb ismertetést [256] ad. Illetve a hipoelasztikus testek egy termodinamikailag kitüntetett modelljét is megadom a 2.10 fejezetben. Ezt az elméletet kövek reológiai tulajdonságainak kísérleti elemzésére használjuk munkatársaimmal, számos gyakorlati következménnyel és még több ötlettel az in-situ feszültségméréstől kezdve a gravitációs newtoni-zaj elemzéséig bezáróan.

Ugyanis ezek az elméleti módszerek, például a többszintű, homogén-kontinuum, lokális-gyengén nemlokális, Galilei-relativisztikus és speciális relativisztikus diszciplináris elemzésnek köszönhetően azonnal továbbvihetőek a célzott kísérleteknél, közvetlenül a mérnöki gyakorlatig. Illetve akár a mérnöki gyakorlatban is hasznosíthatóak az elvi és általános meglátások, vagy szemléletmód. Mást láthat meg például egy bányamérnök, ha tudja, hogy a kő folyik és a hőmérséklet változása és a hővezetés jelentősen befolyásolja a földalatti létesítmények állékonyságát és tartósságát is. A fordított irány pedig, ha leplezetten is, de alapvető ebben a munkában. Kövek reológiai tulajdonságaira vonatkozó tapasztalatok nemcsak áttételesen, de konkrétan is számítottak az itt ismertetett kutatási eredményekben.

A. Objektivitás és tér-idő

⁰Ebben a függelékben a szilárd rugalmas kontinuumok leírásának alapjául szolgáló úgy nevezett anyagi sokaságon értelmezett fizikai mennyiségek transzformációs tulajdonságait vizsgáljuk tér-idő-szemszögből.

A.1. Galilei-relativitás, avagy a nemrelativisztikus tér-idő

A klasszikus, nemrelativisztikus tér-időben sem szükségesek a vonatkoztatási rendszerek, és csak egyszerű differenciálgeometriai eszközöket kell használnunk [126, 127, 394]. Ehhez először is az alapfogalmak matematikai reprezentációját kell tisztázni, lehetőleg a relativisztikus tér-idő fogalmaival analóg módon. A nemrelativisztikus és a speciális relativisztikus tér-idő is relativisztikus, a lényeges különbség, hogy az első esetben a csak a tér a relatív, míg a második esetben az idő is. A vonatkoztatási rendszertől független tárgyalás, azaz egy tér-időmodell előnye, hogy szétválaszthatók a valódi fizikai tulajdonságokat matematikailag elválasztjuk a nem valódi, vonatkoztatási rendszertől függőektől. A nemrelativisztikus tér-idő modell részletes fizikai motivációját, alapfogalmait, formalizmusát és használatának következményeit illetően [395, 396, 50, 394, 128] adnak egyszerű bevezetést. Külön-külön és együtt is.

Egy *nemrelativisztikus tér-időmodellben*

- az M tér-idő egy négydimenziós irányított affin tér az \mathbf{M} alulfekvő vektortér fölött, melynek elemeit *tér-idő vektoroknak* nevezzük.
- az I abszolút idő egydimenziós irányított affin tér az \mathbf{I} egydimenziós vektortér felett, melynek elemeit *időintervallumoknak* nevezünk,
- a $\tau : M \rightarrow I$ időkiértékelés egy affin szürjekció a $\tau : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I}$ lineáris leképezés felett (az abszolút idő jelenik meg így a modellben),
- a *távolságok* \mathbf{D} mértékegyenese egy egydimenziós irányított vektortér,
- az *Euklidészi szerkezet* egy pozitív definit szimmetrikus bilineáris leképezés, $\cdot : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D} \otimes \mathbf{D}$, ahol

$$\mathbf{E} := \text{Ker } \tau \subset \mathbf{M}$$

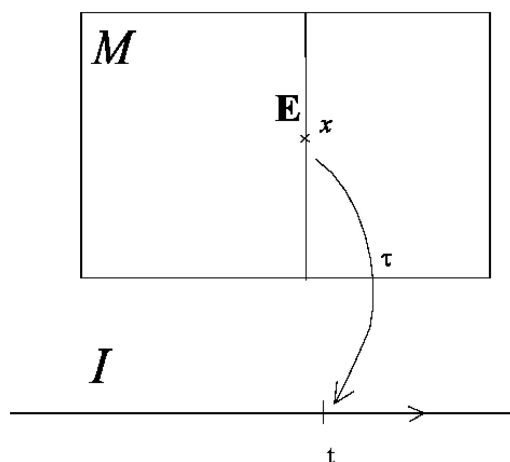
a *térszerű vektorok* háromdimenziós lineáris altere.

Ekkor az x és y események (tér-időpontok) között eltelt időtartam $\tau(x) - \tau(y) = \tau(x - y)$. Két tér-időpont egyidejű, ha köztük nulla az időtartam. Két egyidejű tér-időpont különbsége egy térszerű vektor. A modell lényeges elemeit az (A.1) ábra mutatja.

Egy $\mathbf{q} \in \mathbf{E}$ tér-idő vektor hossza $|\mathbf{q}| := \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}$.

⁰Ez a függelék a [393, 128, 129, 51] munkákon alapul.

A. Objektivitás és téridő



A.1. ábra. Nem relativisztikus téridő modell

\mathbf{M} duálisát, az $\mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezések terét \mathbf{M}^* -al jelöljük. \mathbf{M}^* elemeit téridő kovektoroknak nevezzük. Hasonló módon \mathbf{E} duálisa \mathbf{E}^* .

Ha $\mathbf{K} \in \mathbf{M}^*$ egy kovektor, azaz $\mathbf{K} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ egy lineáris leképezés, akkor \mathbf{E} -re vett megszorítása \mathbf{E}^* eleme, amit $\mathbf{K} \cdot \mathbf{i}$ -val jelölünk és \mathbf{K} abszolút térszerű komponensének nevezzük.

A téridő modell minden elemének részletes fizikai motivációját tartalmazza [394]. Megjegyezzük, hogy az euklidészi szerkezet megengedi, hogy segítségével egy vektorteret a duálisával azonosítsunk. Esetünkben, a mértékegyes figyelembe vételével ez az $\mathbf{E}^* \equiv \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosítást eredményezi. Viszont nincs ilyen azonosítás \mathbf{M}^* esetén, mert nincs euklidészi, vagy pszeudo-euklidészi szerkezet rajta. Indexekkel: ha \mathbf{E} egy \mathbf{q} elemének indexes jelölése q^i , $i = 1, 2, 3$, akkor $q_i = q^i$ írható. Másrészt \mathbf{M} egy elemét x^a -val jelölve ($a = 0, 1, 2, 3$), $x^a \notin \mathbf{E}$ esetén x_a -nak nincs értelme.

A nemrelativisztikus téridőben tehát természetes módon bevezethetőek négyesvektorok és négyestenzorok, de ezek tulajdonságai bizonyos mértékig eltérnek a relativisztikus analóg mennyiségektől. Az affin szerkezet azért kell, mert sem a térnek, sem az időnek nincs természetes (kitüntetett) középpontja [397, 398]. A vektorok és kovektorok fenti tulajdonságai annak a következményei, hogy az idő nem lehet beágyazva a nemrelativisztikus téridőbe. Lehet persze olyan modellt létrehozni, amelyben az idő beágyazott (a leggyakoribb például $\mathbf{I} \times \mathbf{E}$) de ekkor matematikailag lehetséges lenne beszélni olyan fizikai lehetetlenségekről, mint például az idő és egy térirány szöge. Azonban egy ilyen modell nem felelhet meg a kiindulási feltevésnek: nem csak fizikailag indokolt elemeket tartalmaz. Ez a fajta keveredés, a felesleges matematikai elemek jelenléte vezet végső soron az objektivitás Noll-féle definíciójához is. A Matolcsi-féle nem-relativisztikus téridő modellben a téridővektorok és téridőkovektorok megkülönböztetése talán a legfontosabb formális eszköz: nincs kanonikus módszer az azonosításukra ezért nem keverhetőek össze.

Differenciálás

A téridő affin szerkezete miatt létezik abszolút deriválás (a sokaságok nyelvén: kitüntetett kovariáns deriválás).

A.1. Galilei-relativitás, avagy a nemrelativisztikus téridő

Ha V egy véges dimenziós affin tér a \mathbf{V} vektortér felett, akkor egy $A : M \rightarrow V$ leképezés differenciálható az x^a pontban, ha van egy olyan $(DA)(x) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}$ lineáris leképezés, – A deriváltja x^a -ban – úgy, hogy

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{A(y) - A(x) - (DA)(x)(y - x)}{\|y - x\|} = 0$$

ahol $\| \cdot \|$ egy tetszőleges norma \mathbf{M} -en (egy véges dimenziós vektortéren minden norma ekvivalens). Absztrakt indexes jelölésünket használva $D = \partial_a$.

A fenti téridő szerkezetének egyik következménye, hogy $A : M \rightarrow V$ parciális deriváltjának nincs értelme (csak adott vonatkoztatási rendszerben). Viszont a *térszerű deriváltja* A -nak értelmes, mert a térszerű vektorok \mathbf{M} -ben lineáris alteret képeznek és $(\partial_i A)(x)$ az $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V}$, $q^i \mapsto A(x + q^i)$ függvény deriváltja a nullában. Világos, hogy $(\partial_i A)(x)$ a $(\partial_a A)(x)$ lineáris leképezés megszorítása \mathbf{E} -re.

Az $\mathbf{A} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}$ lineáris leképezés transzponáltja az az $\mathbf{A}^* : \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{M}^*$ lineáris leképezés, amelyre igaz, hogy $\mathbf{A}^* \mathbf{w} := \mathbf{w} \mathbf{A} \ \forall \ \mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ esetén. Ekkor, a tenzorok és lineáris leképezések között szokásos azonosításokat felhasználva figyelembe vehető, hogy

$$\partial_a A(x) \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{M}^*, \quad (\partial_a A)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{V}$$

és

$$y^a \cdot [(\partial_a A)^*(x)] := [\partial_a A(x)] y^a \in \mathbf{V}, \quad (\partial_a A)^*(x) \mathbf{w} \in \mathbf{M}^*$$

minden $y^a \in \mathbf{M}$ és $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ esetén.

Ennek megfelelően

$$(\partial_i A)(x) \in \mathbf{V} \otimes \mathbf{E}^*, \quad (\partial_i A)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{V}, \quad (\text{A.1})$$

$$q^i [(\partial_i A)^*(x)] := [(\partial_i A)(x)] q^i \in \mathbf{V}, \quad (\partial_i A)^*(x) \mathbf{w} \in \mathbf{E}^* \quad (\text{A.2})$$

minden $q^i \in \mathbf{E}$ és $\mathbf{w} \in \mathbf{V}^*$ -ra.

Speciálisan

- egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ skálármező deriváltja a $\partial_a f(x) \in \mathbf{M}^*$ kovektormező,
 - ennek térszerű része egy térszerű kovektor mező $\partial_i f(x) \in \mathbf{E}^*$;
- egy $C^a : M \rightarrow \mathbf{M}$ vektormező deriváltja egy $(\partial_b C^a)(x) \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*$ vegyes tenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_b C^a)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}$,
 - ennek térszerű része a $(\partial_i C^a)(x^a) \in \mathbf{M} \otimes \mathbf{E}^*$ vegyes tenzormező, melynek transzponáltja $(\partial_i C^a)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{M}$,
- egy térszerű $c^i : M \rightarrow \mathbf{E}$ vektormező térszerű deriváltja a $(\partial_j c^i)(x) \in \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$ vegyes tenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_j c^i)^*(x) \in \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}$.
- egy $K_a : M \rightarrow \mathbf{M}^*$ kovektormező deriváltja a $(\partial_a K_b)(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kotenzormező, amelynek transzponáltja $(\partial_a K_b)^*(x) \in \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$.

A. Objektivitás és téridő

Egy kovektormező deriváltja és annak transzponáltja is $\mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$ kovektormező. Így egy K_a kovektormezőnek van abszolút *antiszimmetrikus deriváltja*:

$$(\partial_a \wedge K_b)(x) := (\partial_a \wedge K_b)^*(x) - (\partial_a \wedge K_b)(x). \quad (\text{A.3})$$

Viszont egy $C^a : M \rightarrow \mathbf{M}$ nemrelativisztikus vektormező antiszimmetrikus deriváltjának általában – vonatkoztatási rendszertől függetlenül – nincs értelme. Azonban egy térszerű $c^i : M \rightarrow \mathbf{E}$ vektormező antiszimmetrikus deriváltja értelmezhető mert az $\mathbf{E}^* \equiv \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{D} \otimes \mathbf{D}}$ azonosítás miatt $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}$, így

$$(\partial_i \wedge c^j)(x^a) := (\partial_i c^j)^*(x) - (\partial_i c^j)(x).$$

Megfigyelők és vonatkoztatási rendszerek

A négyesvektorokat és tenzorokat a megfigyelők, illetve a vonatkoztatási rendszerek tér- és időszerű részenként észlelik. A szokásos transzformációs tulajdonságok, például a Galilei-transzformáció két inerciális megfigyelő által észlelt vektor térszerű komponensei között ezek segítségével fogalmazhatóak meg.

A tér- és időszerű részekre történő szétbontás az időkiértékelés és a négyessebességek segítségével történik a relativisztikus elmülethez hasonlóan. A sebességek a $V(1) = \{u^a \in \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{I}} \mid \tau_a u^a = 1\}$ halmaz elemei. Egy vektor idő- és térszerű részeit a következő leképezéssel adhatjuk meg:

$$(\tau_a, (\pi_u)_a^i) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{E}, \quad x^a \mapsto (\tau_a x^a, x^a - (\tau_b x^b) u^a). \quad (\text{A.4})$$

A kovektorokra, és a különféle tenzorokra a megfelelő további széthasítási szabályok érvényesek. Egy megfigyelőt egy összefüggő értelmezési tartományú, sima sebességmezőként adunk meg a téridőn, $u^a : M \rightarrow V(1)$. Tehát egy megfigyelő értelmezési tartományának minden pontjában értelmez egy széthasítást minden fizikai mennyiségen. Vonatkoztatási rendszer alatt egy megfigyelőt és a széthasított téridő, azaz $\mathbf{I} \times \mathbf{E}$ vektortér, egy koordinátázását értjük.

A megfigyelőkkel és vonatkoztatási rendszerekkel kapcsolatos további finom fogalmakat illetően az irodalomra utalunk [126, 127, 395]. Itt mindkét fogalmat lényegében a relativisztikus lokális nyugvó vonatkoztatási rendszer (pl. [391]) analógiájára fogjuk használni. Az alábbiakban több példát is fogunk látni a széthasítás kezelésére és különböző megfigyelőkre vonatkoztatott idő- és térszerű mennyiségek transzformációs szabályaira is.

A.1.1. Anyagi sokaságok

Folyadékok esetén hagyományosan két kitüntetett megfigyelőt használunk. Egyrészt egy külső inerciálisat – ekkor beszélünk lokális leírásról –, másrészt maga a kontinuum, illetve annak sebességmezője is tekinthető megfigyelőnek bizonyos feltételek esetén (ha nem turbulens). Az anyaghoz kötődő és a mozgásból eredő változások megkülönböztetése alapvetően fontos, ha valóban az anyagra jellemző – és nem annak speciális mozgásához kötődő – paramétereket szeretnénk mérni.

Deformálódó anyagok esetén ezért kettős tenzormezőket [399, 78], anyagi sokaságokat [400, 123] illetve számos különböző időderiváltat szoktak bevezetni a változások jellemzésére. Az előző szakaszban láttuk, hogy a téridőről a relativitáselméletben

megismert tapasztalatoknak a nemrelativisztikus esetre történő visszavetítése – annak felismerése, hogy a nemrelativisztikus téridő sem pusztán az egydimenziós idő és a háromdimenziós euklidészi tér szorzata – a deriváltakkal, vektorokkal és kovektorokkal történő műveletekkel történő nagyobb elővigyázatosságot feltételez. Ez a szokott indexes formalizmust és műveleteket nem engedi meg. Ebben a fejezetben megadom az indexes formalizmusnak egy olyan általánosítását, azaz módosított szabályrendszerét, amely a deformálható testek nemrelativisztikus mechanikájában alkalmazható. Ez a formalizmus a Penrose-féle absztrakt indexek szellemében [401] nem kötődik vonatkoztatási rendszerhez és koordináta rendszerhez sem. A formalizmus segítségével kiszámolom a különféle tenzori jellegű mennyiségek deriváltjait, illetve azok tér- és időszerű részeit az anyagra és a téridőre jellemzően. Hasonló nemrelativisztikus négydimenziós formalizmust vezettek be többek között például Truesdell és Toupin, Marsden és Hughes, Maugin, illetve maga Noll is [399, 402, 20, 403, 120], ezek a munkák azonban nem ismerik fel a vektor-kovektor megkülönböztetés következményeit, például az objektív időderiváltakra vonatkozóan sem.

Kinematika

A téridőt a továbbiakban kényelmi okokból vektortérrel reprezentáljuk, pontjait $x^a \in \mathbf{M}$ -el jelöljük. Téridő időre és térre történő széthasítását és a széthasított formát – egy inerciális megfigyelőre vonatkoztatottan – $x^a \prec (t, \mathbf{r}) = (t, r^i) \in \mathbf{I} \times \mathbf{E}$ módon adjuk meg. Itt és a továbbiakban az $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ a téridő vektorok négyes indexei, $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ hármas indexek. A négyesvektorok függetlenek a vonatkoztatási rendszerektől, a széthasított forma nem az, a széthasítás feltételez egy megfigyelőt. A négyesindexek és a hármasindexek is absztraktok, de különböző értelemben: a négyesvektorok és tenzorok megfigyelőtől és koordinátázástól is függetlenek, a hármasvektorok és tenzorok sem függenek koordinátázástól. Az index nélküli, koordinátainvariáns jelölésmódot csak a relatív, hármas vektorokra és tenzorokra tartjuk fenn.

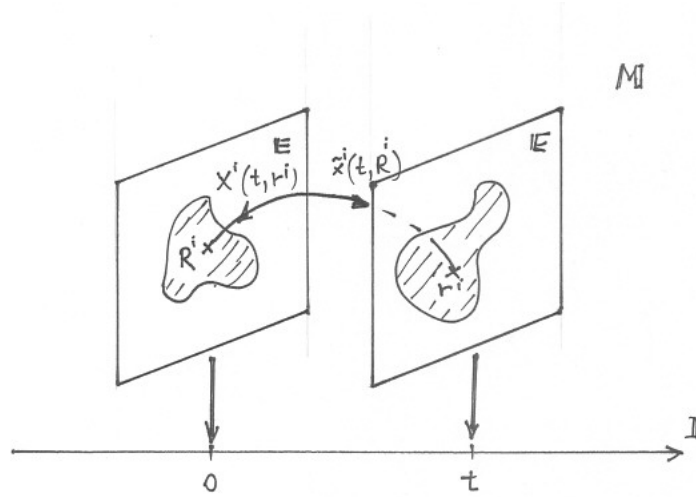
Az anyag pontjait $X^A = (t, \mathbf{R}) = (t, R^I) \in \mathbf{I} \times \mathbf{A}$ -val jelöljük, ahol \mathbf{A} a kontinuum pontjait reprezentáló háromdimenziós vektortér. Ebben az írásban a pontokat a szokásos módon egy alkalmasan választott t_0 időpontban a térben elfoglalt helyzetükkel reprezentáljuk. Az anyagi sokaság nem téridő, itt nem széthasításról, hanem valódi Descartes szorzat reprezentációról van szó. Ennek a reprezentációnak a problémáival és ezeknek a problémáknak megoldásával, azaz az anyag alakváltozásának fizikai reprezentációjával [396] foglalkozik részletesen. Ebben a függelékben ezt nem választjuk szét nagyon pontosan, például az $\mathbf{I} \times \mathbf{A}$ anyagi sokaság elemeit is négyes indexekkel reprezentáljuk, ahol $A, B, C, \dots = 0, 1, 2, 3$, illetve \mathbf{A} elemeit pedig $I, J, K, \dots = 1, 2, 3$ -al. A nagybetűk utalnak arra, hogy nem a téridőről van szó.

