Opponensi vélemény

Fleiner Tamás

Fixed points and choices: stable marriages and beyond

című MTA doktori értekezéséről

Bevezetés

A dolgozat témája a stabil párosítások és általánosításainak területével foglalkozik. A témakör kutatása Gale és Shapley 1962-es problémafelvetésével indult útjára, amely különösen az utóbbi két évtizedben fejlődött rohamosan. Klasszikus cikkükben Gale és Shapley azt a kérdést vizsgálták, hogy amennyiben azonos számú férfi és nő a másik nem képviselőit szigorúan rangsorolja, akkor kialakítható-e közöttük egy úgynevezett stabil párosítás. Egy párosítás instabilitását az okozhatja, ha található egy férfi és egy nő, akik egymást kölcsönösen előbbre helyezték a rangsorban, mint az aktuális párjuk. Gale és Shapley megmutatta az úgynevezett lánykérő algoritmusuk segítségével, hogy egy páros gráfban mindig létezik olyan párosítás, amelyhez a fentiekben leírt instabilitás nem kapcsolódik. A feladat számos irányban került általánosításra, a dolgozatban az általános (nempáros) gráf kérdésköre, valamint az úgynevezett b-párosítások koncepciója (amikor minden v csúcs esetén egy $b(v)$ korlát által adott a párosítható elemek száma) játszott alapvető szerepet. A szerző az értekezésben azonban egy „unortodox" megközelítést alkalmaz. A stabil párosítások ismert hálóelméleti tulajdonságait, mint motivációt alapul véve hálóelméleti megközelítéssel és fixponttételek segítségével vezet le ismert eredményeket, valamint jut el általánosításokig és hatékony módszerekig.

A dolgozat témaválasztása és felépítése

A téma időszerűségét mi sem bizonyítja jobban, mint Roth és Shapley 2012-es Közgazdasági Nobel emlékdíja, melyet a stabil elosztás elméletéről és a piactervezés gyakorlatáról szóló munkásságukért ítéltek oda. A témakört általában a közgazdaságtudomány, a matematika és a számítástudomány határterületeként szokás azonosítani, azonban az utóbbi években, köszönhetően elsősorban az intelligens elosztott autonóm rendszerek fejlődésének, a műszaki alkalmazások szintén óriási hajtóerőt jelentenek ezen kutatásoknak. Mindazonáltal a mélyebb matematikai összefüggések feltárása és ezeknek az alkalmazásokba történő visszacsatolása a legkevésbé kidolgozott része ennek a területnek, így a szerző hálóelméleti megközelítése mind a matematikai elmélet, mind a számítástudományi algoritmusok, mind a közgazdasági alkalmazások tekintetében további kutatásokat inspirálhat. A fentieket jelzi, hogy a témakör legjelentősebb összefoglaló műve, a David F. Manlove által írt „Algorithmics of matching under preferences" című könyv a szerző 16 publikációjára hivatkozik.

A 89 számozott oldal terjedelmű dolgozat a Bevezetésen és az Összefoglaláson kívül 7 fejezetre tagolódik. Az értekezés felépítése logikus és jól struktúrált, mindössze talán a 2-ik és 3-ik fejezet összevonása merülhetett volna fel. Továbbá érdemes lett volna a későbbi eredményeket is megalapozó első három fejezet során több helyen jobban hangsúlyozni azok későbbi felhasználását. Erre egy példa a 3.2-es fejezet, ahol ugyan említésre kerül, hogy az eredmények hasznosak lesznek a párosítási poliéderek leírásában, de ennek mélyebb hátterét már ezen a ponton hasznos lett volna megvilágítani. Szintén a 3.2 alfejezethez kapcsolódik, hogy ezen rész lezárása a 3.6 Lemmával egy kissé zavaró, mivel az a 3.3 fejezet eredményeinél lett felhasználva (így érdemesebb lett volna abban az alfejezetben elhelyezni).

