

# Direkt rugóterhelésű biztonsági szelepek dinamikus viselkedése és stabilitása

Doktori mű  
a Magyar Tudományos Akadémia doktora  
tudományos cím elnyeréséért benyújtott pályázathoz

Hős Csaba János



2019. február 19.



# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>xi</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Motiváció, ipari háttér . . . . .	1
1.2. Nyomáshatároló szelepek - áttekintés . . . . .	4
1.3. A dolgozat felépítése . . . . .	6
<b>2. Matematikai modellezés</b>	<b>8</b>
2.1. Szelepmodell . . . . .	9
2.1.1. Mozgásegyenlet . . . . .	9
2.1.2. Tömegáram, átfolyási tényező . . . . .	11
2.1.3. Effektív felület . . . . .	13
2.1.4. Dimenziótlan egyenletek . . . . .	17
2.2. Tartálymodell . . . . .	17
2.3. Csőmodell . . . . .	19
2.3.1. Instacionárius Bernoulli egyenlet . . . . .	19
2.3.2. Egydimenziós instacionárius kontinuitási- és mozgásegyenlet . . . . .	20
2.4. Dimenziótlan paraméterek . . . . .	21
<b>3. Elsődleges instabilitási típusok</b>	<b>25</b>
3.1. Statikus instabilitás – "szelep ugrálás" . . . . .	26
3.2. A tartály-szelep modell viselkedése . . . . .	28
3.3. Helmholtz instabilitás . . . . .	33
3.4. Negyedhullám instabilitás . . . . .	35
3.4.1. Bevezetés . . . . .	35
3.4.2. Folyadék munkaközeg, negyedhullám módus . . . . .	36
3.4.3. Gáz munkaközeg, tetszőleges módusszám . . . . .	37
3.4.4. Stabilitás . . . . .	42
3.5. Pumpálás . . . . .	45
<b>4. Numerikus szimulációk és kísérletek</b>	<b>51</b>
4.1. Mérések folyadék munkaközeggel . . . . .	52
4.2. Gáz munkaközeg: szimulációk . . . . .	54
4.3. Tömegáram-csőhossz stabilitási diagramok . . . . .	58
4.4. Az alvízoldali nyomás hatása . . . . .	59
4.5. Nyitási és zárási instabilitás . . . . .	60
4.6. Csősúrlódás és belépési nyomáscsökkenés hatása . . . . .	61

4.7. További hatások, megjegyzések . . . . .	62
<b>5. Globális ütközéses dinamika a Tartály-Szelep Modellben</b>	<b>64</b>
5.1. Előzmények, motiváció . . . . .	64
5.2. A TSzM globális viselkedése . . . . .	66
5.3. Ütközéseket tartalmazó periodikus pályák numerikus követése . . . . .	69
5.3.1. Ütközéses periodikus pályák . . . . .	70
5.3.2. Ütközéses periodikus pályák stabilitása . . . . .	71
5.3.3. A pszeudo-ívhossz módszer . . . . .	72
5.4. Ütközéses pályák bifurkációi a TSzM-ben . . . . .	74
5.5. Shilnikov-szerű ütközéses homoklinikus pálya . . . . .	78
<b>6. Bonyolult csővezetékek: a módosított impedancia módszer</b>	<b>83</b>
6.1. Irodalmi áttekintés . . . . .	84
6.2. A módosított impedancia módszer . . . . .	85
6.3. Néhány egyszerű eset . . . . .	87
6.3.1. Fedett orgonasíp . . . . .	87
6.3.2. Mindkét végén állandó nyomású térhez kapcsolt cső . . . . .	88
6.3.3. Negyedhullám instabilitás alternatív levezetése . . . . .	88
6.4. Csőhálózat és szelep stabilitása - általános eredmények . . . . .	91
6.5. Szelep alatti vakcső és Helmholtz rezonátor hatása . . . . .	93
6.5.1. Vakcső hatása . . . . .	94
6.5.2. Helmholtz rezonátor a szelep alatt . . . . .	96
<b>7. Kitekintés</b>	<b>102</b>
<b>A. Együttlmozgó tömegek</b>	<b>M-3</b>
<b>B. Szelep mozgásegyenlete mozgó ellenőrző felület esetén - a folyadék természetes csillapítása</b>	<b>M-4</b>
<b>C. Szám adatok</b>	<b>M-8</b>
<b>D. Néhány levezetés főbb lépései</b>	<b>M-15</b>
D.1. A Tartály-Szelep Modell egyensúlyi helyzete . . . . .	M-15
D.2. Negyedhullám modell levezetése, folyadék munkaközeg, 1 módus . . . . .	M-16
D.3. Negyedhullám modell levezetése, folyadék munkaközeg, 2 módus . . . . .	M-17
D.4. Pumpálás periódusának becslése . . . . .	M-18
<b>E. Karakterisztikák módszere 1D, enyhén összenyomható közeg esetén</b>	<b>M-19</b>



<b>F. Lax-Wendroff séma</b>	<b>M-21</b>
<b>G. Mérések</b>	<b>M-23</b>
G.1. Bevezetés . . . . .	M-23
G.2. Folyadék munkaközeg . . . . .	M-23
G.2.1. A mérőberendezés leírása . . . . .	M-23
G.2.2. Mérőkör sajátfrekvencia . . . . .	M-25
G.2.3. Hullámterjedési sebesség a mérőkörben . . . . .	M-26
G.2.4. Mérési eredmények . . . . .	M-27
G.3. Gáz munkaközeg . . . . .	M-32
G.3.1. Eredmények . . . . .	M-32

**Tézisek jegyzéke**

1. tézis: Elsődleges instabilitási típusok – 50. oldal
2. tézis: Negyedhullám instabilitás kritérium – 50. oldal
3. tézis: Ütközéses periodikus pályák tartályhoz közvetlenül kapcsolt szelep esetén – 77. oldal
4. tézis: Shilnikov-szerű ütközéses homoklinikus pályák – 82. oldal
5. tézis: Módosított impedancia módszer lineáris stabilitásvizsgálatra – 101. oldal
6. tézis: Negyedhullám instabilitás tetszőleges méretű csővezetékrendszerben – 101. oldal

## Jelölések jegyzéke

### Rövidítések

API	American Petroleum Institute
BME	Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
CFD	Numerikus Áramlástan Szimuláció (Computational Fluid Dynamics)
DIERS	Design Institute for Emergency Relief Systems, IChemE
DRNyHSz	Direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelep
FDM	Folyadékdinamikai Modell, ld. 25. és M-19. oldal
GDM	Gázdinamikai Modell, ld. 25. és M-21. oldal
GPK	Gépészmérnöki Kar
HDR	Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék
HM	Helmholtz Modell, ld. 25. oldal
IChemE	Institution of Chemical Engineers
KDER	Közönséges differenciálegyenlet rendszer
NHM	Negyedhullám Modell, ld. 25. oldal
NyHSz	Nyomáshatároló szelep
Tsz	Tanszék
TSzM	Tartály-Szelep Modell, ld. 25. oldal

### Alsó és felső indexek

$\square'$	Differenciálás a dimenziótlan (szelep saját körfrekvenciájával átskálázott) $\tau$ idő szerint
$\square^T$	Transzponált
$\square_e$	Egyensúlyi állapothoz tartozó mennyiség
$\square_t$	Tartályjellemző
$\dot{\square}$	Differenciálás a $t$ fizikai idő szerint

### Dimenziótlan változók

$\alpha = \frac{\rho_e A_{cs} a}{m\omega}$	Dimenziótlan csőparaméter, –
$\beta = \frac{a_t^2 \dot{m}_n}{V_t \omega p_a}$	Dimenziótlan tartályméret, –
$\chi = \frac{\rho}{2} \frac{v_{ref}^2}{p_{ref}} \times [1, R/c_p]$	Dimenziótlan izentrópikus felgyorsulási paraméter, –, ld. (3.69) egyenlet, 39. oldal

---

$\delta = x_0/x_{ref}$	Dimenziótlan rugóelőfeszítés, –, ld. (2.22) egyenlet
$\delta^*$	Módosított rugóelőfeszítési paraméter; folyadékra $\delta^* = \delta$ , gázra $\delta^* = \delta + 1$ , –, ld. (3.53)
$\Gamma$	Terjedési állandó, –, ld. 6 fejezet, (6.124) egyenlet
$\gamma = \frac{L_{cs}\omega}{a}$	Dimenziótlan csőhossz, –
$\hat{\beta} = \beta\mu\sigma$	Módosított tartályparaméter, –, ld. (5.104). képlet
$\hat{p}$	Dimenziótlan nyomás fluktuáló komponense, –, ld. (6.118) összefüggés
$\hat{p}_d$	Dimenziótlan nyomás fluktuáló komponense az alvíz (downstream) oldalon, –, ld. (6.127), (6.123) egyenlet
$\hat{p}_u$	Dimenziótlan nyomás fluktuáló komponense a felvíz (upstream) oldalon, –, ld. (6.127)
$\hat{q}_{be} = \frac{q_{be}}{\mu\sigma}$	Módosított tömegáram paraméter, –, ld. (5.104). képlet
$\hat{v}$	Dimenziótlan áramlási sebesség fluktuáló komponense, –, ld. (6.118) összefüggés
$\hat{v}_d$	Dimenziótlan áramlási sebesség fluktuáló komponense az alvíz (downstream) oldalon, –, ld. (6.127)
$\hat{v}_u$	Dimenziótlan áramlási sebesség fluktuáló komponense a felvíz (upstream) oldalon, –, ld. (6.127)
$\hat{x} = 4x/D_{be}$	Relatív szelepnnyitás, –, ld. (2.6) egyenlet
$\text{Im}(z)$	$z$ komplex szám képzetes része
$\kappa = c_p/c_V$	Fajhőviszony, –
$\lambda$	Darcy csősúrlódási tényező, –
$\mathcal{R}$	Csősúrlódási paraméter az impedancia módszer esetében, –, ld. 6 fejezet, (6.123) összefüggés
$\mu$	Szabad paraméterek vektora, csak az 5. fejezetben, –
$\mu = \frac{A_{cs}\rho_e\omega x_{ref}}{\dot{m}_n}$	Dimenziótlan csőkeresztmetszet, –
$\Omega$	Komplex alakban ( $e^{(\Psi+i\Omega)t}$ ) keresett periodikus megoldás szögsebessége, –, ld. 6. fejezet
$\bar{p}$	Dimenziótlan nyomás időbeli átlaga, –, ld. (6.118) összefüggés
$\bar{v}$	Dimenziótlan áramlási sebesség időbeli átlaga, –, ld. (6.118) összefüggés
$\Pi$	Nyomásviszony, –, ld. (2.8) egyenlet

---

---

$\Psi$	Komplex alakban ( $e^{(\Psi+i\Omega)t}$ ) keresett periodikus megoldás burkolója, - ld. 6. fejezet
$\text{Re}(z)$	$z$ komplex szám valós része
$\sigma = \frac{\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_a)}{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}$	Dimenziótlan tömegáram paraméter, -
$\tau = \omega t$	Dimenziótlan idő, -, ld. (2.22) egyenlet
$\theta$	Szelepből kilépő folyadéksugár eltérítési szöge, radián, ld. 5. ábra a 11. oldalon
$\tilde{k}$	Szelep dimenziótlan viszkózus csillapítás, -, ld. (2.22) egyenlet
$\tilde{p} = p/p_{ref}$	Dimenziótlan nyomás, -
$\tilde{v} = v/v_{ref}$	Dimenziótlan áramlási sebesség, -
$\tilde{x} = x/x_{ref}$	Dimenziótlan szelepelmozdulás, -, ld. (2.22) egyenlet
$\varepsilon$	Kis paraméter: $\varepsilon \ll 1$ , -, ld. (6.118) összefüggés
$\varphi = \lambda \frac{x_{ref}}{2D_{cs}}$	Skálázott Darcy csősúrlódási tényező, -
$\xi$	Dimenziótlan axiális koordináta a csőhossz mentén ( $0 \leq \xi \leq L_{cs}$ ), -, ld. (2.42) egyenlet
$\zeta_{cs}$	Csővezeték veszteségtényezője, -, ld. (2.15) egyenlet
$B$	Első negyedhullám módus nyomás amplitúdó, -, ld. (3.62) egyenlet
$B_i$	$i$ -edik negyedhullám módus nyomás amplitúdó, -, ld. (3.71) egyenlet
$C$	Első negyedhullám módus sebesség amplitúdó, -, ld. (3.63) egyenlet
$C_i$	$i$ -edik negyedhullám módus sebesség amplitúdó, -, ld. (3.72) egyenlet
$M$	Mach-szám, -
$r$	Ütközési tényező, -
$Z_c$	Cső karakterisztikus impedancia, -, 6 fejezet, (6.125) egyenlet
$Z_{sz}$	Szelep karakterisztikus impedancia, -, 6 fejezet, (6.125) egyenlet

### Fizikai mennyiségek

$A_{\text{eff}}$	Effektív felület, $\text{m}^2$ , ld. 2.1.3. alfejezet 13. oldalon
$\ddot{x}$	A szeleptest axiális gyorsulása, $\text{m/s}^2$
$\dot{m}$	Tömegáram, $\text{kg/s}$ , ld. (2.4) és (2.8) egyenlet
$\dot{m}_n$	Szelep névleges tömegárama (kapacitása), $\text{kg/s}$ . A szelep teljes nyitása ( $x = x_{\text{max}}$ ) és a nyitónyomás 110%-a mellett átengedett tömegáram.
$\dot{m}_{be}$	Tartályba belépő közeg tömegárama, $\text{kg/s}$

---

$\dot{m}_{ki}$	Tartályból kilépő közeg tömegárama, kg/s
$\dot{m}_{sz}$	Szelepen átfolyó tömegáram, kg/s
$\dot{x}$	A szeleptest axiális sebessége, m/s
$\omega$	Szelep csillapítatlan sajátkörfrekvencia, rad/s
$\omega_H = a_t \sqrt{\frac{A_{cs}}{V_t L_{cs}}}$	Tartály és csővezeték Helmholtz frekvencia, rad/s
$\rho$	Sűrűség, kg/m <sup>3</sup>
$\rho^*$	Közeg sűrűsége a nyitónyomáson, kg/m <sup>3</sup>
$\rho^{**}$	Közeg sűrűsége a nyitónyomás 110%-án, kg/m <sup>3</sup>
$\rho_e$	Egyensúlyi állapothoz tartozó sűrűség, kg/m <sup>3</sup>
$\rho_t$	Közeg sűrűsége a tartályban, kg/m <sup>3</sup>
$\tilde{v}_e$	Dimenziótlan átlagsebesség a csővezeték tartály-oldali végén, –, ld. (2.29)
$a$	Hullámsebesség, m/s
$a_t$	Hullámsebesség a tartályban, m/s, ld. 4. ábra a 8. oldalon
$a_t$	Hullámsebesség a tartályban, m/s
$A_{cs}$	Csővezeték keresztmetszet, m <sup>2</sup>
$A_H$	Helmholtz-rezonátor cső keresztmetszet, m <sup>2</sup> , ld. 6.5.2 alfejezet
$A_{sz}$	A szelep átfolyási keresztmetszete, m <sup>2</sup> , ld. 5. ábra a 11. oldalon és (2.5) összefüggés.
$C_d$	Átfolyási tényező, –, ld. (2.4) és (2.8) egyenlet
$D_{be}$	Szelepülék alatti átmérő, m, ld. 2. ábra
$D_{cs}$	Felvízoldali cső átmérője, m, ld. 2. ábra
$D_{ki}$	Szelep kilépőcsonk átmérő, m, ld. 2. ábra
$E$	Folyadék rugalmassági modulus, Pa
$F_f$	Axiális irányú áramlástan eredetű erő a szeleptesten, N
$f_{cs} = a/(2L_{cs})$	Cső hidraulikai sajátfrekvencia, Hz
$f_{sz} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m}}$	Szelep (zárótest+rugó) sajátfrekvencia, Hz
$k$	Viszkózus csillapítási tényező, N/(m/s)
$L_{cs}$	Felvízoldali cső hossza, m
$L_H$	Helmholtz-rezonátor csőhossz, m, ld. 6.5.2 alfejezet
$m$	Együttlmozgó szelepalkatrészek tömege, ld. A fejezet, kg

---

---

$m_r$	Rugó tömege, ld. A melléklet, kg
$m_{sz}$	Szeleptányér és szelepszár együttes tömege, ld. A melléklet, kg
$p_0$	Légköri <i>abszolút</i> nyomás, Pa
$p_a$	Alvízoldali (szelep utáni) <i>abszolút</i> nyomás, Pa
$p_t$	Közeg <i>abszolút</i> nyomása a tartályban, Pa
$p_v$	Szeleptest alatti <i>abszolút</i> nyomás, Pa
$p_{ny}$	Szelep nyitónyomás, <i>túlnyomás</i> , Pa
$p_{sz}$	A szelep belépő csatlakozókarimájánál mért <i>abszolút</i> nyomás, Pa
$p_{t,t}$	Közeg <i>túlnyomása</i> a tartályban $p_a$ -hoz képest, Pa
$p_{v,t}$	Szeleptest alatti <i>túlnyomás</i> $p_a$ -hoz képest, Pa
$p_z$	Zárási nyomás ( <i>túlnyomás</i> ), Pa
$Q$	Térfogatáram, m <sup>3</sup> /s
$R$	Specifikus gázállandó, J/(kgK)
$s$	Rugómerevség, N/m
$s_{\text{eff}} = s - A'_{\text{eff}}(x_e)\Delta p$	Effektív rugómerevség, m, ld. (3.47) egyenlet
$v_e$	Átlagsebesség a csővezeték tartály-oldali végén (a cső <u>e</u> lején), m/s
$v_v$	Átlagsebesség a csővezeték szelep-oldali végén (a cső <u>v</u> égén), m/s
$v_{be}$	Átlagsebesség a szelep alatt, m/s, ld. 5. ábra
$V_H$	Helmholtz-rezonátor tartálytérfogat, m <sup>3</sup> , ld. 6.5.2 alfejezet
$v_{ki}$	Átlagsebesség a szelep kilépő keresztmetszetében, m/s, ld. 5. ábra
$v_{ref} = \omega x_{ref}$	Referencia sebesség, m/s
$x$	A szeleptest axiális elmozdulása, m, ld. 4. ábra a 8. oldalon
$x_0$	Rugó előfeszítés, m
$x_e$	A szeleptest egyensúlyi elmozdulása, m
$x_{max}$	Szelep maximális nyitás, m, ld. 2. ábra
$x_{ref} = A_{be}p_a/s$	Referencia elmozdulás, m

---

*"S a szeretet nem szűnik meg soha.*

*A prófétálás véget ér,  
a nyelvek elhallgatnak,  
a tudomány elenyészik."*

*1Kor, 13:8*



## Előszó

### Köszönetnyilvánítás

A jelen disszertációhoz vezető utat sokan egyengették számomra, akiknek nem tudom eléggé megköszönni, hogy mellettem álltak, tanítottak, kísérték és támogattak.

Mindenekelőtt családomnak, különösen feleségemnek köszönöm azt a biztos és szerető háttérrel, amely nélkül nem tudtam volna kutatásaimra koncentrálni. Szüleim támogatása és segítsége nélkül nem lett volna lehetőségem a tudományos pálya szép és kihívásokkal teli útján elindulni.

A budapesti Karinthy Frigyes Gimnázium nyitott, barátságos, ugyanakkor igényes közeget biztosított számomra a kamaszkor viharos fejlődése közepette. Riesz Frigyes és Bruder Györgyi matematikai tanárain és Kovács István fizikatanárom hintette el bennem a természettudományok iránti szeretet első magvait.

Kifejezhetetlen hálával tartozom a Közgáznak (ma: Budapesti Corvinus Egyetem), hogy érettségi után *nem* fogadott hallgatói közé (a történelem felvételin végképp meggyőződhettem arról, hogy a nagymennyiségű lexikális anyag memorizálását igénylő területeket kerülnöm kell), így a BME Gépészmérnöki Karán kötöttem ki, melyet a félévek előrehaladtával egyre lelkesebben látogattam.