A kontinuumot a téridőbeli viselkedését jellemző *létezésfüggvénye* adja meg:

$$\tilde{x}^a : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M} : (t, \mathbf{R}) \mapsto \tilde{x}^a(t, \mathbf{R}) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

$\tilde{x}^i(t, \mathbf{R})$ a jól ismert mozgásfüggvény, \mathbf{R} pedig az anyagi sokaságnak a relatív helyzetvektorait jelölik. A mozgásfüggvény fenti egyszerű négydimenziós általánosításának következményeit tárgyaljuk a továbbiakban. Az $\tilde{x}^a(t, \mathbf{R})$ létezésfüggvény inverzét $X^A(t, \mathbf{r})$ -el jelöljük. Az invertálhatóság maga fizikai követelmény: azt a feltevést fejezi ki, hogy a kontinuum pontonként megmarad létezése során (pl. nem tömörödik több

A. Objektivitás és téridő



A.2. ábra. A létezésfüggvény és inverze

pont egy pontba, stb...). Összefoglalva az előbbi függvényeket a következő formában is írhatjuk:

$$\tilde{x}^a(t, R^I) \prec \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i(t, R^I) \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad X^A(t, r^i) = \begin{pmatrix} t \\ X^I(t, r^i) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A kovektorokat sorban, a vektorokat oszlopban jelöljük, lehetőleg összhangban a mátrixszorzás szabályaival. Azonban a mátrixos jelölést csak négyes-hármas viszonylatban, azaz a széthasított esetben tér- és időkomponensek megkülönböztetésekor használjuk. A vektorok felső, a kovektorok alsó indexet kapnak és csak alsó és felső indexekre megengedett az összegzés, mert a téridő nem euklidészi vektortér: nemrelativisztikusan nincs téridő-távolság. Az Einstein-konvenciónak megfelelően az azonos indexek összegzést jelölnek. Az $\mathbf{I} \times \mathbf{A}$ -n értelmezett, azaz *szubsztanciális mennyiségeket* hullámmal jelöljük, az \mathbf{M} -en értelmezett, azaz *lokális mennyiségekre*, másképpen *mezőkre* bevezetett jelöléshez képest. Azaz például az $A(t, \mathbf{r})$ skalármező szubsztanciális formája $\tilde{A}(t, \mathbf{R}) = A(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R}))$, vagyis $\tilde{A} = A \circ \tilde{x}^a$ és $A = \tilde{A} \circ X^A$, ahol \circ az összetett függvény jele.

Alapinverzek

\tilde{x}^a és X^A inverzei egymásnak, ezért

$$\tilde{x}^a \circ X^B = \delta^a_b, \quad X^A \circ \tilde{x}^b = \tilde{\delta}^A_B, \quad \tilde{x}^i \circ X^J = \delta^i_j, \quad X^I \circ \tilde{x}^j = \tilde{\delta}^I_J. \quad (\text{A.7})$$

Itt a megfelelő vektorterek identitás leképezése $id_{\mathbf{M}}$, $id_{\mathbf{I} \times \mathbf{A}}$, $id_{\mathbf{E}}$ és $id_{\mathbf{A}}$ az indexes jelöléssel δ^a_b , $\tilde{\delta}^A_B$, δ^i_j , illetve $\tilde{\delta}^I_J$ lesznek. Vigyázzunk, mert speciálisan a fenti formuláknál a bal oldalon álló függvényeket nem a helyettesítési értékükkel tekintjük (vesd össze (A.10)-el) és általában is jelölésmódunkat igyekszünk éppen csak annyira pontosra tenni, hogy kis odafigyeléssel kényelmes és áttekinthető számolási szabályokat tegyen lehetővé. Ugyanis a nagyszámú különféle, de hasonló függvény közül

A.1. Galilei-relativitás, avagy a nemrelativisztikus tér-idő

célszerű mindazokat lehetőleg azonosítani, amelyek fizikai szerepe megegyezik. Ennek megfelelően a létezésfüggvénynek és inverzének a deriváltjai a *létezésgradiens*, $\tilde{Y}^a_B \in \mathbf{M} \otimes (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^*$, és inverze $Z^A_b \in (\mathbf{I} \times \mathbf{A}) \otimes \mathbf{M}^*$, ahol

$$\tilde{Y}^a_b = \tilde{\partial}_B \tilde{x}^a \prec (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_J) \begin{pmatrix} t \\ \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_J \\ \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i & \tilde{\partial}_J \tilde{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_J \\ \tilde{v}^i & \tilde{H}^i_J \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$Z^A_b = \partial_b X^A \prec (\partial_t, \partial_j) \begin{pmatrix} t \\ X^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ \partial_t X^I & \partial_j X^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ V^I & G^I_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Itt $\tilde{v}^i = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *sebesség*, $V^I = \partial_t X^I$ az *anyagi sebességmező*, $\tilde{H}^i_J = \tilde{\partial}_J \tilde{x}^i$ a szubsztanciális *mozgásgradiens*¹, $G^I_j = (H^{-1})^I_j = \partial_j X^I$ pedig a mozgásgradiens mezőnek, az előbbi mennyiség lokális formájának az inverze. Bevezethetjük még az $\tilde{u}^a = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^a$ (szubsztanciális) *négyessebességet* és a $V^A = \partial_t X^A$ *négyes anyagi sebességmezőt*. Természetesen bármelyik szubsztanciális mennyiségnek képezhetjük a lokális formáját is, így például $v^i(t, r^i) = (\tilde{\partial}_t \tilde{x}^i \circ X^A)(t, r^i) = \tilde{\partial}_t \tilde{x}^i(t, X^J(t, r^i))$, amit indexek nélkül $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\partial}_t \tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{r}))$ alakban írhatunk. Ne feledjük, hogy a $\tilde{\partial}_t$ jelölés arra utal, hogy szubsztanciális függvényt deriválunk idő szerint, \mathbf{X} -et állandóan tartva. Az előbbi példát ezek után rövidebben és egyszerűbben is kifejezhetjük, $v^i = \tilde{\partial}_t x^i$, illetve indexek nélkül $\mathbf{v} = \tilde{\partial}_t \mathbf{x}$ formában, azaz a deriválás a szubsztanciális mennyiségre vonatkozik, de a deriváltat mezőként tekintjük, tehát az értelmezési tartomány a tér-idő. Általában a deriválás fölötti jel (vagy hiánya) a deriválandó függvény értelmezési tartományát, míg a derivált értelmezési tartományát a függvény feletti jel (vagy hiánya) jelöli. (A.7) második formulájának deriválásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_B (X^A \circ \tilde{x}^c) &= (\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_J) \begin{pmatrix} t \\ X^I(t, \tilde{x}^k(t, \mathbf{R})) \end{pmatrix} = \tilde{\delta}^A_B = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_J \\ \tilde{0}^I & \tilde{\delta}^I_J \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_J \\ \partial_t \tilde{X}^I + \partial_k \tilde{X}^I \tilde{\partial}_t \tilde{x}^k & \partial_k \tilde{X}^I \tilde{\partial}_J \tilde{x}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}^I + \tilde{G}^I_k \tilde{v}^k & \tilde{G}^I_k \tilde{H}^k_J \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Innen leolvasható, hogy

$$\tilde{G}^I_k \tilde{H}^k_J = \tilde{\delta}^I_J, \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{V}^I = -\tilde{G}^I_k \tilde{v}^k. \quad (\text{A.12})$$

Természetesen ez a megfelelő mezőkre is igaz, azaz $G^I_k H^k_J = \delta^I_J$ és $V^I = -G^I_k v^k$, hiszen a mátrixok közötti összefüggéseket az értelmezési tartomány megváltoztatása nem befolyásolja.

Deriváltak

A különféle deriváltak közötti kapcsolatokat leolvashatjuk egy skalárfüggvényre történő hatásukból. Szubsztanciális mennyiségekre

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A \tilde{f} &= (\tilde{\partial}_t \tilde{f} \quad \tilde{\partial}_I \tilde{f}) = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_A \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}^c_A = (\partial_t \tilde{f} \quad \partial_k \tilde{f}) \begin{pmatrix} 1 & 0_I \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k_I \end{pmatrix} = \\ &= (\partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f} \quad \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k_I). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

¹Ezt a mennyiséget angol nevének tükörfordításával sokszor deformációgradiensnek nevezi a magyar szakirodalom.

A. Objektivitás és téridő

Másrészt mezőkre

$$\begin{aligned}\partial_a f &\prec (\partial_t f \quad \partial_i f) = \tilde{\partial}_C f \partial_a X^C = \tilde{\partial}_C f Z_a^C \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t f & \tilde{\partial}_K f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_i \\ V^K & G_i^K \end{pmatrix} \\ &= \left(\tilde{\partial}_t f + V^K \tilde{\partial}_K f \quad \tilde{\partial}_K f G_i^K \right).\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Azaz

$$\boxed{\tilde{\partial}_A(\dots) = \partial_c(\dots)\tilde{Y}_A^c}, \quad \boxed{\partial_a(\dots) = \tilde{\partial}_C(\dots)Z_a^C}.\quad (\text{A.15})$$

Ebből következően az idő és térderiváltakra külön is felírva

$$\boxed{\tilde{\partial}_t(\dots) = \frac{d}{dt}(\dots) = \partial_t(\dots) + v^k \partial_k(\dots)}, \quad \boxed{\tilde{\partial}_I(\dots) = \partial_k(\dots)\tilde{H}_I^k},\quad (\text{A.16})$$

$$\boxed{\partial_t(\dots) = \tilde{\partial}_t(\dots) + V^K \tilde{\partial}_K(\dots)}, \quad \boxed{\partial_i(\dots) = \tilde{\partial}_K(\dots)G_i^K}.\quad (\text{A.17})$$

Itt a szubsztanciális időderiváltra bevezettük a szokásos $\frac{d}{dt}$ jelölést, amit néha ponttal rövidítünk.

Vegyes deriváltak

Igen fontos szerepet játszanak a vegyes második parciális deriváltak egyenlősége alapján felírható összefüggések. Két négyes deriválásra ez triviális, de részben széthasítva felhasználjuk a mozgásgradiens és a sebességek definícióit és a deriváltakra fent kapott bekeretezett összefüggéseket.

Időderiváltakkal. Először a négyes mennyiségekre (A.15) alapján kapjuk, hogy

$$\tilde{\partial}_t \tilde{Y}_B^a = \tilde{\partial}_t \tilde{\partial}_B \tilde{x}^a = \tilde{\partial}_B \tilde{\partial}_t \tilde{x}^a = \tilde{\partial}_B \tilde{v}^a, \quad \longrightarrow \quad \tilde{\partial}_t \tilde{Y}_B^a = \partial_c \tilde{v}^a \tilde{Y}_B^c, \quad (\text{A.18})$$

$$\partial_t Z_b^A = \partial_t \partial_b X^A = \partial_b \partial_t X^A = \partial_b V^A, \quad \longrightarrow \quad \partial_t Z_b^A = \tilde{\partial}_C V^A Z_b^C. \quad (\text{A.19})$$

Kicsit átalakítva az utóbbi formulákat kapjuk a gyakorlatban használhatóbb azonosságokat, ugyanis (A.18)–(A.19)-ből a sebességderiváltakat kifejezve, (A.8)–(A.9) és (A.11)–(A.12) felhasználásával és (A.18)-nál is mezőkre áttérve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} Y_c^a\right) Z_b^C &= \partial_b v^a \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_K \\ \dot{v}^i & \dot{H}_K^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G_l^K v^l & G_j^K \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \dot{v}^i - \dot{H}_K^i G_l^K v^l & \dot{H}_K^i G_j^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_j \\ \partial_t v^i & \partial_j v^i \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t Z_c^A Y_B^c &= \tilde{\partial}_B V^A \prec \begin{pmatrix} 0 & 0_k \\ \partial_t V^I & \partial_t G_k^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_J \\ v^k & H_J^k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0_J \\ \partial_t V^I + \partial_t G_k^I v^k & \partial_t G_k^I H_J^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_J \\ \dot{V}^I & \tilde{\partial}_J V^I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak

Itt a tér-térszerű és idő-térszerű komponensek részben ismerős formulákat eredményeznek.

$$\dot{v}^i = \partial_t v^i - \dot{H}^i{}_K V^K, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v} - \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \circ \mathbf{v}, \quad (\text{A.20})$$

$$\partial_j v^i = \dot{H}^i{}_K G^K{}_j, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{V}^I = \partial_t V^I + \partial_t G^I{}_k v^k, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{V}} = \partial_t \mathbf{V} + \partial_t \mathbf{G} \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{\partial}_J V^I = \partial_t G^I{}_k H^k{}_J, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H}. \quad (\text{A.23})$$

A legutolsó összefüggésnél az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt használtuk fel. Az invariáns, indexmentes jelölés megtávesztó lehet a különböző vektorterek miatt.

Térderiváltakkal. Ekkor kicsit keverve a különböző széthasított alakokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_I \tilde{Y}^b{}_c \prec \begin{pmatrix} 0_I & 0_{IK} \\ \tilde{\partial}_I \tilde{v}^j & \tilde{\partial}_I \tilde{H}^j{}_K \end{pmatrix} &= \tilde{\partial}_I \tilde{\partial}_K \tilde{x}^b = \\ &= \tilde{\partial}_K \tilde{\partial}_I \tilde{x}^b \prec \tilde{\partial}_K \begin{pmatrix} 0_I \\ \tilde{H}^j{}_I \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{IK} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{H}^j{}_I & \tilde{\partial}_K \tilde{H}^j{}_I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i Z^B{}_c \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_i V^J & \partial_i G^J{}_k \end{pmatrix} &= \partial_i \partial_c X^B = \\ &= \partial_c \partial_i X^B \prec \partial_c \begin{pmatrix} 0_i \\ G^J{}_i \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} 0_i & 0_{ik} \\ \partial_t G^J{}_i & \partial_k G^J{}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

A széthasítás jele fölötti index parciális széthasítást jelöl. A tér-térszerű és idő-térszerű komponenseket ismét érdemes kiemelni. A tér-térszerű komponensnek nincs jó index nélküli felírása, mert harmadrendű tenzor részleges szimmetriájára vonatkozik.

$$\tilde{\partial}_I v^j = \dot{H}^j{}_I, \quad \text{azaz} \quad \tilde{\nabla} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{H}}, \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{\partial}_I H^j{}_K = \tilde{\partial}_K H^j{}_I, \quad \text{azaz} \quad -, \quad (\text{A.27})$$

$$\partial_i V^J = \partial_t G^J{}_i, \quad \text{azaz} \quad \nabla \mathbf{V} = \partial_t \mathbf{G}, \quad (\text{A.28})$$

$$\partial_i G^J{}_k = \partial_k G^J{}_i, \quad \text{azaz} \quad -. \quad (\text{A.29})$$

A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak

A szubsztanciális alak keveri a téridőre és az anyagra vonatkozó mennyiségeket. Az anyagi mennyiségeknek figyelembe kell venni a kontinuum mozgásának következményeit, de azt az anyagra magára vonatkoztatva megadni. Ezt a feltételt egyszerű figyelembe venni, ha megkülönböztetjük a függvényeket az alábbiak szerint:

- lokális: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^n$ - téridőn értelmezett téridő jellegű függvény ,
- szubsztanciális: $\mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}^n$ anyagon értelmezett téridő jellegű függvény,

A. Objektivitás és téridő

– anyagi: $\mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^n$ az anyagon értelmezett anyag jellegű függvény.

Itt az n egész szám a fizikai mennyiség tenzori rendjét adja. Mivel az anyag valahol és valamikor van a téridőben, azaz az anyag és a téridő között – feltételezésünk szerint – egyértelmű kapcsolat van, ezért ezek a formák ugyanannak a fizikai mennyiségnek egyenértékű kifejezési módjai. Az értelmezési tartományokat a létezésfüggvény, az értékészleteket pedig a létezésgradiens segítségével változtathatjuk meg. A fizikai mennyiségek szubsztanciális alakját az eddigiek szerint a mezőkre (lokális alakra) bevezetett jelölés fölött hullámmal, az anyagi alakot kalappal jelöljük.

Skalár

Egy skalármező az egy $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}, (t, \mathbf{r}) \mapsto f(t, \mathbf{r})$ függvény. Ennek szubsztanciális formája megegyezik az anyagi formával, tehát

$$\tilde{f} = \hat{f} = f \circ \tilde{x}, \quad \text{azaz} \quad \tilde{f}(t, \mathbf{R}) = f(t, \tilde{x}^i(t, \mathbf{R})).$$

Ennek megfelelően anyagi deriváltja megegyezik a szubsztanciális deriválttal:

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_A \hat{f} &= \tilde{\partial}_A \tilde{f} = \partial_c \tilde{f} \tilde{\partial}_A \tilde{x}^c = \partial_c \tilde{f} \tilde{Y}^c_A \prec \\ &= (\tilde{\partial}_t \tilde{f}, \tilde{\partial}_I \tilde{f}) = (\dot{f}, \tilde{\nabla} f) = (\partial_t \tilde{f}, \partial_k \tilde{f}) \begin{pmatrix} 1 & \tilde{0}_I \\ \tilde{v}^k & \tilde{H}^k_I \end{pmatrix} = (\partial_t \tilde{f} + \tilde{v}^k \partial_k \tilde{f}, \partial_k \tilde{f} \tilde{H}^k_I). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Ebből látható, hogy a skalár mennyiség anyagi idő- és térderiváltjai a következők:

$$\begin{aligned} \hat{\diamond} \hat{f} = \dot{f} &= \partial_t f + v^k \partial_k f, & \text{azaz} & \hat{\diamond} \hat{f} = \dot{f} = \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f, & (\text{A.31}) \\ \hat{\partial}_I \hat{f} = \tilde{\partial}_I \tilde{f} &= \partial_k f H^k_I & \text{azaz} & \hat{\nabla} \hat{f} = \tilde{\nabla} \tilde{f} = \nabla f \cdot \mathbf{H}. & (\text{A.32}) \end{aligned}$$

Az anyagi időderiváltra külön jelölést vezetünk be és a formulákat lokális alakban, mezőként adtuk meg. Az anyagi időderivált geometriailag az anyag sebességmezője szerinti Lie-derivált.

