Bírálat **Marx Dániel** doktori érekezéséről

Marx Dániel *Gráfok felbontásai és hatásuk az algoritmikus bonyolultságra* című doktori értekezése mély és érdekes eredményeket tartalmaz mind "tisztán" matematikai (jobbára gráfelméleti és hipergráf-elméleti) témákban, mind a számítógéptudomány és a matematika határterületein: gyakran vizsgált számítási feladatok tág osztályaira ad meg hatékony algoritmusokat, és több esetben pontos karakterizációig jut el, azaz belátja, hogy az általa megadott, vagy korábban ismert algoritmusok lényegében optimálisak, vagy az azok által lefedett speciális eseteken kívül nincs is hatékonyan megoldható esete a vizsgált problémának. Természetesen ezek az alsó becslések nem abszolútak, hanem széles körben elfogadott bonyolultságelméleti hipotézisekre épülnek, nebvezetesen az *Exponential Time Hypothesisre* (ETH) vagy az *Strong Exponential Time Hypothesisre* (SETH).

Értékes, hogy a doktori értekezés nem csak a már megjelent cikkek kollekciója, hanem egy jól megírt, és akár tanításra is jól használható egységes szerkezetű munka. A disszertációban szereplő eremények úgy vannak kiválogatva Marx Dániel nagyon sok publikációja közül, hogy együtt egy téma jó körbejárását adják. A dolgozat igen jól motiválja a vizsgált problémákat, bemutatja azok szélesebb hátterét és a felhasznált bizonyítási módszerek történetét. Mindezek (amennyire egy nehéz és technikás matematikai szöveg számára ez egyáltalán lehetséges) élvezetes olvasmánnyá teszik a disszertációt. Mindezeken felül a disszertció még szerény is: több helyen hivatkozik arra, hogy egy-egy bizonyítás ötlete már egy korábbi cikkben is felhasználásra került, és csak a hivatkozási listához lapozva derül ki, hogy az a korábbi cikk Marx egy ebben a dolgoztban nem szereplő cikke volt.

A dolgozat egy bevezető után öt további fejezetből áll, ezek Marx Dániel hat publikációján alapulnak, amiből három önálló, a másik három egy vagy két társszerzővel közös. Mind a hat cikk először az elméleti számítógéptudomány legjobb konferenciáinak (*STOC, FOCS, SODA*) kötetében jelent meg, majd végleges formában is a szakterület legjobb folyairataiban (*ACM Transactions on Algorithms, Theory of Computing, SIAM J. of on Computing*) jelentek meg, illetve az egyik a *Journal of the ACM*-ben, ami az egész számítógéptudomány legjelentősebb folyóiratának tekinthető. A továbbiakban néhány szót írok az egyes fejezetek tartalmáról. A dolgozat nyelve angol, így a benne szereplő szakkifejezéseket csak akkor fordítom magyarra, ha a magyar megnevezés széles körben elterjedt.

A tree-width gráf-paraméter algoritmus-elméleti jelentősege főleg annak köszönhető, hogy a legtöbb olyan gráfelméleti számítási probléma, ami teljes átalánosságban NP-teljes, kezelhetővé válik, ha megszorítjuk olyan gráfokra, amiknek a tree-width-e kicsi. Sokat vizsgált ilyen probléma például a G gráf k-szinezhetősége ($k \geq 3$), a legnagyobb független vagy a legkisebb domináló csúcshalmaz, illetve a maximális vágás megtalálása és még több hasonló probléma. Mindezekre ismert volt olyan algoritmus, amely futási ideje $O(c^t n^k)$ alakú, ahol t a az input gráf tree-width-e, n a gráf mérete, c és k pedig konstansok. A futási idő exponenciális részét c határozza meg, így ennek csökkentése igen fontos. A dolgozat második fejezete azonban bebizonyítja, hogy a SETH-et feltéve a legjobb ismert algoritmusoknál szereplő c érték tovább nem csökkenthető a fenti problémék egyikénél sem (illetve a fejezetben még további két problémára van ugyanez belátva). Az alsó becslések mindegyikéhez a k-SAT problémát kell visszavexzetni a vizsgált döntési problémára, mint egy szokásos NP-teljességi bizonyításnál. Az extra nehézséget az adja, hogy a visszavezetést úgy kell megválasztani, hogy a kapott gráf tree-width-e minél kisebb legyen. A fejezetben szereplő összes visszavezetésnek sikerül ezt optimálisan megoldani. Természetesen a fejezetben ismertetett (és az alapjául szolgáló cikkben szereplő) hat problémánál jóval több esetben alkalmazható a Marx és társszerzői által bevezetett alsó becslési módszer. A dolgozat nyolc további cikket említ, amelyek ennek a módszernek a továbbgondolásával adnak (általában éles) alsó becsléseket más problémákra.

A dolgozat többi fejezete a Constrraint Satisfaction Problem (CSP) különböző aspektusaival foglalkozik. Ebben vátozókhoz szeretnénk egy adott véges értékkészletből értékeket rendelni úgy, hogy azok bizonyos konzisztencia-feltételeknek megfelelnek. Ezek a konzisztencia-feltételek abból állnak, hogy a változók bizonyos részhalmazaihoz (az input részeként) felsoroljuk, hogy azok azokon milyen érték-kombinációkat engedünk meg. Általában NP-teljes probléma eldönteni, hogy van-e megfelelő kiértéke a vátozóknak, de bizonyos speciális esetek mégis kezelhetőek. Egy CSP problémára jellemző az a hipergráf, aminek a változók a csúcsai és az egy-egy konzisztencia-feltételben szereplő változók alkotják az éleket. A dolgozat azt vizsgálga, hogy milyen hipergráf-osztályok esetében adható meg hatékony algoritmus a CSP megoldására.