Az BME GPK oktatói közül sokan mai napig példaképeim. Lajos Tamás professzor úr az áramlástant, Stépán Gábor professzor úr a mechanikát és a nemlineáris rezgéseket szeretette meg velem és meggyőztek arról, hogy ez a két tudományterület nagyszerűen kiegészíti egymást. Stépán professzor úrnak köszönhetem első külföldi tanulmányutamat, ami felbecsülhetetlen tapasztalatokkal és barátságokkal gazdagított. Koscsó Gábortól azt tanultam meg, hogy csak azt kérhetjük vissza fejből a hallgatótól, amit magunk is fejből adunk le a táblánál. Halász Gábortól emberi tartást és a kollégákra való odafigyelést leshettem el. Kristóf Gergely a numerikus módszerek hasznosságára, Gyurkovics Éva a szépségükre tanított meg. Bende Margit emberséges szigorúsága nélkül ma biztosan nem akadémiai pályán lennék.

Nagy hálával tartozom Kullmann Lászlónak, aki először a diplomatervig, majd a PhD dolgozatig kísért és a mai napig bármikor bekopoghatok hozzá tanácsért vagy magyarázatért. Kis túlzással, Tőle tanultam meg gondolkodva megközelíteni a műszaki problémákat (és azt is, hogy létezik egészséges lustaság). A másik meghatározó kolléga, Pandula Zoli évekig szobatársam volt és hasonló élethelyzetünkéből adódóan sok szakmai és személyes élményt megosztottunk egymással. Tőle tanultam meg többek között programozni és azt is, hogy egy Tanszéken a titkárnő és a rendszergazda a két legfontosabb ember. Zoli fájdalmasan korai halála még inkább belém égette gyakori szavajárását: "Egyszer élünk... de akkor örökké!"

A BME GPK és annak Hidrodinamikai Rendszerek Tanszéke lassan 20 éve második ott-

honom, gyakran – családom rosszallása ellenére is – a szó szoros értelmében. A Tanszék minden jelenlegi és volt kollégájának (akiket nem tudok itt egyesével felsorolni és ezért elnézést kérek) ezúton köszönöm azt a barátságos és kollegiális légkört, amiben öröm dolgozni. Reggelente, amikor a munkahelyem felé utazok, gyakran tudatosítom magamban, hogy mennyire szerencsés vagyok, hogy olyan munkatársaim vannak, akikkel szívesen vagyok együtt. Különösen köszönöm nektek, hogy a 2016/17-es tanévben átvettétek a munkámat és lehetőséget adtatok arra, hogy egy évig, kiszakadva a mindennapi taposómalomból, külföldön töltsjek és elkezdjem jelen disszertáció írását. Paál György tanszékvezető személyében egy "jó főnök"-nél többet kaptam; olyan vezetőt, akivel (legalábbis szerintem) nagyszerűen kiegészítjük egymást és őszintén kimondhatjuk a gondolatainkat. Köszönöm a BME GPK jelenlegi és korábbi vezetésének azt a támogató és segítő légkört, amellyel a fiatal munkatársak felé fordulnak.

Hálával tartozok Paál Györgynek, Kullmann Lászlónak, Vajna Zoltánnak, Hegedűs Ferencnek és Halász Gábornak, hogy észrevételeikkel és kritikájukkal segítették jelen dolgozat írását.

Last but not least, I would like to express my sincere gratitude to the Dept. of Engineering Mathematics, University of Bristol, UK, for hosting me during my visits. The impulses I experienced in Bristol were invaluable for both my professional and personal life. I am especially thankful to Alan Champneys, who crushed all my stereotypes about Brits, mathematicians and university professors at once. In him, I have found not only a great colleague, but also a mentor and a friend.

## Előzetes megjegyzések

### Tizedesvessző vagy tizedespont?

A magyar helyesírás szabályai [2] 274. pontja szerint:

*" 274. A számok írásában a tizedes törtek kezdetét vesszővel jelöljük, például: 38,6 (= harmincnegyzec egész hat tized); 1,23 (= egy egész huszonhárom század). [Vö. 293.] Az öt- vagy többjegyű számokat általában közzel (esetleg ponttal) tagoljuk a hátulról számolt hármas csoportok szerint, például: 23 816 (vagy 23.816) [vö. 291. b)]."*

A Magyar Tudomány 2001/5-ös számában Náray-Szabó László és Sztáray Bálint<sup>1</sup> tollából megjelent egy cikk, melyben kiállnak a tizedespont mellett az alábbi érvekkel.

- A jelenlegi hivatalos akadémiai helyesírási szabályzat valóban a tizedesvesszőt tekinti helyesnek, ez a szabály azonban viszonylag új keletű, először a tizedik kiadás tartalmazta. A 20. század első feléig az elfogadott írásmód szerint a tizedespont volt a helyes. Ez feltehetőleg német hatásra változott meg, és jött divatba a tizedesvessző használata. A helyesírási szabálykönyv kilencedik kiadása 1950-ben még nem szabályozza a tizedes törtek írását, de egy másik részben (az ismétlőjel ismertetésénél) szerepelnek tizedes törtek, melyeknél pontot használnak. Az 1955-ben megjelent tizedik kiadásban szerepel először a tizedesvessző mint az általánosan elterjedt szokás utólagos szentesítése.
- A tizedesvessző használata több tekintetben is előnytelen. Kétségtelen, hogy kézirásnál kényelmesebb, azonban nyomtatásban csúnyább, tizedes törtek felsorolásánál pedig különösen nehézkes, hiszen ekkor egymás után szóközök nélkül szerepel több vessző. (Ez utóbbi kiküszöbölésére - tipográfusi nyomásra - vezették be a pontosvesszők alkalmazását.)
- Fontos szempont, hogy az angolszász kultúrának a tudományra gyakorolt hatása miatt tizedesvesszőnk kellemetlen inkompatibilitást jelent. Gyakorlatilag bármilyen számítógépes programnyelvben a tizedes törtek jelölésére pontot használnak, a programok kimenetében is általában tizedespontokat találunk, csak a magyarított (és nem mindig elérhető) változatokban szerepel a tizedesvessző.
- A (magyar) beszélt nyelv pedig egyik mellett sem dönt, hiszen a némettel (comma), illetve az angollal (point) ellentétben egyikre sem utal (pl. három egész két tized).

Jelen dolgozat írója is úgy gondolja, hogy a tizedespont alkalmazása mind tipográfiai-  
lag, mind kényelmi szempontból – pl. a diagramok készítésére használt nemzetközi háttérű  
programok használata miatt – előnyösebb, ezért **a dolgozatban tizedeselvásztónak a  
pontot fogom használni**. Az ezresek csoportosítását – ahol előnyös az olvashatóság szem-  
pontjából - közzel fogom jelölni.

<sup>1</sup><http://www.matud.iif.hu/01maj/naray.html>

## Szóhasználat

A dolgozat direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelepekkel foglalkozik, de az olvashatóságot nehézkessé tenné, ha minden alkalommal precízen használnánk ezt a kifejezést. Felmerül a rövidítés (DRNyHSz) használatának lehetősége is, ám a dolgozat írása során kénytelen voltam további rövidítéseket bevezetni és nem szeretném az olvasót folyamatos "szótározásra" kényszeríteni, ezért – hacsak a szöveggörnyezetben explicit módon másra nem hivatkozom – **a "szelep" szó alatt direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelepet értek.**

## Angol és német kifejezések

A dolgozatot magyar nyelven készítettem el és a korábbi évek folyamatos angol nyelven való írása után sok örömet találtam a magyar nyelvű tudományos fogalmazásban. Azonban számos olyan kifejezés van, melyet nehézkes vagy felesleges magyarra fordítani – nem tartom szükségét annak, hogy *minden* angolszász vagy német, a tudományos nyelvben meghonosodott és világos jelentésű szónak mindenképpen magyar megfelelőt találjak. Egyik példa a "bifurcation"; melyre mára meghonosodott a "bifurkáció" kifejezés a magyar szakirodalomban. Egy másik ilyen kifejezés a "grazing bifurcation", melynek jelentése – a szakterületen – világos, ám minden próbálkozásom ellenére sem találtam "jól hangzó", kifejező magyar fordítást ("érintő bifurkáció"? "súrlódó bifurkáció"?). Harmadik példa a német "Ansatz" szó, mely alatt valamilyen előzetesen általunk definiált kiindulási pontot értünk (a fúvós hangszerek esetén pl. a megfelelő szájtartást, és hogy a művész szájjizmai erősek, kiműveltek – mivel csak ezzel az *előfeltétellel* jó és megbízható a hangszer megszólaltatása). Ugyancsak az angol megjelölést használom az arcus és hiperbolikus függvények esetén (pl. atan, tanh, stb.). Így a dolgozatban időnként keveredni fognak a magyar és az angol (ritkán német) szakkifejezések. Az arányosságot szintén a nemzetközi irodalomban elterjedt  $\propto$  szimbólummal jelölöm.

## A tudományos eredmények megosztása

Eddigi tudományos kutatásaimat mindig csoportban végeztem, vagy BSc/MSc/PhD hallgatóimmal, vagy hazai/külföldi kollégákkal. **A disszertáció gerincét adó, a személyemhez kapcsolódó publikációk szerzőinek személye, száma és sorrendje pontosan tükrözi az eredményekhez való hozzájárulás súlyát.** Ezért a dolgozat nagy részében többes szám első személyt használtam kifejezve azt, hogy a bemutatott eredmények jellemzően több személy közös erőfeszítésének gyümölcsei. Így pl. a 3.4 fejezetben bemutatott negyedhullámmódellet alap gondolatát a szerző numerikus szimulációi adták, a redukált modell már Alan Champneys-zel közös gondolkodásból származik, majd a (3.85) kritériumot először Alan Champneys vezette le, de hibásan, amit a szerző korrigált végleges formájára, majd általánosította a közölt alakra.

Ezzel szemben a téziseket egyes szám első személyben közlöm, mert ezeket saját eredménynek tekintem, nem elfelejtve azt, hogy közös munkából erednek.

### **Skalár, mátrix és vektormennyiségek**

A dolgozatban nem különböztetem meg egymástól a skalár-, vektor- és mátrixmennyiségeket (pl. vastag szedéssel vagy egyszeres/kétszeres aláhúzással). Reményeim szerint a szövegkörnyezetből egyértelműen ki fog derülni az egyes mennyiségek mérete.

### **Szoftverek**

A kutatómunka során számos ingyenesen hozzáférhető és kereskedelmi forgalomban használható szoftverrel dolgoztam. Numerikus számításokra elsősorban Matlab-ot és saját fejlesztésű C++ kódokat használtam. A Matlab eljárásokat az alapbeállításokkal használtam, ezért külön nem dokumentáltam. A saját C++ kódok főbb eljárásait az E. és az F. mellékletben közlöm. Ezeken kívül ANSYS CFX numerikus áramlástan szimulációs rendszert használtam, ennek beállításait (háló, anyagmodell, turbulenciamodell, numerikus beállítások, stb.) külön nem adom meg, hanem hivatkozom a kapcsolódó publikációkra az eredmények ismertetésekor.

# 1. Bevezetés

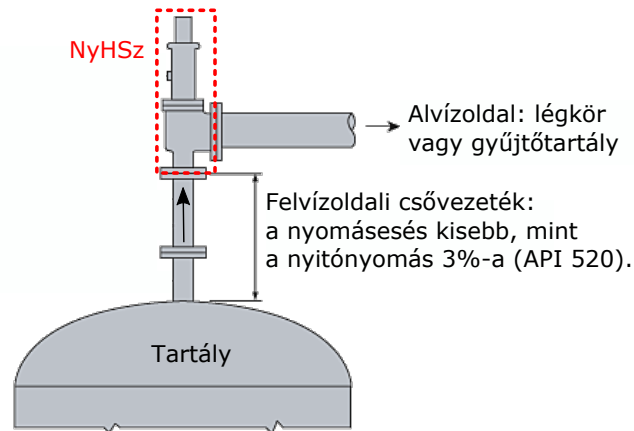
## 1.1. Motiváció, ipari háttér

A nyomáshatároló biztonsági szelepek az ipari létesítmények védelmének utolsó vonalát képviselik a túlnyomás miatt bekövetkező balesetek megelőzésében. Ha sem az automatikus rendszerfelügyelet (SCADA) rendszer, sem a diszpécserek nem képesek helyesen reagálni egy váratlan vészhelyzetre, ezek a szelepek akadályozzák meg a rendszerbeli nyomás korlátlan emelkedését – amely jellemzően robbanáshoz vezetne.

Az elmúlt harminc év számos balesetét tulajdonítják (legalábbis részben) nyomáshatároló szelepek (NyHSz) helytelen méretezésének vagy működtetésének. Számos ilyen baleset részletei megtalálhatók a US Chemical Safety Board (ld. [20]) honlapján. A komolyabb esetek közé tartozik az ún. North Sea Piper Alpha katasztrófa 1998-ban, ahol a balesetet az okozta, hogy egy kondenzátumszivattyúhoz tartozó nyomáshatároló szelepet karbantartási munkákhoz eltávolítottak, majd (adminisztrációs hiba miatt) az operátorok nem tudtak róla, hogy a szivattyút a szelep visszaszereléséig szigorúan tilos elindítani. A balesetnek 163 halálos áldozata volt. Az ún. Marcus Oil and Chemical tartályrobbanást (ami hatalmas károkat okozott Houston lakott területén) az okozta, hogy a szóban forgó tartály nem volt felszerelve nyomáshatároló szeleppel. 2003-ban a D.D. Williamson & Co. kentucky-beli telephelyén az okozott halálos áldozattal járó robbanást, hogy a NyHSz alkalmatlan volt feladata ellátására (a publikált jelentés sajnos ennél többet nem oszt meg az okokról). A 2005-ös BP Texas City olajfinomító robbanást az okozta, hogy bár a NyHSz helyes nyomáson nyitott, de az alvízoldali (NyHSz kimenő oldali) tartály hamar megtelt és a levegőnél nehezebb, robbanásveszélyes gáz került a környezetbe. A T2 Laboratories Inc. reaktív robbanást (2007) – mely 4 halálos áldozatot és 32 sérültet "eredményezett" – egy alulméretezett NyHSz okozta. Gyaníthatjuk, hogy a világ más tájain (pl. Kína, Oroszország, Japán) is számos hasonló eset történt, ám ezek leírásához – ha egyáltalán nyilvánosan elérhetőek – nyelvi okok miatt nehézkes hozzáférni.

Angolszász nyelvterületen (elsősorban az USA és az Egyesült Királyság) az American Petroleum Institute által kiadott API 520 két részből álló szabvány (ld. [4, 5]) segíti a NyHSz-ek választását, méretezését és beépítését. Az ASME, ill. az EU szabvány is nagyban támaszkodik erre a dokumentumra, ld. [7, 45], ezért ez alapján mutatjuk be a jelenleg rendelkezésre álló, az *ipari gyakorlatba beépült* tudást.

Az 1. ábra bal oldalán a BME HDR Tanszék laboratóriumában található nyomástartó edény tetejére szerelt nyomáshatároló szelep látható. Ennél az elrendezésnél az elvételi cső és a tartály között helyezkedik el a NyHSz. Az 1. ábra jobb oldalán egy másik tipikus beépítést láthatunk. A védendő tartályt és a NyHSz-et egy felvízoldali cső köti össze, melyre jellemzően a beépítési körülmények miatt van szükség (pl. nincs hely közvetlenül a tartályra szerelni a szelepet). A NyHSz kilépő (alvív) oldala lehet légkörre nyitva, vagy, veszélyes



1. ábra. Bal oldal: ipari példa NyHSz beépítésére. Jobb oldal: vázlat tipikus NyHSz elrendezésre.

és/vagy jelentős pénzügyi értékkel bíró közeg esetén az alvízoldali csővezetéken keresztül egy gyűjtőtartályba távozik a közeg.

Ezek a nyomáshatároló szelepek *instabilitásra hajlamosak*, ami alatt azt értjük, hogy bizonyos paraméterek együttállása esetén rezgések keletkeznek. Ezeket mindenképpen el kell kerülni, mivel

- azok mind hidraulikai, mind mechanikai szempontból veszélyesek,
- amennyiben a szelep rezeg, nem képes a névleges tervezési kapacitás (tömegáram) leeresztésére és
- a keletkező nagyfrekvenciás rezgés során a fémfelületek összerágódhatnak, így a szelep befeszül és egy újabb vészhelyzet esetén egyáltalán nem képes kinyitni.

Valóban, az említett [5] DIERS dokumentum foglalkozik a szelepinstabilitás kérdésével (7.2. fejezet a szabványban) és az alábbi okokat különbözteti meg (itt csak felsoroljuk ezeket, a dolgot későbbi részében a fontosabbakat részletes vizsgálatnak fogjuk alávetni<sup>2</sup>).

**Jelentős felvízoldali nyomásesés - "3% szabály".** Amennyiben a felvízoldali csővezeték túl hosszú, a csőúrlódás és egyéb nyomásvesztések miatt a szelep az áramlás felépülése után visszazár. Ezzel a jelenséggel részletesen foglalkozunk a 4.6 alfejezetben.

**Jelentős alvízoldali nyomásesés.** Ha az alvízoldal hidraulikai ellenállása jelentős, a szelepnitítás után meginduló áramlás miatt felépülő ellennyomás bezárhatja a szelepet. Ekkor a térfogatáram is megszűnik, így az alvízoldali nyomás is csökken, a szelep újra kinyit és így ciklikus nyitás-zárás alakul ki. Ezzel a jelenséggel részletesen foglalkozunk a 4.4 alfejezetben.

**Akusztikus csatolás a szelep és a felvízoldali csővezeték között.** A szabvány gondo-

<sup>2</sup>Szerzői jogi okok miatt sajnos nem tudjuk teljes terjedelmében idézni a hivatkozott szabványt.

latmenete szerint, a szelep nyitásakor a szelep felől a tartály felé egy depresszióhullám indul meg, ami onnan nyomáshullámként verődik vissza. Ha a felvázoldali csővezeték kellően rövid, ez a nyomáshullám még a szelep elemelkedésének időtartama alatt visszaér, így *segítve* a szelep nyitását<sup>3</sup>. Ám ha a felvázoldali csővezeték hosszú, a szelep visszazárhat a nyomáshullám visszaérkezése előtt és ez instabilitást okozhat. Ez a jelenség központi tárgyát képezi jelen dolgozatnak és számos alkalommal, de különösképpen a 3.4. fejezetben pontosan definiáljuk az "akusztikai instabilitás" fogalmát. Ugyanakkor már most megjegyezzük, hogy a fenti, alapvetően statikus gondolatmenettel nem értünk egyet.

**Visszakondenzáció - "Retrograde condensation".** Ha a leeresztendő közeg állapota szuperkritikus, ám a szelepnyitás miatt meginduló áramlás és nyomásesés miatt a közeg "vissza" kondenzálódik a szelepből, mind a tömegáram, mind a nyomás esni fog, ami a szelep bezárásához vezet, ahonnan újraindul a nyitás és ez rezgéshez, lengéshez vezet, ld. pl. [62]. *Jelen dolgozatban nem tárgyalunk fázisátalakulással járó jelenségeket, így ezt az esetet nem vizsgáljuk.*

**Helytelen szelepválasztás.** Ugyanazon szeleptípust gyakran alkalmaznak gáz és folyadék munkaközeg esetén is, ám a két esetben eltérő szeleptányérra és -ülékre van szükség. Ezzel az esettel nem foglalkozunk, egyszerűen kikerülhető tervezési hibának tartjuk.

**Túlméretezett szelep.** A mérnöki gyakorlatban gyakran túlméretezik a szelepet, mivel pl. bizonytalanok a leeresztendő tömegáram becsléséhez szükséges (jellemzően reakciókinetikai) paraméterek. Ezt az esetet a 3.5. fejezetben mérnöki, az 5. fejezetben pedig matematikai oldalról vizsgáljuk.

