Bírálói vélemény Marx Dániel „*Gráfok fafelbontásai és hatásuk az algoritmikus bonyolultságra*" című doktori munkájáról

----

A doktori munka egy 155 oldalas, angol nyelven írt (eredeti címe: Tree decompositions of graphs and their effect on algorithmic complexity) értekezés, amely a szerző 6 publikációján alapul. Ezek magas színvonalú nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, 3 közülük egyszerzős. A terület sajátossága, hogy a cikkek előzetes változatainak megjelenési helyei is relevánsak: mind a STOC, FOCS, vagy SODA konferenciákon szerepelt.

Az értekezés eldöntési és optimalizálási problémák algoritmikus bonyolultságát vizsgálja: az eredmények egy része hatékony algoritmusok létezését mutatja meg, a másik része pedig azt, hogy ilyenek nem léteznek. Ez utóbbi állítások bizonyos feltevések mellett érvényesek: P vs NP, FPT vs W(1), ETH, SETH, ZPP vs NP, melyek némelyike talán kevésbé ismert.

A dolgozatban központi szerepet játszanak a fafelbontás és a (korlátos) favastagság fogalmak, melyek - több más elméleti alkalmazásuk mellett – alapvető és jól ismert módon lehetővé teszik olyan problémák hatékony megoldását dinamikus programozási megközelítéssel, amelyek általában nehezek. Természetes módon a fix paraméterrel kezelhető (FPT) algoritmus fogalma is központi szerepet kap.

Az értekezés ezen gondolatok és algoritmusok több nagyságrenddel bonyolultabb és kifinomultabb változatait tartalmazzák, az ehhez szükséges új elmélet kidolgozásához is hozzájárulva, melyek a számítástudomány néhány aktuális kérdésére adnak választ.

<u>Rövid tartalmi ismertető</u>

Az *1. fejezet* általános bevezetést ad és kitűzi a fő kérdéseket: (1) A korlátos favastagság mely problémák esetén teszi lehetővé a hatékony megoldást, (2) Ilyen esetekben mi a lehető legjobb algoritmikus nyereség, amelyet elérhetünk, (3) Vajon a korlátos favastagság az egyetlen olyan gráfelméleti tulajdonság, amely csökkenti a probléma bonyolultságát?

A *2. fejezetben* (Known algorithms on graphs of bounded treewidth are probably optimal) a fő eredmény (Theorem 2.1) azt mutatja meg, hogy hat konkrét probléma esetén, melyek mindegyikére van FPT algoritmus a tw favastagsággal paraméterezve (tipikusan 2 a tw-ediken szorzóval a futási időben), a 2 helyett 2-epszilon javítás azt eredményezné, hogy az n-változós SAT feladat 2-delta az n-ediken időben megoldható lenne. Ez azonban ellentmondana a Strong Exponential Time Hypothesisnek (SETH). A bizonyítások a szokásos ravasz visszavezetési módszereket követik, azzal az extra nehézséggel, hogy a favastagságot korlátozni kell. Ennek érdekében az útvastagság fogalmát és az azzal lényegében ekvivalens Mixed Search Games jellemzést alkalmazza a szerző.

A *3. fejezetben* (Treewidth and tight bounds on the complexity of Constraint Satisfaction Problems) – majd ezután is – az ú.n. Constaint Satisfaction Problémák (CSP) kerülnek a középpontba. Ezek olyan nagyon általános eldöntési kérdések (általánosabbak, mint a SAT, vagy a gráfszínezés), melyek vizsgálata révén a bonyolultság-elmélet több része is egységesen kezelhető, néha egymástól látszólag távoli problémákra adható hatékony algoritmus (ha van ilyen). Minden CSP természetes módon definiál egy (hiper)gráfot.

A fejezet fő eredménye (Theorem 3.2) annak az igazolása, hogy egy G gráfosztályt definiáló bináris CSP család esetén csak akkor csökkenthető a feladat bonyolultsága, ha – vázlatosan fogalmazva - a G favastagsága korlátos. A bizonyítás számos új ötletet igényel: a szerző bevezeti a beágyazás mélysége fogalmat (depth of embedding) a jól ismert minor fogalom kiterjesztéseként és egy új kombinatorikus strukturális eredményt igazol (Theorem 3.5), melyhez folyamokat, szeparátorokat és lineáris programozási dualitást is használ.