Vektor

Egy vektormező lokálisan egy

$$c^a : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto c^a(t, \mathbf{r})$$

függvény. Ennek szubsztanciális és anyagi formái:

$$\begin{aligned} \tilde{c}^a &: \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}, & \tilde{c}^a &= c^a \circ \tilde{x}, \\ \hat{c}^A &: \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{A}, & \hat{c}^A &= \tilde{Z}^A_c \tilde{c}^c. \end{aligned}$$

Vektorok anyagi formáját úgy kapjuk, hogy nemcsak az értelmezési tartományt, hanem az értékészletet is visszahúzzuk az anyagi sokaságra. A négyes vektori mennyiségek nem függenek a vonatkoztatási rendszer mozgásától – viszont felbontásuk idő- és térszerű komponensekre már függ. A megfigyelőt a sebességmezője adja meg [127]. Az anyag maga is meghatároz egy sebességmezőt, ennek megfelelően legalább két célszerű

A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak

és gyakran használatos felbontása van egy tetszőleges vektori mennyiségnek: egy inerciális megfigyelő és az anyag szerint. Ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális megfigyelő szerint \mathbf{v} (azaz széthasított négyessebessége $v^a \prec (1, v^i)$), akkor a kétféle felbontást vektorok esetén Galilei-transzformáció köti össze a következő módon:

$$c^a \prec \begin{pmatrix} c^0 \\ \vec{c}^i \end{pmatrix}, \quad c^a \succ \begin{pmatrix} c^0 \\ \vec{c}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ c^i - v^i c^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Itt felülvonással az *anyag szerinti felbontást* jelöltük, és az utolsó egyenlőség megadja annak inerciális mennyiségekkel kifejezett alakját. Figyeljük meg, hogy vektornak az időszerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. A fenti összefüggés megjelenik a vektor anyagi formájának idő- és térszerű komponensekre történő felbontásában is:

$$\hat{c}^A = \begin{pmatrix} \hat{c}^0 \\ \hat{\vec{c}}^i \end{pmatrix} = \tilde{Z}^A_b \tilde{c}^b \prec \begin{pmatrix} 1 & 0_j \\ -G^I_k v^k & G^I_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^0 \\ \vec{c}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^I_j (c^j - v^j c^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ G^I_j \tilde{c}^j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Az anyagi forma deriváltja a *teljes anyagi derivált*

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A \hat{c}^B &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ \tilde{G}^j_k \tilde{c}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_I c^0 \\ (G^J_k \dot{\tilde{c}}^k) & \tilde{\partial}_I (G^J_k \tilde{c}^k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\partial}_I c^0 \\ G^J_k (\dot{\tilde{c}}^k - \tilde{c}^l \partial_l v^k) & G^J_k (\tilde{\partial}_I \tilde{c}^k - \tilde{c}^l \partial_l H^k_I) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 & \tilde{\nabla} c^0 \\ \mathbf{G}(\dot{\tilde{\mathbf{c}}} - \nabla \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{c}}) & \mathbf{G}(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{c}} - \nabla \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{c}}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Itt az első sor széthasításánál a diadikus szorzat miatt a deriváltak az előttük levő formulára hatnak, ahogy a következő mátrixból látszik. Az átalakításoknál felhasználtuk az inverz mátrix deriváltjára vonatkozó összefüggést, illetve az (A.21) és (A.27) összefüggéseket. A deriválások kijelölése után elhagytuk a szubsztanciális forma jelölését. Az első oszlopból olvasható ki az anyagi időderivált, amit még egy picit érdemes alakítanunk:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{c}}^A &:= \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ G^i_l (\dot{\tilde{c}}^l - \tilde{c}^k \partial_k v^l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ G^I_l ((c^l - c^0 v^l) - (c^k - c^0 v^k) \partial_k v^l) \end{pmatrix}, \\ \hat{\dot{\mathbf{C}}} &:= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{c}^0 \\ \hat{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}^0 \\ \mathbf{G} \cdot ((\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v}) - \nabla \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} - c^0 \mathbf{v})) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg, vagyis feltételezzük, hogy maga az anyagi sokaság – másnéven a referencia konfiguráció – a pillanatnyi konfiguráció, akkor térszerű vektorra – amelynek null indexű, azaz időszerű komponense nulla – érdemes külön is felírunk az anyagi időderiváltat. Ekkor formálisan G^I_j identitás (de a deriváltja nem az):

$$\boxed{\dot{\tilde{c}}^I = \dot{c}^I - c^j \partial_j v^I}, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\hat{\dot{\mathbf{c}}} = \dot{\mathbf{c}} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c}}. \quad (\text{A.37})$$

Ezt szokás a vektor *felsőáramlásos időderiváltjának* nevezni, és $\tilde{\nabla}$ -val jelölni. Ez a feltétel összemosza az anyagi és téridő reprezentációkat.

A. Objektivitás és téridő

Kovektor

Egy kovektormező lokális, szubsztanciális és anyagi alakjai a következők:

$$k_a : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto k_a(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{k}_a : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}^*, \quad \tilde{k}_a = k_a \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{k}_a : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^*, \quad \hat{k}_A = \tilde{Y}_A^c \tilde{k}_c. \quad (\text{A.40})$$

Hasonlóan a vektorokhoz, ha az anyag relatív sebességmezője az inerciális megfigyelő szerint \mathbf{v} , akkor megadhatjuk egy inerciális és anyagi megfigyelő szempontjából is. A kovektorok azonban másképp transzformálódnak, mint a vektorok:

$$k_a \prec (k_0 \quad k_i), \quad k_a \succ (\bar{k}_0 \quad k_i) = (k_0 + v^k k_k \quad k_i). \quad (\text{A.41})$$

Ez a felbontás természetesen ismét tükröződik a kovektor anyagi formájának idő és térszerű komponenseiben

$$\hat{k}_A = (\hat{k}_0 \quad \hat{k}_i) = \tilde{Y}_A^c \tilde{k}_c \prec \begin{pmatrix} 1 & \tilde{v}^k \\ 0_i & \tilde{H}_I^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_k \end{pmatrix} = (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k \quad \tilde{H}_I^k \tilde{k}_k). \quad (\text{A.42})$$

Figyeljük meg, hogy kovektoroknak a térszerű része ugyanaz a különböző megfigyelők számára. Megjegyzendő, hogy a derivált maga is egy kovektor, a szubsztanciális időderivált pedig időszzerű komponensének anyagi alakja. A teljes anyagi derivált pedig a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A \hat{k}_B \prec \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t \\ \tilde{\partial}_I \end{pmatrix} (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k \quad \tilde{H}_J^k \tilde{k}_k) &= \begin{pmatrix} (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) \dot{} & (\tilde{H}_J^k \tilde{k}_k) \dot{} \\ \tilde{\partial}_I (\tilde{k}_0 + \tilde{v}^k \tilde{k}_k) & \tilde{\partial}_I (\tilde{H}_J^k \tilde{k}_k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \tilde{H}_J^k (\dot{\tilde{k}}_k + (\partial_k v^l) k_l) \\ \tilde{\partial}_I \tilde{k}_0 & \tilde{H}_J^k (\tilde{\partial}_I \tilde{k}_k + \partial_k H_I^m \tilde{k}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{k}}_0 & \mathbf{H}(\dot{\mathbf{k}} + (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \mathbf{k}) \\ \tilde{\nabla} \tilde{k}_0 & \mathbf{H}(\tilde{\nabla} \mathbf{k} + \nabla \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Itt a csillag a transzponálást jelöli. Az utolsó egyenlőségénél itt is áttértünk lokális mennyiségekre. Az utolsó mátrixok első sorából olvasható ki az anyagi időderivált:

$$\hat{\diamond} k_A = \left((k_0 + k_k v^k) \quad H_I^k (\dot{k}_k + k_l \partial_k v^l) \right). \quad (\text{A.43})$$

Ebből kaphatjuk meg a térszerű kovektorra vonatkozó jól ismert alsóáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (H_I^j az identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval):

$$\boxed{\hat{\diamond} k_i = \left((k_k v^k) \quad \dot{k}_i + k_k \partial_i v^k \right)}, \quad \text{azaz} \quad \boxed{\hat{\diamond} \mathbf{k} = \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)}. \quad (\text{A.44})$$

Vagyis térszerű kovektor anyagi időderiváltja általában *nem* térszerű. Nem szorítkozhatunk csak a három dimenzióra. Az anyagi időderivált térszerű részét nevezik *alsóáramlásos derivált*nak.

Tenzor

Egy tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$T^{ab} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto T^{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.45})$$

$$\tilde{T}^{ab} : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}, \quad \tilde{T}^{ab} = T^{ab} \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.46})$$

$$\hat{T}^{AB} : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} \times \mathbf{A}, \quad \hat{T}^{AB} = \tilde{Z}^A \tilde{Z}^B \tilde{T}^{cd}. \quad (\text{A.47})$$

Egy tenzormezőnek inerciális megfigyelők által széthasított formáját most nem adjuk meg, helyette majd a referencia konfigurációra visszahúzott, anyagi formából olvasuk ki. Ezt (A.34)–(A.42)-ből láthatóan megtehetjük. A közvetlen érveléshez viszont a téridőmodellek transzformációs formulái szükségesek [127]. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{T}^{AB} &= \begin{pmatrix} \hat{t}^0 & \hat{t}^J \\ \hat{t}^I & \hat{t}^{IJ} \end{pmatrix} = \tilde{Z}^A \tilde{Z}^B \tilde{T}^{cd} = \begin{pmatrix} 1 & 0_l \\ -G^I_k v^k & G^I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 & t^m \\ t^l & t^{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -G^J_k v^k \\ 0_m & G^J_m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t^0 & G^J_m (t^m - t^0 v^m) \\ G^I_l (t^l - v^l t^0) & G^I_l G^J_m (t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & G^J_m \bar{t}^m \\ G^I_l \bar{t}^l & G^I_l G^J_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező idő-időszerű része nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A (\tilde{Z}^B \tilde{Z}^C \tilde{T}^{de}) &\prec \left(\tilde{\partial}_t \quad \tilde{\partial}_I \right) \begin{pmatrix} \bar{t}^0 & \tilde{G}^K_m \bar{t}^m \\ \tilde{G}^J_l \bar{t}^l & \tilde{G}^J_l \tilde{G}^K_m \bar{t}^{lm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & (\tilde{G}^K_m \dot{\bar{t}}^m) \\ (\tilde{G}^J_l \dot{\bar{t}}^l) & (\tilde{G}^J_l \tilde{G}^K_m \dot{\bar{t}}^{lm}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_I t^0 & \tilde{\partial}_I (\tilde{G}^K_m \bar{t}^m) \\ \tilde{\partial}_I (\tilde{G}^J_l \bar{t}^l) & \tilde{\partial}_I (\tilde{G}^J_l \tilde{G}^K_m \bar{t}^{lm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & \tilde{G}^K_m (\dot{\bar{t}}^m - \partial_r v^m \bar{t}^r) \\ (\tilde{G}^J_l (\dot{\bar{t}}^l - \partial_r v^l \bar{t}^r)) & \tilde{G}^J_l \tilde{G}^K_m (\dot{\bar{t}}^{lm} - \partial_r v^l \bar{t}^{rm} - \partial_r v^m \bar{t}^{lr}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_I t^0 & \tilde{G}^K_m (\tilde{\partial}_I \bar{t}^m - \partial_r H^m_I \bar{t}^r) \\ \tilde{G}^J_l (\tilde{\partial}_I \bar{t}^l - \partial_r H^l_I \bar{t}^r) & \tilde{G}^J_l \tilde{G}^K_m (\tilde{\partial}_I \bar{t}^{lm} - \partial_r H^l_I \bar{t}^{rm} - \partial_r H^m_I \bar{t}^{lr}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Az utolsó hipermátrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\hat{T}^{\diamond AB} = \begin{pmatrix} \dot{t}^0 & G^J_m ((t^m - t^0 v^m) - \partial_r v^m (t^r - t_0 v^r)) \\ G^I_l \left((t^l - t^0 v^l) - \partial_r v^l (t^r - t_0 v^r) \right) & G^I_l G^J_m \left((t^{lm} - t^m v^l - t^l v^m + t^0 v^l v^m) - \partial_r v^l (t^{rm} - t^m v^r - t^r v^m + t^0 v^r v^m) - \partial_r v^m (t^{lr} - t^l v^r - t^r v^l + t^0 v^r v^l) \right) \end{pmatrix}.$$

Ebből kaphatjuk meg a térszerű tenzorra vonatkozó jól ismert felsőáramlásos időderiváltat, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G^I_j

A. Objektivitás és téridő

identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval):

$$\overset{\diamond}{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0^i \\ 0^J & t^{ij} - \partial_r v^i t^{rj} - \partial_r v^j t^{ir} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

Vagyis térszerű tenzor anyagi időderiváltja térszerű.

Kotenzor

Egy kotenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$B_{ab} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto B_{ab}(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.51})$$

$$\tilde{B}_{ab} : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*, \quad \tilde{B}_{ab} = B_{ab} \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.52})$$

$$\hat{B}_{AB} : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^* \otimes (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^*, \quad \hat{B}_{AB} = \tilde{Y}_A^c \tilde{Y}_B^d \tilde{B}_{cd}. \quad (\text{A.53})$$

A tenzorok esetéhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{B}_{AB} &= \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{b}_J \\ \hat{b}_I & \hat{b}_{IJ} \end{pmatrix} = \tilde{Y}_A^c \tilde{Y}_B^d \tilde{B}_{cd} = \begin{pmatrix} 1 & v^k \\ 0_I & H_I^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_J \\ v^m & H^m_J \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m & H^m_J (b_m + v^k b_{km}) \\ H_I^k (b_k + v^m b_{km}) & H_I^k H^m_J b_{km} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & H^m_J \bar{b}_m \\ H_I^k \bar{b}_k & H_I^k H^m_J b_{km} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

A széthasított forma komponenseit az eddigiekhez hasonlóan felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy tenzormező tér-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A (\tilde{Y}_B^d \tilde{Y}_C^e \tilde{B}_{de}) &\prec \left(\tilde{\partial}_t \quad \tilde{\partial}_I \right) \begin{pmatrix} \bar{b}_0 & \tilde{H}_K^m \bar{b}_m \\ \tilde{H}_J^n \bar{b}_n & \tilde{H}_J^n \tilde{H}_K^m \bar{b}_{nm} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{b}}_0 & (\tilde{H}_K^m \bar{b}_m) \dot{} \\ (\tilde{H}_J^n \bar{b}_n) \dot{} & (\tilde{H}_J^n \tilde{H}_K^m \bar{b}_{nm}) \dot{} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_i \bar{b}_0 & \tilde{\partial}_I (\tilde{H}_K^m \bar{b}_m) \\ \tilde{\partial}_I (\tilde{H}_J^n \bar{b}_n) & \tilde{\partial}_I (\tilde{H}_J^n \tilde{H}_K^m \bar{b}_{nm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{b}}_0 & \tilde{H}_K^m (\dot{\bar{b}}_m + \bar{b}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_J^n (\dot{\bar{b}}_n + \bar{b}_r \partial_n v^r) & \tilde{H}_J^n \tilde{H}_K^m (\dot{\bar{b}}_{nm} + \bar{b}_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s \bar{b}_{sm}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_I \bar{b}_0 & \tilde{H}_K^m (\tilde{\partial}_I \bar{b}_m + \partial_m H^r_I \bar{b}_r) \\ \tilde{H}_J^n (\tilde{\partial}_I \bar{b}_n + \partial_n H^r_I \bar{b}_r) & \tilde{H}_J^n \tilde{H}_K^m (\tilde{\partial}_I \bar{b}_{nm} + \partial_m H^r_I \bar{b}_{nr} + \partial_n H^r_I \bar{b}_{rm}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Az utolsó hipermatrix első komponense az anyagi időderivált. Ezt részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{\hat{B}}_{AB} = \begin{pmatrix} (b_0 + v^k b_k + b_m v^m + v^k b_{km} v^m) & \tilde{H}_J^m ((b_m + v^k b_{km}) \dot{} + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_m v^r) \\ \tilde{H}_I^n ((b_n + v^k b_{kn}) \dot{} + (b_r + v^k b_{kr}) \partial_n v^r) & \tilde{H}_I^n \tilde{H}_J^m (\dot{\bar{b}}_{nm} + \bar{b}_{nr} \partial_m v^r + \partial_n v^s \bar{b}_{sm}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

A.2. Anyagi mennyiségek és anyagi deriváltak

A térszerű kotenzor anyagi időderiváltja abban az esetben, sem térszerű, ha az anyagot az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G_i^J identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{B}_{ij} = \begin{pmatrix} (v^k v^m b_{km}) & (v^k b_{kj}) + v^k b_{km} \partial_j v^m \\ (v^k b_{ki}) + v^k b_{km} \partial_i v^m & \dot{b}_{ij} + b_{ik} \partial_j v^k + \partial_i v^k b_{kj} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

Ennek tér-térszerű komponense a jól ismert háromdimenziós *alsóáramlásos derivált*.

Vegyes tenzor

Egy vegyes tenzormező lokális, szubsztanciális és anyagi formái a következők:

$$A^a_b : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*, \quad (t, \mathbf{r}) \mapsto A^a_b(t, \mathbf{r}), \quad (\text{A.58})$$

$$\tilde{A}^a_b : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}^*, \quad \tilde{A}^a_b = A^a_b \circ \tilde{x}, \quad (\text{A.59})$$

$$\hat{A}^A_B : \mathbf{I} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{A} \otimes (\mathbf{I} \times \mathbf{A})^*, \quad \hat{A}^A_B = \tilde{Z}^A_c \tilde{Y}_B^d \tilde{A}^c_d. \quad (\text{A.60})$$

Az eddigiekhez hasonlóan most is csak az anyagi formát írjuk fel. Tehát

$$\begin{aligned} \hat{A}^A_B &= \begin{pmatrix} \hat{a}^0 & \hat{a}_J \\ \hat{a}^I & \hat{a}_J^I \end{pmatrix} = \tilde{Z}^A_c \tilde{Y}_B^d \tilde{A}^c_d = \begin{pmatrix} 1 & 0_k \\ -G^I_l v^l & G^I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 & b_m \\ b_k & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_J \\ v^m & H^m_J \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^0 + a_m v^m & H^m_J a_m \\ G^I_l (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m - a_m v^m v^l) & G^I_l H^m_J (a^l_m - a_m v^l) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & H^m_J \bar{a}_m \\ G^I_l \bar{a}^l & G^I_l H^m_J \bar{a}^l_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

A széthasított alak komponenseit most is felülvonással jelöltük. Figyeljük meg, hogy egy vegyes tenzormező idő-térszerű része az, ami nem változik a különböző megfigyelők szempontjából. A teljes anyagi derivált a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_A \hat{A}^B_C &= \tilde{\partial}_A (\tilde{Z}^B_d \tilde{Y}_C^e \tilde{A}^d_e) = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_K \bar{a}_m \\ \tilde{G}^J_l \bar{a}^l & \tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K \bar{a}^l_m \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{a}}^0 & (\tilde{H}^m_K \bar{a}_m) \\ (\tilde{G}^J_l \bar{a}^l) & (\tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K \bar{a}^l_m) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_I \bar{b}_0 & \tilde{\partial}_I (\tilde{H}^m_K \bar{a}_m) \\ \tilde{\partial}_I (\tilde{G}^J_l \bar{a}^l) & \tilde{\partial}_I (\tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K \bar{a}^l_m) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{a}}^0 & \tilde{H}^m_K (\dot{\bar{a}}_m + \bar{a}_r \partial_m v^r) \\ \tilde{G}^J_l (\dot{\bar{a}}^n - \bar{a}^r \partial_r v^l) & \tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K (\dot{\bar{a}}^l_m - \partial_n v^l \bar{a}^n_m + \partial_m v^n \bar{a}^l_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_I \bar{a}^0 & \tilde{H}^m_K (\tilde{\partial}_I \bar{a}_m + \partial_m H^n_I \bar{a}_n) \\ \tilde{G}^J_l (\tilde{\partial}_I \bar{a}^l - \partial_m H^l_I \bar{a}^m) & \tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K (\tilde{\partial}_I \bar{a}^l_m - \partial_n H^l_I \bar{a}^n_m + \partial_m H^r_I \bar{a}^l_r) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Az utolsó hipermátrix első komponense a vegyes tenzor anyagi időderiváltja. Ezt

A. Objektivitás és téridő

részletesebben kifejtve kapjuk, hogy

$$\overset{\diamond}{A}_B^A = \left(\begin{array}{c} \tilde{G}^I_l \left(\begin{array}{c} (a^0 + a_m v^m) \\ (a^l - a^0 v^l + a^l_m v^m) - \\ a_m v^m v^l \\ (a^m - a^0 v^m + a^m_k v^k) - \\ a_k v^k v^m \end{array} \right) \partial_m v^l \\ \tilde{H}^m_J (\dot{a}_m + a_l \partial_m v^l) \\ \tilde{G}^J_l \tilde{H}^m_K \left(\begin{array}{c} (a^l_m - a_m v^l) - \\ \partial_n v^l (a^n_m - a_m v^n) + \\ \partial_m v^n (a^l_n - a_n v^l) \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (\text{A.64})$$

A térszerű vegyes tenzor anyagi időderiváltja sem térszerű, akkor sem, ha az anyagot az előbbiekhöz hasonlóan az adott pillanatban elfoglalt helyzetével adjuk meg (azaz G_i^J, H_I^J identitás, a pillanatnyi konfiguráció megegyezik a referencia konfigurációval), mert:

$$\overset{\diamond}{A}_J^I = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0_j \\ (a^i_m v^m) - a^m_k v^k \partial_m v^i & \dot{a}^j_k - \partial_n v^j a^n_k + \partial_k v^n a^j_n \end{array} \right). \quad (\text{A.65})$$

Ez sem marad térszerű.

Létezésgradiens sebessége

A kinematikai alaplennységünk, a létezésgradiens vegyes tenzor, ráadásul téridő kontravariáns és anyagi kovariáns komponenssel. Anyagi formája pedig az identitás, ahogy az a transzformációs formulákból azonnal megkapható: $\hat{Y}_B^A = \tilde{Z}^A_c \tilde{Y}^c_B = \delta_B^A$, Ennek megfelelően az anyagi formájának deriváltja nulla. Természetesen akár neki magának is képezhetjük az anyagi deriváltját.

$$\tilde{\partial}_A \hat{Y}_C^b \prec \left(\begin{array}{cc} \tilde{\partial}_t & \tilde{\partial}_I \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0_K \\ \tilde{v}^j & \tilde{H}^j_K \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 0 & 0_K \\ \dot{\tilde{v}}^j & \dot{\tilde{H}}^j_K \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} 0_I & 0_{IK} \\ \tilde{\partial}_I \tilde{v}^j & \tilde{\partial}_I \tilde{H}^j_K \end{array} \right) \end{array} \right). \quad (\text{A.66})$$

Innen kiolvashatjuk a négyessebesség anyagi deriváltját is. Ebből következik továbbá, hogy a sebesség és a mozgásgradiens anyagi időderiváltja a szubsztanciális derivált.