A dolgozat tárgyalása világos és jól nyomon követhető, hiányérzetünk azzal kapcsolatban lehet csak, hogy további ábrák több ponton segíthették volna a könnyebb megértést. Az értekezés kiértékelését nagyban támogatta, hogy a szerző bekeretezéssel jelölte azon eredményeket, melyeket főbb tézispontokként is tekinthetők. A tézisek 15 publikációra támaszkodnak, melyek közül 12 dolgozat rangos nemzetközi folyóiratban jelent meg (a fennmaradó tétel közül az egyik a szerző PhD disszertációja, a másik kettő pedig technical report) és a szerző munkásságának mintegy másfél évtizedét ölelik fel (2003-tól napjainkig). A dolgozatban jól nyomon követhető a publikációknak az egyes fejezetekhez való kapcsolódása. A disszertációban előfordul ugyan néhány elírás, de ez a műnek az olvashatóságát és megértését összességében nem zavarja.

A tézisfüzet egy részletes és kompakt összefoglalását adja az értekezésnek, azonban véleményem szerint a 3.3, valamint a 7.4.1 alfejezetek főbb eredményei is megérdemelték volna, hogy itt is szerepeljenek. További megjegyzésem, hogy az eredmények vonatkozásában érdemes lett volna követni a disszertáció számozását a tézisfüzetben is, ez megkönnyítené az olvasó dolgát, ha az értekezést is tanulmányozni szeretné.

Az eredmények értékelése

A dolgozat 1. fejezete a témakör alapvető összefüggéseibe vezeti be az olvasót. Azonban már ezen rész is alapvető tézispontokat tárgyal, a szerző 2003-as első „fixpontos" megközelítésű publikációján keresztül bemutatja az újszerű tárgyalásmódot, valamint a hálóelmélet és a stabil párosítások kapcsolatát. A központi fogalom, melynek segítségével a két terület kapcsolatba hozható, az úgynevezett kiválasztási függvények fogalma, melynek alapgondolata közgazdaságtudományi keretekbe helyezve Kelso és Crawford munkásságából (1982) ered. A szerző a fogalomkört hálóelméleti keretekbe helyezve egy halmazrendszerből önmagába történő leképezéssel az egyes játékosok preferenciájának leírására alkalmas eszközt kap. A kiválasztási függvény egy halmazhoz annak egy részhalmazát rendeli és számunkra az úgynevezett komonoton függvények (lényegében a monoton ellentétje) játszanak központi szerepet a dolgozatban. Itt jegyezzük meg, hogy az angol szakirodalomban (és így az angol nyelvű dolgozatban is) „substitutable" elnevezés használatos, a szerző azonban nem talált megfelelő analóg magyar elnevezést, ezért a magyar nyelvű tézisfüzetben a tulajdonságot egyébként jól leíró „komonoton" jelzőt használta.

A szerző tárgyalásmódja a kiválasztási függvényekre vonatkozólag annyiban is újszerű, hogy az úgynevezett determináns fogalomra épül. A determináns itt szintén az adott halmazrendszerből önmagába történő megfelelő tulajdonságú leképezést takar, a kiválasztási függvény pedig a determináns képének az inputhalmazra történő megszorítását jelenti. Az 1.3 alfejezetben Tarski hálóelméleti fixponttételének következményeként a szerző megmutatja, hogy F és G komonoton kiválasztási függvények esetében találhatóak olyan (X,Y) halmazpárok, ahol X és Y egymás képei az F és G szerinti determinánsok szerint és az ilyen típusú halmazpárok hálót alkotnak. Ezen fenti megállapítás adja a motivációt a disszertáció központi fogalmának a megalkotására, mely szerint egy FG-kernel az alaphalmaz egy olyan K részhalmaza, amely a metszete egy fenti tulajdonságú (X, Y) halmazpárnak. Az elmondottaknak abban áll a jelentősége, hogy a stabil párosítások a gráfok élhalmazán definiált megfelelő kiválasztási függvények szerinti FG-kernelek lesznek, melyek így a fixponttétel következményeként léteznek.