A *4. fejezet* (Fractional edge covers, Constraint Satisfaction Problems, and database queries) azt az általánosabb esetet vizsgálja, amelyben a CSP már nem feltétlenül bináris. Ekkor hipergráfokkal kell dolgozni. Ismert volt, hogy korlátos hiper-favastagság esetén a megfelelő CSP feladatok polinomidőben megoldhatók. A terület egyik nyitott kérdése volt, hogy milyen egyéb esetben van hatékony megoldó algoritmus. Erre ad választ a fejezet: megmutatja, hogy korlátos tört élfedési szám esetén is van polinomiális algoritmus.

Az *5. fejezet* (Frational hypertree width) ennél is tovább megy. Bevezeti a tört hiper-favastagság fogalmát, és kimutatja, hogy korlátos tört hiper-favastagság esetén is polinomidőben megoldható a CSP feladat. Ez az eredmény (Theorem 5.7, Corollary 5.8) lényegesen megjavítja és kiterjeszti a korábbiakat. A fejezet részletesen ismerteti és igazolja az ehhez szükséges új kombinatorikus és algoritmikus eredményeket, a favastagságnál látott, de annál lényegesen bonyolultabban kivitelezhető lépésekben: kiegyensúlyozott szeparátorok, cops and robber típusú jellemzés, közelítő algoritmus a tört hiper-favastagság kiszámítására (Theorem 5.4).

A *6. fejezet* (Constraint Satisfacion Problems with unbounded arity), mely 40 oldalas, és egy egyszerzős cikkre épül, az értekezés legtechnikásabb és talán legmélyebb része. Itt a célkitűzés azon CSP feladatok pontos jellemzése, amelyekre (illetve amelyek hipergráfjaira) a feladat polinomidőben megoldható – FPT értelemben, a hipergráffal paraméterezve. Konkrétabban, a H hipergráf családot definiáló CSP feladatosztály FPT, a feladat hipergráfjával paraméterezve, akkor és csak akkor, ha H korlátos szubmoduláris vastagságú (Theorem 6.1). Mindez az Exponential Time Hypothesis (ETH) feltételezése mellett érvényes.

Az új fogalom (szubmoduláris vastagság) bevezetése és annak használata komoly kihívásokat jelent, még az eddigi igen technikás bizonyításokon is túlmutatóan, melyeket precízen és ötletesen lépésről lépésre leküzd a szerző. A tétel két irányának megfelelően egyrészt egy hatékony algoritmust dolgoz ki (a korlátos esetre), másrészt – a 3SAT feladatot használva – egy redukcióval kimutatja az ú.n. nehézségi eredményt.

Értékelés

Az értekezésben a szerző a számítástudomány, algoritmusok, adatbázisok témakörök aktuális és sokak által vizsgált problémái közül egy jól körülírt területre koncentrál és számos mély eredményt ér el. Ezek korábbi részeredményeket fejlesztenek tovább és már most jól láthatóan további kutatásokat indukáltak. Néhány fogalom és eredmény rögtön a kutatások központjába került. A feldolgozott hat cikk mindegyikére már eddig is legalább száz további munka hivatkozik, ami a terület publikációs szokásait tekintve is kiemelkedő.

A felhasznált módszerek sokszínűsége, a bizonyítások, valamint az eredmények visszhangja azt mutatják, hogy a szerző a terület elismert szakértője és egyik vezető alakja. Megjegyzendő, hogy az értekezésben nem szereplő eredményei alapján is hasonló következtetésre juthatnánk.

<u>További megjegyzések</u>

Az értekezés felépítése, nyelvezete, az eredmények felvezetése nagyon jól kimunkált, jól olvasható. A magyar nyelvű tézisfüzetre kevesebb figyelem jutott, itt sok az elírás. Bizonyos fogalmak magyar változatain még dolgozni kell majd, ha esetleg magyar nyelvű cikket is publikál a szerző. Az olvasó fülét bántja a frakcionális, klasszifikáció, korlátkielégítés fogalmak használata.

<u>Kérdések</u>

A dolgozatban végig gráfok és hipergráfok vannak a középpontban, azonban a megoldandó kérdésekhez ezek csak segédeszközök. Van-e az eredményeknek olyan következménye, amely valamely hagyományos (hiper)gráf optimalizálási feladatra ad – eddig nem ismert – hatékony algoritmust?

A CSP problémának van-e olyan változata, amely nem eldöntési, hanem optimalizációs feladat? Kapcsolódik-e a dolgozat valamely része ilyen problémákhoz?

<u>Összegzés</u>

A doktori munka tudományos eredményeit egyértelműen elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez. A nyilvános védés kitűzését javaslom.

Jordán Tibor

Budapest, 2020. augusztus 26.