B. Farkas lemmája és következményei

A Farkas-lemmát eredetileg Farkas és Minkowski egymástól függetlenül bizonyította [404, 405]. Farkast a d'Alembert elv egyenlőtlenséges kényszerek általánosítása, az úgy nevezett Fouier-elv vizsgálata vezette. A lemma alapvető az optimalizálás elméletében, a Kuhn-Tucker-tételkör kiindulópontja. Történetével számos munka foglalkozik, elsősorban erről az oldalról [406, 407, 408].

Ebben a függelékben termodinamikai következményei miatt, mint a Liu-eljárás algebrai részét tárgyalom. Ez szükséges a feltételes lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldásához. A bizonyítások [159]-et követik, ahol részben Farkas és Haar eredeti munkáit [409, 410, 411], részben pedig Liu [137] gondolatmenetét foglalom össze.

B.1. Lemma. (Farkas) *Tekintsük az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$ vektorokat a \mathbf{V} véges dimenziós vektortéren, és a vektortér duálisának $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ részalmazát. Ekkor a következő állítások ekvivalensek minden $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ -re:*

(i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ minden $\mathbf{p} \in S$ -re.

(ii) Léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nemnegatív egész számok úgy, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$.

Bizonyítás. (ii) \Rightarrow (i) $\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq 0$, ha $\mathbf{p} \in S$.

(i) \Rightarrow (ii) Elegendő az állítást $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ egy maximális, lineárisan független részalmazára bizonyítani.

Legyen $S_0 = \{\mathbf{y} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{a}_i = 0, i = 1, \dots, l\}$. Ekkor világos, hogy $\emptyset \neq S_0 \subset S$.

Ha $\mathbf{y} \in S_0$, akkor $-\mathbf{y} \in S_0$, ezért $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ és $-\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \geq 0$ egyszerre teljesül. Ezért minden $\mathbf{y} \in S_0$ -re igaz, hogy $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vagyis \mathbf{b} az $\{\mathbf{a}_i\}$ által generált lineáris altérben van, tehát vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{a}_i$.

Továbbá, minden $k \in \{1, \dots, l\}$ esetén van olyan $\mathbf{p}_k \in \mathbf{V}^*$, hogy $\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_k = 1$ és $\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_i = 0$ ha $i \neq k$. Ezért minden $\mathbf{p} \in S$ -re igaz lesz, hogy $0 \leq \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}_k \cdot \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{a}_i = \lambda_k$ minden k -ra. Amennyiben a vektorok nem függetlenek, a szorzók választhatóak nullának. ■

Megjegyzés. A következőkben \mathbf{V}^* elemeit *függetlennek változóknak* nevezzük, \mathbf{V}^* -ot a *független változók terének*. A lemma első felében szereplő egyenlőtlenséget *célegyenlőtlenségnek*, a második felében szereplő nemnegatív számokat pedig *Lagrange–Farkas szorzóknak* hívjuk. Az S -t meghatározó egyenlőtlenségek a *kényszerek*.

Konkrét számítások során a Lagrange–Farkas-szorzókat hasonlóan használhatjuk, mint a Lagrange-szorzókat feltételes szélsőérték problémák esetén:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \right) \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Az utolsó formából kiolvashatjuk a lemma második állítását.

Megjegyzés. A tétel geometriai értelmezése fontos és szemléletes: ha a \mathbf{b} vektor nem tartozik az \mathbf{a}_i -k által generált kúphoz, akkor van olyan hipersík, amely elválasztja \mathbf{b} -t a kúptól.

B. Farkas lemmája és következményei

Ennek a lemmának az affin általánosítását először egymástól függetlenül Haar Alfred és Farkas Gyula közölte egymást követő cikkekben, különböző bizonyításokkal [411, 409]. Jóval később mások több ízben is újra felfedezték és bizonyították, feltehetően függetlenül (pl. [412, 408]).

B.2. Tétel. (*Affin Farkas*) Legyenek az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ vektorok a \mathbf{V} véges dimenziós vektortér elemei, α_i valós számok, $i = 1, \dots, n$, és $S_A = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Ekkor bármely $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_A$ -ra.
- (ii) Vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nemnegatív valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$ és $\beta \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$.

Bizonyítás. (ii) \Rightarrow (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \geq \beta$.

(i) \Rightarrow (ii) Először megmutatjuk, hogy a Farkas-lemma első feltétele a fenti tétel első feltételének következménye, azaz ha (i) igaz, akkor $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq 0$, minden $\mathbf{p} \in S$ -re.

Tegyük fel az ellenkezőjét, ekkor van olyan $\mathbf{p}' \in S$, hogy $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b} < 0$. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{p} \in S_A$ -t, ekkor $\mathbf{p} + k\mathbf{p}' \in S_A$ minden valós nemnegatív k számra. De ekkor $(\mathbf{p} + k\mathbf{p}') \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} + k\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b} < \beta$, ha $k < \frac{\beta - \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{b}}$. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Ezért, Farkas lemmájának megfelelően, léteznek nemnegatív $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Lagrange–Farkas-szorzók úgy, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$. Tehát $\beta \leq \inf_{\mathbf{p} \in S_A} \{\mathbf{p} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i\} = \inf_{\mathbf{p} \in S_A} \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. ■

Megjegyzés (1). A szorzó-forma ismét egy jó emlékeztető:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \beta) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i - \alpha_i) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i) - \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Megjegyzés (2). A geometriai interpretáció hasonló az előző tételéhez, de affin objektumokkal. Ha a (\mathbf{b}, β) vonal, azaz egydimenziós (affin) hipersík nem tartozik az (\mathbf{a}_i, α_i) vektorok által generált (affin) kúphoz, akkor létezik egy hipersík, amely elválasztja \mathbf{b} -t a kúptól.

A következő állítás Liu tétele, Farkas lemmájának az a változata (következménye), ahogy a modern termodinamikában felmerült [137]. Egyenlőtlenségek helyett egyenlőség-típusú kényszerek vannak benne, ezért a szorzók lehetnek negatívak is. Liu munkájában nem hivatkozik Farkasra, a Liu-eljárás és a Farkas-lemma kapcsolatát Hauser és Kirchner ismerte fel [155].

B.3. Tétel. (*Liu*) Legyenek az $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ vektorok a \mathbf{V} véges dimenziós vektortér elemei, α_i valós számok, $i = 1, \dots, n$, és $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i = \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$. Ekkor egy $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_L$ -re,
- (ii) Vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valós számok, hogy

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i. \quad (\text{B.1})$$

és

$$\beta \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i. \quad (\text{B.2})$$

Bizonyítás. Az állítás az affin Farkas-lemma következménye, mert S_L egyszerűen megadható S_A -nak megfelelő formában \mathbf{a}_i és $-\mathbf{a}_i$ vektorok segítségével: $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i \geq \alpha_i, \mathbf{p} \cdot (-\mathbf{a}_i) \geq \alpha_i, i = 1 \dots n\}$.

Ezért vannak olyan nemnegatív $\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+$ és $\lambda_1^-, \dots, \lambda_n^-$ valós számok, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ \mathbf{a}_i - \lambda_i^- \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ - \lambda_i^-) \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i$ és $\beta \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i^+ \alpha_i - \lambda_i^- \alpha_i)$. ■

Megjegyzés (1). A szorzó-forma ismét könnyen megjegyezhetővé teszi az állítást

$$0 \leq (\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} - \beta) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_i - \alpha_i) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{a}_i) - \beta + \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{V}^*.$$

Megjegyzés (2). A differenciálható függvények lokális feltételes extremumára vonatkozó Lagrange-szorzos tételben a lineáris algebra fenti tételét alkalmazzuk a megfelelő függvényeknek az extrémális pontban történő linearizálása után.

Az alkalmazások szempontjából érdemes Liu tételének vektoros kényszerekkel felírt változatát is kimondani:

B.4. Tétel. (vektor Liu) Legyen $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ a \mathbf{V} és \mathbf{U} véges dimenziós vektorterek $\mathbf{V} \otimes \mathbf{U}$ tenzorszorzatának eleme. Legyen továbbá $\alpha \in \mathbf{U}$ és $S_L = \{\mathbf{p} \in \mathbf{V}^* \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \alpha\}$. Ekkor egy $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ vektorra és β valós számra vonatkozó következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \geq \beta$, minden $\mathbf{p} \in S_L$ -re.
- (ii) Van olyan $\lambda \in \mathbf{U}^*$ kovektor, hogy

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \lambda \tag{B.3}$$

és

$$\beta \leq \lambda \cdot \alpha. \tag{B.4}$$

Bizonyítás. Visszakaphatjuk a tétel előző formáját bármely $\mathbf{K} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}^n$ lineáris bijekció, azaz \mathbf{U} egy koordinátázásának segítségével. Ezért $\mathbf{a}_i := \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{e}_i$, ahol \mathbf{e}_i egységvektor és $\mathbf{K} \cdot \alpha = (\alpha)_i = \alpha_i$. Tehát $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{A} \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{K}^* \mathbf{e}_i$. Ezért létezik a keresett $\lambda \in \mathbf{U}^*$, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{K}^* \mathbf{e}_i$ és λ független a koordinátázástól. ■

Megjegyzés. A kontinuumfizikában és termodinamikában a fenti algebrai állításokat differenciálegyenletekre és egyenlőtlenségekre alkalmazzuk. A (B.3) egyenlőségeket *Liu-egyenleteknek*, a (B.4) egyenlőtlenséget *disszipációs egyenlőtlenségnek*, független változókat pedig *folyamatirányoknak* nevezzük.

C. Reynolds transzporttétele

Reynolds transzporttétele a paraméteres integrálokra vonatkozó általános tétel egy speciális esete. A kontinuumfizikában az integrális mérlegekről a differenciális mérlegekre történő transzformációra használják. Ebben a dolgozatban használata pont fordított, differenciális mérlegekből következtetünk integrális formákra.

Ha egy áramló közeget jellemző f mezőt a tér egy olyan időtől függő $H(t)$ halmazára integrálunk, amely az áramló közeggel együtt mozog – tehát határán nem lép át a közeget meghatározó fizikai mennyiség (pl. tömeg, vagy energia) –, akkor megfelelő simasági feltételek mellett Reynolds transzporttétele a következő:

$$\frac{d}{dt} \int_{H(t)} f(t, x^i) dV = \int_{H(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + f \partial^i v^i \right) dV, \quad (\text{C.1})$$

ahol dV Lebesgue-mértéket jelöl $H(t)$ -n és $v^i(t, x^i)$ a sebességmező. A részletes bizonyítás megtalálható pl. [48]-ban.

D. A mozgó testek hőmérséklete

⁰Ebben a függelékben a relativisztikus termodinamika történetét és a dolgozatban kapott relativisztikus Gibbs-reláció néhány következményét tárgyalom.

D.1. Történet – relativisztikus termodinamika

Ma sincs általánosan elfogadott relativisztikus termodinamika, különböző, egymásnak ellentmondó relativisztikus termodinamikák vannak. Ráadásul nem is két elmélet feszül egymásnak, ahogy esetleg gondolhatnánk, hanem legalább négy álláspont létezik. A paradox helyzet a hőmérséklet transzformációs tulajdonságainak megfogalmazásában jelentkezik legélesebben. A kérdés az, hogy egy adott K_0 vonatkoztatási rendszerben nyugvó termodinamikai test T_0 hőmérsékletét egy hozzá képest egyenes sebességgel mozgó megfigyelő mekkorának méri (D.1 ábra).

- Planck és Einstein 1907-ben azt állította [340, 339], hogy

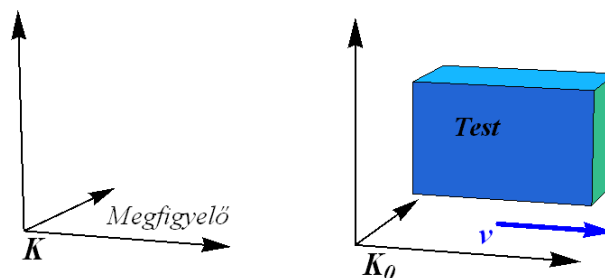
$$T = \frac{T_0}{\gamma}, \quad (\text{D.1})$$

ahol $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Látjuk, hogy $T \leq T_0$, a mozgó test hőmérséklete *kisebbnek* látszik a megfigyelő számára a nyugalmi hőmérsékletnél.

- Heinrich Ott (Sommerfeld tanítványa) 1963-ban publikált alapos elemzésében [413] kétségbe vonta Planck és Einstein állítását és arra a következtetésre jutott, hogy a helyes transzformációs képlet a következő

$$T = \gamma T_0, \quad (\text{D.2})$$

⁰ Ez a függelék a [25] közleményen alapul.



D.1. ábra. Relativisztikus termodinamikai test és vonatkoztatási rendszerek

D. A mozgó testek hőmérséklete

azaz $T \geq T_0$, a mozgó test hőmérséklete *nagyobbnak* látszik a megfigyelő számára a nyugalmi hőmérsékleténél.

- Ott még cikkének megjelenése előtt elhunyt, de tőle függetlenül mások is hasonló következtetésre jutottak, így a hamarosan kibontakozó élénk tudományos vitában álláspontja nem maradt védelmező nélkül. Számos új szempont merült fel és 1966-67-ben Peter Landsberg ésszerűen érvel amellett [414, 415], hogy a hőmérséklet nem transzformálódik, azaz

$$T = T_0. \quad (\text{D.3})$$

- Azt gondolhatnánk, hogy okoskodni sokféleképpen lehet, és elvek ide, vagy oda valójában a valóságnak, azaz a méréseknek kell eldönteniük ezt a kérdést. Valódi kísérletek ugyan akkor még nem voltak lehetségesek, de pontosan ekkor, a hatvanas évek végén megmérték a Föld (Naprendszer) sebességét az akkoriban felfedezett kozmikus háttérsugárzáshoz képest [416]. Ezekben a kísérletekben a feketetest sugárzás Planck-spektruma akkor reprodukálható, ha a hőmérsékletre a következő transzformációs szabályt tételezzük fel:

$$T = \frac{T_0}{\gamma(1 - v \cos \theta)},$$

ahol θ a mozgás és a megfigyelés iránya közötti szög. Ez a Doppler-transzformációs formula. Ezt úgy értelmezhetjük (illetve jóval később többen, többek között a már említett Peter Landsberg 2004-ben [417], úgy értelmezték), hogy nincs értelme transzformációs képletet keresni, a hőmérséklet mérésének módjától, azaz a hőmérőtől függ a hőmérséklet. Ez általában átvezetne az egyensúlyi hőmérséklet kérdéséhez, de itt természetesen csak egy szempontról, a hőmérő sebességéről van szó.

- Végül esetenként megjelenik azok véleménye is, akik ehhez a vitához nem szóltak hozzá, mert szerintük komoly tudós nem ártja magát ilyen álproblémákba [71]¹.

Látjuk, hogy tulajdonképpen a lehetséges valamennyi választ megkaptuk (hidegebb, melegebb, egyenlő, értelmetlen, és félreértés az egész). Az a furcsa, hogy mindegyik álláspont védhető, és manapság is számos tanulmány és vizsgálat jelenik meg egyik, vagy másik álláspont védelmében, vagyis úgy tűnik, senki véleménye nem volt elég meggyőző (lásd pl. [419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433]).

Mi is volt a fő kérdés Planck és Einstein számára? Az újonnan kidolgozott relativitáselmélet fényében a Gibbs-reláció megfelelő formáját keresték egymáshoz képest mozgó inerciális vonatkoztatási rendszerekben. Azaz tegyük fel, hogy termodinamikai testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben

$$dE_0 = T_0 dS_0 - p_0 dV_0, \quad (\text{D.4})$$

¹ Itt Müller Israel-t és Stewart-ot is idézi [418] (Müller rosszul idéz), aki 'imbroglio'-nak, azaz nagyon idegesítő félreértésnek nevezi a relativisztikus termodinamikának ezt a problémáját. Müller érvelése azon alapul, hogy a Gibbs-reláció 'köztudomásúlag' csak egyensúlyban érvényes. Ezzel saját magát keveredik ellentmondásba, ugyanis [40] könyvének legelső formulája az első főtételt a teljes energiára vonatkozóan fogalmazza meg. Innen csak egyetlen lépés, a változók felismerése kell a sebességet is tartalmazó (1.55) Gibbs-reláció felírásához.

D.1. Történet – relativisztikus termodinamika

ahol E_0 a test energiája, V_0 a térfogata, p_0 a nyomása, S_0 az entrópiája és T_0 a hőmérséklete. Kérdés, hogy a testhez képest mozgó inerciális megfigyelő számára hogyan írható ez fel?

A relativitáselmélet ekkor még nem ismerte a Minkowski-teret (1909), a vizsgálódás fő iránya fizikai mennyiségek vonatkoztatási rendszerektől történő függésének felderítésére a transzformációs tulajdonságok vizsgálata jelentette. Planck elemi megfontolásokkal, illetve tanítványának, von Mosengeilnek munkájára támaszkodva belátta, hogy a nyomás nem transzformálódik, azaz a D.1. ábra vonatkoztatási rendszereiben

$$p = p_0.$$

A térfogat esetében ebben az elrendezésben csak az x irányú Lorentz-kontrakciót vesszük figyelembe, ezért

$$V = \frac{V_0}{\gamma}.$$

Planck többféle gondolatmenettel is demonstrálta, hogy az entrópia nem transzformálódik

$$S = S_0.$$

Egyik legegyszerűbb megfontolása a vonatkoztatási rendszerek egyenértékűségével érvel, illetve feltételezi/felhasználja, hogy az egyik rendszerből adiabatikusan átmozgathatjuk a termodinamikai testet a másikba. Ugyanis tételezzük fel, hogy mondjuk a mozgó megfigyelő rendszerében észlelt entrópia a nagyobb, $S > S_0$. Ezután a testet gyorsítsuk fel adiabatikusan a másik rendszer sebességére. A mozgás adiabatikussága miatt az entrópiák nem változtak. Azonban most már a másik – előzőleg megfigyelő – rendszerben nyugszik a termodinamikai test, ezért ha van különbség a mozgó és álló test entrópiái között, akkor az ellenkező irányú egyenlőtlenség kellene fennálljon $S < S_0$, ami lehetetlen.

Az is világos volt, hogy relativisztikusan az energia nem alapvető mennyiség, egy adott termodinamikai test (vagy tömegpont) energiája a külső megfigyelő számára néha impulzusnak látszik (hasonlóan, ahogy sztatikus elektromos tér mozgó rendszerből mágneses teret is mutat). Azaz, az energia a speciális relativitáselméletben az energiainpulzus-négyesvektor időszerű komponense és csak a megfigyelő számára, az idővel és a térrel együtt, látszik energiának, illetve impulzusnak. Ha egy termodinamikai testnek E_0 az energiája egy nyugvó rendszerben és nincs impulzusa, akkor a hozzá képest v sebességgel mozgó rendszerből úgy tűnik, hogy energiája E és van G impulzusa is. Energia és impulzus ugyanúgy egy négyesvektor részei, mint idő és tér, ezért a különféle nézőpontokat egy Lorentz-transzformáció kapcsolja össze. A D.1 ábrán látható elrendezéssel (a mozgás iránya megegyezik a koordináta-rendszerek x tengelyének irányával) 1+1 dimenzióban írható:

$$\begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_0 \\ \gamma v E_0 \end{pmatrix}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy energiacsereéről a termikus kölcsönhatásban önmagában értelmetlen beszélni: a hőközlés megváltoztatja a termodinamikai test impulzusát is. Ezért Planck bevezette az úgynevezett translációs munkát, és a mozgó vonatkoztatási rendszerben a Gibbs-reláció alakját a következő formában tételezték fel:

$$dE = TdS - pdV + vdG. \quad (\text{D.5})$$

D. A mozgó testek hőmérséklete

Behelyettesítve ebbe a formulába a fenti transzformációs szabályokat, rövid átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{dE_0}{\gamma} = T dS_0 - p_0 \frac{dV_0}{\gamma}.$$

Ez pedig csak akkor egyezik meg a nyugvó rendszerbeli (D.4) alakkal, ha

$$T = \frac{T_0}{\gamma}.$$

Tehát a mozgó test egy megfigyelő számára hidegebbnek tűnik a nyugalmi hőmérsékleténél. Vegyük észre, hogy ekkor a hőmérséklet reciprokára vonatkozóan viszont

$$\frac{1}{T} = \gamma \frac{1}{T_0},$$

azaz a reciprok hőmérséklet egy négyesvektor nulladik komponensének megfelelően transzformálódik, az energiához hasonlóan.