A dolgozat 2-ik és 3-ik fejezete a fenti szemléletmód további kiterjesztésével kapcsolatos eredményeket tartalmaz. A 2-ik fejezetben bemutatásra kerül, hogy az azonos alaphalmazon értelmezett P_1 és P_2 posetek közös antiláncaként definiált P_1P_2-kernelek hálót alkotnak, majd Aharoni, Berger és Gorelik súlyozott kernelekre vonatkozó tételének általánosításaként bizonyításra kerül, hogy ezen súlyozott kernelek is hálót alkotnak. A részbenrendezések mellett a 2-ik fejezet a matroidok esetében is bemutat egy analóg eredményt, ahol a matroid kernelek speciális típusú közös független halmazok.

A 3-ik fejezetben a kernelek struktúrájára vonatkozó eredményeket találunk. A komonoton kiválasztási függvény akkor lesz útfüggetlen, amennyiben X bármely olyan Y részhalmaza esetén, amely X képét tartalmazza, X-re és Y-ra azonos kimenetet szolgáltat. Alaperedményként a szerző bebizonyítja, hogy növekedő, útfüggetlen komonoton FG-kernelek hatékonyan kikeresztezhetők, melynek következményeként kapjuk, hogy ha egy páros gráf k megadott stabil b-párosításából az egyik színosztályból mindenki a számára i-ik legjobb hozzárendelést választja, akkor stabil b-párosítást kapunk. A fenti eredmények érdekes kapcsolatokat tárnak fel a stabil párosítások és a kernelek struktúrája között, ezen rész legfontosabb eredménye azonban a stabil b-párosításoknak egy splitting tulajdonsága, amely a 3.2 alfejezetben kerül bizonyításra. Ezen eredmény segítségével a G gráf stabil b-párosításait egy alkalmas G' gráf stabil párosításaivá alakíthatjuk át hatékonyan. Sajnos ugyan ez az átalakítás nem megfordítható abban az értelemben, hogy a G'-nek nem minden stabil párosítása kapható meg ilyen módon, így algoritmikusan a stabil b-párosítások keresése nem vezethető vissza stabil párosítások keresésére, azonban a splitting konstrukció alapvető jelentőséggel bír a későbbiekben a stabil b-párosítások poliéder struktúrájának leírásakor. A 3.3 alfejezet a fenti eredmény FG-kernelekre vonatkozó általánosítását mutatja be, amely önmagában is egy szép eredmény, mely „érezhetően" alkalmazható lehet későbbi kutatásokban.

A korábban elmondottaknak megfelelően a dolgozat a 4-ik fejezettől kezdi ismertetni az első három fejezetben kidolgozott megközelítés lehetséges alkalmazásait és ettől a ponttól minden fejezet tartalmaz legalább egy különösen kiemelkedő eredményt, melyeket a következőkben külön is kihangsúlyozok és a vonatkozó tételeket vastagon kiszedve kiemelem.