**Annak ellenére, hogy az API 520 szabvány a fenti eseteket körülírja, csupán egyetlen kézzelfogható, a gyakorló mérnökök számára is használható méretezési/ellenőrzési eljárást ad: a felvázoldali csővezeték nyomásesése nem lehet nagyobb a szelep nyitónyomásának 3%-ánál.**

Jelen dolgozat célja, hogy

- megmutassa, hogy a "3% szabály" félrevezető és, bár fizikailag megalapozott, csupán a felmerülő problémahalmaz egyetlen vékony szeletét orvosolja, ráadásul a legfontosabb, ún. negyedd hullám instabilitás előrejelzésére nem alkalmas<sup>4</sup>,
- matematikai modellek segítségével rendszerezze a lehetséges instabilitásokat és
- amennyire lehetséges, a mérnöki gyakorlatban is jól alkalmazható méretezési/ellenőrzési eljárásokat/képleteket adjon.

---

<sup>3</sup>A vízkos – angolul hydraulic ram – egy hasonló elven működő, mesterséges energiaforrás nélküli vízemelő gép.

<sup>4</sup>Az angol nyelv az ilyen látszólag jó irányba mutató, de a lényegről a figyelmet elterelő gondolat-  
ra/cselekvésre a találó "red herring" kifejezést használja. A dolgozat egyik legfontosabb állítása, hogy a "3%  
szabály" egy ilyen "red herring", mivel hamis biztonságérzetet ad a tervező mérnöknek.



## 1.2. Nyomáshatároló szelepek - áttekintés

A nyomáshatároló szelepek elsődleges célja a létesítmény védelme a nemkívánatosan magas nyomásszintek kialakulásától, melyet úgy érnek el, hogy az előre beállított (nyitó)nyomás felett kinyitnak és a felesleges folyadék- vagy gázmennyiséget elvezetik a légkörbe vagy valamilyen alvízoldali gyűjtőtartályba. A nem tervezett túlnyomás kialakulásának oka lehet például

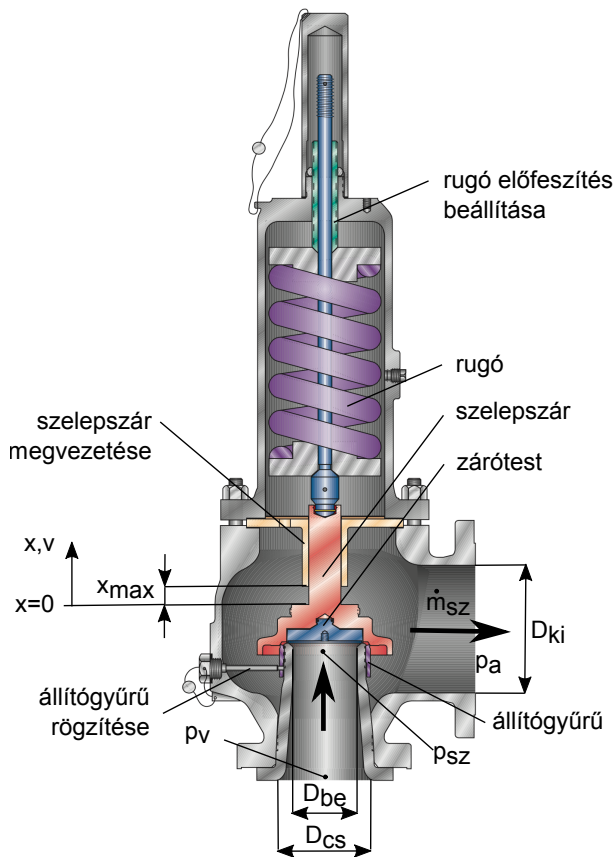
- az elvezető csőrendszer dugulása,
- külső hőforrás miatti hőtágulás (pl. napsugárzás),
- belső hőforrás miatti hőtágulás (pl. gőzfejlesztők),
- szabályzószelep vagy hűtőkör szivattyú meghibásodása vagy
- kémiai reakció termikus "megszaladása"<sup>5</sup>, jellemzően a hűtőkör kimaradása miatt.

(Természetesen itt csak néhányat soroltunk fel a hibalehetőségek tengeréből.) A nyomáshatároló szelepek legfontosabb méretezési paramétere az ún. *kapacitás*, mely az üzemszerű működés (maximális nyitás) mellett leengedhető tömeg- vagy térfogatáram. Ennek meghatározása már önmagában sem triviális feladat; gyakran például a tartályban bonyolult kémiai reakció zajlik le, aminek reakciókinetikai paraméterei – különösen a felszabaduló hő – csak becsülhetőek a tartályban uralkodó magas nyomáson és hőmérsékleten. Ilyenkor a felszabaduló hő becslésének bizonytalansága természetesen kihat a rendszernyomás adott szint alatt tartásához szükséges, a szelepen keresztül leeresztendő tömegáramra is. Az előírt tömegáram és a beavatkozási nyomás ismeretében ezután számítható a szükséges átfolyási keresztmetszet, amiből a szelep mérete és típusa meghatározható.

Szerkezeti kialakításuk szerint megkülönböztetünk üléses és tolattyús szelepeket. Előbbiek fő előnye a szivárgásmentes zárás, míg utóbbiak jóval rugalmasabb működést és precízebb, részleges nyitást tesznek lehetővé. A tolattyús kialakításnak szintén előnye, hogy a zárótestre nem axiális (rugóirányú) a rááramlás, így a folyadék impulzusváltozásából eredő erő a tervezéskor figyelmen kívül hagyható. Ezzel szemben - ahogy azt látni fogjuk a 2.1.3. fejezetben - az üléses kivitel esetén az impulzuserő további, gyakran csak körülményesen modellezhető terhelést jelent, ám egyúttal lehetővé teszi a nyitási és zárási nyomás elkülönítését. Ezt a 3. ábrán láthatjuk és a 2.1.3. fejezetben részletesen magyarázzuk.

Mivel a növekvő térfogatáramokhoz és nyomásszintekhez egyre nagyobb felületek és így erők tartoznak, nagyméretű szelepek esetén a szükséges rugó mérete és tömege nehézkessé teheti a szerelési és karbantartási munkákat, ezért gyakran a rugót ún. elővezérlő fokozattal váltják ki. Ez a megoldás ugyan számos szempontból előnyös, de bonyolultsága miatt további hibalehetőségeket visz a rendszerbe, ezért a biztonságkritikus alkalmazások jelentős részénél a vonatkozó szabvány nem is engedélyezi elővezérelt nyomáshatároló szelepek beépítését.

<sup>5</sup>angolul: thermal runaway



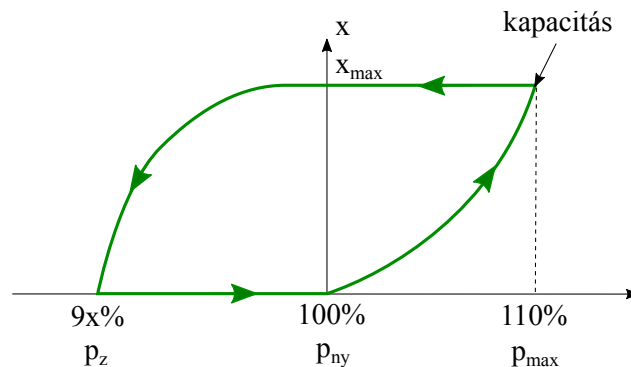
2. ábra. Direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelep (gyártó: Crosby, forrás: [43]), vö. [34] 105. ábra.

(nyitónyomás 110%-a, maximális szelepnýtás) tartozó térfogat- vagy tömegáramként definiálják. A belépő csatlakozókarimánál mért statikus nyomás  $p_v$ , a szeleptest alatti nyomás  $p_{sz}$ , míg az alvízoldali nyomást  $p_a$ -val jelöljük. A dolgozat további részében, hacsak explicit módon ennek ellentétét nem jelezzük, a  $p_{sz} \approx p_v$  közelítést elfogadhatónak tekintjük.

Jelen dolgozatban ülées kivitelű, direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelepeket vizsgálunk, melyekre az egyszerűség kedvéért "szelep"-ként hivatkozunk.

A direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelepek (DRNyHSz) egyszerű kialakításúak, ahogy az a 2. ábrán is látható. A zárótestet a szelepszáron keresztül egy változtatható előfeszítésű rugó szorítja a szeleplékre. A szeleplék átmérője  $D_{be}$ , ami jellemzően kisebb, mint a felvízoldali csővezeték  $D_{cs}$  csatlakozó átmérője. Gázok esetén a kilépő csatlakozóméret  $D_{ki}$  tipikusan nagyobb a felvízoldali csővezeték méreténél, az expanzió miatti sűrűségcsökkenés ellensúlyozására. A szelep alatt található egy ún. állítógyűrű is, amely a szelep "finomhangolására" szolgál: ennek segítségével a zárási nyomást állíthatjuk be.

A zárótest maximális elmozdulása  $x_{max}$ , melyet jellemzően a  $p_{ny}$  nyitónyomás 110%-ánál ér el. A szelep fő méretezési paraméterét, a kapacitást is az ehhez az állapothoz



3. ábra. Direkt rugóterhelésű nyomáshatároló szelep karakterisztikája, vö. [34] 122. ábra.

A szelep  $p_{ny}$  nyitónyomása a rugó előfeszítésével állítható be, azonban a  $p_z$  zárési nyomás (angolul "reseat pressure") jellemzően kisebb a nyitónyomásnál, ld. 3. ábra. Itt a  $9x\%$  azt jelenti, hogy a zárési nyomás jellemzően nagyobb, mint a nyitónyomás  $90\%$ -a (bár egyes esetekben akár a  $80\%$ -s is lehet), de konkrét értéke erősen függ az alkalmazási területtől és a megrendelőtől. Ez a "hiszterézis" azért szükséges, mert a nyitó- és zárónyomás egybeesése bizonytalan szelepműködést (többszöri nyitás-zárást) eredményezne. A  $p_z < p_{ny}$  követelmény a már nyitott szelepen fellépő impulzuserő kihasználásával érhető el; a 2.1.3. alfejezet részletesen foglalkozik a kérdéssel. A zárónyomás finombeállítására szolgál az ún. állítógyűrű (adjustment ring), mely egy, az ülék külső kerületéhez menetesen csatlakozó, axiális irányban mozgatható fojtógyűrű, ennek hatására láthatunk példát a 9. táblázatban (M-24. oldal). Ez természetesen nyitáskor hatástalan és csak záráskor érezhető hatása, ám a szelep jelleggörbáját nagyban befolyásolja.

Ezek a nyomáshatároló szelepek gyakran csővezetéken keresztül kapcsolódnak a védendő tartályra és a kilépő oldalon is csővezetékrendszer gyűjti össze a leengedett közeget. Az áramlástanban megszokott módon, az (áramlási irányból nézve) szelep előtti csővezetékét *felvízoldalinak* ("upstream"), míg a szelep utáni vezetékét *alvízoldalinak* ("downstream") fogjuk nevezni.

### 1.3. A dolgozat felépítése

A 2. fejezetben (8. oldal) az egyes rendszerlemek matematikai-fizikai modelljét ismertetjük: először a szelepét (2.1. fejezet), utána a tartályét (2.2. fejezet), végül a csődinamika leírására a 2.3. fejezetben (19. oldal) több modellt is mutatunk. Nagy súlyt fogunk helyezni arra, hogy a későbbi vizsgálatokat megkönnyítő dimenziótlan mennyiségeket vezessünk be.

A 3. fejezetben (25. oldal) ezen modellek segítségével azonosítjuk az ún. elsődleges instabilitási típusokat, melyek a lehető legegyszerűbb, egyetlen egyenes felvízoldali csővezetékéből, tartályból és szelepből álló rendszerben jelentkezhetnek. Ezeket tekinthetjük "steril" vagy "elemi" instabilitásoknak, melyek, bár hasznosak a rendszer viselkedésének minőségi megértése szempontjából, a mérnöki gyakorlatban ritkán jelentkeznek önmagukban.

Az ipari alkalmazásokhoz közeledve, ezen elsődleges instabilitásokból összeálló "kevert" instabilitásokat, valamint a mérési és szimulációs eredmények összevetését mutatja be a 4. fejezet (51. oldal).

Az 5. fejezet (64. oldal) kissé elüt a többi fejezettől, mivel ebben egy meglehetősen technikai témakört tárgyalunk: az ún. Tartály-szelep modell dimenziótlan alakját vizsgáljuk, amely egy 3 egyenletből álló nemlineáris hibrid dinamikai rendszer, ahol a "hibrid" kifejezés arra utal, hogy egy folytonos közönséges differenciálegyenlet (szelepdinamika) és egy leképezés (ütközés) alkotja azt (ld. [26]). Annak ellenére, hogy a leíró egyenletek meglehetősen egyszerűek, az ütközéses dinamika meglepően gazdag és érdekes, a folytonos dinamikai

rendszerektől jelentősen eltérő, numerikus szempontból komoly kihívásokat támasztó megoldásokat hív életre. Ez a fejezet azt mutatja be, hogy milyen módszerek segítségével tudunk egy ilyen hibrid rendszert minőségileg vizsgálni, ill. hogyan számíthatók ki hatékonyan az ütközéseket is tartalmazó periodikus pályák.

A 6. fejezetben (83. oldal) az ún. hidraulikus impedanciák módszeréből kiindulva egy általános módszert adunk bonyolult csővezeték és egy szelep lineáris stabilitásának vizsgálatára, ill. egy mérnöki szempontból egyszerű módszert mutatunk az akusztikai (ún. negyedhullám-instabilitás) kimutatására tetszőleges méretű hálózatban.

Végül, a 7. fejezetben (102) összefoglaljuk az eredményeket és javaslatot teszünk a jövőbeli kutatások irányára.

## 2. Matematikai modellezés

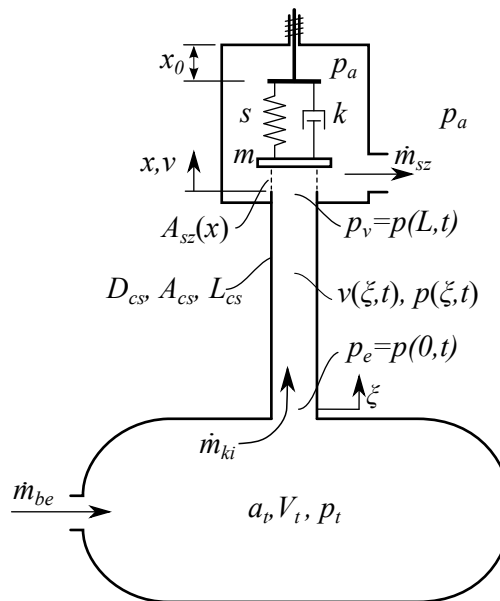
A dolgozatban alkalmazott vizsgálati módszer első lépése a matematikai modell megalkotása, a legfontosabb fizikai hatások azonosítása és a modell egyszerűsítése, majd ezen redukált modell vizsgálata. Ennek során minél egyszerűbb, lehetőleg zárt alakban megadható kritériumokat keresünk a rezgések vagy lengések előrejelzésére. A modellalkotás dilemmája abban áll, hogy a pontos modellek szükségszerűen bonyolultak és nagy erőforrásokat igényelnek, míg az egyszerűbb modellek gyakran nem kielégítő pontosságúak.

Bár manapság mindennaposak a több (tíz)millió elemet tartalmazó numerikus áramlástan (CFD) modellek és valóban, ez a megközelítés soha nem látott részletességgel és pontossággal teszi lehetővé az áramlástan jelenségek leírását, erőforrásigénye miatt nem alkalmas széles paramétertartományokon való *minőségi* vizsgálatra. A CFD szimulációk alapvetően egy-egy konkrét eset (szelep, rendszer, stb.) nagy pontosságú, *mennyiségi* leírására alkalmasak.

Ezzel szemben itt elsődleges célunk az instabilitási jelenségek *minőségi* leírása, megértése, a pontosság feláldozásával. Természetesen a kapott modelleknek alkalmasnak kell lenniük a valóságban megfigyelt jelenségek előrejelzésére (prediktív modellek), de legalább ennyire fontosnak tartjuk, hogy a kapott összefüggések könnyen átlátható módon mutassák az egyes paraméterek hatását és elősegítsék a fizikai folyamatok szétválasztását és megértését.

Ebben és a következő fejezetben a 4. ábrán látható, egyetlen tartályból és szelepből álló rendszert vizsgáljuk, melyek között egyetlen egyenes, állandó átmérőjű cső helyezkedik el. Amint azt látni fogjuk, már ez a modell is igen gazdag dinamikai tulajdonságokkal rendelkezik és lehetővé teszi a legfontosabb instabilitások azonosítását.

A fejezet a következő részekből áll. A 2.1. alfejezetben (9. oldal) ismertetjük a szeleppmodell, utána a tartálydinamikát leíró egyenleteket (2.2. fejezet, 17. oldal) ill. a csőmodell (2.3. fejezet, 19. oldal). A leíró egyenleteket dimenziótlan alakra hozzuk és a kapott paraméterek nagyságrendjét a 2.4. fejezetben (21. oldal) becsüljük meg.



4. ábra. A vizsgált rendszer sematikus elrendezése, vö. 1. és 2. ábra.

## 2.1. Szeleptestmodell

### 2.1.1. Mozgásegyenlet

A szeleptest, a szelepszár és a rugó egyszabadságfokú lengőrendszert alkot, melynek mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + s(x + x_0) = F_f := A_{\text{eff}}(x)(p_v - p_a) \quad (2.1)$$

alakban írható, ahol  $m$  az együttmozgó testek<sup>6</sup> tömege,  $x$ ,  $\dot{x}$  és  $\ddot{x}$  a szelep elmozdulása, sebessége és gyorsulása,  $k$  a viszkózus csillapítási tényező,  $x_0$  a rugó előfeszítése.  $F_f$  a szeleptestre ható áramlástan eredetű erő, melyet az  $A_{\text{eff}}$  ún. effektív felület segítségével írunk le (részletesen ld. 2.1.3 fejezet).  $p_{v(\acute{e}ge)}$  jelöli a cső szelep-oldali nyomását (a cső tartály-felőli oldalán  $p_{e(leje)}$  a nyomás), praktikusán a csatlakozókarimánál mérve, és  $p_a$  a szelep utáni, alvíz oldali nyomás. Az egyes mennyiségeket jelöltük a 4. ábrán (8. oldal).

Az  $m$  "együttmozgó tömeg" alatt a szelep és a szelepszár tömegének, valamint a rugótömeg harmadának összegét értjük. Ebből csak a rugótömeg szorul magyarázatra; amint azt az A. mellékletben (M-3. oldal) részletesen megmutatjuk, a rugó mentén lineáris sebességeloszlást feltételezve a rugó kinetikus energiájával egyenértékű egy harmadakkora tömegű, a szeleptest sebességével merevtest-szerűen mozgó test kinetikus energiája.

A  $k$  viszkózus csillapítási tényezővel kapcsolatban fontos kihangsúlyozni, hogy a vonatkozó szabványok (pl. API 520) kifejezetten tiltják mesterséges csillapítás hozzáadását (a szelep nyitási idejének minimalizálása érdekében), így ezek a lengőrendszerek tipikusan gyengén csillapítottak. A dolgozat jelentős részében – hacsak más adatot nem közlünk – a  $k = 0$  feltételezéssel fogunk élni, ami egyúttal pesszimista (konzervatív) becslést ad a szelep stabilitásával kapcsolatban, hiszen a nem modellezett, de kikerülhetetlenül jelenlévő természetes csillapítási hatások (ld. a B. melléklet az M-4. oldalon) javítani fogják a szelep stabilitási tulajdonságait.