Heinrich Ott többféle gondolkísérlettel elsősorban a hő transzformációs szabályát vizsgálta. Az entrópia és a hőmérséklet fenti transzformációs szabályait figyelembe véve láthatjuk, hogy $\delta Q = T dS = T_0 dS_0 / \gamma = \delta Q_0 / \gamma$, a hő úgy transzformálódik, mint a térfogat. Ott arra a következtetésre jutott, hogy ésszerűbb azt feltételeznünk, hogy a hő maga egy négyesvektor nulladik komponensként fogható fel. Az entrópia invarianciájával ebből már következik a bevezetésben említett transzformációs formula. H. Ott gondolatmenete arra a megfigyelésre épült, hogy a Planck–Einstein-féle relativisztikus termodinamikában impliciten feltételezzük, hogy a hőátadás egy, a megfigyelő vonatkoztatási rendszerében rögzített hőtartály felé történik. Szerinte a hőtartályt sokkal ésszerűbb az együttmozgó rendszerben elképzelni, és akkor a transzlációs munka nem lép fel a Gibbs-relációban.

Ha azonban a hőmérséklet Ott-féle transzformációs szabályát a fenti gondolatmenetben fel szeretnénk használni, akkor azonnal látjuk, hogy a térfogat és a nyomás transzformációs szabályával nem fér össze. Nem érdemes Ott gondolatmenetét részletesen elemezni, számos hiányossága van. Ezeket a hiányosságokat aztán több írás is elemezte az említett vitában.

Néhány fontos érvet érdemes felidézni.

- A termodinamikai testhez rögzített nyugalmi rendszerben mért hőmérséklet a test jellemzője, ezért mindenki számára ugyanaz. Természetesen ez nem feltétlenül azt jelenti, hogy Lorentz-skalár kellene legyen [414, 415, 41, 434].
- A falak és a termodinamikai test összetartásának kérdése is szerepet játszik. Az a kézenfekvő választás, hogy egy adott inerciális vonatkoztatási rendszerben merev falakkal határolt állandó térfogatrész legyen a termodinamikai test, sajátos problémákat okoz. A merevség nem egyeztethető össze a globális, a test egészére fennálló szinkronizáltsággal, a falakon alkalmazott nyomás pedig energiaimpulzus-átadást jelent. Sokak szerint ez az egész probléma lényege [435, 434, 436, 437, 438, 424]. Egyik kiútnak tűnik a munka fogalmának módosítása [439, 434].

- A transzformációs tulajdonságok mások az energiaimpulzussűrűség-tenzor komponenseire és a termodinamikai testet egészében jellemző mennyiségekre. Azaz a sűrűségek és a globális mennyiségek más tenzori rendű mennyiségek. Ez aztán máig zavarokat okoz (lásd pl. [425]).
- A valódi és látszólagos mennyiségek elemi relativisztikus kérdésköre itt egy ravasz csavart vesz, mert ebben az esetben a sebesség nem feltétlenül csak a vonatkoztatási rendszer termodinamikai testhez képest mért relatív sebességét jelentheti. Ugyanis energiaátadás nincs, csak energiaimpulzus-átadás, azaz az impulzus (vagy sebesség?) is a termodinamikai változók között kell szerepeljen. Ezt a kérdést ebben a dolgozatban részletesen vizsgáltuk. Relativisztikus termodinamikában fontosságát van Kampen ismeri fel először [41], de a termodinamikusok relativisztikusan is idegenkednek tőle [434].

Az energiaimpulzus-tenzor, a termodinamikai test határozatlansága és a sebesség mint termodinamikai változó kérdése Planck és Einstein számára 1907-ben nem volt és nem is lehetett világos. Viszont relativisztikus termodinamikai elméletük alapján tűrhetően érteni véljük a kinetikus elméletet és a folyadékelméleteket is (nemdisszipatív esetben legalábbis). Figyelembe véve a kontinuum- és kinetikus elméletből lesűrűhető tapasztalatokat, a következő kérdésekre kell választ adni a relativisztikus termodinamikában:

- Mi mozog? Azaz hogyan kell érteni a sebesség fogalmát a termodinamikában. A termodinamikai test részecskéinek, vagy energiájának sebessége számít? Ez a kontinuumok esetén az Eckart-, vagy a Landau–Lifschitz-áramlás, illetve sebesség definíció kérdése.
- Mi a test?
- Hogyan írjuk le mozgó termodinamikai testek kölcsönhatását, termodinamikai egyensúlyát?

Az első két kérdésre a kontinuum elmélet fényében adtam egy értelmezést a 3.6 fejezetben. Az alábbiakban a kölcsönhatásra vonatkozó következményeket tárgyalom.

D.2. Kölcsönható termodinamikai testek

Vegyük észre, hogy a (3.94) nagyon hasonlít a (D.5) Planck–Einstein-képletre. $w_a = Q^a/\mathcal{H}$ sebesség dimenziójú, térszerű vektor: az impulzus osztva a tehetetlenséget kifejező entalpiával. Viszont ez nem egy, a testhez képest mozgó inerciális megfigyelő relatív sebessége, hanem a belső energiaáramának a sebessége: azaz arról van szó, hogy a test sebessége nem feltétlenül az energiájához kötődik, a termodinamikai testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben is van energiaáram, és így impulzusáram is, egyetlen termodinamikai testen belül. Vegyük észre, hogy $\|w^a\| = -w^a w_a = -g^a g_a + 1 < 1$, azaz ez a sebesség sem lépheti túl a fénysebességet. (3.94) általános Gibbs-reláció szerint a termodinamikai test nem egyszerűen energia-impulzust cserél a környezetével – ez felelne meg az Planck–Einstein-formulának –, mert az impulzuscseréhez tartozó termodinamikai „intenzív” változó figyelembe veszi a test tehetetlenségét, azaz entalpiatartalmát. Éppen ezért a transzformációs szabályok megállapításához a két test

D. A mozgó testek hőmérséklete

kölcsönhatásának figyelembe vétele elengedhetetlen, pusztán a Gibbs-reláció vizsgálata nem elegendő.

Írjuk a (3.94) Gibbs-relációt a következő alakba:

$$g_a dE^a = T dS - p dV. \quad (D.6)$$

Tekintsünk két kölcsönható termodinamikai testet, amelyek energia-impulzust cserélhetnek egymással és össztérfogatuk állandó. Ha $dE_1^a + dE_2^a = 0$ és $dV_1 + dV_2 = 0$, akkor az összentrópia maximumának feltételei a megfelelő intenzívek egyenlősége:

$$\frac{g_1^a}{T_1} = \frac{g_2^a}{T_2}, \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (D.7)$$

Ez általában nem jelenti a hőmérsékletek egyenlőségét. A feltétel egyszerű elemzéséhez most egydimenziós mozgásra szorítkozunk. Adott inerciális vonatkoztatási rendszerben ekkor

$$g^a = \hat{u}^a + w^a = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} + \gamma w \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 + vw \\ v + w \end{pmatrix}. \quad (D.8)$$

A termodinamikai egyensúly (D.7) feltétele alapján

$$\frac{\gamma_1(1 + v_1 w_1)}{T_1} = \frac{\gamma_2(1 + v_2 w_2)}{T_2}, \quad \frac{\gamma_1(v_1 + w_1)}{T_1} = \frac{\gamma_2(v_2 + w_2)}{T_2}. \quad (D.9)$$

A két egyenlőség hányadosát képezve kapjuk, hogy egyensúlyban az együttes relativisztikus sebességek egyenlőek:

$$\frac{v_1 + w_1}{1 + v_1 w_1} = \frac{v_2 + w_2}{1 + v_2 w_2}, \quad (D.10)$$

A négyzetük különbségéből pedig következik, hogy

$$\frac{\sqrt{1 - w_1^2}}{T_1} = \frac{\sqrt{1 - w_2^2}}{T_2}. \quad (D.11)$$

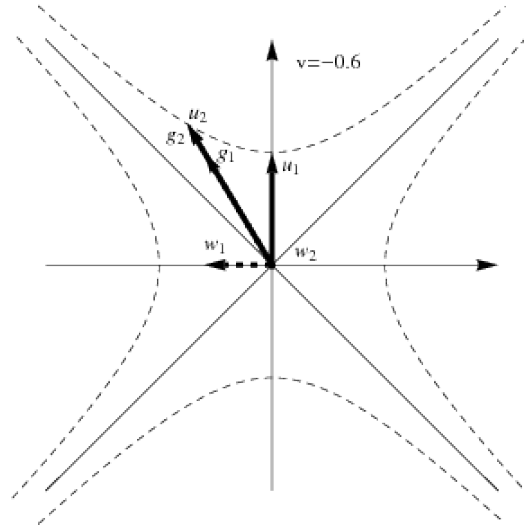
Sebességek egyenlőségére vonatkozó feltételeket termodinamikai megfontolások alapján mások is kaptak [41, 440, 441, 442].

Vegyük észre, hogy a termikus egyensúly feltételében, külső vonatkoztatási rendszerből nézve négy sebesség jelenik meg: v_1 , v_2 , w_1 és w_2 . Egy Lorentz-transzformációval, az egyik testet választva vonatkoztatási rendszernek csak az egyik sebességet tudjuk kiküszöbölni. A maradék három sebesség fizikai feltételt jelent a termodinamikai rendszerre vonatkozóan. Bevezetve a $v = (v_2 - v_1)/(1 - v_1 v_2)$ relatív sebességet, a fenti feltételek a következő formába hozhatóak:

$$w_1 = \frac{v + w_2}{1 + v w_2}, \quad T_1 = T_2 \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + v w_2}. \quad (D.12)$$

A hőmérsékletre tehát egy általános Doppler-formulát kaptunk, hasonlóan, mint [443, 444, 417, 445, 446, 447].

Érdeemes megvizsgálni ezt a formulát a második, megfigyelt termodinamikai test belső energiaáramának sebességére, w_2 -re, vonatkozó különféle feltevések mellett.



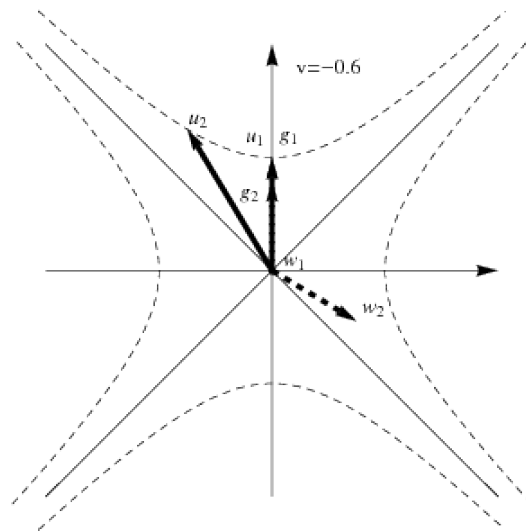
D.2. ábra. A Planck-Einstein transzformációs szabály téridő vektoros szemléltetése. Nincs energiaáram a megfigyelt testben ($w_2^a = 0$), ezért az u_2^a négyessebesség párhuzamos a g_1^a és g_2^a négyesvektorokkal. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 < 1$.

1. $w_2 = 0$: nincs energiaáram a megfigyelt testben. Ekkor $w_1 = v$, az energiaáram-sebesség megegyezik a test sebességével, és $T_1 = T_2 \sqrt{1 - v^2} < T_2$. A mozgó test hidegebbnek látszik, mint álló esetben lenne [340, 448, 339] (D.2. ábra).
2. $w_1 = 0$: nincs energiaáram a hőmérőben. Ekkor $w_2 = -v$ és $T_1 = T_2 / \sqrt{1 - v^2} > T_2$, tehát a mozgó test melegebbnek látszik [449, 413, 450, 420] (D.3. ábra).
3. $w_1 + w_2 = 0$: a teljes rendszerben nincs energiaáram, a két test áramai kompenzálják egymást. Ezt speciális energiaáram-sebességekkel érhetjük el: $w_2 = -w$, $w_1 = w$ és $w = (1 - \sqrt{1 - v^2})/v$. Ekkor a látszólagos hőmérsékletek egyenlők: $T_1 = T_2$ [414, 415] (D.4. ábra).
4. $w_2 = 1$: egy tisztán sugárzást tartalmazó test mozog. Ekkor $w_1 = 1$, és a hőmérsékletekre azt kapjuk, hogy $T_1 = T_2 \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$. Tehát $T_1 < T_2$ ha $v > 0$, a távolodó test hőmérséklete Doppler vöröseltolódottnak látszik (D.5. ábra). Ha pedig $T_1 > T_2$, $v < 0$, akkor megkapjuk a közeledő testek Doppler kékeltolódott hőmérsékletét.

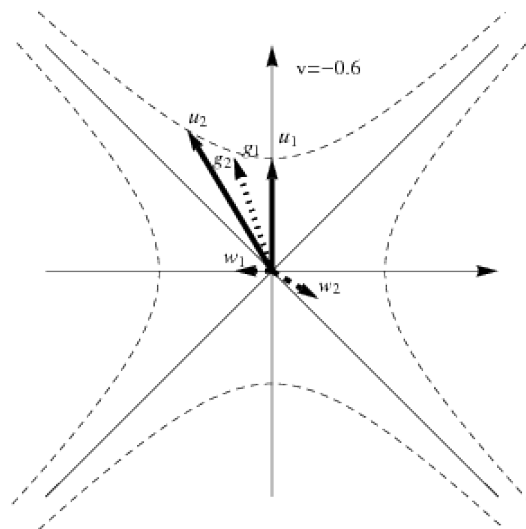
A (D.2)–(D.5) ábrákon a vonatkoztatási rendszert a hőmérőhöz rögzítettük, tehát $u_1^a = (1, 0)$. Az energiaáram térszerű sebességei merőlegesek a megfelelő négyessebességekre, azaz az ábrákon a fénykúpra szimmetrikusan helyezkednek el. A négyessebesség-vektorok végpontjai az időszerű hiperbolákon vannak, a térszerű energiaáram-sebességek pedig belül vannak a térszerű hiperbolákon.

Vagyis azzal a kiinduló feltevéssel, hogy egy termodinamikai test sebessége nem feltétlenül az impulzusához kötött, egységesen értelmezni tudtuk a relativisztikus hő-

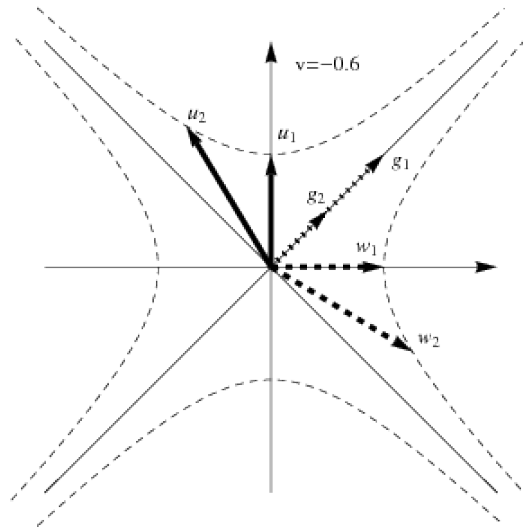
D. A mozgó testek hőmérséklete



D.3. ábra. A Blauša-Ott transzformációs szabály téridő vektoros szemléltetése. Nincs energiaáram a hőmérőben ($w_1^a = 0$), ezért az w_1^a négyessebesség párhuzamos a g_1^a és g_2^a négyesvektorokkal. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 > 1$.



D.4. ábra. A Landsberg-szabály téridővektoros szemléltetése. Nincs energiaáram az összetett rendszerben, ezért a g_1^a és g_2^a négyesvektorok egyenlők. A hőmérsékletek aránya $T_1/T_2 = 1$. Itt $w_1 = 0.33$, $w_2 = -0.33$.



D.5. ábra. A Doppler-vöröseltolódás két termodinamikai egyensúlyban levő test között. A megfigyelt test energiaáram sebessége a fénysebességgel egyenlő, $w_2 = 1$, ezért $w_1 = 1$ és az energiaimpulzushoz tartozó intenzív mennyiségek, g_1^a és g_2^a fényszerűek.

mérsékletre vonatkozó összes elképzelést. Ez a feltevés pedig a folyadékok elméletében teljesen természetes, ésszerűnek tűnik, hogy homogén testek esetén is érvényes.

Irodalomjegyzék

- [1] T. Jacobson. Thermodynamics of spacetime: The einstein equation of state. *Physical Review Letters*, 75:1260–3, 1995.
- [2] E. Verlinde. On the origin of gravity and the laws of Newton. *Journal of High Energy Physics*, 2011(04):029, 2011.
- [3] Gy. Farkas. A Carnot-Clausius tétel egyszerűsített levezetése. *Mathematikai és Fizikai Lapok*, pages 7–11, 1895. in Hungarian.
- [4] Fényes Imre. *A termodinamika alapjai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [5] S. R. de Groot and P. Mazur. *Non-equilibrium Thermodynamics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.
- [6] Fényes Imre. *Termosztatika és termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [7] C. Truesdell and S. Bharatha. *Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-etc., 1977.
- [8] F. L. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *American Journal of Physics*, 43:22–24, 1975.
- [9] B. Andresen. *Finite-time Thermodynamics*. University of Copenhagen, Copenhagen, 1983.
- [10] A. Bejan. Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes. *Applied Physics Reviews*, 79(3):1191–1218, 1996.
- [11] B. H. Lavenda. *A new perspective of thermodynamics*. Springer, New York, et. al., 2010.
- [12] M. J. Moran. On the second-law analysis and the failed promise of finite-time thermodynamics. *Energy*, 23(6):517–519, 1998.
- [13] E.P. Gyftopoulos. Infinite time (reversible) versus finite time (irreversible) thermodynamics: a misconceived distinction. *Energy*, 24:1035–1039, 1999.
- [14] T. Matolcsi. Dynamical laws in thermodynamics. *Physics Essays*, 5(3):320–327, 1992.
- [15] T. Matolcsi. The interaction of bodies in thermodynamics. *Physics Essays*, 6(2):158–165, 1993.

- [16] T. Matolcsi. Reservoirs in thermodynamics. *Physics Essays*, 8(3):234–239, 1995.
- [17] T. Matolcsi. On the classification of phase transitions. *ZAMP*, 47(6):837–857, 1996.
- [18] T. Matolcsi. On the dynamics of phase transitions. *ZAMP*, 47(6):858–879, 1996.
- [19] T. Matolcsi. Dynamics of phase transitions. *Periodica Polytechnica, Ser. Chem Eng.*, 42(1):15–19, 1998.
- [20] T. Matolcsi. On the mathematical structure of thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 41(4):2021–2042, 2000.
- [21] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.
- [22] T. Matolcsi. *Közönséges termodinamika*. Scholar Könyvkiadó, 2012.
- [23] L. E. Reichl. *A Modern Course in Statistical Physics*. John Wiley and Sons, Inc., New York-etc., 2nd edition, 1998.
- [24] Harmatha A. *Termodinamika Műszakiaknak*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [25] T. S. Biró and P. Ván. Zeroth Law compatibility of non-additive thermodynamics. *Physical Review E*, 83:061147, 2011. arXiv:1102.0536.
- [26] R.H. Fowler and E.A. Guggenheim. *Statistical Thermodynamics: A Version of Statistical Mechanics for Students of Physics and Chemistry*. Cambridge University Press (printed by W. Lewis), 1939.
- [27] J. C. Maxwell. *Theory of Heat*. Longmans, Green and Co., London, 10 edition, 1902.
- [28] Sumiyoshi Abe. Heat and entropy in nonextensive thermodynamics: transmutation from Tsallis theory to Rényi-entropy-based theory. *Physica A*, 300:417–423, 2001.
- [29] P. Ván, T.S. Biró, G.G. Barnaföldi, and K. Ürmösy. Nonadditive thermostatics and thermodynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 394:012002, 2012. arXiv:1209.5963, SPMCS, Kazany.
- [30] H. B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. John Wiley and Sons NY, New York, etc., 2nd edition, 1985.
- [31] Jacob D Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review D*, 9(12):3292, 1974.
- [32] D. Lynden-Bell. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. *Physica A*, 263(1-4):293–304, 1999.
- [33] Marios Christodoulou and Carlo Rovelli. How big is a black hole? *Physical Review D*, 91(6):064046, 2015.