A 4-ik fejezet a kernelek alkalmazását három témakörön keresztül mutatja be. A 4.1 alfejezetben az utakra vonatkozó két klasszikus gráfelméleti tétel kapcsán mutatja meg azok levezethetőségét a kernelekre vonatkozó eredményekből. A 4.2 alfejezet az élszínezési alkalmazásokba enged bepillantást. Galvin klasszikus eredménye kimondja, hogy páros multigráfok esetében a kromatikus index elegendő a lista alapú élszínezés végrehajtására (ahol minden élnek saját listája van). A szerző a fenti eredményt általánosította nempáros gráfok esetére is, amennyiben bizonyos feltételek teljesülnek. Szintén ezen alfejezetben kerül bemutatásra Galvin tételének és a páros gráfok egyenletes színezéséről szóló tételnek egy közös általánosítása, melyet a szerző Frank Andrással közösen jegyez. Mindazonáltal, a fejezet kiemelkedő eredménye az utolsó alfejezetben kerül ismertetésre a „College admission" probléma kapcsán. A stabil párosítások a tipikusan az egyetemi felvételik során felmerülő kvóták kérdését nem kezelik, amikor az egyes egyetemi szakok csak bizonyos minimális létszám elérésekor indulhatnak, illetve, amikor a szakokat indító intézmények közös kvótával is rendelkeznek. A szerző eredményei szerint a fenti problémák külön-külön is NP-teljesek, azonban fő eredményként megmutatja, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén a fenti problémák közös általánosítása is kezelhető. A 2LCSM probléma (amely a Huang által bevezetett LCSM általánosítása) esetében kvótahalmazok lamináris rendszere adott alsó és felső korlátokkal, amelyben az úgynevezett *l-u* stabil párosítások szolgáltatják a megoldást. A szerző kiváló bizonyítási eszközkészletét felhasználva mutatja be a fejezet elméletileg is nagyon szép, de a gyakorlatban is jól használható fő eredményét (***4.10 Tétel***). Bizonyításra kerül, hogy egy olyan matroid-pár konstruálható, amelynek egy kernelét megtalálva a feladat megoldása meghatározható. Ugyanis a kernel, amennyiben megfelel egy *l-u* párosításnak, abban az esetben stabil párosítás is lesz, ellenkező esetben viszont nincs az eredeti feladatnak megoldása. Végül a kernelek megtalálása mohó módszerrel a 2.2 alfejezet eredményeinek megfelelően könnyen megoldható. Ezen eredmény az egyik legszebb példája a szerző által demonstrálni kívánt megközelítésben rejlő potenciálnak, amely a problémakör mély matematika hátterének és az alkalmazásoknak a kapcsolatát hivatott feltárni.

Az 5-ik fejezetben a szerző a témakör egy fundamentális kérdésére, a stabil *b*-párosítások poliédereinek leírására szolgáltat megoldást. A stabil párosítások és általánosításai kapcsán természetesen felvetődő probléma, hogy az éleken elhelyezkedő súlyok szerinti optimális stabil párosítást keresünk. Az optimalizálás elmélet egy standard megközelítését követve ehhez a stabil párosítások poliéderének lineáris karakterizációja szolgáltathat alapot. Bár ezen a részterületen az első eredmény már 30 éve született, a szerző ezen fejezet alapját adó 2003-as publikációjáig a stabil *b*-párosítások jellemzése csak speciális esetekben volt megoldott. Az 5.1 alfejezetben bizonyított tételt (***5.4 Tétel***) annak fundamentális jelentősége mellett amiatt is a kiemelkedő eredmények közé sorolnám, mert a 3.2 részben kidolgozott kernel struktúra a lineáris karakterizációban központi szerepet játszik, ismételten alátámasztva az értekezés koncepciójának erejét. Ezen megközelítés érhető tetten az 5.2 részben is, amikor a szerző a kernel-poliéderek jellemzését adja meg.

A 6-ik fejezet egy természetes általánosítási kérdéssel, a stabil folyamok problémájával foglalkozik. A páros gráfokban a maximális párosítási probléma speciális folyamproblémaként is felírható, a két terület közötti kapcsolat alapvető jelentőségű, így jogos kérdésként merül fel, hogy a hálózati folyamoknak megadható-e olyan „stabil" általánosítása, amely speciális esetként a stabil párosításokat szolgáltatja. A szerző pozitív választ ad a kérdésre. Bevezeti a blokkoló séta fogalmát az f megengedett folyamra vonatkoztatva, amelyben a csúcsok telítetlenek (azaz a kapacitásukat a folyam nem használta ki) és a séta kezdőcsúcsán vett preferencia szerint a séta kezdőélén a folyam értéke növelhető egy nála preferenciában hátrébb levő pozitív folyamértékű él kárára. Amennyiben a hálózatot egy kereskedési hálózatként fogjuk fel, a fentiek azt jelentik, hogy a blokkoló séta instabilitást okoz, ugyanis a sétában szereplő kereskedőknek érdekükben áll a séta által generált változtatást végrehajtani. Az elmondottak alapján természetesen adódik a definíció, hogy egy folyam akkor lesz stabil, ha nincs blokkoló sétája. A stabil folyamok létezését bizonyító ***6.1 Tétel*** kétségkívül a stabil párosítások területének egy fundamentális eredménye, így ezt is mindenképp kiemelkedő tézispontként kezelném. A fejezet hátralevő részében a szerző kitér a stabil folyamok hálóelméleti tulajdonságára, valamint bemutatja eredményének az elméleti közgazdaságtanban az elmúlt években központi jelentőséggel bíró stabil ellátási láncokhoz való kapcsolódását. Ezen utóbbi kapcsolat ismételten tanúbizonyságot adja a dolgozatban szereplő elméleti eredmények potenciális alkalmazási lehetőségének.