Az  $A_{\text{eff}}(x)$  effektív felület *definíció szerint* a szelepszáron mérhető axiális áramlástan eredetű erő adott  $x$  statikus szelepnyitás ( $\dot{x} = 0$ ) és  $p_v - p_a$  nyomásesés esetén, osztva a szelepen mérhető<sup>7</sup> statikus nyomáskülönbséggel. Így tehát nem választjuk szét a nyomáseloszlásból, az áramló közeg impulzusváltozásából és a csúsztatófeszültség-eloszlásból származó erőkomponenseket, mint pl. [66, 78, 55, 18, 68, 21, 3] vagy [HCs3]. Ez a leírás ugyan elnagyoltnak tűnhet, de gyakorlati szempontból jól alkalmazható és nagyban leegyszerűsíti az áramlástan eredetű erők modellezését, például nincs szükség a szelep belső elrendezésének, geometriájának részletes vizsgálatára és a  $p_{sz}$  nehezen mérhető nyomásra (ld. 2. ábra). Hátránya, hogy az  $A_{\text{eff}}(x)$  görbe meghatározása méréseket és/vagy numerikus szimulációt igényel, ugyanakkor a kísérletek során könnyen, közvetlenül mérhető mennyiségeket (erő, és elmozdulás) kell

<sup>6</sup>Részletes magyarázat az A. mellékletben, az M-3. oldalon található.

<sup>7</sup>Precízen: a szelep csatlakozókarimának keresztmetszetében.

mérnünk, ellentétben pl. Darby [21] modelljével, melyben a szelepnitítás függvényében a folyadék kilépési szöge *bemenő* adat a modellben. Az effektív felület kérdésével részletesen foglalkozunk a 2.1.3. fejezetben, itt annyit hangsúlyozunk, hogy ez a görbe az esetek többségében kellő pontossággal leírható pusztán a szelepnitítás függvényében és a nyomáskülönbség hatása másodlagos.

Ahogy azt már az 1.2. részben leírtuk, a szelepnek egy előre beállított  $p_{ny}$  nyitónyomáson kell nyitnia, ekkor (mivel  $x \equiv 0$ ,  $\dot{x} \equiv 0$  és  $\ddot{x} \equiv 0$ )

$$sx_0 = A_{\text{eff}}(0) (p_0 + p_{ny} - p_a), \quad (2.2)$$

ahol  $p_0$  a légköri nyomás (mivel  $p_{ny}$  definíció szerint túlnyomás) és  $p_a$  pedig az alvízoldali abszolút nyomás (ld. 2. ábra, 5. oldal). Bár gyakran teljesül, hogy az alvízoldal a légkörre van nyitva, ( $p_a = p_0$ ), azonban azokban az esetekben, amikor (a) az alvízoldalon hosszabb gyűjtőcsővezeték található és ebben a súrlódási veszteségek miatt nyomáskülönbség épül fel vagy (b) az alvízoldalon gyűjtőtartály található, melynek nyomása nem állandó, a  $p_a = p_0$  feltételezés nem teljesül, ezért a  $p_a$  és  $p_0$  nyomások közötti megkülönböztetést megtartjuk.

Természetesen növekvő  $p_v$  bemenő nyomásokhoz növekvő szelepnitítás tartozik és ezek a szelepek tipikusan olyan kialakításúak, hogy a nyitónyomás 110%-ánál érik el az  $x_{max}$  maximális nyitást, tehát

$$s(x_0 + x_{max}) = A_{\text{eff}}(x_{max}) (p_0 + 1.1 \times p_{ny} - p_a). \quad (2.3)$$

A szelep  $\dot{m}_n$  névleges tömegáramát, *kapacitását* is ehhez az állapothoz kötjük; tehát azt a tömegáramot nevezzük kapacitásnak, mely a maximális nyitáshoz és a nyitónyomás 110%-ához tartozó szelep-nyomáshoz, valamint légköri alvízoldali ( $p_a = p_0$ ) nyomáshoz tartozik.

*Jelen dolgozatban a gravitációs erőteret elhanyagoljuk*, mivel vízszintes szeleptengelyű beépítés esetén nem játszik szerepet, függőleges beépítés esetén pedig az előfeszítés korrigálásával könnyedén figyelembe vehető. Jelölje ugyanis  $m_{sz}$  azon mozgó alkatrészek tömegét, melyekre hat a gravitáció, ekkor

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + s(x + x_0) = A_{\text{eff}}(x) (p_v - p_a) - m_{sz}g, \quad \text{ahonnan}$$

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + s \left( x + \underbrace{\left( x_0 + \frac{m_{sz}g}{s} \right)}_{\hat{x}_0} \right) = A_{\text{eff}}(x) (p_v - p_a),$$

így a (2.1) alakra vezettük vissza a mozgásegyenletet. A fenti összefüggésben az  $m_{sz}$  és az  $m$  tömegek közötti megkülönböztetést részletesen taglaljuk a az A. mellékletben az M-3. oldalon.

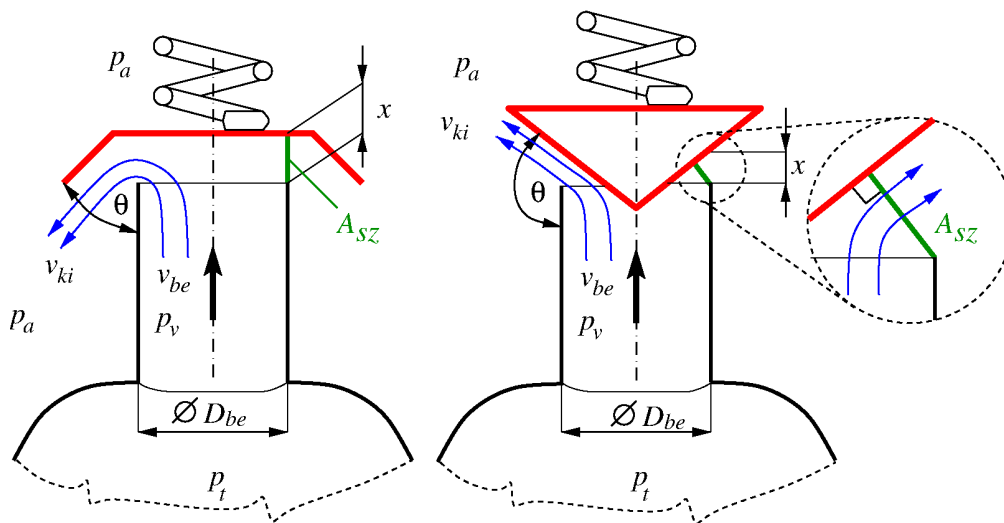
### 2.1.2. Tömegáram, átfolyási tényező

A szelepen átáramló tömegáram számítására az irodalomban szokásos, széles körben alkalmazott összefüggéseket fogjuk használni. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a szeleptányér alatti keresztmetszet megegyezik a csatlakozó csővezeték keresztmetszetével:  $D_{be} \approx D_{cs}$  (ld. 2. ábra), ennek jogosságát majd a későbbiekben ellenőrizzük.

**Összenyomhatatlan** közeg esetén az átáramló mennyiség (ld. [70] 6.3.4. fejezet, jelen dolgozat jelöléseit használva) az

$$\dot{m}_{sz} = C_d A_{sz} \sqrt{2\rho(p_v - p_a)}, \quad (2.4)$$

képlet segítségével számítható, ahol  $C_d$  az átfolyási tényező<sup>8</sup>,  $A_{sz}$  az átfolyási (vagy vonatkoztatási) keresztmetszet,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $p_v$  a felvív oldali,  $p_a$  pedig az alvív oldali abszolút nyomás ( $p_a \leq p_v$ ). Az átfolyási tényező tartalmazza a szelep kilépő oldali, a szelepházban kialakuló áramlástechnikai veszteségeit is.



5. ábra. Szelepgeometria és  $\theta$  kilépési szög tányérszelep (bal oldal) és kúpos zárótest (jobb oldal) esetén.

Az  $A_{sz}$  átfolyási keresztmetszet a szelep geometriájának és az  $x$  szelepnitásnak függvénye. Ezt a felületet a szeleptest és a csővezeték közötti legszűkebb átáramlási felületként definiáljuk. Amint az 5. ábra bal és jobb oldalán látható,

$$A_{sz}(x) := \mathcal{A} D_{be} \pi x, \quad \text{ahol} \quad \begin{cases} \mathcal{A} = 1 & \text{tányérszelep esetén és} \\ \mathcal{A} = \left(1 + \frac{4x}{D_{be}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{4}\right) \sin \theta & \text{kúpos szeleptest esetén.} \end{cases} \quad (2.5)$$

<sup>8</sup>Ez a jelölés az angol "discharge coefficient" rövidítése és szelepekkel foglalkozó szakirodalomban elterjedt, ld. pl. [81, 47]. Nem keverendő össze az ellenállástényezővel (drag coefficient), melynek szokásos jelölése szintén  $C_d$ , de ezt a mennyiséget ebben a dolgozatban nem használunk.



Tényérszelepek ( $A_{sz} = D_{be}\pi x$ ) esetén csak az  $x < D_{be}/4$  tartományban igaz, hogy a legszűkebb keresztmetszet valóban a szelep alatti, előzőekben  $A_{sz}$ -el jelölt felület, hiszen nagyobb szelepnyitások esetén a cső keresztmetszete lesz a legszűkebb átáramlási felület (a  $D_{be}\pi x = D_{be}^2\pi/4$  egyenlőség ekkor áll fenn). Ennek megfelelően – ahogy az a C. mellékletben (M-8. oldal) összegyűjtött adatokból is látszik – a gyártók jellemzően  $x_{max} \approx D_{be}/4$ -ben maximálják a szelepnyitást, mi pedig bevezetjük az

$$\hat{x} = \frac{4x}{D_{be}} \quad (2.6)$$

*relatív* szelepnyitás fogalmát. A továbbiakban gyakran fogunk százalékos nyitásról beszélni ( $\hat{x} = 100\%$  a teljesen nyitott állapot), ill. a könnyebb olvashatóság kedvéért használni fogjuk az  $x/x_{max}$  jelölést is ugyanerre a mennyiségre.

**Összenyomható** közeg esetén szét kell választanunk a kritikus nyomásviszony alatti (fojtott) és feletti (nem fojtott) esetet. A kritikus nyomásviszonyt, amelynél a gázsebesség a fojtási keresztmetszetben eléri a helyi hangsebességet, a

$$\Pi_{krit} = \left. \frac{p_a}{p_v} \right|_{krit.} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (2.7)$$

összefüggéssel számíthatjuk, ahol  $\kappa = c_p/c_v$  a fajhőviszony. Kritikus nyomásviszony feletti (nem fojtott,  $\Pi_{krit} \leq \Pi \leq 1$ ) esetben kapjuk, hogy

$$\dot{m}_{sz} = C_d A_{sz}(x) \sqrt{2\rho_v p_v} \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left( \Pi^{\frac{2}{\kappa}} - \Pi^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)}, \quad (2.8)$$

melyet Saint Venant – Wenzel formulának is nevezek, ld. pl. [84, 29]. A fojtott esetre ( $\Pi \leq \Pi_{krit}$ ) az

$$\dot{m}_{sz} = C_d A_{sz}(x) \sqrt{2\rho_v p_v} \sqrt{\frac{\kappa}{2} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} \quad (2.9)$$

kifejezés adódik. Mivel a fojtott esetben a közeg sebessége eléri a hangsebességet a legszűkebb keresztmetszetben, az alvízoldalról nem tud információ visszaterjedni a fojtási keresztmetszetbe, ezért az  $p_a$  alvízoldali nyomás nem szerepel az összefüggésben.

*Jelen dolgozatban gáz munkaközeg esetén olyan alkalmazásokat vizsgálunk, ahol a szelepen folyamatosan fojtott áramlás alakul ki (az esetleges dinamikus jelenségek közben is).*

A két fenti eset (összenyomhatatlan ill. összenyomható, fojtott) formálisan együtt kezelhető:

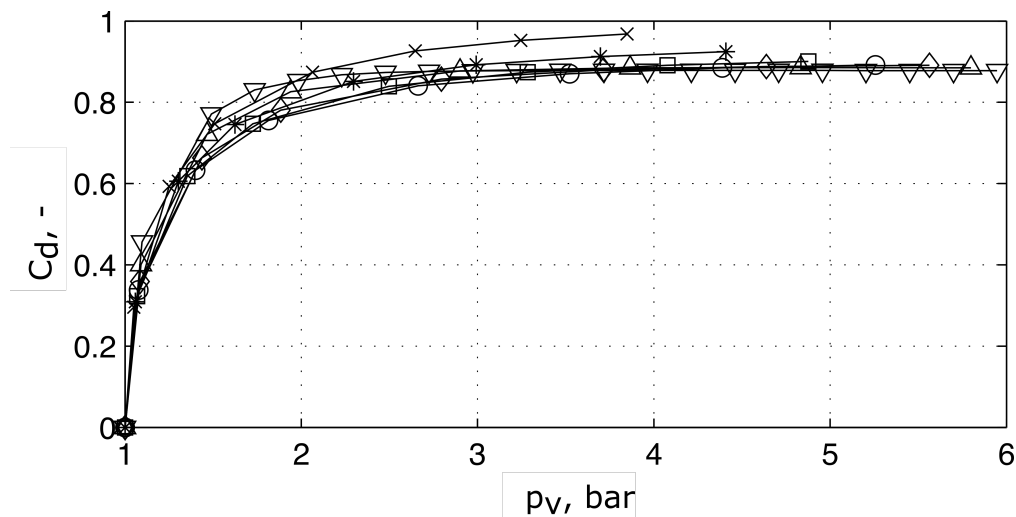
$$\dot{m}_{sz} = C_d A_{sz}(x) c_1 \sqrt{\rho_v p_v^*}, \quad (2.10)$$

ahol  $A_{sz} = \mathcal{A} D_{be} \pi x$  a szeleptányér alatti átáramlási keresztmetszet, és

**összenyomhatatlan közegek** esetén  $\rho_v$  a közeg (konstans) sűrűsége,  $p_v^* = p_v - p_a$  és  $c_1 = \sqrt{2}$ , ill.

**összenyomható közegek** esetén  $\rho_v$  a közeg sűrűsége a szelep alatt,  $p_v^* = p_v$  a szelep alatti nyomás és  $c_1 = \sqrt{\kappa \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$ . Levegő ( $\kappa = 1.4$ ) esetén  $c_1 = 0.6848$ .

Végül térjünk ki a  $C_d$  átfolyási tényező kérdésére, mely méréssel vagy numerikus szimulációval határozható meg. A 6. ábrán egy tipikus példát láthatunk tányérszelep átfolyási tényezőre a  $p_v$  felvázoldali nyomás függvényében ( $p_a = p_0$  légköri alvázoldali nyomás esetében), levegőre. (További részletek a [HCs4] irodalomban találhatóak). Figyelemre méltó, hogy a vizsgált  $0.2 \leq \hat{x} \leq 1.4$  tartományban az átfolyási tényező jó közelítéssel csak a nyomás függvénye és az egyes szelepnnyitásokra meghatározott görbék egybeesnek. A dolgozat további részében az átfolyási tényezőt adottnak tekintjük és sok esetben az adott nyomástartományban (a nyitónyomás 90...110%-a) vett átlagával közelítjük.



6. ábra. Átfolyási tényező ( $\nabla$ :  $\hat{x} = 0.20$ ,  $\triangle$ :  $\hat{x} = 0.40$ ,  $\diamond$ :  $\hat{x} = 0.60$ ,  $\circ$ :  $\hat{x} = 0.80$ ,  $\square$ :  $\hat{x} = 1.00$ ,  $*$ :  $\hat{x} = 1.20$ ,  $\times$ :  $\hat{x} = 1.40$ ).

### 2.1.3. Effektív felület

A (2.1)-ben szereplő  $A_{\text{eff}}$  effektív felület *definíció szerint* a szeleptestre ható axiális (szelepszár irányú) áramlástanai eredetű  $F_{f(\text{fluid})}$  erő osztva a szelepen létrejövő statikus nyomáseséssel, azaz

$$A_{\text{eff}} := \frac{F_f}{p_v - p_a}. \quad (2.11)$$

Ahogy már korábban említettük, ez a megközelítés könnyen mérhető (vagy CFD számításokból egyszerűen kinyerhető) mennyiségeket tartalmaz, ellentétben a szakirodalomban található egyéb definíciókkal, melyek pl. a szeleptestről leváló szabadsugar szögét tekintik bemenő adatnak (pl. [21]).

A (2.11) egyenlet által definiált erőmodell *statikus*, azaz nem veszi figyelembe a szelep mozgása közben kialakuló dinamikus erőhatásokat. A B mellékletben (M-4. oldal) becslést adunk a dinamikus erőre egy egyszerű geometria esetén. Ezen kívül megjegyezzük, hogy a nemzetközi szakirodalomban is (ld. pl. [22, 54, 12, 46]) kvázistatikus áramlástanai erőmodellt szokás alkalmazni és a 4.2. fejezetben magunk is demonstrálni fogjuk ezen megközelítés pontosságát, különösen a 19. ábrán (55. oldal).

Visszatérve az  $A_{\text{eff}}$  effektív felülethez, tekintsük újra az 5. ábrát, mely a szeleptest környezetét ábrázolja: a csővezeték felől  $v_{be}$  átlagsebességgel érkező közeg a csőtengelyhez képest  $\theta$  iránytörést szenved el, miközben a kilépési keresztmetszetben az átlagsebesség  $v_{ki}$ .