- [34] R. Hill. Acceleration waves in solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 10:1–10, 1962.
- [35] T.L. Hill. *Thermodynamics of Small Systems*. Dover, 2002. c1963.
- [36] H. Touchette. When is a quantity additive, and when is it extensive? *Physica A*, 305:84–88, 2002.
- [37] C. Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*. Springer, 2009.
- [38] J. M. Honig. *Thermodynamics*. Academic Press, San Diego, etc., 2 edition, 1999.
- [39] H. S. Hsieh. *Principles of thermodynamics*. McGraw-Hill Book Company, New York, et. al., 1975.
- [40] I. Müller and W. Weiss. *Entropy and Energy (A universal competition)*. Springer, Berlin-etc..., 2005.
- [41] N. G. van Kampen. Relativistic thermodynamics of moving systems. *The Physical Review*, 173:295–301, 1968.
- [42] Horváth Róbert. A mozgási energia fogalmának egy új értelmezése. *KLTE MFK Tudományos Közleményei*, 23:29–33, 1997.
- [43] G. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.
- [44] J. Verhás. *Thermodynamics and Rheology*. Akadémiai Kiadó and Kluwer Academic Publisher, Budapest, 1997.
- [45] G. D. C. Kuiken. *Thermodynamics of Irreversible Processes (Applications to Diffusion and Rheology)*. John Wiley and Sons, Chicester-etc., 1994.
- [46] C. Truesdell. *A first course in Rational Continuum Mechanics, V1 General concepts*. Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977.
- [47] J. Béda, I. Kozák, and J. Verhás. *Continuum Mechanics*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1995.
- [48] M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [49] Fülöp T. és Ván P. Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. In Fülöp T., editor, *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, volume 10 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 99–151. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [50] T. Fülöp and P. Ván. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35:1825–1841, 2012. arXiv:1007.2892v1.

- [51] A. Berezovski and Ván P. *Internal Variables in Thermoelasticity*. Springer, 2017.
- [52] John D Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 241(1226):376–396, 1957.
- [53] Erik P. Verlinde. Emergent Gravity and the Dark Universe. *SciPost Phys.*, 2:016, 2017.
- [54] M. P. Silverman. *More Than One Mystery*. Springer Verlag, New York-Berlin-etc..., 1995.
- [55] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories. *Physical Review D*, 31(4):725–733, 1985.
- [56] B. D. Coleman and V. J. Mizel. Existence of caloric equation of state in thermodynamics. *Journal of Chemical Physics*, 40:1116–1125, 1964.
- [57] W. Muschik and H. Ehrentraut. An amendment to the Second Law. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 21:175–192, 1996.
- [58] L. Onsager. Reciprocal relations of irreversible processes I. *Physical Review*, 37:405–426, 1931.
- [59] L. Onsager. Reciprocal relations of irreversible processes II. *Physical Review*, 38:2265–2279, 1931.
- [60] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, I. The simple fluid. *Physical Review*, 58:267–269, 1940.
- [61] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, II. Fluid mixtures. *Physical Review*, 58:269–275, 1940.
- [62] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes, III. Relativistic theory of the simple fluid. *Physical Review*, 58:919–924, 1940.
- [63] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, 1948.
- [64] I. Prigogine. *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*. Desoer, Liège, 1947.
- [65] S.R. de Groot. *Thermodynamics of irreversible processes*. North Holland, 1959.
- [66] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. I. general theory for single gas. *Physica A*, 203:437–456, 1994.
- [67] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. II. application of the theory for single gas. *Physica A*, 203:457–485, 1994.

- [68] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction. III. theory and its application for gaseous mixtures. *Physica A*, 209:457–476, 1994.
- [69] F. Sharipov. Onsager-Casimir reciprocal relations based on the Boltzmann equation and gas-surface interaction: Single gas. *Physical Review E*, 73:036110, 2006.
- [70] F. Sharipov. The reciprocal relations between cross phenomena in boundless gaseous systems. *Physica A*, 389:3743–3760, 2010.
- [71] I. Müller. *A History of Thermodynamics (The Doctrine of Energy and Entropy)*. Springer, 2007.
- [72] R. C. Tolman and P. C. Fine. On the irreversible production of entropy. *Reviews of Modern Physics*, 20:51–77, 1948.
- [73] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.
- [74] Shang-Keng Ma. *Statistical mechanics*. World Scientific, Philadelphia-Singapore, 1985. trans. M. K. Fung (from Chinese).
- [75] R. L. Liboff. *Kinetic Theory (Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [76] J. L. Lebowitz. Microscopic origins of irreversible macroscopic behavior. *Physica A*, 263:516–527, 1999.
- [77] W. Yourgrau and S. Mandelstam. *Variational principles in dynamics and quantum theory*. Pitman, New York-Toronto-London, 2 edition, 1999.
- [78] Gyarmati I. *Nemegyensúlyi termodinamika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [79] B. Nyíri. On the construction of potentials and variational principles in thermodynamics and physics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 16:39–55, 1991.
- [80] E. Cosserat and Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann and Fils, Paris, 1909.
- [81] L. Onsager and S. Machlup. Fluctuations and irreversible processes. *Physical Review*, 91(6):1505–1512, 1953.
- [82] S. Machlup and L. Onsager. Fluctuations and irreversible processes. II. Systems with kinetic energy. *Physical Review*, 91(6):1512–1515, 1953.
- [83] B. D. Coleman and M. E. Gurtin. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics*, 47(2):597–613, 1967.
- [84] I. Müller. On the entropy inequality. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 26(2):118–141, 1967.

Irodalomjegyzék

- [85] I. Müller. Zur paradoxon der Wärmeleitungstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 198:329–344, 1967.
- [86] I. Müller. Toward relativistic thermodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 34(4):259–282, 1969.
- [87] C. Truesdell. *Rational Thermodynamics*. Springer, New York, etc., 1984. 2nd enlarged edition.
- [88] M. Šilhavý. *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1997.
- [89] I. Müller and W. Weiss. Thermodynamics of irreversible processes - past and present. *Eur. Phys. J. H*, 37:139–236, 2012.
- [90] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 45:241–250, 1972.
- [91] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.
- [92] G Lebon and MS Boukary. Is the principle of objectivity in violation with the kinetic theory? *Physics Letters A*, 107(7):295–298, 1985.
- [93] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157:49–88, 1867.
- [94] C. Cattaneo. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 3:83–101, 1948.
- [95] M. P. Vernotte. Le paradoxes de la théorie continue et l'équation de la chaleur. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 246:3154–55, 1958.
- [96] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. *Physical Review*, 148(2):766–778, 1966.
- [97] W. Dreyer and H. Struchtrup. Heat pulse experiments revisited. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 5:3–50, 1993.
- [98] G. Lebon, D. Jou, J. Casas-Vázquez, and W. Muschik. Weakly nonlocal and nonlinear heat transport in rigid solids. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 23:176–191, 1998.
- [99] Asszonyi Cs. és Kapolyi L. *A bányászat mechanikai rendszere, 2. Kőzetkontinuumok Mechanikája*. Veszprémi Akadémiai Bizottság, Veszprém, 1981.
- [100] Cs. Asszonyi and R. Richter. *The continuum theory of rock mechanics*. Trans. Tech. Publications, USA, 1979.

- [101] I. Gyarmati. The wave approach of thermodynamics and some problems of non-linear theories. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2:233–260, 1977.
- [102] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1992. 3rd, revised edition, 2001.
- [103] G. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung). *Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien*, CXVII(Mathematisch IIa):385–528, 1911.
- [104] W. Isaacson. *Einstein*. Simon and Schuster, 2007.
- [105] M.I Frewer. More clarity on the concept of material frame-indifference in classical continuum mechanics. *Acta mechanica*, 202(1-4):213–246, 2009.
- [106] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.
- [107] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.
- [108] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continuum physics: Objectivity and frame-idifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.
- [109] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *Applied Mechanical Reviews*, 51(8):489–504, 1998.
- [110] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:177–183, 2003.
- [111] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.
- [112] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.
- [113] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.
- [114] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.
- [115] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132:195–207, 1999.
- [116] I-Shih Liu. Constitutive theory for anisotropic heat conductors. *Journal of Mathematical Physics*, 50:083506, 2009.

- [117] V. A. Cimmelli. Weakly nonlocal thermodynamics of anisotropic rigid heat conductors revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 36(3):285–309, 2011.
- [118] G. Ryskin. Misconception which led to the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 32(2):1239–1240, 1985.
- [119] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28–34, Delaware Seminar in the Foundations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.
- [120] W. Noll. A frame free formulation of elasticity. *Journal of Elasticity*, 83:291–307, 2006.
- [121] W. Noll and B. Seguin. Basic concepts of thermomechanics. *Journal of Elasticity*, 101:121–151, 2010.
- [122] P. M. Mariano. $SO(3)$ invariance and covariance in mixtures of simple bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:1023–1030, 2005.
- [123] G. A. Maugin. *Material inhomogeneities in elasticity*. Chapman and Hall, London-..., 1993.
- [124] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.
- [125] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 2nd, revised edition, 1982.
- [126] T. Matolcsi. *A Concept of Mathematical Physics: Models for SpaceTime*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1984.
- [127] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.
- [128] P. Ván. Galilean relativistic fluid mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 29(2):585–610, 2017. arXiv:1508.00121 v1- Hungarian; v2- English.
- [129] P. Ván, M. Pavelka, and M. Grmela. Extra mass flux in fluid mechanics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 42(2):133–151, 2017. arXiv:1510.03900.
- [130] H. C. Öttinger. *Beyond equilibrium thermodynamics*. Wiley-Interscience, 2005.
- [131] Lámér G. Solid and soft body with and without structure. In Bagi K., editor, *Quasi-static deformations of particular materials. Proceedings of QuaDMP'03 Workshop*, pages 159–166, Budapest, 2003. Publ. Comp. of BUTE.

- [132] Lámer G. Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének kinematikai kérdései. In Török Á. és Vásárhelyi B., editor, *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika*, volume 2 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 145–156, Budapest, 2006. Műegyetemi Kiadó.
- [133] Lámer G. Az anyag folytonos és diszkrét modellezésének dinamikai kérdései. In Török Á. és Vásárhelyi B., editor, *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika*, volume 4 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 301–314, Budapest, 2007. Műegyetemi Kiadó.
- [134] D. J. Korteweg. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité. *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Series II*, 6:1–16, 1901.
- [135] J. D. Van der Waals. Thermodynamische theorie der kapillarität unter voraussetzung stetiger dichteänderung. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 13:657–725, 1894.
- [136] B. D. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13:167–178, 1963.
- [137] I-Shih Liu. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 46:131–148, 1972.
- [138] B. D. Coleman and V. J. Mizel. Existence of entropy as a consequence of asymptotic stability. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 25:243–270, 1967.
- [139] V. Triani, C. Papenfuss, V. A. Cimmelli, and W. Muschik. Exploitation of the Second Law: Coleman-Noll and Liu procedure in comparison. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33:47–60, 2008.
- [140] J. E. Dunn and J. Serrin. On the thermomechanics of interstitial working. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 88:95–133, 1985.
- [141] M. A. Goodman and S. C. Cowin. Two problems in the gravity flow of granular materials. *Journal of fluid Mechanics*, 45/2:321–339, 1971.
- [142] G. Capriz. Continua with latent microstructure. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 90(1):43–56, 1985.
- [143] M. E. Gurtin. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19:339–352, 1965.
- [144] A. Acharya and T. G. Shawki. Thermodynamic restrictions on constitutive equations for second-deformation-gradient inelastic behaviour. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43:1751–1772, 1995.

- [145] M. E. Gurtin. On a framework for small-deformation viscoplasticity: free energy, microforces, strain gradients. *International Journal of Plasticity*, 19:47–90, 2003.
- [146] I-Shih Liu and I. Müller. On the thermodynamics and thermostatics of fluids in electromagnetic fields. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 46(2):149–176, 1972.
- [147] M. G. Gurtin. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D*, 92:178–192, 1996.
- [148] H. C. Öttinger and M. Grmela. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. II. Illustrations of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6633–6655, 1997.
- [149] M. Grmela and H. C. Öttinger. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. *Physical Review E*, 56(6):6620–6632, 1997.
- [150] W. Muschik, S. Gümbel, Kröger M., and Öttinger H. C. A simple example for comparing GENERIC with rational non-equilibrium thermodynamics. *Physica A*, 285:448–466, 2000.
- [151] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 49(3):435–479, 1977.
- [152] O. Penrose and P. C. Fife. Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions. *Physica D*, 43:44–62, 1990.
- [153] P. C. Hohenberg and A.P. Krekhov. An introduction to the Ginzburg-Landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns. *Physics Reports*, 572:1–42, 2015.
- [154] G. A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:173–192, 1990.
- [155] R. A. Hauser and N. P. Kirchner. A historical note on the entropy principle of Müller and Liu. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14:223–226, 2002. Lecture held on CIMRF’01, Berlin, 3-6 September, 2001.
- [156] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [157] J. Verhás. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 8:201–206, 1983.
- [158] B. Nyíri. On the entropy current. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 16:179–186, 1991.
- [159] P. Ván. Exploiting the Second Law in weakly nonlocal continuum physics. *Periodica Polytechnica, Ser. Mechanical Engineering*, 49(1):79–94, 2005. (condmat/0210402/ver3).

- [160] I. Gyarmati. *Non-equilibrium Thermodynamics /Field Theory and Variational Principles/*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [161] P. Ván. The Ginzburg-Landau equation as a consequence of the Second Law. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17(2):165–169, 2005. (reduced cond-mat/0210402).
- [162] A. Berezovski and P. Ván. Internal variables in thermoelasticity. In Gy. Gróf and R. Kovács, editors, *MS Abstract book of the 14th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 102–104, Budapest, 2017. Department of Energy Engineering, BME. ISBN 978-963-313-259-3.
- [163] L. D. Landau and I. M. Khalatnikov. Ob anomal’nom pogloshchenii zvuka vblizi tochek fazovogo perekhoda vtorogo roda. *Doklady Akademii Nauk, SSSR*, 96:469–472, 1954. English translation: On the anomalous absorption of sound near a second order transition point. in: *Collected papers of L. D. Landau*, ed. D. ter Haar,(Pergamon, Oxford, 1965), pp. 626-633.
- [164] I. Müller. *Thermodynamics*. Pitman, Toronto, 1985.
- [165] H. Ziegler. *An introduction to thermomechanics*, volume 21 of *Applied mathematics and mechanics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1983.
- [166] P. Ván. A képlékenység termodinamikája. In T. Fülöp, editor, *Idő- és térderiváltak anyagtörvényekben*, volume 10 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 15–50. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.
- [167] P. Ván and W. Muschik. Structure of variational principles in nonequilibrium thermodynamics. *Physical Review E*, 52(4):3584–3590, 1995.
- [168] G. A. Maugin. On the thermomechanics of continuous media with diffusion and/or weak nonlocality. *Archive of Applied Mechanics*, 75:723–738, 2006.
- [169] M. Brokate and J. Sprekels. *Hysteresis and Phase transitions*, volume 121 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, etc., 1996.
- [170] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. Diffuse-interface methods in fluid mechanics. *Annual Rev. in Fluid Mechanics*, 30:139–65, 1998.
- [171] J Lowengrub and L Truskinovsky. Quasi-incompressible cahn–hilliard fluids and topological transitions. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 454(1978):2617–2654, 1998.
- [172] M. Heida, J. Málek, and K.R. Rajagopal. On the development and generalizations of cahn–hilliard equations within a thermodynamic framework. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 63(1):145–169, 2012.
- [173] M. Fabrizio, C. Giorgi, and A. Morro. A thermodynamic approach to non-isothermal phase-field evolution in continuum physics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 214(2):144–156, 2006.

- [174] I. Pawł ow. Thermodynamically consistent Cahn-Hilliard and Allen-Cahn models in elastic solids. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(4):1169–1191, 2006.
- [175] VA Cimmelli, F Oliveri, and AR Pace. Phase-field evolution in Cahn–Hilliard–Korteweg fluids. *Acta Mechanica*, 227(8):2111–2124, 2016.
- [176] P. Ván, A. Berezovski, and J. Engelbrecht. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.
- [177] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:217–249, 1994.
- [178] W. Muschik. Internal variables in non-equilibrium thermodynamics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 15:127–137, 1990.
- [179] Jüri Engelbrecht. *Nonlinear wave mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1997.
- [180] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 19:250–289, 1994.
- [181] H. G. B. Casimir. On Onsager’s principle of microscopic reversibility. *Reviews of Modern Physics*, 17:343–350, 1945.
- [182] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [183] J. Meixner. Macroscopic and microscopic reversibility. *Reports on Mathematical Physics*, 7:37–57, 1975.
- [184] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1978.
- [185] M. Berezovski and A. Berezovski. On the stability of a microstructure model. *Computational Materials Science*, 52(1):193–196, 2012.
- [186] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*. Macmillan and co., London, 1877.
- [187] J. C. M. Li. Persistency, pseudo-entropy and thermokinetic potential. *Physical Review*, 127:1784–1786, 1962.
- [188] I Gyarmati. On the phenomenological basis of irreversible thermodynamics I. *Periodica Polytechnica. Chemical Engineering*, 5(3):219–243, 1961.
- [189] I. Gyarmati. On the phenomenological basis of irreversible thermodynamics II. *Periodica Polytechnica Ser. Chem. Engng. Budapest*, 5:321–339, 1961.

- [190] G. A. Maugin and R. Drouot. Internal variables and the thermodynamics of macromolecule solutions. *International Journal of Engineering Science*, 21(7):705–724, 1983.
- [191] R. Drouot and G. A. Maugin. Application of diffusive internal variables in complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Mechanics*, 96:31–43, 2001.
- [192] J. Engelbrecht and M. Vendelin. Microstructure described by hierarchical internal variables. *Rendiconti del Seminario Matematico, Università e Politecnico di Torino*, 58(1):93–98, 2000.
- [193] J. Kestin. Internal variables in the local-equilibrium approximation. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 18:360–379, 1993.
- [194] C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids*. Springer-Verlag, Berlin-etc., 3th edition, 1999.
- [195] R. D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16:51–78, 1964.
- [196] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and M. Berezovski. Waves in microstructured solids: a unified viewpoint of modelling. *Acta Mechanica*, 220:349–363, 2011.
- [197] P. Ván, C. Papenfuss, and A. Berezovski. Thermodynamic approach to generalized continua. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(3):403–420, 2014. Erratum: 421–422, arXiv:1304.4977.
- [198] A.C. Eringen and E.S. Suhubi. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids I. *International Journal of Engineering Science*, 2:189–203, 1964.
- [199] P. Ván. Generic stability in dissipative generalized mechanics. 2012. arXiv:1212.6892v1 [physics.class-ph].
- [200] J. Verhás. An application of Gyarmati’s wave approach. *Acta Physica Hungarica*, 66(1-4):95–97, 1989.
- [201] J. Verhás. Non-equilibrium thermodynamics and the dynamics of particles. In O. Gues G. Iooss and A. Nouri, editors, *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, pages 138–146, Boca Raton-London-New York-Washington, D. C., 2000. Chapman and Hall/CRC.
- [202] Asszonyi Cs., Fülöp T., Szarka Z. Ván P., and és Horváth R. Reológiai alapmodellek és összekapcsolásuk. In Asszonyi Csaba, editor, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, volume 6 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 51–92. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [203] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003. (cond-mat/0112214).
- [204] I. Müller. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 28:1–39, 1968.