A 7-ik, záró fejezet a stabil párosítások általános gráfokon való vizsgálatával foglalkozik. Amennyiben a gráf nem páros, akkor nem feltétlenül létezik stabil párosítása, azonban Tan klasszikus eredménye szerint úgynevezett stabil fél-párosítás igen. A fél-párosítás esetében az élekre *0*, *0.5* vagy *1* értékeket helyezünk olyan módon, hogy a csúcsra illeszkedő élek párosítási összértéke nem haladhatja meg az *1*-et. A szerző bebizonyítja, hogy Tan eredménye általánosítható hipergráfokra olyan módon, hogy garantálja stabil törtpárosítás létezését (Törtpárosításnál az élekre bármilyen nemnegatív érték elhelyezhető, de a csúcsra illeszkedő párosítási összérték nem haladhatja meg az *1*-et). A tétel bizonyítása a játékelméletből ismert Scarf lemma segítségével történik és speciális eredményként megkapjuk Tan félpárosításokra vonatkozó eredményét is. A hipergráfok vizsgálata ugyan nem tartozik a disszertáció fő irányvonalához, azonban a hipergráfok párosításának viszonylag szerényebb irodalma felveti azt a kérdést, hogy speciális hipergráfokra mondhatunk-e ennél az eredménynél többet:
- Vizsgálta-e a szerző a kérdést, hogy van-e olyan egyszerűbb hipergráf osztály, ahol a törtértékek jellemezhetőek (a hagyományos gráfokhoz hasonlóan)?

A 7-ik fejezet további részében a szerző strukturális elméleti eredményekkel megalapozva polinomiális algoritmusokat dolgoz ki a stabil *b*-párosítás és általánosításainak keresésére. Az általános gráfra Irving dolgozta ki 1985-ben az első hatékony eljárást stabil párosítások esetében. A dolgozatban ezen eljárás továbbfejlesztésével három probléma megoldására kapunk eljárást. Mindhárom eredményt a kiemelt tézispontok közé tartozónak ítélem meg. A szerző elsőként a stabil *b*-párosítások esetén fejleszti tovább Irving klasszikus módszerét a 7.3.1 alfejezetben. Minden egyes iterációban egy részgráfot konstruál, amelynek a stabil *b*-párosításai megfeleltethetők az előző iterációban kapott stabil *b*-párosításoknak. Az iteráció vagy egy stabil *b*-párosítást talál vagy a közben alkalmazott rotációs lépés eredménytelen, melyből következik, hogy nem létezik stabil *b*-párosítás. Az eredményeket a ***7.11 Tétel*** foglalja össze.

Irving algoritmusának másik gráfelméleti továbbfejlesztése a gyenge preferenciák és tiltott élek szerepét vizsgálja a 7.3.2 alfejezetben. A gyenge preferencia abból adódik, hogy az éleken részbenrendezés kerül alkalmazásra a teljes rendezés helyett. A párosítások stabilitása így különböző formát ölthet, a szerző az úgynevezett szuperstabilitást vizsgálja. Szuperstabilitás esetén az elvárás, hogy bármely él esetén valamelyik végpontján az adott élnél a preferencia szerint jobb él szerepeljen a párosításban (amennyiben az él nem része a párosításnak). A kidolgozott eljárás sémája hasonló a korábbihoz, azonban a részbenrendezés miatti különböző lehetőségek 4 eltérő transzformációs lépést tesznek lehetővé. A részletes strukturális elemzés eredményeként a szerző a ***7.12 Tétel*** keretében bizonyítja, hogy az algoritmus vagy megtalálja valamely iterációban a szuperstabil párosítást vagy strukturális igazolást nyer, hogy ilyen párosítás nem létezik. A kiemelt tézispontként kezelendő jelentős eredmény kapcsán viszont felmerül a kérdés, hogy Irving módszere nem terjeszthető-e ki szuperstabil *b*-párosítások keresésére gyenge preferenciák és tiltott élek esetében:
- Vannak-e ezzel kapcsolatos eredmények, voltak-e a szerzőnek ilyen irányú vizsgálatai?