Bár a későbbiekben jellemzően mérésrel vagy CFD szimulációval meghatározott effektív felületeket fogunk használni, egyszerű analitikus módszerekkel is minőségileg helyes becslés adható az  $A_{\text{eff}}(x)$  görbe alakjára nézve. **Összenyomhatatlan közeget** feltételezve, az impulzustétel alkalmazásával és az ellenőrző térfogat elmozdulását elhanyagolva, a szeleptestre ható  $F_f$  reakcióerőre kapjuk, hogy

$$F_f = A_{be} (p_v - p_a) + \rho Q (v_{be} + v_{ki} \cos \theta), \quad (2.12)$$

ahol  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $Q$  pedig a térfogatáram. Mivel  $Q = A_{be} v_{be} = A_{sz} v_{ki}$ , és a szelepen átáramló közeg a

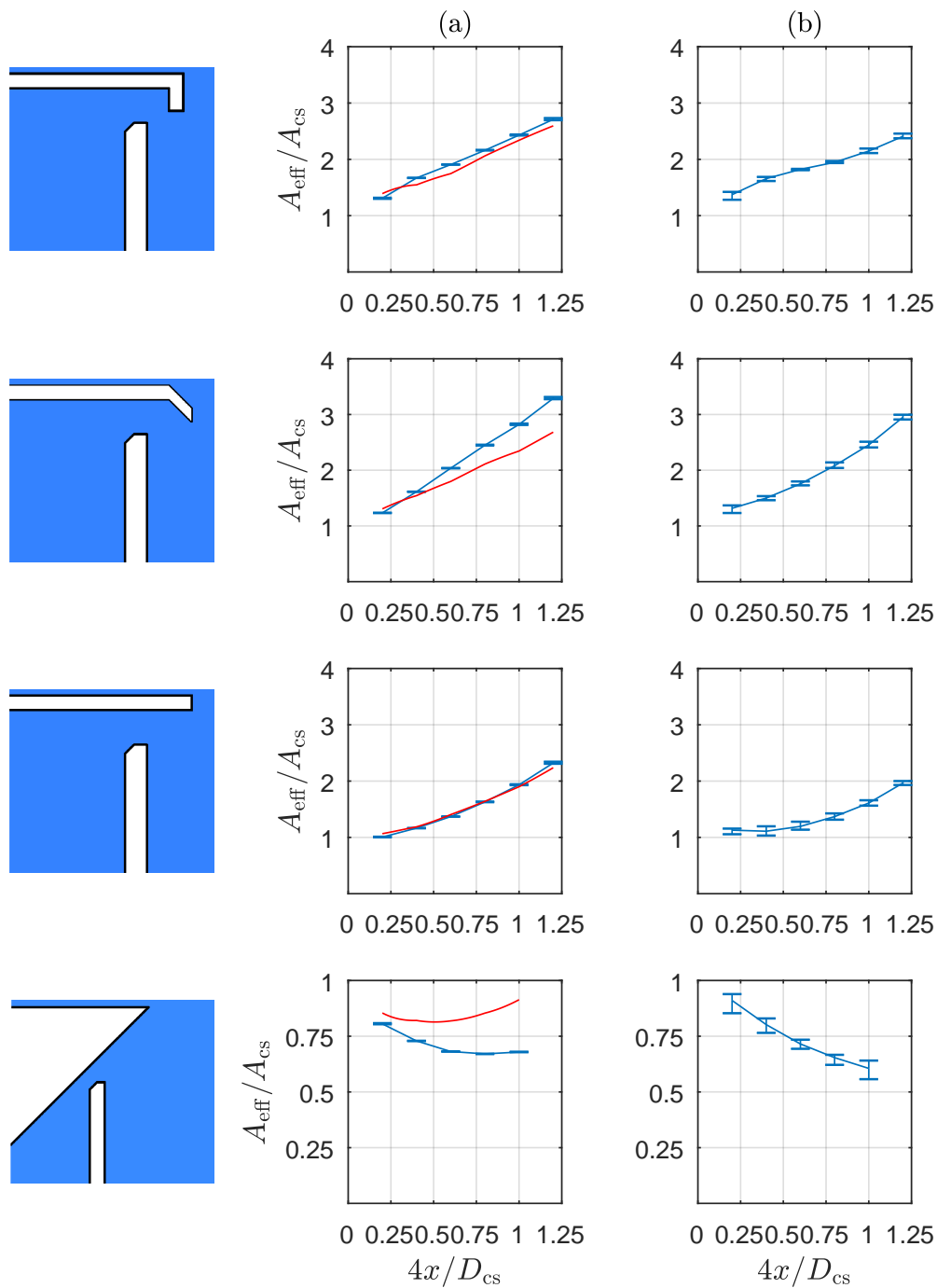
$$Q = C_d A_{sz} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_v - p_a)} \quad (2.13)$$

összefüggéssel számítható ( $C_d$  az átfolyási tényező), a (2.12) egyenlet átírható

$$F_f = \underbrace{A_{be} \left( 1 + 2C_d^2 \tilde{A} \left( \tilde{A} + \cos \theta \right) \right)}_{\tilde{A}_{\text{eff}}} (p_v - p_a) := A_{be} \tilde{A}_{\text{eff}} (p_v - p_a) \quad (2.14)$$

alakra, ahol  $\tilde{A} = A_{sz}/A_{be} = \hat{x}\mathcal{A}(\hat{x})$ , ld. (2.5) összefüggés.

Az effektív felület bonyolultabb, valós szelepgeometriákra is meghatározható mérésrel vagy számítással, erre mutat példát a 7. táblázat. Az ábrán négy szelepgeometriára adjuk meg a görbét; az (a) oszlopban vízre, a (b) oszlopban levegőre. A késsel jelölt adatpontok a CFD számítás eredményeit mutatják: minden szelepnnyitásra több nyomáskülönbséggel is elvégeztük a számításokat; ezek szórását is feltüntettük. Világosan látszik, hogy a nyomáskülönbségnek csak másodlagos szerepe van, ezért a továbbiakban ezt elhanyagoljuk:  $\tilde{A}_{\text{eff}}(\hat{x}, \Delta p)$ . Pirossal jelöltük a (2.14) összefüggéssel kapott értékeket, mely minőségileg jól követi az analitikus eredményeket:  $\theta < \pi/2$  esetén (felső három sor, "reakciós" szelep) monoton növekvő a függvény, míg kúpos zárótest ( $\theta > \pi/2$ ) esetén csökkenő tendenciát mutat kis szelepnnyitásokra.



7. ábra. Az effektív felület szelepnyitás- és nyomásfüggése különböző szelepgeometriákra. (a) oszlop: víz, (b) oszlop: levegő. Piros vonal: analitikus becslés (2.14) összefüggés segítségével, kék vonal: CFD számítás. A függőleges "hibasávok" az adott szelepnyitáshoz tartozó, különböző nyomáskülönbségek esetén számított értékek jelölik.

Végezetül bemutatjuk, hogy az effektív felület hogyan segíti megérteni azt a ténytet, hogy a  $p_{ny}$  nyitónyomás ("set pressure") és a  $p_z$  zárónyomás ("blowdown-" vagy "reseat pressure") eltér egymástól. Ehhez határozzuk meg a  $p_t$  tartálynnyomást az  $x$  szelepnnyítás függvényében! Az egyszerűség kedvéért ismét összenyomhatatlan közeget feltételezve kapjuk, hogy

$$p_{t,t} = p_{v,t} + \underbrace{\frac{\rho}{2} v_v^2 \left(1 + \lambda \frac{L_{cs}}{D_{cs}}\right)}_{:=\zeta_{cs}} = p_{v,t} \left(1 + C_d^2 \frac{A_{sz}^2}{A_{be}^2} \zeta_{cs}\right) = p_{v,t} \left(1 + C_d^2 \hat{x}^2 \mathcal{A}^2 \zeta_{cs}\right), \quad (2.15)$$

ahol  $p_{v,t}$  és  $p_{t,t}$  a szelep alatti nyomás és a tartálynnyomás a  $p_a$  alvázoldali nyomáshoz képesti túlnnyomásban kifejezve.  $A_{sz}$ -et és  $\mathcal{A}$ -t (2.5) definiálja,  $L_{cs}$ ,  $D_{cs}$  és  $\lambda$  pedig a cső hossza, átmé-  
rője és súrlódási tényezője. A fenti egyenlet egyszerűen annyit mond ki, hogy (állandósult állapotban) a tartálybeli  $p_t$  nyomás és a szelep alatti (csővégi)  $p_v$  nyomás között a közeget felgyorsulása miatti  $\frac{\rho}{2} v_v^2$  dinamikus nyomás és a csősúrlódás miatti  $\lambda \frac{L_{cs}}{D_{cs}} \frac{\rho}{2} v_v^2$  nyomásesés a különbség. (Mivel összenyomhatatlan esetet feltételezünk, a  $v_v$  sebesség állandó a csőhossz mentén.)

Mivel a szelep statikus erőegyensúlya  $s(x+x_0) = A_{\text{eff}}(x)p_{v,t}$  alakban írható, adódik, hogy

$$\mathcal{F}(\hat{x}) := \frac{p_{t,t}}{s x_0 / A_{be}} = \frac{p_{t,t}}{p_{ny}} = \frac{\hat{x} \frac{D_{be}}{4x_0} + 1}{\tilde{A}_{\text{eff}}(\hat{x})} \left(1 + C_d^2 \hat{x}^2 \mathcal{A}^2 \zeta_{cs}\right). \quad (2.16)$$

A fenti egyenlet dimenziótlan alakban írja le a tartálynnyomás függését a szelepnnyítástól. A görbe meredeksége  $\hat{x} = 0$ -ban:

$$\mathcal{F}'|_{\hat{x}=0} = \frac{1}{\tilde{A}_{\text{eff}}(0)^2} \left(\frac{D_{be}}{4x_0} \tilde{A}_{\text{eff}}(0) - \tilde{A}'_{\text{eff}}(0)\right) \Big|_{\tilde{A}_{\text{eff}}(0)=1} = \frac{D_{be}}{4x_0} - \tilde{A}'_{\text{eff}}(0) \quad (2.17)$$

és  $\hat{x} = 4x/D_{be}$ . Így azt látjuk, hogy növekvő  $\hat{x}$  szelepnnyításokhoz tartozhat növekvő vagy csökkenő tartálynnyomás is. Az egyértelműség kedvéért tekintsük az alábbi *szintetikus* effektív felület görbéket:

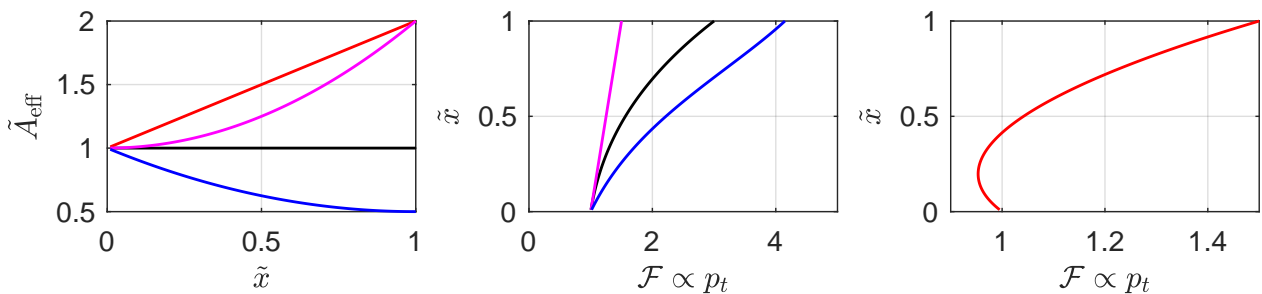
$$\text{elhanyagolható impulzustag} \quad \tilde{A}_{\text{eff},0} = 1 \quad (2.18)$$

$$\text{"reakciós" tányérszelep} (\theta = 0, \text{ ld. 7. ábra felső sor}) \quad \tilde{A}_{\text{eff},1} = 1 + \hat{x} \quad (2.19)$$

$$\text{tányérszelep gallér nélkül} (\theta \approx \pi/2, \text{ ld. 7. ábra harmadik sor}) \quad \tilde{A}_{\text{eff},2} = 1 + \hat{x}^2 \quad (2.20)$$

$$\text{kúpos zárótest} (\theta \approx 3\pi/4, \text{ ld. 7. ábra utolsó sor}) \quad \tilde{A}_{\text{eff},3} = 1 - \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{x}^2 \quad (2.21)$$

A 8. ábra bal oldalán az egyes effektív felület görbéket látjuk, hasonlóan a 7. ábrához. A középső és a jobb oldali ábrán az egyensúlyi szelepnnyítás látható a tartálynnyomás ill. az áramlástanai eredetű erő függvényében, ami egyben a tartálynnyomás és a nyitónyomás hányadosa. Jól látható, hogy amennyiben a kis szelepnnyításokra "kellően" progresszív az effektív



8. ábra. (Bal oldal) Effektív felület görbék: (2.18) - fekete, (2.19) - piros, (2.20) - magenta, (2.21) - kék. (Középső és jobb ábra) Egyensúlyi szelepnitász ( $\hat{x}$ ) a dimenziótlan tartálynomás ( $\mathcal{F}$ ) függvényében, v.ö. 3. ábra (5. oldal).

felület karakterisztika – tehát a (2.17) egyenlet szerint  $\mathcal{F}' > 0$  – növekvő szelepnitáshoz csökkenő tartálynomás tartozik és így létrejön a "blowdown" jelenség, azaz a különböző nyitási és zárási nyomás. Ez a szelepkarakterisztika fontos szerephez fog jutni a 3.5. fejezetben: ilyen karakterisztikájú szelepek és kisméretű tartályok esetén könnyen kialakulhat az ún. "pumpálás" jelensége.

#### 2.1.4. Dimenziótlan egyenletek

A későbbi számítások egyszerűsítése és az eredmények általánossága érdekében definiáljunk mértékegység nélküli változókat! Mindenekelőtt a szelep  $\omega = \sqrt{s/m}$  csillapítatlan saját-körfrekvenciája segítségével vezessük be az új, dimenziótlan időt:  $\tau = \omega t$ . A  $\tau$  szerinti differenciálást felső vesszővel (pl.  $\tilde{x}'$ ) fogjuk jelölni. A nyomást skálázzuk újra a szelep mögötti, alvív-oldali  $p_a$  nyomással:  $\tilde{p} = p/p_a$ , a szelep elmozdulásának referenciaértékét pedig válasszuk  $x_{ref} = A_{be}p_a/s$ -re, amivel  $\tilde{x} = x/x_{ref}$ .<sup>9</sup> Így a (2.1) mozgásegyenlet dimenziótlan alakja az

$$\tilde{x}'' + \tilde{k}\tilde{x}' + (\hat{x} + \delta) = \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x})(\tilde{p}_v - 1) \quad (2.22)$$

alakot ölti, ahol a dimenziótlan csillapítási tényező  $\tilde{k} = k/(m\omega)$ . A fenti egyenletben a  $\tau$  dimenziótlan idő szerinti differenciálást vesszővel jelöltük, azaz pl.  $\tilde{x}' = \frac{d\tilde{x}}{d\tau}$ . A rugóelőfeszítés mértékegység nélküli alakban megadott értéke  $\delta = x_0/x_{ref}$ .

## 2.2. Tartálymodell

A védendő tartályba a technológiai oldalról  $\dot{m}_{be}$  tömegáram lép be, független paraméterként (ld. 4. ábra a 8. oldalon). A csövön – vagy, amennyiben a szelep közvetlenül a tartályhoz kapcsolódik, a szelepen keresztül –  $\dot{m}_{ki}$  tömegáram távozik. Így a tartálybeli közeg tömegének

<sup>9</sup>Hangsúlyozzuk, hogy ez egy új skálázása  $x$ -nek és eltér az előző  $\hat{x}$ -től, bevezetése kényelmi szempontból indokolt.

időegységenkénti megváltozására igaz, hogy

$$\frac{d}{dt}(\rho_t V_t) = \dot{m}_{be} - \dot{m}_{ki}. \quad (2.23)$$

, ld. C melléklet , ld. C melléklet

A tartályban tartózkodó közeg  $m_t = \rho_t V_t$  tömege két okból változhat meg. Egyrészt – elvileg – a tartály fala deformálódhat a nyomásváltozás hatására, de jelen dolgozatban ezt az esetet nem engedjük meg, azaz a tartály falát merevnek tekintjük. Másrészt, a nyomás megváltozásának hatására a közeg sűrűségi változik. *Barotróp folyadékot feltételezve* – azaz a sűrűség csak a nyomás függvénye – kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}(\rho_t V_t) = V_t \frac{d\rho_t}{dt} = V_t \frac{d\rho_t}{dp_t} \dot{p}_t. \quad (2.24)$$

A hangsebesség definíció szerint (ld. pl. [84, 70])

$$\frac{d\rho_t}{dp_t} = \frac{1}{a_t^2}, \quad (2.25)$$

ahol  $a_t = \sqrt{\kappa R T_t}$  az adott gázban mért (izentrópius) hangsebesség,  $\kappa = c_p/c_v$  a fajhőviszony,  $R$  pedig a specifikus gázállandó. Folyadékok esetén (ld. pl. [38, 70])

$$\frac{d\rho_t}{dp_t} = \frac{\rho_t}{E_{red}} = \frac{1}{a_t^2}, \quad (2.26)$$

ahol  $E_{red}$  a folyadék és a csővezeték együttes rugalmassági modulusa,  $a_t$  pedig a hullámsebességet jelöli, figyelembe véve azt, hogy a folyadék gáztartalma módosít(hat)ja a tiszta folyadékban mért hullámsebességet, ez részletesen megtalálható [38] irodalomban. Ipari körülmények között, ha lehetőség van rá, a hullámsebesség legegyszerűbben két, kellő távolságban felszerelt nagyfrekvenciás nyomástávadó jelének összehasonlításával határozható.

Így a tartálydinamikai egyenletre kapjuk, hogy

$$\dot{p}_t = \frac{a_t^2}{V_t} (\dot{m}_{be} - \dot{m}_{ki}). \quad (2.27)$$

A korábban már bevezetett dimenziótlan változók segítségével a fenti összefüggés a

$$\dot{p}'_t = \beta (q_{be} - q_{ki}) \quad (2.28)$$

alakban írható, ahol  $\beta = \frac{a_t^2 \dot{m}_n}{V_t \omega p_a}$  és  $q_{be} = \dot{m}_{be}/\dot{m}_n$ . Mivel  $\dot{m}_n$  a szelep névleges tömegárama (kapacitása, ld. (2.3) egyenlet alatti bekezdés a 10. oldalon), a dimenziótlan térfogatáram 1-nél nagyobb értéke a szelep túlterhelését, a méretezési tartományból való kilépést jelenti. A tartályból kilépő, a csővezeték felé távozó tömegáram

$$q_{ki} = \frac{\dot{m}_{ki}}{\dot{m}_n} = \frac{A_{cs} \rho_e v_e}{\dot{m}_n} = \frac{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref} \frac{v_e}{\omega x_{ref}}}{\dot{m}_n} = \frac{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref} \tilde{v}_e}{\dot{m}_n} := \mu \tilde{v}_e \quad (2.29)$$

alakban írható, ahol  $v_e$  és  $\rho_e$  a csővezeték elején mért átlagsebesség és közegsűrűség, mely közül az előbbi  $\omega x_{ref}$  sebességgel dimenziótlanítva kapjuk a  $\tilde{v}_e$  dimenziótlan átlagsebességet.

A későbbiekben szükségünk lesz a szelepen átáramló közeg dimenziótlan  $q_{sz}$  tömegáramára, ami a (2.10) egyenletből nyerhető és összenyomható közeg fojtott áramlása esetén

$$\begin{aligned} q_{sz} &= \frac{\dot{m}_{sz}}{\dot{m}_n} = \frac{C_d A_{sz}(x) c_1 \sqrt{\rho_v p_v}}{\dot{m}_n} \\ &= \underbrace{\frac{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}{\dot{m}_n}}_{\mu} \underbrace{\frac{C_d \mathcal{A} D_{be} \pi x_{ref} c_1 \sqrt{\rho_v p_a}}{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}}_{\sigma = \frac{\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_a)}{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}} \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_v} := \mathcal{A} \mu \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_v} \end{aligned} \quad (2.30)$$

kifejezés adódik, ahol  $\mathcal{A}$  mennyiséget a (2.5) összefüggés definiálja (11. oldal). A  $\sigma$  paraméter a szelepen  $x_{ref}$  nyitás és  $p_{ref} = p_a$  nyomáskülönbség esetén keresztülfolyó tömegáram és a kapacitás aránya, míg a  $\mu$  paraméterre dimenziótlan csőkeresztmetszetként gondolhatunk.

Hasonló gondolatmenettel, összenyomhatatlan közeg esetén

$$q_{sz} = \frac{\dot{m}_{sz}}{\dot{m}_n} = \frac{C_d A_{sz}(x) c_1 \sqrt{\rho(p_v - p_a)}}{\dot{m}_n} = \mathcal{A} \mu \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_v - 1}. \quad (2.31)$$

(A fejezet végén áttekintést fogunk adni az újonnan bevezetett dimenziótlan változókról és paramétereikről.)

## 2.3. Csőmodell

### 2.3.1. Instacionárius Bernoulli egyenlet

A legegyszerűbb csőmodellben "dugószerű" folyadékmozgást feltételezünk, tehát állandó sűrűségű közeget, így a hullámjelenségeket elhanyagoljuk. Jelölje  $\lambda$  a (Darcy) csősúrlódási tényezőt,  $v(t)$  pedig a közeg axiális átlagsebességét, miközben a kerületi és radiális komponenseket elhanyagoljuk. Az esetleges szintkülönbségből adódó hidrosztatikus nyomáskülönbséget is elhanyagoljuk (de ezek szükség esetén egyszerűen figyelembe vehetők). Ekkor az instacionárius taggal kibővített Bernoulli egyenlet (ld. [70] 4.4.1 fejezet) a

$$p_e - p_v = \lambda \frac{L_{cs}}{D_{cs}} \frac{\rho}{2} v |v| + \rho L \frac{dv}{dt}$$

alakot ölti, melyre a dimenziótlan változókra való áttérés után kapjuk, hogy

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_v = \alpha \gamma (\varphi \tilde{v} |\tilde{v}| + \tilde{v}') \quad (2.32)$$

ahol

$$\varphi = \lambda \frac{x_{ref}}{2D_{cs}}, \quad \alpha = \frac{\rho A_{cs} a}{m \omega}, \quad \gamma = \frac{L_{cs} \omega}{a} \quad \text{és} \quad \mu = \frac{\rho A_{cs} v_{ref}}{\dot{m}_n}, \quad (2.33)$$



valamint a  $\tilde{v}$  dimenziótlan sebesség és a  $q$  dimenziótlan térfogatáram között a (2.29) összefüggés értelmében  $\mu\tilde{v} = q$ . A továbbiakban feltesszük, hogy a közeg hőmérséklete nem változik jelentősen a tartály és a csővezeték között, így  $a \approx a_t$ .