A bináris CSP feladatokra (azaz ahol minden konzisztenci-feltétel két változót érint, így a feladathoz tartozó hipergráf egy gráf) már ismert volt korábban, hogy (egy bonyolultság-elméleti feltevés mellett) a probléma-osztály pont akkor oldható meg polinom időben, ha a megengedett gráfok tree-width-e korlátos. A harmadik fejezet azt mutatja meg, hogy az ismert polinomiális algoritmus (melyben a polinom kitevője arányos a maximális tree-width-szel) egy kitevőben szereplő logaritmikus faktortól eltekintve optimális, ha az ETH teljesül. A bizonyítási módszerek különösen érdekesek: a nagy tree-width egy nagyon érdekes, tisztán matematikai (gráf-beágyazásokkal kapcsolatos) következményén alapul a visszavezetés.

A negyedik fejezet is tisztán matematikai problémával foglalkozik, nevezetesen azzal, hogy ha csak azt ismerjük, hogy egy CSP probléma milyen vátozóhalmazokhoz és hány megengedett kombinációt ad meg (de magukat a kombinációkat nem ismerjük), akkor maximum mekkora lehet a megoldás-halmaz. Erre a problémára majdnem pontos megoldást is kapunk a *fractional edge-cover* fogalmának felhasználásával. Az ötödik fejezet ezt felhasználva bevezeti a tree-width egy hipergráfos általánosítását, a *fractional hypertree width*-et és a leszámolási eredmények egy egyszerű alkalmazásaként a fejezet megad egy polinomiális algoritmust a CSP problémára ha ez a paramétere korlátos a probléméhoz tartozó hipergráfnak. Ez a legnagyobb hipergráf-osztály, amire polinomiális algoritmus ismert. Külön érdekes, hogy ugyan a fractional hypertree width paraméter kiszámolása NP-nehéz, egy polinomiális approximációs algoritmust lehet találni hozzá, és ez szükséges is ahhoz, hogy a bemutatott CSP-algoritmus ne csak akkor működjön, ha a megfelelő fa-felbontás is adott a hipergráfhoz.

Végül az utolsó fejezet egy még nagyobb hipergáf-osztályt mutat be, amire a CSP probléma valamilyen értelemben még kezelhető. Itt már nem polinomiális idejű algoritmusokról van szó, hanem úgy nevezett *Fixed Parameter Tracktable* (FPT) algoritmusrol, azaz olyanról, ahol a futási idő egy fix polinom és a vátozók száma tetszőleges függvényének szorzata. A fejezet fő eredménye egy pontos karakterizáció: Hipergáfok egy osztályára a CSP probléma akkor és csak akkor FTP, ha egy újonnan bevezetett hipergráf paraméter (a *submodular width*) korlátos. A karakterizáció mindkét iránya mély és technikás bizonyítást követel. Az algoritmikus irány azon alapul, hogy a CSP problémát először feldaraboljuk sok homogén rész-problémára, majd majd mindegyik problémához külön-külön, a részproblémához legjobban illeszkedő fa-felbontását használjuk ugyanannak a hipergráfnak. Azaz egyetlen probléma megoldásához sok különböző fa-felbontást kell használni. Az alsó becslés technikailag még bonyolultabb, de egyben igazán tanulságos is, megmutatja, hogy a SAT probléma visszavezetéséhez hogy lehet a hipergráf egy olyan absztrakt paraméterét felhasználni, mint a submodular width. Engem ez a fejezet egyszerűen lenyűgözött a zseniális ötleteivel és a technikai mélységével.

A fentiek alapján **a legmelegebben ajánlom Marx Dánielnek az MTA doktora fokozat odaítélését**. Nem tudom, mikor olvastam utoljára ilyen erős doktori disszertációt.

Három kérdést fogalmaztam meg a dolgozattal kapcsolatban:

1. A második fejezetben szereplő valamennyi tételben a SAT problémánál csak egy paraméter szerepel. Nem lenne jobb külön kezelni a változók számát és az input hosszát? Fix k esetén a

k-SAT inputjának hossza polinomiális a változók számában (így talán ignorálható), de általános esetben nem.

2. Az adatbázis lekérdezés praktikusan felmerülő algoritmikus probléma. Van olyan eset, amikor a hatodik fejezetben szerteplő FPT algoritmus valóban jobban teljesít, mint más algoritmusok? Alkalmazzák adatbáziskezelében? Vagy a dupla-exponenciális függés a változók számától megakadályozza ezt? Egyáltalán: van arra valamiféle tapasztalat, hogy "való életből vett" adatbázis esetén az CSP probléma feldarabolására ismertetett algoritmus hány rész-problémát generál? Nem lehet, hogy tipikusan (vagy esetleg mindig) szimplán exponenciális darab elég?

3. A disszertáció utolsó oldalán több lehetőség szerepel a CSP probléma komplexitására amennyiben a hipergráf submodular width-e korlátos, de fractional hypertree-width-e nem korlátos, de nincs semmiféle sejtés megfogalmazva. Melyik eset tűnik a legvalószínűbbnek? Vannak természetesnek tűnő hipergráf-osztályok ebben a szürke zózában?

Budapest, 2020, octóber 1.

Tardos Gábor