- [205] I-Shih Liu. Entropy flux relation for viscoelastic bodies. *Journal of Elasticity*, 90(3):259–270, 2008.
- [206] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006. (quant-ph/0304062).
- [207] P. Ván. Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics - variational principles and Second Law. In Ewald Quak and Tarmo Soomere, editors, *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, chapter III, pages 153–186. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009. (arXiv:0902.3261).
- [208] J. E. Dunn and R.L. Fosdick. Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 56:191–252, 1974.
- [209] D.D. Joseph. Instability of the rest state of fluids of arbitrary grade greater than one. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 75:251–256, 1981.
- [210] M. Grmela. Weakly nonlocal hydrodynamics. *Physical Review E*, 47(1):351–602, 1993.
- [211] G. P. Galdi. Slow steady fall of rigid bodies in a second-grade fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 90(1):373–381, 2001.
- [212] P. Ván and T. Fülöp. Stability of stationary solutions of the Schrödinger-Langevin equation. *Physics Letters A*, 323(5-6):374–381, 2004. (quant-ph/0304190).
- [213] A. Morro. A phase-field approach to non-isothermal transitions. *Mathematical and Computer modelling*, 48(3-4):621–633, 2008.
- [214] J. Serrin. *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, volume VIII of *Handbuch der Physik*, pages 125–263. Springer, 1959.
- [215] N. P. Kirchner and K. Hutter. Elasto-plastic behaviour of a granular material with and additional scalar degree of freedom. In W. Ehlers and J. Blum, editors, *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, pages 147–168. Springer, 2002.
- [216] D. Bohm. *Quantum Theory*. Prentice-Hall, New York, 1951.
- [217] P. R. Holland. *The Quantum Theory of Motion*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [218] P. Ván. Unique additive information measures - Boltzmann-Gibbs-Shannon, Fisher and beyond. *Physica A*, 365:28–33, 2006. cond-mat/0409255.
- [219] S. Kjelstrup and D. Bedeaux. *Non-equilibrium thermodynamics of heterogeneous systems*. World Scientific, Berlin, New Jersey, etc., 2008.

- [220] S. Kjelstrup, D. Bedeaux, E. Johannessen, and J. Gross. *Non-equilibrium thermodynamics for engineers*. World Scientific, 2010.
- [221] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung). *Annalen der Physik*, 79:361–376, 1926.
- [222] E. Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Zeitschrift für Physik*, 40:322–326, 1926. in German.
- [223] L. Jánossy and M. Ziegler. The hydrodynamical model of wave mechanics I., (The motion of a single particle in a potential field). *Acta Physica Hungarica*, 16(1):37–47, 1963.
- [224] L. Jánossy and Ziegler-Náray M. Wave mechanics and the photon IV. *Acta Physica Hungarica*, 43(2):173–183, 1977.
- [225] T. Fülöp and S. D. Katz. A frame and gauge free formulation of quantum mechanics. quant-ph/9806067, 1998.
- [226] B. Bistrovic, R. Jackiw, H. Li, V. P. Nair, and S.-Y. Pi. Non-Abelian fluid dynamics in Lagrangian formulation. *Physical Review D*, 67(2):025013(11), 2003. (hep-th/0210143).
- [227] R. Jackiw, V. P. Nair, S-Y. Pi, and A. P. Polychronakos. Perfect fluid theory and its extensions. *Journal of Physics A*, 37:R327–R432, 2004. arXiv:hep-ph/0407101.
- [228] T.S. Biró and P. Ván. Classical and quantum parts in madelung variables (splitting the source term for the einstein equation to classical and quantum parts). In S. Varró, P. Ádám, T.S. Biró, G.G. Barnaföldi, and P. Lévai, editors, *EPJ Web of Conferences*, volume 78, page 02003, 2014. full paper: arXiv:1312.1316, Wigner 111 – Colourful & Deep Scientific Symposium, Budapest, Hungary, November 11-13, 2013.
- [229] T.S. Biró and P. Ván. Splitting the source term for the einstein equation to classical and quantum parts. *Foundations of Physics*, 45:1465–1482, 2015. arXiv:1312.1316.
- [230] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski. Nonlinear wave mechanics. *Annals of Physics*, 100:62–93, 1976.
- [231] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, 1989.
- [232] M. D. Kostin. On the Schrödinger-Langevin equation. *The Journal of Chemical Physics*, 57(9):3589–3590, 1972.
- [233] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, page 02054, 2009. arXiv:0811.0257.

- [234] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover, 2nd, revised edition, 2000.
- [235] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *EPL*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.
- [236] Ván P., Czél B., Fülöp T., Gróf Gy., and Verhás J. Heat conduction beyond the Fourier equation - theory and experiments. In *10th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, Proceedings*, pages 221–226. Budapest University of Technology and Economics - Department of Energy Engineering, 2011.
- [237] P. Ván and T. Fülöp. Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics. *Annalen der Physik*, 524(8):470–478, 2012. arXiv:1108.5589.
- [238] P. Ván, B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, Á. Gyenis, and J. Verhás. Experimental aspects of heat conduction beyond Fourier. In M. Pilotelli and G. P. Beretta, editors, *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 519–524, Brescia, 2013. Cartolibreria SNOOPY. ISBN 978-88-89252-22-2, arXiv:1305.3583.
- [239] R. Kovács and P. Ván. Generalized heat conduction in heat pulse experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 83:613–620, 2015. arXiv:1409.0313v2.
- [240] P. Ván. Theories and heat pulse experiments of non-Fourier heat conduction. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, 7(2):150–166, 2016. arXiv:1501.04234, Special Issue on "Constitutive Equations for Heat Conduction in Nanosystems and Non-equilibrium Processes".
- [241] S. Both, B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, A. Gyenis, R. Kovács, P. Ván, and J. Verhás. Deviation from the Fourier law in room-temperature heat pulse experiments. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 41(1):41–48, 2016. arXiv:1506.05764.
- [242] P. Kostädt and M. Liu. On the causality and stability of the relativistic diffusion equation. *Physical Reviews D*, 62:023003, 2000.
- [243] H.D. Weymann. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion, and viscous shear motion. *American Journal of Physics*, 35:488–, 1967.
- [244] G. Fichera. Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical? *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLI:5–28, 1992.
- [245] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *The European Physical Journal - Special Topics*, 155:201–212, 2008. arXiv:0704.2039v2.
- [246] P. Ván, R. Kovács, and T. Fülöp. Thermodynamic hierarchies of evolution equations. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 64(3S):389–395,

2015. arXiv:1412.4490, Proceedings of IUTAM Symposium about Nonlinear Waves, Tallinn, 2014 September 8-12.
- [247] M. Grmela, G. Lebon, and C. Dubois. Multiscale thermodynamics and mechanics of heat. *Physical Review E*, 83:061134, 2011.
- [248] L. Tisza. Transport phenomena in helium II. *Nature*, 141:913, 1938.
- [249] L.D. Landau. Two-fluid model of liquid helium II. *Journal of Physics*, 5(1):71–90, 1941.
- [250] V. Peshkov. Second sound in Helium II. *J. Phys. (Moscow)*, 8:381, 1944.
- [251] M. P. Vernotte. La véritable équation de chaleur. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 247:2103–5, 1958.
- [252] J. Callaway. Model for lattice thermal conductivity at low temperatures. *Physical Review*, 113(4):1046, 1959.
- [253] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Dispersion relation for a second sound in solids. *Physical Review*, 133:A141 1, 1964.
- [254] H. E. Jackson and C. T. Walker. Thermal conductivity, second sound and phonon-phonon interactions in NaF. *Physical Review B*, 3(4):1428–1439, 1971.
- [255] V. Narayanamurti and R. D. Dynes. Observation of second sound in Bismuth. *Physical Review Letters*, 26:1461–1465, 1972.
- [256] Kovács Róbert. *Heat conduction beyond Fourier's Law: theoretical predictions and experimental validation*. PhD thesis, BME GPK, Budapest, 2017.
- [257] D.G. Cahill, W. K. Ford, K. E. Goodson, G. D. Mahan, A. Majumdar, H. J. Maris, R. Merlin, and S. R. Phillpot. Nanoscale thermal transport. *Journal of Applied Physics*, 93(2):793–818, 2003.
- [258] Z. M. Zhang. *Nano/microscale heat transfer*. McGrawHill, New York, etc..., 2007.
- [259] P. Kim, L. Shi, A. Majumdar, and P. L. McEuen. Thermal transport measurements of individual multiwalled nanotubes. *Physical Review Letters*, 87(21):215502, 2001.
- [260] M. Fujii, X. Zhang, H. Xie, H. Ago, K. Takahashi, and T. Ikuta. Measuring the thermal conductivity of a single carbon nanotube. *Physical Review Letters*, 95:065502, 2005.
- [261] V. A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlocal effects and second sound in a nonequilibrium steady state. *Physical Review B*, 79:014303, 2009.
- [262] V. A. Cimmelli, A. Sellitto, and D. Jou. Nonlinear evolution and stability of the heat flow in nanosystems: Beyond linear phonon hydrodynamics. *Physical Review B*, 82:184302, 2010.

- [263] V. A. Cimmelli. Different thermodynamic theories and different heat conduction laws. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 34(4):299–332, 2009.
- [264] D. Y. Tzou. Nonlocal behaviour in phonon transport. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54:475–481, 2011.
- [265] S. Bargmann and P. Steinmann. Classical results for a non-classical theory: remarks on thermodynamic relations in Green–Naghdi thermo-hyperelasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 19:59–66, 2007.
- [266] S. Bargmann and P. Steinmann. Modeling and simulation of first and second sound in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 45:6067–6073, 2008.
- [267] A. Sellitto, V.A. Cimmelli, and D. Jou. Entropy flux and anomalous axial heat transport at the nanoscale. *Physical Review B*, 87(5):054302, 2013.
- [268] Antonio Sellitto, Vito Antonio Cimmelli, and David Jou. *Mesoscopic theories of heat transport in nanosystems*, volume 6. Springer, 2016.
- [269] I Carlomagno, VA Cimmelli, and A Sellitto. Phonon and electron temperature and non-fourier heat transport in thin layers. *Physica B: Condensed Matter*, 511:61–67, 2017.
- [270] D. D. Joseph and L. Preziosi. Heat waves. *Reviews of Modern Physics*, 61:41–73, 1989.
- [271] D. D. Joseph and L. Preziosi. Addendum to the paper "heat waves". *Reviews of Modern Physics*, 62:375–391, 1990.
- [272] A.E. Green and P. M. Naghdi. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences*, 432(1885):171–194, 1991.
- [273] K. K. Tamma and X. Zhou. Macroscale and microscale thermal transport and thermo-mechanical interactions: some noteworthy perspectives. *Journal of Thermal Stresses*, 21:405–449, 1998.
- [274] S. Forest and M. Amestoy. Hypertemperature in thermoelastic solids. *Comptes Rendus Mecanique*, 336:347–353, 2008.
- [275] J. Fourier. *Analytical theory of heat*. Dover, New York, 1955.
- [276] R. A. Guyer and J. A. Krumhansl. Thermal conductivity, second sound and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals. *Physical Review*, 148(2):778–788, 1966.
- [277] M. Fabrizio and A. Morro. Thermodynamics and second sound in a two-fluid model of helium II; Revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 28:69–84, 2003.

- [278] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics – the Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard equations. *Physics Letters A*, 290(1-2):88–92, 2001. (cond-mat/0106568).
- [279] V. A. Cimmelli and P. Ván. The effects of nonlocality on the evolution of higher order fluxes in non-equilibrium thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 46(11):112901–15, 2005. cond-mat/0409254.
- [280] V. Ciancio, V. A. Cimmelli, and P. Ván. On the evolution of higher order fluxes in non-equilibrium thermodynamics. *Mathematical and Computer Modelling*, 45:126–136, 2007. cond-mat/0407530.
- [281] S. I. Anisimov, B. L. Kapeliovich, and T. L. Perelman. Electron emission from metal surfaces exposed to ultrashort laser pulses. *Soviet Physics-JETP.*, 39:375–377, 1974.
- [282] J. G. Fujimoto, J. M. Liu, and E. P. Ippen. Femtosecond laser interaction with metallic tungsten and nonequilibrium electron and lattice temperatures. *Soviet Physics-JETP.*, 53:1837–40, 1984.
- [283] T. J. Bright and Z. M. Zhang. Common misperceptions of the hyperbolic heat equation. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 23(3):601–607, 2009.
- [284] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2):229–240, 2011.
- [285] W. Kaminski. Hyperbolic heat conduction equations for materials with a non-homogeneous inner structure. *Journal of Heat Transfer*, 112:555–560, 1990.
- [286] K. Mitra, S. Kumar, A. Vedavarz, and Moallemi M. K. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *Journal of Heat Transfer*, 117:568–573, 1995.
- [287] B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, and P. Ván. Comparison of temperature responses of the laser flash method in case of parabolic and hyperbolic heat conduction models. In Dombi Sz., editor, *11th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection, Balatonfüred*, pages 133–139, Budapest, 2013. BME, Dep. of Energy Engineering.
- [288] B. Czél, T. Fülöp, Gy. Gróf, Á. Gyenis, and P. Ván. Simple heat conduction experiments. In Dombi Sz., editor, *11th International Conference on Heat Engines and Environmental Protection*, pages 141–146, Budapest, 2013. BME, Dep. of Energy Engineering.
- [289] Gróf Gy. *Measurement of thermodiffusion coefficient of one and two layered samples with FLASH method*. Phd, PÁG, Budapest, 2002. in Hungarian.
- [290] J. Engelbrecht and A. Berezovski. Reflections on mathematical models of deformation waves in elastic microstructured solids. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 3(1):43–82, 2015.

- [291] D.W. Tang and N Araki. Non-fourier heat conduction behavior in finite mediums under pulse surface heating. *Materials Science and Engineering: A*, 292(2):173–178, 2000.
- [292] W. Liu, K. Saanouni, S. Forest, and P. Hu. The micromorphic approach to generalized heat equations. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 42(4):327–357, 2017.
- [293] C Enns and S Hunklinger. *Low-Temperature Physics*. Springer, 2005.
- [294] T. F. McNelly, S. J. Rogers, D. J. Channin, R. . Rollefson, W. M. Goubau, G. E. Schmidt, J. A. Krumhansl, and R. O. Pohl. Heat pulses in NaF: onset of second sound. *Physical Review Letters*, 24(3):100, 1970.
- [295] G. Chen. Ballistic-diffusive heat-conduction equations. *Physical Review Letters*, 86(11):2297(4), 2001.
- [296] G. Chen. Ballistic-diffusive equations for transient heat conduction from nano to macroscales. *ASME Journal of Heat Transfer*, 124(2):320–328, 2002.
- [297] G. Lebon, H. Machrafi, M. Grmela, and Ch. Dubois. An extended thermodynamic model of transient heat conduction at sub-continuum scales. *Proc. R. Soc. A*, 467(2135):3241–3256, 2011.
- [298] G. Lebon. Heat conduction at micro and nanoscales: A review through the prism of extended irreversible thermodynamics. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 39(1):35–59, 2014.
- [299] K. Zhukovsky. Exact negative solutions for Guyer–Krumhansl type equation and the maximum principle violation. *Entropy*, 19(9):440, 2017.
- [300] R. Kovács and P. Ván. Models of ballistic propagation of heat at low temperatures. *International Journal of Thermophysics*, 37:95(13), 2016. arXiv::1506.05578v1, JETC2015 paper.
- [301] Ván P. és Asszonyi Cs. Az általános törvényszerűségek. In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mézőkeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 25–87. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [302] P. Ván. Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. *Proceedings of Estonian Academy of Sciences*, 57(3):127–131, 2008. Lecture held at CPEA'07.
- [303] Cs. Asszonyi, T. Fülöp, and P. Ván. Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27:971–986, 2015. arXiv:1407.0882.
- [304] Asszonyi Cs., Fülöp T., and P. Ván. Kitüntetett szilárdtest-reológiai modellek egy belsőváltozós termodinamikai elmélet keretében. In Fülöp T., editor, *Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások*, volume 19

- of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 11–34, Budapest, 2015. Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért. in Hungarian.
- [305] Asszonyi Cs., editor. *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.
- [306] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, volume 5 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.
- [307] T. Fülöp, A. Csatár, and P. Ván. Elasticity, plasticity, rheology and thermal stress – an irreversible thermodynamical theory. In M. Pilotelli and G. P. Beretta, editors, *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 525–530, Brescia, 2013. Cartolibreria SNOOPY. ISBN 978-88-89252-22-2.
- [308] Cs. Asszonyi, A. Csatár, and T. Fülöp. Elastic, thermal expansion, plastic and rheological processes – theory and experiment. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 60(4):591–601, 2016.
- [309] V. Ciancio and Verhás J. On the representation of dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 18(1):39–50, 1993.
- [310] C. C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith’s criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 1. Scalar valued isotropic functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 36(3):166–197, 1970.
- [311] C. C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor G. F. Smith’s criticism of my papers on representations of isotropic functions, Part 2. Vector valued isotropic functions, and skew-symmetric tensor-valued isotropic functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 36(3):198–223, 1970.
- [312] Ván P. Objektív anyagfüggvények felé a reológiában. In Török Á. és Vársárhelyi B., editor, *Mérnökgeológia és Kőzetmechanika 2007*, volume 4 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 327–332. Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [313] Byron R. Bird, R. C. Armstrong, and Ole Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*. John Wiley and Sons, Inc., New York-Santa Barbara-etc., 1977.
- [314] R. G. Larson. *Constitutive equations for polymer melts*. Butterworths, Boston-etc., 1988.
- [315] Asszonyi Cs. és Fülöp T. Szarka Z. Anyagok mechanikai tulajdonságai az anyagtörvény alapján. In Asszonyi Csaba, editor, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, volume 6 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 4, pages 121–188. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [316] K. Matsuki and K. Takeuchi. Three-dimensional in situ stress determination by anelastic strain recovery of a rock core. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 30:1019–1022, 1993.

- [317] K. Matsuki. Anelastic strain recovery compliance of rocks and its application to in situ stress measurement. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 45:952–965, 2008.
- [318] W. Lin, Y. Kuwahara, T. Satoh, N. Shigematsu, Y. Kitagawa, T. Kiguchi, and N. Koizumi. A case study of 3D stress orientation determination in Shikoku Island and Kii Peninsula, Japan. In Ivan Vrkljan, editor, *Rock Engineering in Difficult Ground Conditions (Soft Rock and Karst)*, pages 277–282, London, 2010. Balkema. Proceedings of Eurock'09 Cavtat, Croatia, 2009 X. 28-29.
- [319] Ván P. és Asszonyi Cs. Izotrop kontinuumok anyagtörvénye és speciális esetei. In Asszonyi Csaba, editor, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, volume 6 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 1, pages 13–50. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [320] Fülöp T. Reológiai elemkapcsolások. In Asszonyi Csaba, editor, *Izotrop kontinuumok anyagtulajdonságai*, volume 6 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, pages 93–120. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [321] M. Dobróka. On a generalized Poynting-thomson model. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica*, 18(3):281–290, 1983.
- [322] N. D. Cristescu. Rock rheology. In E. T. Brown, editor, *Comprehensive Rock Engineering I. Fundamentals*, pages 523–544. Pergamon Press, Oxford-etc., 1993.
- [323] Vásárhelyi B. és Asszonyi Cs. Bojtár I. A Young-féle rugalmassági modulus és a Poisson-tényező. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 4, pages 101–120. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [324] Asszonyi Cs., Szarka Z., Csatár A., Horváth R., and Kocsis D. és Ván P. Tömör anyagok képlékeny deformációjáról. In Asszonyi Cs., editor, *A képlékenységi termodinamikájáról*, volume 13 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 1, pages 9–21. Hungarian Printing House, Budapest, 2012.
- [325] P. Ván and Z. Szarka. Rock rheology - time dependence of dilation and stress around a tunnel. In A. Van Cotthem, R. Charlier, J-F Thimus, and J-P. Tshibangu, editors, *Eurock 2006, Multiphysics Coupling and Long term behaviour in rock mechanics*, pages 357–363, London-Leiden/ etc., 2006. Taylor and Francis. Proceedings of the International Symposium of the International Society for Rock Mechanics, Eurock 2006, 9-12 May 2006, Liège, Belgium.
- [326] Fülöp T. és Béda Gy. Hidrosztatikus környezetben nyitott hengersizmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés. In Asszonyi Cs., editor, *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, volume 9 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 99–114. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.
- [327] Szarka Z. és Béda Gy. Asszonyi Cs. Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők. In Asszonyi Cs., editor, *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, volume 9 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 115–171. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2009.