Az első paraméter ( $\varphi$ ) a csősúrlódásra jellemző mennyiség, a második ( $\alpha$ ) a csőbeli folyadék és a szelep  $m\omega$  "tömegáramának" arányát jellemzi. A harmadik ( $\gamma$ ) paraméter az egyetlen, amely a csővezeték hosszát tartalmazza, ezért erre úgy fogunk tekinteni, mint dimenziótlan csőhosszra. Végül a negyedik ( $\mu$ ) paraméter a referenciasebességhez tartozó tömegáram és a névleges tömegáram hányadosa. Ezen dimenziótlan mennyiségek bevezetése nem magától értetődő, más csoportosítást is használhattunk volna. Az  $\alpha\gamma$  szorzat fizikailag a csőbeli folyadék tömegének és a szelep tömegének hányadosa, mivel

$$\alpha\gamma = \frac{\rho A_{cs} L_{cs}}{m} = \frac{\text{folyadék tömege a csőben}}{\text{szelep tömege}}. \quad (2.34)$$

Bár ez a paraméter egyetlen szorzóként jelenik meg a (2.32) egyenletben, szorzatként ( $\alpha\gamma$ ) fogjuk továbbra is használni, két okból. Egyrészt, amint azt a következő fejezetben látni fogjuk, az  $\alpha/\gamma$  paraméter is meg fog jelenni. Másrészt, a csővezeték sajátfrekvenciájára

$$f_{cs} := \frac{a}{2L_{cs}} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\pi f_{sz}}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{f_{cs}}{f_{sz}} = \frac{\pi}{\gamma}, \quad (2.35)$$

ahol  $f_{cs}$  a csővezeték sajátfrekvenciája,  $f_{sz}$  pedig a szelep sajátfrekvenciája, azaz  $\gamma = \pi$  dimenziótlan csőhossz esetén a szelep és a csővezeték sajátfrekvenciája egybeesik. (Az index nélküli  $\omega$  a szelep sajátkörfrekvenciáját jelöli az egész dolgozatban.)

### 2.3.2. Egydimenziós instacionárius kontinuitási- és mozgásegyenlet

Amennyiben a csősúrlódás és a folyadék tehetetlensége mellett a csővezetékben lezajló hullámjelenségeket is le kívánjuk írni, az egydimenziós kontinuitási egyenletet (ld. [38])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.36)$$

és mozgásegyenletet

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} = -\rho \frac{\lambda}{2D_{cs}} v|v| \quad (2.37)$$

kell alkalmaznunk. (Itt, egyetlen oldal erejéig, az olvashatóság megkönnyítésének érdekében  $x$  a szokásos csőhossz menti axiális koordinátát jelöli és nem a szelepelmozdulást,  $v(x,t)$  pedig a közeg áramlási sebességét és nem a szeleptest sebességét.) Amennyiben a folyadék vagy gáz sűrűsége a nyomás segítségével egyértelműen kifejezhető  $\rho(p)$  alakban, azaz a folyadék *barotróp* közeg, a (2.26) hangsebesség definíció segítségével a fenti egyenletek egyszerűbb alakban írhatók:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

illetve

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D_{cs}} v|v|. \quad (2.39)$$

Ezek az egyenletek az ún. *enyhén összenyomható* folyadékmodellt írják le; az  $a$  hullámsebesség bevezetésével ugyan figyelembe vesszük a hullámjelenségeket, ugyanakkor a sűrűségváltozást ezután elhanyagoljuk és az egyenletekben mindenhol konstans  $\rho$  értékkel számolunk. Ez folyadékokra mindenképpen jó közelítés<sup>10</sup>, gázokra azonban alaposabb megfontolás szükséges.

Amint azt a Bevezetésben (1.2. rész, 4. oldal) részleteztük, a vizsgált szelepek a nyitónyomás 100%-110% százaléka között működnek, így azt a kérdést kell feltennünk, hogy ebben a tartományban milyen sűrűségváltozás jelentkezik. Nehézséget okoz azonban, hogy nem ismerjük az állapotváltozás pontos folyamatát, ezért a két szélsőséges ideális helyzetben, izotermikus és izentrópikus esetre végezzük el a számítást. Jelölje  $\rho^*$ ,  $\rho_k$  és  $\rho^{**}$  rendre a nyitónyomás 100, 105 és 110%-hoz tartozó sűrűséget, ekkor

$$\frac{\rho^{**} - \rho^*}{\rho_k} = \begin{cases} \text{izentrópikus esetben:} & \left. \frac{(1.1 \times p_{ny})^{1/\kappa} - p_{ny}^{1/\kappa}}{(1.05 \times p_{ny})^{1/\kappa}} \right|_{\kappa=1,4} = 6,58\% \quad \text{ill.} \\ \text{izoterm esetben:} & \frac{1.1 \times p_{ny} - p_{ny}}{1.05 \times p_{ny}} = 9,52\%. \end{cases} \quad (2.40)$$

Ez a max. 10%-os relatív sűrűségváltozás annak a tartománynak a felső határa, amelyen belül összenyomhatatlan közelítéssel szokás élni a műszaki áramlástanban, ld. [70, 38]. Így tehát a korábban már bevezetett dimenziótlan mennyiségek bevezetésével a fenti (2.38), (2.39) egyenletek a

$$0 = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \Lambda \tilde{v} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} \quad \text{ill.} \quad (2.41)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} + \Lambda \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{\alpha \gamma} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} - \varphi \tilde{v} |\tilde{v}|. \quad (2.42)$$

alakot öltik, ahol

$$\Lambda = \frac{x_{\text{ref}}}{L_{cs}} = \frac{A_{cs} p_a}{s L_{cs}} \quad (2.43)$$

a szelep elmozdulás-léptékének és a cső hosszának hányadosa és  $\xi = x/L_{cs}$  a csőhossz menti axiális koordináta:  $0 \leq \xi \leq 1$ . Ezeket az egyenleteket többek között a 3.4. és a 6. fejezetben fogjuk felhasználni.

## 2.4. Dimenziótlan paraméterek

Az előzőekben számos mértékegység nélküli paramétert vezetünk be és mivel a továbbiakban a dimenziótlan egyenleteket fogjuk vizsgálni, érdemes megállnunk és együtt áttekintenünk

<sup>10</sup>Például vízre  $E = 2.2$  GPa, így  $dp = E/\rho d\rho \approx 2.2 \times 10^6 d\rho$ , így pl. 10 bar nyomásváltozáshoz  $0.45 \text{ kg/m}^3$  sűrűségváltozás tartozik, ennek elhanyagolása kisebb, mint 0.05% hibát eredményez.

ezeket. A dimenziótlan változókat az 1. táblázatban (a 22. oldal), a paramétereket pedig a 2. táblázatban (a 23. oldal) foglaltuk össze.

Megnevezés	Fizikai mennyiség	Dimenziótlan mennyiség	Skála
Idő	$t$	$\tau = t/t_{ref}$	$t_{ref} = \frac{2\pi}{\omega}$ , $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$
Szelep elmozdulás	$x$	$\tilde{x} = x/x_{ref}$	$x_{ref} = \frac{A_{be}p_a}{s}$
Nyomás	$p$	$\tilde{p} = p/p_{ref}$	$p_{ref} = p_a$
Tömegáram	$\dot{m}$	$q = \dot{m}/\dot{m}_{ref}$	$\dot{m}_{ref} = \dot{m}_{n(évlages)}$
Axiális koord. a csőben	$(x)$	$\xi$	$x_{ref}$
Áramlási sebesség	$(v)$	$\tilde{v}$	$v_{ref} = x_{ref}\omega$

1. táblázat. Dimenziótlan változók. (Az  $x$  és  $v$  jelöléseket axiális csőkoordinátára ill. áramlási sebességre csak a 2.3.2. fejezetben használjuk.)

Ezután meghatározzuk az egyes paraméterek jellemző nagyságrendjét, ill. egymáshoz képesti arányukat. A C. mellékletben számos szeleptípusra, cső- és tartálméretre, nyitónyomásra, ill. munkaközegre közöljük ezeket a paraméterértékeket. A szelepek ún. Crosby szelepek, ettől a gyártótól tudtunk részletes adatokat beszerezni. Az alábbi általános megállapításokat tehetjük.

- A szelep (2.22) mozgásegyenletében két paraméter fordul elő: a dimenziótlan csillapítási tényező  $\tilde{k}$ , amelyet jellemzően zérusnak tekintünk (ld. 2.1.1. alfejezet), ill. a mértékegység nélküli rugó-előfeszítés  $\delta$ . Ez utóbbi, amennyiben a szelep kilépő oldala a légkörre nyitott ( $p_a = p_0$ ), a nyitónyomás a légköri nyomás viszonya ( $\delta = p_{ny}/p_0$ ), ld. (2.2) egyenlet. Amennyiben eltekintünk a folyadék impulzusváltozásából származó erőtől,  $A_{eff} = A_{be}$  vagy  $\tilde{A}_{eff} = 1$ .
- A tartály nyomásdinamikáját leíró (2.28) egyenlet jobb oldalán szorzóként megjelenő  $\beta$  paraméter fordítottan arányos a tartály térfogatával és egyenese arányos a hullámsebesség négyzetével. Ezen paraméter növekedésével (tartálméret csökkenése) egyre fontosabbá válik a tartálybeli nyomás megváltozása és ellenkezőleg, "kis"  $\beta$  érték azt jelenti, hogy a tartálybeli nyomás jó közelítéssel állandónak tekinthető. Mivel a  $q$  térfogatáramot a szelep névleges tömegáramával dimenziótlantítottuk, így  $q_{be,ki} = \mathcal{O}(1)$ , így jellemzően  $\beta < 0.01$  esetben a tartály jó közelítéssel helyettesíthető egy állandó nyomás peremfeltétellel. Ez a tipikus mérnöki létesítményeket tekintve jellemzően gáz munkaközeg esetén teljesül, pl. egy 2J3 szelep víz munkaközeggel, 10m<sup>3</sup>-es tartály esetén  $\beta = 0.2 \dots 0.3$  széles nyitónyomás-tartományban, ld. 7. táblázat (M-13. oldal), ugyanerre a szelepre ugyanezen tartállyal, de levegő munkaközeggel  $\beta < 0.04$  széles

Jelölés és definíció	Magyarázat
$\tilde{k} = \frac{k}{m\omega}$	Dimenziótlan csillapítási tényező. A mechanikában (ld. [40, 32]) szokásos jelöléssel $\tilde{k} = 2\zeta$ .
$\delta = \frac{x_0}{x_{ref}} \Big _{p_a=p_0} = \frac{p_{ny}}{p_0}$	Dimenziótlan rugó előfeszítés, dimenziótlan nyitónyomás.
$\beta = \frac{a_t \dot{m}_n}{V_t \omega p_a} \propto \frac{1}{V_t}$	Dimenziótlan tartálméret.
$\mu = \frac{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}{\dot{m}_n} \propto A_{cs}$	Dimenziótlan csőkeresztmetszet.
$\sigma = \frac{\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_a)}{A_{cs} \rho_e \omega x_{ref}}$	Dimenziótlan tömegáram paraméter.
$\alpha = \frac{\rho_e A_{cs} a}{m\omega} \propto \rho_e$	A közeg sűrűségével arányos dimenziótlan paraméter.
$\varphi = \lambda \frac{x_{ref}}{2D_{cs}} \propto \lambda$	Dimenziótlan (Darcy) csősúrlódási tényező.
$\gamma = \frac{L_{cs} \omega}{a} \propto L_{cs}$	Csőhosszal arányos paraméter.
$\Lambda = \frac{x_{ref}}{L_{cs}}$	Konvektív tagok együtthatója a csődinamikát leíró egyenletekben.

2. táblázat. Dimenziótlan paraméterek.

nyitónyomás-tartományban, ld. 8. táblázat (M-14).

- Az áramlástan egyenletekben – (2.41) és (2.42) – rendre négy paraméter szerepel: (a)  $1/(\alpha\gamma)$ , (b)  $\alpha/\gamma$ , (c) a csősúrlódási paraméter  $\varphi$  és a nemlineáris konvektív tagok szorzója,  $\Lambda$ . Ezekkel kapcsolatban az alábbi megállapításokat tehetjük:
  - Folyadékok esetén igaz, hogy  $\Lambda \ll \alpha/\gamma$ , így a nemlineáris tagok elhanyagolhatók. Ez a paraméter írható  $\Lambda = \frac{A_{cs} p_a}{L_{cs} s}$  alakban, ami két erő hányadosa. A számlálóban az alvízoldali nyomásból a cső keresztmetszetére ható erő szerepel, míg a nevezőben az  $L_{cs}$  hosszön összenyomott szeleprugó által kifejtett erő. Természetesen a második nagyságrendekkel nagyobb (hiszen a  $p_a$ -nál jóval nagyobb  $p_{ny}$  nyitónyomással a rugó már  $x_0 \ll L_{cs}$  alakváltozással is egyensúlyt tart). Ez jól látszik az 5. – 8. táblázatokban. Az egyetlen eset, ahol az arány alacsony, levegő munkaközeg esetén, kis nyitónyomásnál figyelhető meg, pl. a 8. táblázat első oszlopa (2J3 szelep, 3.45 bar nyitónyomáson).
  - Teljesül az is, hogy  $\Lambda \ll 1/(\alpha\gamma)$  és hogy  $\Lambda \ll 1$ , ezért a  $\Lambda$ -val szorzott konvektív tagok elhanyagolhatók. Az eqrefeq:DimLessCont és (2.42) egyenletekben.

Az  $\alpha$ ,  $\mu$  és  $\sigma$  dimenziótlan paraméterekben szerepel a  $\rho_e$  egyensúlyi nyomás is, melyet mindig a vizsgált egyensúlyi szelepnyitáshoz tartozó egyensúlyi nyomáshoz tartozó értéknek tekintünk. Két kitüntetett értéket különböztetünk meg:  $\rho^*$  a nyitónyomáshoz tartozó sűrűség, míg  $\rho^{**}$  a maximális nyomáshoz (a nyitónyomás 110%-a) tartozó sűrűség. Korábban, a (2.40)

összefüggéssel azt is megmutattuk, hogy mérnöki elfogadható mértékű hibát követünk el, ha a közepes nyomáshoz tartozó sűrűséggel számolunk. Természetesen, cseppfolyó folyadékok esetén  $\rho_e = \rho^* = \rho^{**}$ . A közeg hőmérséklete és a hangsebesség bemenő adat, melyeket elő kell írni és állandónak tekintünk a teljes rendszerben.

A rendszert felépítő elemek matematikai-fizikai modelljének birtokában megkezdhetjük az instabilitások vizsgálatát.

### 3. Elsődleges instabilitási típusok

Ebben a fejezetben azonosítjuk és elkülönítjük azokat az elsődleges (primer) instabilitási típusokat, melyek, bár a valódi mérnöki rendszerek esetében jellemzően keverve, egymást erősítve jelentkeznek, külön-külön vizsgálva jól modellezhetők. Vizsgálatukra és az analitikus kritériumok levezetésére különböző bonyolultságú matematikai modelleket építünk fel.

**Minőségi modellnek** tekintjük azokat a modelleket, melyek a pontosság feláldozásával lehetővé teszik egyszerű, analitikus összefüggések és/vagy méretezési módszerek levezetését és hozzájárulnak a jelenségek minőségi leírásához.

**Mennyiségi modellnek** nevezzük azokat a modelleket, melyek ugyan számszerűen pontosak, de az egyes paraméterek megváltoztatásának hatása csak aránytalanul nagymennyiségű számításokkal lehetséges.

Mindezek tükrében az alábbi modelleket különböztetjük meg.

**Tartály – szelep modell (TSzM)** Ez a modell nem tartalmaz csővezetékét, így a védendő tartályhoz közelre telepített szelepek vizsgálatára alkalmas; a cső bármilyen hatását (nyomáscsökkenés, hullámjelenségek, folyadék tehetetlensége) elhanyagolja, ld. 3.2. vagy 3.5. fejezet. Minőségi modell.

**Helmholtz modell (HM)** Ez a modell már figyelembe veszi a csőben áramló közeg tehetetlenségét és sűrűlódását, így egy klasszikus Helmholtz rezonátort (tartály+cső) csatol össze a szeleppel, ld. 3.3. fejezet. Minőségi modell.

**Negyedhullám modell (NHM)** Ezt a modellt speciálisan a negyedhullám instabilitás leírására fejlesztettük ki, ld. 3.4. fejezet. Minőségi modell.

**Folyadékdinamikai modell (FDM) és gázdinamikai modell (GDM)** Ezek a numerikus módszerek egydimenziós instacionárius csőáramlás mennyiségi leírását teszik lehetővé, minőségi vizsgálatra nem alkalmasak. Folyadék munkaközeg esetén az E mellékletben részletezett karakterisztikák módszerét, gáz közeg esetén az F mellékletben leírt Lax-Wendroff sémát használjuk.

**CFD** A teljesség kedvéért a numerikus áramlástan szimulációs (CFD) megközelítést is felsoroljuk, de hangsúlyozzuk, hogy ez elsősorban nagy pontosságú mennyiségi modellezésre alkalmas.

Az egyes modellek képességeit a 3. táblázat foglalja össze. Ebben a fejezetben elsősorban az első három modellre koncentrálunk, melyek segítségével jól leírhatók a legfontosabb instabilitási típusok. Az FDM, GDM és a CFD modellre úgy tekintünk, mint "virtuális kísérletre", azaz olyan módszerre, melyekkel a minőségi modellek segítségével levezetett analitikus összefüggéseket összevethetjük. Végül, az egyértelműség és teljesség kedvéért hangsúlyozzuk, hogy amennyiben rendelkezésre állnak, természetesen a laboratóriumi mérési eredményeket részletezzük előnyben; erre pl. a 4.1. és a 4.3. fejezetben látunk majd példákat és a G mellékletben részletesen ismertetjük a mérőberendezéseket és a mérések körülményeit.

Jelenség → Modell ↓	Szelep- dinamika	Tartály- dinamika	Csővezeték			
			Folyadék tehetetlenség	Hullám- jelenségek	Súrlódás	2D/3D hatások turbulencia, stb.
TSzM	✓	✓	✗	✗	✗	✗
HM	✓	✓	✓	✗	✓	✗
NHM	✓	✓	✓	○	✓	✗
FDM/GDM	✓	✓	✓	✓	✓	✗
CFD	✓	✓	✓	✓	✓	✓

3. táblázat. Modellezési szintek és az általuk leírt fizikai jelenségek. A kék kör részleges leírást jelent.

### 3.1. Statikus instabilitás – "szelep ugrálás"

A legegyszerűbb instabilitási típus, mely akár tartály vagy csővezeték jelenléte nélkül is kialakulhat, a *statikus instabilitás*. Ez esetben – amint később látni fogjuk – rezgések nem jelennek meg, hanem a szelep mozgásában hirtelen "ugrást" figyelhetünk meg nyitás vagy zárás közben. Ez a jelenség akár kívánatos is lehet, hiszen lerövidítheti a szelep nyitási idejét. Valóban, az angol szaknyelv megkülönböztet "popping action" vagy "snap acting" szelepeket, melyek a nyitónyomás elérésekor a teljesen nyitott állapotba "ugranak" néhány milliszekundum alatt ill. "modulating" szelepeket, melyek nyitása a nyomással arányos.