A dolgozat utolsó fő eredményeként a 7.4 fejezetben a módszertan kernelekre való kiterjesztési lehetőségét vizsgálja. A nempáros gráfok élhalmazán definiált halmazrendszeren megadható egy általánosított kiválasztási függvény, amelyhez kapcsolódóan nemcsak a kernel fogalma, hanem a fél-kernel koncepciója is bevezethető. A kidolgozott algoritmus Tan stabil félpárosítást konstruáló és annak stabil párosításokkal való kapcsolatát igazoló módszerét követi Irving algoritmusának általánosítására. A komoly strukturális kérdéseket vizsgáló részletes algoritmus eredményeként Tan tételének általánosítását kapjuk (*7.19. Tétel*). A szerző bebizonyítja, hogy növekedő komonoton kiválasztási függvény esetén mindig létezik fél-kernel, melyet polinom időben meg is konstruál az algoritmus. Továbbá az eredményként kapott fél-kernel struktúrája alapján eldönthető a kernel létezése, amely pozitív válasz esetén hatékonyan meg is konstruálható. A fenti eredmény a stabil párosítások koncepciójának egy jelentős kiterjesztését adja, így természetszerűleg vetődik fel a kérdés, hogy a 7.19 Tétel lehetőséget ad-e a párosítások jól ismert általánosításai kapcsán (pl. matroid párosítások) hasonló összefüggések feltárására:

- Végzett-e a szerző ilyen irányú kutatásokat?

A dolgozat ezen utolsó alfejezete méltó lezárása az egész műnek; a kiválasztási függvény koncepciója, a kernelek strukturális kérdései a stabil párosítás létezésének eldöntésére vonatkozó klasszikus eljárásoknak egy nagyon mély általánosítását adják, ami lehetőséget teremt az elmélet további kiterjesztésére és hosszú távon az eredményeknek a gyakorlatba való visszacsatolására. Bár közvetlen gyakorlati hatása egyelőre nehezen mérhető, de ezen tézispontot tartom talán a legmélyebbnek és leginkább egyedinek, amely hosszú távon új kutatási irányokat nyithat meg. Az eredmény értékét a fokozat odaítélése szempontjából külön növeli, hogy egyszerzős publikáció keretében született.

Összegzés

Az értekezés a doktori művel kapcsolatos általános elvárásoknak mindenben megfelel, a szerző stabil párosításokkal és azok általánosításával kapcsolatos főbb eredményeit jól követhetően, egységes rendszerben mutatja be. Az ismertetett eredmények fontosak mind a témakör jelentőségét, mind a módszertant, mind az eredmények mélységét illetően elméleti és gyakorlati szempontból is. A szerző a nemzetközi kutatóközösség jelentős problémáira szolgáltatott megoldást (hipergráfok stabil párosításai, stabil b-párosítások poliéderének leírása, stabil b-párosítások keresése általános gráfokban, szuperstabil párosítások meghatározása gyenge preferenciák mellett), ugyanakkor fontos kutatási irányokat is megnyitott (stabil folyamok, kernel alapú struktúrák vizsgálata). A dolgozat logikusan felépített, a tézisekben megfogalmazott tudományos eredmények a szakterület rangos folyóirataiban jelentek meg.

Összefoglalóan megállapítható, hogy Fleiner Tamás kiemelkedő tudományos eredményekkel gazdagította kutatási területét, téziseit formai és tartalmi szempontból az MTA doktori szabályzatában előírtaknak megfelelően foglalta össze. A fentiek alapján javaslom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és Fleiner Tamás részére az MTA doktora cím odaítélését.

Szeged, 2019. december 12.

Krész Miklós, PhD