- [328] T. Fülöp and M. Szucs. Szilárdtest-reológiai időfüggés meghatározása a volterra-elv által inspirálva. In Fülöp T., editor, *Termodinamikai módszertan - kontinuumfizikai alkalmazások*, volume 19 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 67–76, Budapest, 2015. Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért.
- [329] Vásárhelyi B. M. Tóth T. and Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja I. Mezősas-ny. Technical report, MOL, 2007.
- [330] Ván P. M. Tóth T., Vásárhelyi B. and Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja II. Dorozsma. Technical report, MOL, 2008.
- [331] M. Tóth T., Nagy Á., Fintor K., Vásárhelyi B., Ván P., and Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja III. Kiskunhalas Ék. Technical report, MOL, 2009.
- [332] M. Tóth T., Nagy Á., Fintor K., Vásárhelyi B., Ván P., and Földes T. Repedezett tároló modellezés; kőzetmechanikai modell-kísérletek és szeizmikus attribútum alapú modellek korrelációja IV. Kiskunhalas Ék-d, karbonátok. Technical report, MOL, 2009.
- [333] M. Tóth T., Földes T., Vásárhelyi B., P. Ván, B. Kiss, P. Kurgyis, and B. Lakos. Integrated evaluation of petrologic, petrophysical and geophysical data of the Mezősas-W fractured metamorphic HC reservoir. *MOL Scientific Magazine*, (2):74–82, 2010.
- [334] Kovács L., Mészáros E., Deák F., Rátkai O., Somodi G., Váró Á. (Mott MacDonald Magyarország Kft.), Bóthi Z. (Golder Zrt.), Hegedűs S., Szongoth G., and Zilahi-Sebess L. (Geo-Log Kft.). A tárolóterek mérnöki tervezését megalapozó vizsgálatok összefoglaló értékelése. Kézirat Irattár, Paks, RHK-K-033/12M01, RHK Kft., Pécs-Budapest, március 2012. kutatási jelentés.
- [335] Kovács L., Mészáros E., Deák F., Somodi G., Máté K., Jakab A., Vásárhelyi B., Geiger J., Dankó Gy., Korpai F., Mező Gy., Darvas K., Ván P., Fülöp T., and Asszonyi Cs. Geotechnikai értelmező jelentés (GÉJ) felülvizsgálata és kiterjesztése. Technical report, Kézirat Irattár, Paks, RHK-K-032/12, RHK - Kőmérő Kft., Pécs, november 2012.
- [336] Kovács L., Mészáros E., Deák F., and Somodi G. Időfüggő deformációs jelenségek a Bábaapáti nrht térségeiben és azok lehetséges oka. In Török Á Görög P. Vásárhelyi B., editor, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2013.*, volume 16 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 177–194, Budapest, 2013. Hantken Kiadó.
- [337] G.G. Barnaföldi, T. Bulik, M. Cieslar, E. Dávid, M. Dobróka, E. Fenyvesi, Z. Gráczer, G. Hamar, G. Huba, Á. Kis, R. Kovács, I. Lemperger, P. Lévai, J. Molnár, D. Nagy, A. Novák, L. Oláh, P. Pázmándi, D. Piri, D. Rosinska, L. Somlai, T. Starecki, M. Suchenek, G. Surányi, S. Szalai, D. Varga, M. Vasúth,

- P. Ván, B. Vásárhelyi, V. Wesztergom, and Z. Wéber. A Mátrai Gravitációs és Geofizikai Laboratórium első mérései és mérési programja. *Magyar Geofizika*, 57(4):152–169, 2016. in Hungarian.
- [338] G.G. Barnaföldi, T. Bulik, M. Cieslar, E. Dávid, M. Dobróka, E. Fenyvesi, Z. Grácz, G. Hamar, G. Huba, Á. Kis, R. Kovács, I. Lemperger, P. Lévai, J. Molnár, D. Nagy, A. Novák, L. Oláh, P. Pázmándi, D. Piri, D. Rosinska, L. Somlai, T. Starecki, M. Suchenek, G. Surányi, S. Szalai, D. Varga, M. Vasúth, P. Ván, B. Vásárhelyi, V. Wesztergom, and Z. Wéber. First report of long term measurements of the MGGL laboratory in the Mátra mountain range. *Classical and Quantum Gravity*, 34:114001(22), 2017. arXiv: 1610.07630.
- [339] A. Einstein. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4:411–462, 1907.
- [340] M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme. *Sitzungsberichte der königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*, pages 542–570, 1907.
- [341] M.J. Klein. Thermodynamics in Einstein’s thought. *Science, New Series*, 157(3788):509–516, 1967.
- [342] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, London, 1959.
- [343] W. Israel. Nonstationary irreversible thermodynamics - causal relativistic theory. *Annals of Physics*, 100(1-2):310–331, 1976.
- [344] W. Israel and J. M. Stewart. Thermodynamics of nonstationary and transient effect in a relativistic gas. *Physics Letters A*, 58(4):213–215, 1976.
- [345] W. Israel and J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Annals of Physics*, 118:341–372, 1979.
- [346] W. Israel and J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. II. *Proceedings of Royal Society London A*, 365:43–52, 1979.
- [347] J. M. Stewart. On transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Proceedings of Royal Society London A*, 357:59–75, 1977.
- [348] L. Lindblom and W. A. Hiscock. On the stability of rotating stellar models in general relativity theory. *The Astrophysical Journal*, 267:384–401, 1983.
- [349] W. A. Hiscock. Generic instabilities in first-order relativistic fluid theories. II. Havas-Swenson-type theories. *Physical Review D*, 86(6):1527–1532, 1986.
- [350] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability and causality in dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 151:466–496, 1983.
- [351] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Linear plane waves in dissipative relativistic fluids. *Physical Review D*, 35(12):3723–3731, 1987.
- [352] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability in dissipative relativistic fluid theories. *Contemporary Mathematics*, 71:181–220, 1988.

- [353] I-S. Liu, I. Müller, and T. Ruggeri. Relativistic thermodynamics of gases. *Annals of Physics*, 169:191–219, 1986.
- [354] L. Lindblom. The relaxation effect in dissipative relativistic fluid theories. *Annals of Physics*, 247:1–18, 1996.
- [355] R. Geroch and L. Lindblom. Dissipative relativistic fluid theories of divergence type. *Physical Review D*, 41:1855–1861, 1990.
- [356] R. Geroch and L. Lindblom. Causal theories of dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 207:394–416, 1991.
- [357] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta. Divergence-type nonlinear conformal hydrodynamics. *Physical Review D*, 80:126002, 2010.
- [358] R. Geroch. On hyperbolic "theories" of relativistic dissipative fluids. 2001. arXiv:gr-qc/0103112.
- [359] L. Lehner, O. A. Reula, and M. E. Rubio. A hyperbolic theory of relativistic conformal dissipative fluids. *arXiv:1710.08033*, 2017.
- [360] H. Freistühler and B. Temple. Causal dissipation for the relativistic dynamics of ideal gases. *Proc. R. Soc. A*, 473(2201):20160729, 2017.
- [361] R. Geroch. Relativistic theories of dissipative fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 36(8):4226–4241, 1995.
- [362] Yu-Gang Ma, En-Ke Wang, Xu Cai, Huan-Zhong Huang, Xin-Nian Wang, and Zhi-Yuan Zhu, editors. *Quark Matter 2006 - The 19th International Conference on ultra-relativistic nucleus-nucleus collisions (Shanghai, China, 14-20 november 2006)*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2006. Volume 34.
- [363] P. Danielewicz and M. Gyulassy. Dissipative phenomena in quark gluon plasma. *Physical Review D*, 31(1):53–62, 1985.
- [364] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets. The shear viscosity of strongly coupled $n = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 87:081601, 2001. arXiv:hep-th/0104066.
- [365] PK Kovtun, Dan T Son, and Andrei O Starinets. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. *Physical Review Letters*, 94(11):111601, 2005.
- [366] A. Jakovac. Nonuniversal lower bound for the shear viscosity to entropy density ratio. *Physical Review D*, 81(4):045020, 2010.
- [367] Topical issue on relativistic hydro-and thermodynamics, 2012.
- [368] B. Betz, D. Henkel, and D. H. Rischke. Complete second-order dissipative fluid dynamics. *Journal of Physics G*, 36:064029, 2009.

- [369] Tomoi Koide Shi Pu and Dirk H. Rischke. Does stability of relativistic dissipative fluid dynamics imply causality? *Physical Review D*, 81:114039, 2010.
- [370] B. Betz, G.S. Denicol, T. Koide, E. Molnár, H. Niemi, and D. H. Rischke. Second order dissipative fluid dynamics from kinetic theory. *EPJ Web of Conferences*, 13:07005, 2011. arXiv:1012.5772v2.
- [371] G. Denicol, H. Niemi, Molnár E., and D. H. Rischke. Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the boltzmann equation. *Physical Review D*, 85(11):114047, 2012.
- [372] T. S. Bíro and E. Molnár. Fluid dynamical equations and transport coefficients of relativistic gases with non-extensive statistics. *Physical Review C*, 85:024905, 2012.
- [373] P. Romatschke. New developments in relativistic viscous hydrodynamics. *International Journal of Modern Physics E*, 19(1):1–53, 2010. arXiv:0902.3663.
- [374] R. Baier, P. Romatschke, and U. A. Wiedemann. Dissipative hydrodynamics and heavy-ion collisions. *Physical Review C*, 73:064903, 2006. arXiv:hep-ph/0602249.
- [375] R. Baier, P. Romatschke, D. T. Son, A. O. Starinets, and M. A. Stephanov. Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. *Journal of High Energy Physics*, 2008(4):100, 2008. arXiv:0712.2451v1 [hep-th].
- [376] K. Tsumura, T. Kunihiro, and K. Ohnishi. Derivation of covariant dissipative fluid dynamics in the renormalization-group method. *Physics Letters B*, 646:134–140, 2007. hep-ph/0609056v3.
- [377] K. Tsumura and T. Kunihiro. Stable first-order particle-frame relativistic hydrodynamics for dissipative systems. *Physics Letters B*, 668(5):425–428, 2008. arXiv:0709.3645v2[nucl-th].
- [378] K. Tsumura and T. Kunihiro. First-principle derivation of stable first-order generic-frame relativistic dissipative hydrodynamic equations from kinetic theory by renormalization-group method. *Progress of Theoretical Physics*, 126(5):761–809, 2011. arXiv:1108.1519[hep-ph].
- [379] K. Tsumura and T. Kunihiro. Derivation of relativistic hydrodynamic equations consistent with relativistic Boltzmann equation by renormalization-group method. *The European Physical Journal A*, 48:162, 2012.
- [380] K. Tsumura and T. Kunihiro. Uniqueness of Landau-Lifshitz energy frame in relativistic dissipative hydrodynamics. *Physical Review E*, 87:053008, 2013.
- [381] K. Tsumura, Y. Kikuchi, and T. Kunihiro. Relativistic causal hydrodynamics derived from boltzmann equation: A novel reduction theoretical approach. *Physical Review D*, 92(8):085048, 2015.

- [382] K. Tsumura, Y. Kikuchi, and T. Kunihiro. Causal hydrodynamics from kinetic theory by doublet scheme in renormalization-group method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 336:1–27, 2016.
- [383] L. S. García-Colín and A. Sandoval-Villalbazo. Relativistic non-equilibrium thermodynamics revisited. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 31:11–22, 2006.
- [384] A. L. Garcia-Perciante, L. S. Garcia-Colin, and A. Sandoval-Villalbazo. On the nature of the so-called generic instabilities in dissipative relativistic hydrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, 41(7):1645–1654, 2009.
- [385] W. Muschik and H.H. v. Borzeszkowski. Comment on the article "Relativistic non-equilibrium thermodynamics revisited". *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 32:187–190, 2007.
- [386] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008. arXiv:07121437 [nucl-th].
- [387] P. Ván and T.S. Biró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106–110, 2012. arXiv:1109.0985[nucl-th].
- [388] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011. arXiv:1102.0323.
- [389] S.R. de Groot, W. A. van Leeuwen, and Ch. G. van Weert. *Relativistic Kinetic Theory*. North Holland, Amsterdam, 1980.
- [390] H. Struchtrup. *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows*. Springer, Berlin-Heidelberg, 2005.
- [391] Csernai L. *Introduction to relativistic heavy ion physics*. John Wiley and Sons, Chicester-etc., 1994.
- [392] T.S. Biró, V. Czimmer, H. Iguchi, and P. Ván. Black hole event horizons can hide positive heat capacity. 2017. arXiv:1712.09706.
- [393] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. arXiv:math-ph/0608065.
- [394] T. Matolcsi. *Téridőmodellek*. ETTE, 2015. szerk. Fülöp T.
- [395] Fülöp T. A tér nem abszolút - a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 1, pages 11–35. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [396] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, pages 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

Irodalomjegyzék

- [397] H. Weyl. *Raum-Zeit-Matterie*. Julius Springer, Berlin, 1918. in German.
- [398] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.
- [399] C. Truesdell and R. Toupin. *The classical field theories*, in *Handbuch der Physik, Vol III/1*. Springer, Berlin, 1960.
- [400] G. A. Maugin. On the universality of thermodynamics of forces driving singular sets. *Archive of Applied Mechanics*, 70:31–45, 2000.
- [401] J. A. Walker. *Dynamical Systems and Evolution Equations /Theory and Applications/*. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [402] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [403] W. Noll. Five contributions to natural philosophy. 2004. www.math.cmu.edu/~wn0g/noll/FC.pdf.
- [404] Gy. Farkas. A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 12:457–472, 1894. in Hungarian.
- [405] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1896.
- [406] A. Prékopa. Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 4:165–191, 1978.
- [407] Vízvári B. Farkas Gyula élő matematikai munkássága. *Fizikai Szemle*, 47(10):313–316, 1997. in Hungarian.
- [408] A. Schriver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley and Sons, Chichester-etc., 1998.
- [409] Gy. Farkas. Egyenlőtlenség alkalmazásának új módjai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:297–308, 1918. in Hungarian.
- [410] Gy. Farkas. A lineáris egyenlőtlenség következményei. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:397–408, 1918. in Hungarian.
- [411] A. Haar. A lineáris egyenlőtlenségekről. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 36:279–296, 1918. in Hungarian.
- [412] J. von Neumann. Discussion of a maximum principle. In A. H. Taub, editor, *Collected Works*, volume VI, pages 89–95, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.
- [413] H. Ott. Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur. *Zeitschrift für Physik*, 175:70–104, 1963.
- [414] P. Landsberg. Does a moving body appears cool? *Nature*, 212:571–573, 1966.

- [415] P. Landsberg. Does a moving body appears cool? *Nature*, 214:903–904, 1967.
- [416] P. J. E. Peebles and D. T. Wilkinson. Comment on the anisotropy of the primeval fireball. *Physical Review*, 174(5):2168, 1968.
- [417] P. Landsberg and G. E. A. Matsas. The impossibility of a universal relativistic temperature transformation. *Physica A*, 340:92–94, 2004.
- [418] W. Israel and J. M. Stewart. Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continuous media. In A. Helde, editor, *General relativity and gravitation (One hundred years after the birth of Albert Einstein)*, volume 2, chapter 13, pages 491–525. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [419] I. Derado and E. Ferrari. Temperature transformations in relativistic thermodynamics. *Fizika A*, 8(4):223–228, 1999.
- [420] M. Requardt. Thermodynamics meets special relativity - or what is real in physics? 2008. arXiv:0801.2639v1[gr-qc].
- [421] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi. Thermal equilibrium and statistical thermometers in special relativity. *Physical Review Letters*, 99:170601, 2007.
- [422] T. K. Nakamura. Lorentz transform of black-body radiation temperature. *EPL*, 88:20004, 2009.
- [423] T. K. Nakamura. Thermodynamics of extended bodies in special relativity. *EPL*, 89:40007, 2010.
- [424] J. Dunkel, P. Hänggi, and S. Hilbert. Nonlocal observables and lightcone-averaging in relativistic thermodynamics. *Nature Physics*, 5(10):741–747, 2009. arXiv:0902.4651.
- [425] R. Zygadlo. Thermodynamical quantities and relativity. *Acta Physica Polonica*, 41(5):1073–1081, 2010.
- [426] Jorge G Russo and Paul K Townsend. On the thermodynamics of moving bodies. *Classical and Quantum Gravity*, 27(17):175005, 2010. arXiv:0904.4628v2.
- [427] Geoffrey L Sewell. Note on the relativistic thermodynamics of moving bodies. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(48):485001, 2010. arXiv:1010.2045v2.
- [428] JJ Mareš, P Hubík, J Šesták, V Špička, J Křištofik, and J Stávek. Relativistic transformation of temperature and Mosengeil–Ott’s antinomy. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(3):484–487, 2010.
- [429] Maciej Przanowski and Jaromir Tosiek. Notes on thermodynamics in special relativity. *Physica Scripta*, 84(5):055008, 2011.
- [430] Luca Lusanna. From relativistic mechanics towards relativistic statistical mechanics. *Entropy*, 19(9):436, 2017.

- [431] Cristian Fariás, Victor A Pinto, and Pablo S Moya. What is the temperature of a moving body? *Scientific reports*, 7(1):17657, 2017.
- [432] Patrizia Rogolino and Francesco Farsaci. Relativistic phenomenological equations and transformation laws of relative coefficients. *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 95(1):4, 2017.
- [433] Wassim M Haddad. Thermodynamics: The unique universal science. *Entropy*, 19(11):621, 2017.
- [434] H. Callen and G. Horwitz. Relativistic thermodynamics. *American Journal of Physics*, 39(8):938–947, 1971.
- [435] C. K. Yuen. Lorentz transformation of thermodynamic quantities. *American Journal of Physics*, 38(2):246–252, 1970.
- [436] C. Moller. *The theory of relativity*. The international series of monographs in physics. Oxford University Press, Delhi-Bombay- Calcutta-Madras, 2nd edition, 1972.
- [437] Gábor Zoltán. *Termodinamika, Fenomenológiai rész*. Az Erdélyi Múzeum-egyesület kiadása, Kolozsvár, 1996.
- [438] J. Dunkel and P. Hänggi. Relativistic Brownian motion. *Physics Reports*, 471(1):1–73, 2009. arXiv:0812.1996v2.
- [439] T.W.B. Kibble. Relativistic transformation laws for temperature variables. *Il Nuovo Cimento*, XLI(1):72–78, 1966.
- [440] P. T. Landsberg. *Thermodynamics and Statistical mechanics*. Oxford Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [441] D. Eimerl. On relativistic thermodynamics. *Annals of Physics*, 91:481–498, 1975.
- [442] Chuang Liu. Is there a relativistic thermodynamics? A case study of the meaning for special relativity. *Studies in History and Philosophy of Science*, 25(6):983–1004, 1994.
- [443] S. S. Costa and G. E. A. Matsas. Temperature and relativity. *Physics Letters A*, 209:155–159, 1995.
- [444] P. Landsberg and G. E. A. Matsas. Laying the ghost of the relativistic temperature transformation. *Physics Letters A*, 223:401–403, 1996.
- [445] J. Casas-Vázquez and D. Jou. Temperature in non-equilibrium states. *Reports on Progress in Physics*, 66:1937–2023, 2003.
- [446] D. Mi, Hai Yang Zhong, and D. M. Tong. There exist different proposals for relativistic temperature transformation: the whys and wherefores. *Modern Physics Letters A*, 24(1):73–80, 2009.

- [447] Marek Demiański. *Relativistic astrophysics*. PWN-Polish Scientific Publishers - Pergamon Press, Warszawa - Oxford, etc., 1985.
- [448] M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme. *Annalen der Physik*, 331(6):1–34, 1908.
- [449] D. Blanuša. Sur les paradoxes de la notion d'énergie. *Glasnik mat. fiz.; astr.*, 2(4-5):249–50, 1947.
- [450] D. Ter Haar and H. Wergeland. Thermodynamics and statistical physics in the special theory of relativity. *Physics Reports*, 1(2):31–54, 1971.