A jelenség leírásához feltesszük, hogy a tartály és a szelep között nincsen csővezeték (tehát  $p_e = p_v = p_t$ , ld. 4. ábra a 8. oldalon) és a tartály kellően nagy ahhoz, hogy a  $p_t$  nyomás állandó maradjon. Ilyen körülmények között a szelepdinamikát a (2.1) egyenlet írja le, melyben mind a tartálynyomás  $p_v$ , mind az alvízoldali nyomás  $p_a$  konstans, ezért a szelepen eső  $\Delta p = p_v - p_a$  nyomásra szabad paraméterként tekinthetünk. Az adott  $\Delta p$  nyomáseséshez tartozó  $x_e$  egyensúlyi szelepnitást az

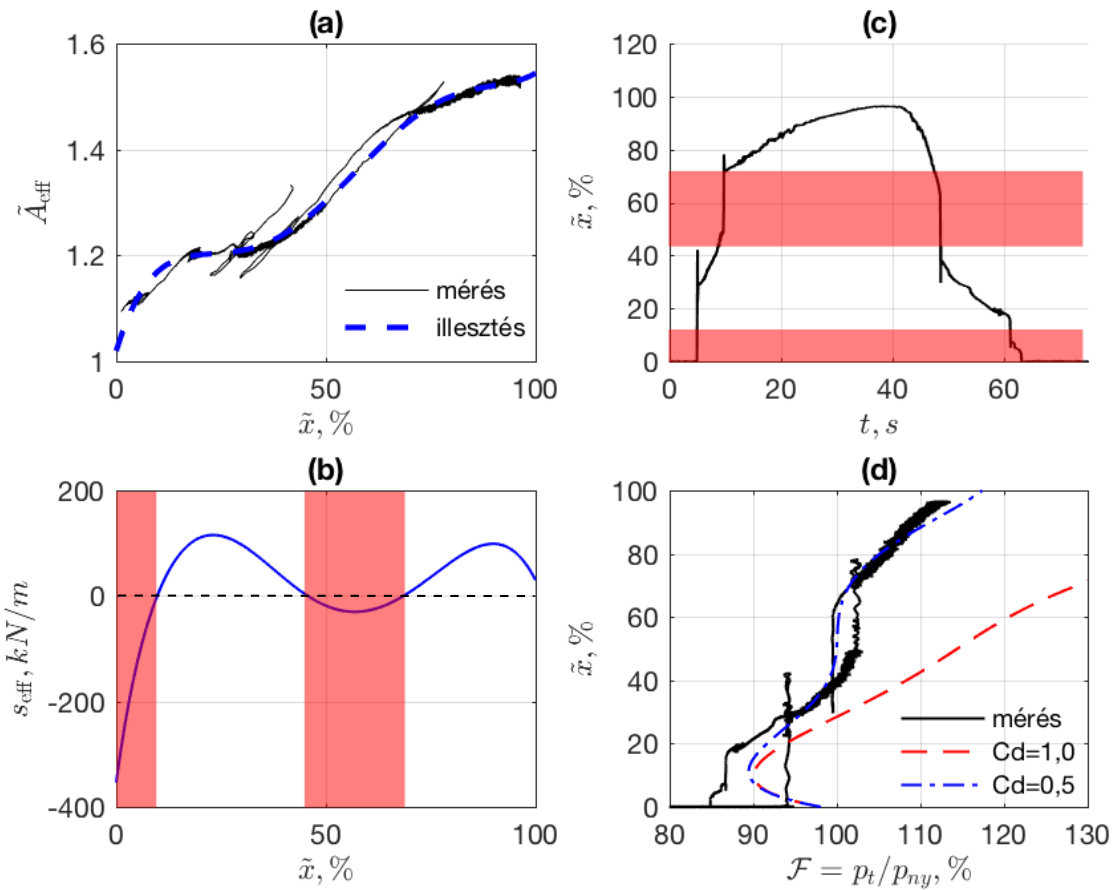
$$s(x_e + x_0) = A_{\text{eff}}(x_e)\Delta p \quad (3.44)$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Most fejtsük az effektív felület  $A_{\text{eff}}$  kifejezését Taylor-sorba  $x_e$  körül:

$$A_{\text{eff}}(x)|_{x=x_e} = A_{\text{eff}}(x_e) + \underbrace{\frac{dA_{\text{eff}}}{dx}}_{:=A'_{\text{eff}}(x_e)} \Big|_{x=x_e} (x - x_e) + \mathcal{O}((x - x_e)^2). \quad (3.45)$$

A fenti kifejezést helyettesítsük be a (2.22) egyenletbe, majd vezessük be az  $y = x - x_e$  új változót, ekkor az

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + (s - A'_{\text{eff}}(x_e)\Delta p)y = 0 \quad (3.46)$$



9. ábra. Statikus instabilitás mérési eredmények. Szelep: Crosby 2J3, levegő munkaközeggel.

( $x_e$  körül linearizált) mozgásegyenletet kapjuk, amiből világosan láthatjuk, hogy az effektív felület görbe meredeksége módosítja az *effektív rugómerevséget*:

$$s_{\text{eff}} := s - A'_{\text{eff}}(x_e)\Delta p, \quad (3.47)$$

és stabil egyensúlyi helyzet csak  $s_{\text{eff}} > 0$  esetén jön létre.

A 9. ábrasonon egy valódi szelepen (Crosby 2J3, levegő munkaközeg) végzett mérés eredményeit láthatjuk. A bal felső (a) ábra mért (fekete), ill. az illesztett (kék) effektív felület görbét ábrázolja. Ez a görbe jelentősen eltér az elméleti görbétől (ld. 8. ábra), melynek egyik oka a levegő munkaközeg miatt fellépő gázdinamikai hatások (pl. fojtott áramlás), a másik pedig az, hogy a valódi szelepgeometria eltér a korábban vizsgált idealizálttól, különösen az állítógyűrű (ld. 2. ábra) hatása tekintetében. A (b) ábrán a (3.47) összefüggés szerint definiált effektív rugómerevséget ábrázoltuk a szelepnyitás függvényében. Jól láthatók (piros háttérrel kiemeltük) azokat a tartományokat, ahol a szelepnyitás statikusan instabil mivel az effektív rugómerevség negatív. A (c) ábrán a *mért* szelepnyitást láthatjuk az idő függvényében, ahol jól megfigyelhető, ahogy a szelep "átugorja" a statikusan instabil tartományokat.



Végül a (d) ábrán a szelepnnyitás látható a relatív (nyitónyomás százalékában megadott) tartálynyomás függvényében. Ezen az ábrán fekete vonal jelöli a mérést és piros szaggatott, ill. kék szaggatott pontvonal pedig a (2.16) összefüggéssel kapott becslést két átfolyási tényező értékre. Ezek közül az első a  $C_d = 1$  elméleti érték, míg a második,  $C_d = 0.5$ -ös értéket csak tájékoztatóképpen mutatjuk meg; bár ezzel az értékkel jó egyezés érhető el a méréssel, sem mérési, sem számítási alapja nincsen, pusztán demonstrációs céllal választottuk. Ugyanennek a jelenségnek láttuk az első nyomait korábban a 8. ábrán a 17. oldalon.

Ezek a megfigyelések egybevágóak Moussou [59] eredményeivel, aki egy hasonló modell vizsgálata során arra jutott, hogy a stabilitás feltétele az, hogy a rugóerő meredekségének (a szelepnnyitás függvényében) nagyobbak kell lennie, mint az áramlásból származó erő meredekségének. A [HCs3] munkában is hangsúlyozzuk az effektív felület függvény meredekségének fontosságát és különböző zárótest-geometriákra meg is adunk ilyen – CFD segítségével meghatározott – függvényeket. Bazsó Csaba [13] doktori disszertációjában is leírja és elemzi ezt a jelenséget, végül megemlítjük saját [HCs5] dolgozatunkat, mely további analitikus és kísérleti eredményeket tartalmaz.

Összefoglalva ezt az alfejezetet elmondhatjuk, hogy a szelep nyitása és zárása során megfigyelt hirtelen ugrások egy statikus instabilitási jelenséggel magyarázhatók, melyek azokban a nyitási tartományokban alakulnak ki, ahol az  $s_{\text{eff}} = s - A'_{\text{eff}}(x_e)\Delta p = \Delta p \left( \frac{s}{\Delta p} - A'_{\text{eff}}(x_e) \right)$  effektív rugómerevség negatívvá válik. Mivel a nyitónyomás ( $\Delta p$ ) növelésével a beépített rugó merevségét is (közelítőleg) lineárisan növelni kell (ld. 7. és 8 táblázatok az M-13. és M-14. oldalon), ezek a statikusan instabil nyitási tartományok (ugyanazon közeg és az állítógyűrű helyzetének rögzítése esetén) nem függenek jelentősen a nyitónyomástól. Az effektív felület görbe alakjára ezzel szemben érzékenyek ezek a tartományok és a korábban említett állítógyűrű (ld. 2. ábra) pontosan erre alkalmas, ti. hogy a szelep nyitási karakterisztikáját befolyásoljuk.

### 3.2. A tartály-szelep modell viselkedése

A következő lépés a tartály szelepre gyakorolt dinamikai hatásának vizsgálata, egyenlőre csővezeték nélkül. Tekintsük a 4. ábrán látható modellt a felvázoldali csővezeték nélkül ( $L_{cs} = 0$ ), tehát a védendő tartályra *közvetlenül* felszerelt nyomáshatároló szelepet vizsgálunk. Ilyen rendszerek tipikusan a kazánok víztere (bojlerek), ill. a fokozottan balesetveszélyes nyomástartó edények; ilyen berendezések esetén a szabvány szigorú megköveteléseket ad a felvázoldali csővezeték hosszára, ld. [8].

A (2.22) szelep-mozgásegyenletet és a (2.28) tartálydinamikát leíró egyenletet összekapcsolva, valamint folyadék munkaközéget feltételezve, felhasználva a (2.31) összefüggést, elhanyagolva a tartályból a szelep felé kilépő közeg gyorsulásából adódó nyomásesést (azaz

$p_t \approx p_v$ ) kapjuk (mivel  $q_{ki} = q_{sz}$ ), hogy

$$\tilde{x}' = y_2 \quad (3.48)$$

$$y_2' = -\tilde{k}y_2 - (\tilde{x} + \delta) + \tilde{p}_t - 1 \quad (3.49)$$

$$\tilde{p}_t' = \beta (q_{be} - q_{ki}) = \beta \left( q_{be} - \mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t - 1} \right), \quad (3.50)$$

ahol  $y = (\tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{p}_t)^T$ , tehát  $y_2$ -vel a dimenziótlan szeleptányér sebességet jelöljük.  $\delta$  a dimenziótlan rugóelőfeszítés,  $\tilde{k}$  a dimenziótlan csillapítás,  $\beta \propto 1/V_t$  a tartálytérfogattal fordítottan arányos paraméter,  $0 \leq q_{be} \leq 1$  a dimenziótlan tömegáram (szabad paraméter),  $\mu$  és  $\sigma$  pedig kiadódó paraméterek, melyekben a csőátmérő  $A_{cs}$  egybeesik a szelep csatlakozó karimájának méretével.

Gáz munkaközeg esetén az utolsó, tartálydinamikát leíró egyenlet módosul, mivel a (2.31) átfolyási egyenlet helyett a fojtott gázáramlásra érvényes a (2.30) egyenletet kell alkalmaznunk:

$$\tilde{p}_t' = \beta \left( q_{be} - \mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t} \right). \quad (3.51)$$

A (3.48)–(3.50) rendszer levezetése során azt is feltettük, hogy tányérszelepről van szó, tehát  $\mathcal{A} = 1$  és  $\tilde{A}_{\text{eff}} = 1$ , amivel azt szeretnénk hangsúlyozni, hogy a vizsgált instabilitás független a szelep effektív felület 9.(a) ábrán vagy 7. képen látható görbájától abban az értelemben, hogy – amint azt látni fogjuk – az impulzuserő elhanyagolása ( $\tilde{A}_{\text{eff}} = 1$ ) esetén is jelentkezik az ebben a fejezetben vizsgált instabilitás.

Ebben a modellben *nem* hanyagoltuk el a  $\tilde{k}$  viszkózus csillapítást, ennek okát később magyarázzuk.

A következőkben vizsgált jelenség az előző, statikus instabilitással szemben már dinamikus instabilitás lesz, tehát szeleprezgést fog okozni. Itt közbevetjük, hogy a szakemberek tisztában vannak azzal, hogy a túlméretezett szelepek – melyek kapacitásuk töredékén működnek – gyakran válnak instabillá és rezegnek, "csattognak", akár *felvívoldali csővezeték nélkül is*. Ennek egyik (de nem egyetlen) magyarázata az, hogy olyan szelepek esetén, melyeknél az eltérítési szög 90 foknál nagyobb, kis szelepnnyitások esetén az effektív felület csökken, azaz a szelep nyitása után kis elmozdulások (azaz kis térfogatáramok) esetén a szelep visszazár, amely alacsony frekvenciás lengést eredményez. A szakirodalomban pl. [3] és [HCs8, HCs2] közleményekben találkozunk kis térfogatáramok (alacsony terhelés) esetén kialakuló instabilitásokkal és ezt az esetet mi is vizsgálni fogjuk a 3.5. fejezetben. *Itt azonban nem erről van szó*, hiszen ebben a fejezetben állandónak tekintettük az effektív felületet.

Alkalmazzuk tehát a tartály-szelep modellt (TSzM), melyet a (3.48)–(3.50) egyenletrendszer ír le, továbbá az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a folyadékimpulzus megváltozása elhanyagolható mértékben járul hozzá a szelepre ható áramlástan eredetű erőhöz, azaz

$\tilde{A}_{\text{eff}} \equiv 1$ . Az egyensúlyi helyzetet meghatározva, körülötte Taylor-sorba fejtve a nemlineáris tagot ( $\mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t - 1}$ ), majd megkeresve azokat a paraméterértékeket, melyeknél a lineáris együtthatómátrix komplex konjugált sajátértékpárja tisztán képzetes (tehát a rendszer a stabilitás határán van), megkapjuk a stabil nyitáshoz szükséges *minimális* viszkózus csillapítás tényezőt:

$$\tilde{k}_{\text{krit}} = \frac{q_{be}}{\beta} \frac{1}{(\tilde{x}_e \mu \sigma)^2} \left( -\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 2\tilde{x}_e \beta^2 \mu^2 \sigma^2} \right), \quad \text{ahol} \quad \Delta = 1 + \frac{\tilde{x}_e^4 \beta^2 \mu^4 \sigma^4}{4q_{be}^2}. \quad (3.52)$$

Itt  $\tilde{x}_e$  a szelep dimenziótlan egyensúlyi helyzete  $q_{be}$  térfogatáramnál. A fenti kritikus paraméterértéknél a (3.48)–(3.50) egyenletrendszer linearizált együtthatómátrix két konjugált sajátértéke tisztán képzetes, amit a szakirodalom dinamikus stabilitásvesztésnek vagy Hopf bifurkációnak nevez (ld. pl. [33], [49]). Így a kritikus csillapítási tényező *alatt* periodikus mozgás (rezgés) keletkezik, azaz a rendszer instabillá válik.

A továbbiakban szeretnénk egyszerűbb, a gyakorlatban könnyebben alkalmazható összefüggést kapni, mindenekelőtt kiküszöbölni a szelep egyensúlyi helyzetét a stabilitási kritériumból. Összevetve a (3.49) és a (3.50) (folyadék esetén) az (5.104) egyenletet azt találjuk, hogy a szelep egyensúlyi helyzete kielégíti a

$$\tilde{x}_e^3 + \delta^* \tilde{x}_e^2 - \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \right)^2 = 0 \quad (3.53)$$

egyenletet (a számítás főbb lépései a D.1 Mellékletben található). Itt folyadék esetén  $\delta^* = \delta$ , gáz esetén pedig  $\delta^* = \delta + 1$ . A Cardano-formula segítségével megoldható a fenti egyenlet, ám a kapott összefüggés nagy és nehézkes kezelni, ezért a valós megoldást kis  $q_{be}$ -értékekre sorba fejthetjük, így kapjuk, hogy

$$\tilde{x}_e|_{q_{be}=0} = \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \right)^2 \frac{1}{2\delta^2} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \right)^3 \right). \quad (3.54)$$

(A részletes számítások a D.1 mellékletben található az M-15. oldalon.) Ezt a (3.52) kifejezésbe behelyettesítve és újra sorba fejtve  $q_{be} = 0$  körül – tehát kis térfogatáramokra – kapjuk, hogy

$$\tilde{k}_{\text{krit.}}|_{q_{be}=0} \approx \beta \left( \mu\sigma\sqrt{\delta} + q_{be} \left( \frac{1 - \beta^2 \mu^2 \sigma^2 \delta}{2\delta} \right) \right) + \mathcal{O}(q_{be}^2). \quad (3.55)$$

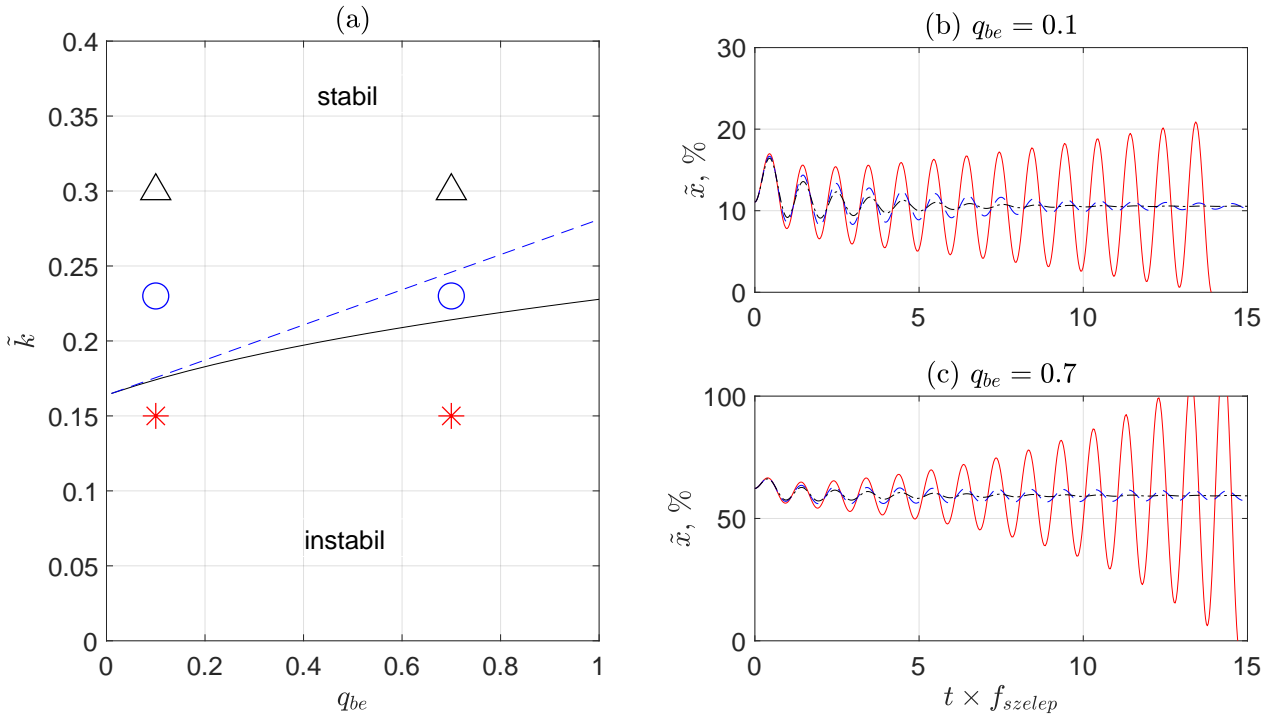
Ebből a kifejezésből világosan látható, hogy nagy tartályok (kis  $\beta$  értékek, vagy, egészen pontosan, amennyiben  $\beta^2 \mu^2 \sigma^2 \delta < 1$ ) esetén növekvő térfogatáramokhoz (növekvő szelepnýtáshoz) *növekvő* kritikus csillapítási tényező tartozik. Ezzel ellentétben, amennyiben a tartály kis térfogatú (tehát  $\beta$  'nagy', vagy  $\beta^2 \mu^2 \sigma^2 \delta > 1$ ), ellenkező tendenciát figyelhetünk meg.

## 3. Elsődleges instabilitási típusok

Gyakorlati szempontból érdekes lehet az a kérdés is, hogy a tartálméret növelésével hogyan változik a kritikus csillapítási tényező. Ehhez nem kell mást tennünk, mint hogy a (3.55) kritériumból elhagyjuk az  $\mathcal{O}(\beta^2)$  tagot és így kapjuk, hogy

$$\tilde{k}_{krit.} \Big|_{q_{be}=0, \beta=0} \approx \beta \left( \mu\sigma\sqrt{\delta} + \frac{q_{be}}{2\delta} \right) + \mathcal{O}(\beta^2, q_{be}^2) \propto \frac{1}{V_t}. \quad (3.56)$$

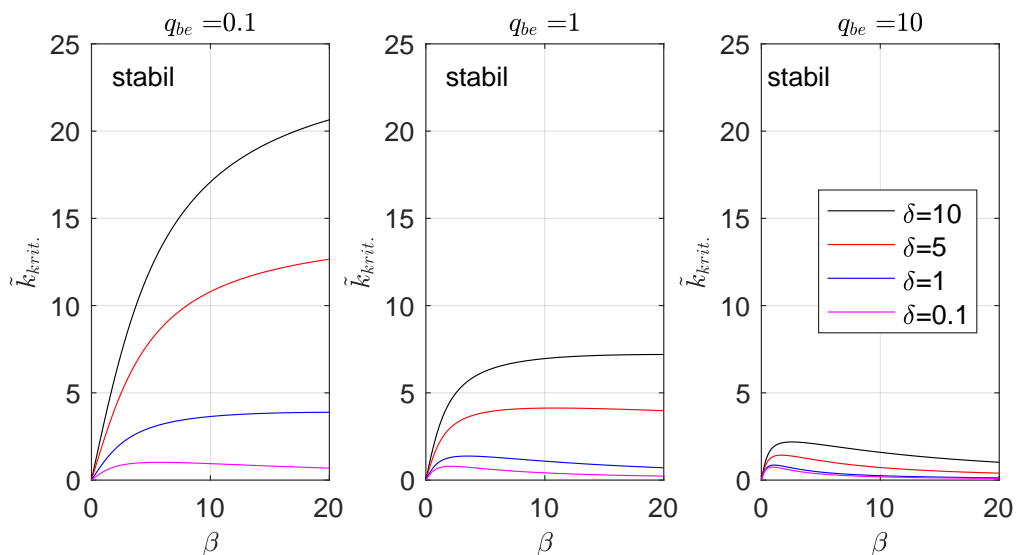
A 10 (a) ábrán a kritikus csillapítási tényezőt láthatjuk a térfogatáram ( $q_{be}$ ) függvényében, a (b) és (c) ábrákon az (a) ábrán megjelölt paraméterekhez tartozó időjeleket (a jelölők és az időjelek színei összetartoznak). Ezeken az ábrákon a vízszintes tengelyen az időt átskáláztuk a szelep sajátfrekvenciájának segítségével, így jól láthatóvá válik, hogy a kialakuló rezgés frekvenciája megegyezik a szelep sajátfrekvenciájával.



10. ábra. A tartály-szelep modell (TszM) stabilitási diagramja. (a): kritikus csillapítás a térfogatáram függvényében, az analitikus stabilitási határokkal: (3.52) (pontos) – fekete, (3.55) (közelítő) – kék szaggatott vonal. (b) és (c) ábra: numerikus szimulációval kapott időjelek az (a) ábrán megjelölt paraméterek esetén. Paraméterek:  $\delta = 7.276$ ,  $\alpha = 8.919$ ,  $\sigma = 2.929$ ,  $\beta = 1.711$ ,  $\mu = 0.0121$ .

A 11. ábrán a (3.52) összefüggés segítségével kiszámított kritikus csillapítási tényező határológörbéi láthatók a  $\beta$  paraméter függvényében három térfogatáram esetén (a 3. eset, melynél  $q_{be} = 10$ , műszaki szempontból nem releváns, ám azt jól mutatja, hogyan tolódnak el a görbék). Ezeket a görbéket az AUTO (ld. [27]) szoftverrel számítottuk ki, közvetlenül

a (3.48)–(3.50) rendszerből<sup>11</sup>. Világosan látható, hogy növekvő nyitónyomásokhoz (növekvő  $\delta$  értékek) egyre kisebb stabil tartomány tartozik, tehát egyre nagyobb csillapításra van szükség a stabil szelepnitás fenntartásához. A térfogatáram növelésével (nagy  $\beta$  érték esetén) csökken a szükséges csillapítás, ami egybevág korábbi megfigyeléseinkkel. Vegyük észre azonban, hogy ezek a  $\beta$  értékek meglehetősen nagyok és a gyakorlati életben ritkán találkozunk ilyen értékkel. Ahogy az a 6. táblázatban (M-12. oldal) látható, egy kisméretű  $1E2^{12}$  szelep, víz munkaközeg esetén, egy kisméretű, 100 literes tartállyal  $\beta = 3.19$ -es érték adódik, és  $\beta = 10$ -nél nagyobb értéket csak akkor kapunk, ha ugyanezre a tartályra egy irreálisan nagyméretű 2J3 vagy 3L4 szelepet szerelünk. Ugyanezeket a szelepeket egy  $10m^3$ -es tartályra szerelve, a legnagyobb (3L4) szelep esetén is  $\beta < 1$ -et kapunk. Levegő munkaközeg esetén, ugyanezen esetekben jellemzően két nagyságrenddel kisebb  $\beta$  értéke.



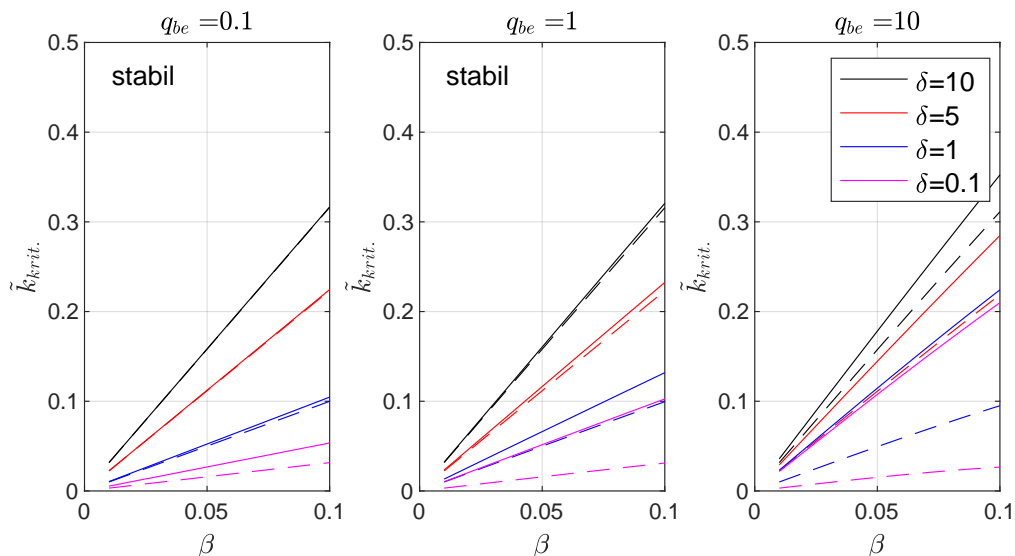
11. ábra. Kritikus csillapítási tényező a tartályméret függvényében. A  $0 \leq \beta \leq 0.1$  tartományt kinagyítottuk a 12. ábrán.

A 12. ábrán kinagyítottuk a kis  $\beta$  értékekhez tartozó területeket és szaggatott vonallal feltüntettük a (3.55) összefüggés által szolgáltatott becslést. Azt láthatjuk, hogy kis térfogatáramokra és nagy tartályokra (kis  $\beta$  értékek) az analitikus becslés elfogadható pontosságú.

Ebben a fejezetben tehát meghatároztuk azt a minimális viszkozus csillapítási tényezőt, ami ahhoz szükséges, hogy a szelep stabilan nyithasson. Azt találtuk, hogy ez a kritikus csillapítás csökken a tartályméret növekedésével és

<sup>11</sup>Ez a szoftver képes dinamikai rendszerek egyensúlyi helyzeteinek, periodikus pályáinak ill. bifurkációinak numerikus követésére. Ennél a számításnál a kritikus csillapítási értékhez tartozó Hopf bifurkációt követtük  $\beta$  és  $q_{be}$  változtatása mellett.

<sup>12</sup>A szelepek kódolása során a két szám a bemenő és kimenő karima mérete inch-ben, a középső betű pedig a fojtási keresztmetszet API526 [44] szerint.



12. ábra. Kritikus csillapítási tényező a tartálméret függvényében, kis  $\beta$  értékekre ("nagy" tartály esete). A szaggatott vonalak a (3.55) becslést mutatják.

- a szükséges csillapítási tényező csökken a tartálytér fogat növelésével és
- kellően nagy tartályok  $\beta < 0.1$  esetén enyhén növekszik a térfogatárammal (a  $0 \leq q_{be} \leq 1$ ) tartományban

Természetesen felmerül a kérdés, hogy a valódi szelepek esetén rendelkezésre áll-e ez a csillapítás, és ha nem, mi tehetünk? Ahogy már korábban említettük, a szabvány kifejezett tiltja mesterséges csillapítás hozzáadását, ám a gyakorlati tapasztalat az, hogy ez a fajta instabilitás ritkán fordul elő. Ennek oka valószínűleg az, hogy a meglehetősen nagy tartályok miatt szükséges alacsony csillapítás természetes módon rendelkezésre áll egyrészt a súrlódó alkatrészek felületén, ill. az áramló folyadékban. Ez utóbbi kérdéssel foglalkozik a B melléklet, ahol azt mutatjuk meg, hogy – számos, jelentős egyszerűsítés után – a  $\tilde{k}$  csillapítási tényező arányos a szelepen átfolyó tömegárammal, ld. (B.166) összefüggés az M-5. oldalon.

### 3.3. Helmholtz instabilitás

Az áramlástanban és akusztikában jól ismert jelenség, hogy egy tartály és az ahhoz kapcsolt csővezeték rugó-tömeg típusú lengőrendszert alkot, melynek sajátfrekvenciája (ld. pl. [17])

$$\omega_H = a_t \sqrt{\frac{A_{cs}}{V_t L_{cs}}}, \quad (3.57)$$

ahol  $a_t$  a hangsebesség,  $V_t$  a tartály térfogata,  $A_{cs}$  a csővezeték keresztmetszete és  $L_{cs}$  a csővezeték hossza. Természetesnek tűnik feltételezni, hogy ez a Helmholtz-frekvencia egybeeshet a szelep sajátfrekvenciájával, rezonanciát eredményezve.

A Helmholtz-rezonátorok klasszikus elmélete a csőbeli áramlást "dugószerűnek", azaz időben ugyan változónak, de a cső axiális irányában állandó sebességűnek tételezi fel (a radiális és kerületi sebességkomponenseket elhanyagoljuk). Más szavakkal, a jelenség leírásához csupán a csőben áramló közeg tehetetlenségét szükséges figyelembe venni, az összenyomhatóságot, a sűrűlódást és a hullámjelenségeket elhanyagolhatjuk, ezért a 2.3.1 fejezetben ismertetett instacionárius Bernoulli egyenletre épülő csőmodellt fogjuk alkalmazni.

Kapcsoljuk össze tehát a szelep (2.22) mozgásegyenletét, a tartálydinamikát leíró (2.28) egyenletet és az instacionárius Bernoulli egyenlet (2.32) dimenziótlan alakját! Bevezetve az  $y = (\tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{p}_t, q_{ki})^T$  változót, a rendszer dinamikai viselkedését a

$$\begin{aligned}\tilde{x}' &= y_2 \\ y_2' &= -\kappa y_2 - (\tilde{x} + \delta) + \tilde{p}_v \\ \tilde{p}_t' &= \beta (q_{be} - q_{ki}) \\ q_{ki}' &= \frac{\mu}{\alpha\gamma} (\tilde{p}_t - \tilde{p}_v) - \frac{\varphi}{\mu} q_{ki} |q_{ki}| \quad \text{ahol} \quad \tilde{p}_v = \left( \frac{q_{ki}}{\mu\sigma\tilde{x}} \right)^2.\end{aligned}\quad (3.58)$$

egyenletrendszer írja le. Az első két egyenlet a szelepdinamikát írja le, a második a tartálybeli nyomás megváltozását, míg az utolsó egyenlet a csővezetékbeli közeg tehetetlensége miatti dinamikát. A fenti egyenletekben  $q_{ki} = \mu\tilde{v}$  (ld. (2.29) összefüggés a 18. oldalon) és  $\tilde{v}$  a csőbeli (dugószerű) sebességet jelenti, melyet  $v_{ref} = \omega x_{ref}$ -fel dimenziótlanítottunk. A harmadik és negyedik egyenlet tulajdonképpen egy gerjesztett Helmholtz rezonátor mozgásegyenlete, hiszen

$$\tilde{p}_t'' = -\beta q_{ki}' = -\beta \frac{\mu}{\alpha\gamma} \tilde{p}_t + \dots, \quad (3.59)$$

melynek sajátfrekvenciája  $\frac{\beta\mu}{\alpha\gamma} = a^2 \sqrt{\frac{A_p}{L_p V_r}} \frac{1}{\omega_p^2} = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ , ahol  $\omega_H$  a Helmholtz-frekvencia. A fenti rendszere lineáris stabilitásvizsgálatot elvégezve kapjuk, hogy a szelep egyensúlyi helyzete stabil, amennyiben

$$\boxed{\gamma > \beta \frac{\mu}{\alpha} \quad \text{vagy, a fizikai paraméterekkel kifejezve} \quad L_{cs} > \frac{a^2 A_{cs}}{V_t} \frac{1}{\omega^2}}, \quad (3.60)$$

ami azt jelenti, hogy stabil szelepműködés eléréséhez a szelep sajátfrekvenciájának a Helmholtz-frekvencia *felett* kell lennie.

A gyakorlati esetek nagy többségében ez teljesül, mivel a nagy tartálytérfogatok miatt a Helmholtz frekvencia igen alacsony (néhány Hz). Azonban könnyen előfordulhat olyan eset (különösen víz munkaközeg esetén, ahol magasabb a hullámsebesség és emiatt a Helmholtz frekvencia), hogy a szelep sajátfrekvencia és a Helmholtz frekvencia egy nagyságrendbe esik.

Például, az 5. táblázatból (M-11. oldal) a 3L4 szelepet választva példaként, a szelep sajátfrekvenciája  $f_{sz} = \sqrt{s/m}/(2\pi) = \sqrt{120 \times 10^3/6.64}/(2\pi) = 21.6$  Hz. A Helmholtz-frekvencia

( $D_{cs} = 3'' = 76.2\text{mm}$ ,  $L_{cs} = 10 D_{cs}$ ,  $V_t = 10\text{m}^3$ ,  $a_t = 1300\text{m/s}$ )  $f_H = a_t \sqrt{A_{cs}/(V_t L_{cs})}/(2\pi) = 5.05\text{ Hz}$ , ami ugyan jóval a szelep sajátfrekvencia alatt van, de összemérhető vele. Abban az esetben, ha a tartály csak 100 literes lenne,  $f_H = 50\text{ Hz}$  adódik, ami már a szelep sajátfrekvencia felett van, tehát instabil működést fog eredményezni.

Általánosságban tehát azt mondhatjuk, hogy a Helmholtz instabilitás előrejelzése egyszerűen elvégezhető és (a gyakorlatban előforduló) nagy tartály és/vagy hosszú cső esetén nem okozhat problémát, az ellenőrzést magát azonban el kell végezni, mivel a szelep- és a Helmholtz frekvencia könnyen egy nagyságrendbe eshet.

### 3.4. Negyedhullám instabilitás

#### 3.4.1. Bevezetés

Az egyik leggyakrabban előforduló instabilitási típus az ún. negyedhullám-instabilitás. A tartály és a szelep közötti csővezeték jelenléte lehetővé teszi állóhullámok kialakulását, melyek a szelep- és tartálydinamikával kapcsolódva "szelepcsattogáshoz" (valve chatter, valve flutter) vezetnek. Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, általában az első "orgonasíp-módus" (zárt végű orgonasíp) alakul ki a csővezetékben, azaz egy olyan hullám, melynek hullámhossza a csővezeték hosszának négyszerese, frekvenciája pedig

$$f_{NH} := \frac{1}{4} \frac{a_t}{L_{cs}}, \quad (3.61)$$

ahol  $a_t$  a hangsebesség<sup>13</sup>,  $L_{cs}$  pedig a csőhossz. Ennek oka az, hogy a nyomásfluktuáció a csővezeték tartály felőli végén – kellően nagy tartály és kis amplitúdójú szeleprezgés esetén – jó közelítéssel zérus marad (tehát a nyomáseloszláson csomópont), míg a rezgő szelep felőli végén a nyomásingadozás maximális (állandó nyomás esetén a szelep nem rezegne), így közelítőleg egy negyed szinuszhullám alakú a nyomáseloszlás. (A későbbiekben precízebben is kimutatjuk ugyanezt és megvizsgáljuk a magasabb módusok kialakulásának lehetőségét is.) Intuitív módon azt mondhatjuk, hogy kis szelepnitások esetén a csővezeték egyik vége (a tartály felőli) nyitott, míg a szelep felőli vége (közelítőleg) zárt.

Hasonló tapasztalatokról számos kutató is beszámol a kapcsolódó szakirodalomban, pl. [3]-ban a szerzők ezt a negyedhullám frekvenciát találják a dominánsnak méréseikben. Hasonlóan, [58]-ben az *alvızoldali* csővezetékhez tartozó negyedhullám frekvenciát mutatják ki a szelep elmozdulásának időjelében. Tamura és szerzőtársai a [71] munkában kimutatják a negyed állóhullám jelenlétét numerikus szimuláció segítségével. Ugyanakkor matematikai

<sup>13</sup>Feltesszük, hogy a csővezetékben és a tartályban azonos a hangsebesség. Ez (cseppfolyós) folyadékok esetén nem igényel indoklást, gázok esetében azonban a tartályban magasabb a hullámsebesség, mivel a csőbe való belépéskor a közeg felgyorsul, expandál, ezért csökken a hőmérséklete. Ezt a hőmérséklet változást, ill. a csőfalon keresztüli hőáramot izotermikus állapotváltozással közelítjük.



értelemben vett precíz leírás, részletesen dokumentált kísérleti eredmények, valamint az instabil paramétertartományok leírását [HCs5, HCs9, HCs10] irodalmon belül jelen szerző közölte először.

Ebben a fejezetben ismertetjük az ún. *negyedhullám-modellt*, mely egyrésztől redukált módon (csak közönséges differenciálegyenletek segítségével) képes leírni a jelenséget, másrésztől egyszerűségénél fogva alkalmas analitikus (tehát a mérnöki gyakorlatban könnyen és gyorsan alkalmazható) ellenőrzési összefüggések levezetésére. Ugyanakkor amikor negyedhullám modellről beszélünk, valójában egy *modell-családot* értünk alatta, mivel tetszőleges számú módus figyelembe vehető a következőben ismertetett gondolatmenettel. A továbbiakban a 3.4.2. alfejezetben bemutatjuk a modell levezetését a legegyszerűbb esetre – folyadék munkaközeg, negyedhullám módus – viszonylag részletesen, majd a 3.4.3. alfejezetben gáz munkaközegre, tetszőleges módusszámra is.

### 3.4.2. Folyadék munkaközeg, negyedhullám módus

Modellünk kiindulópontja tehát a (2.22) szelep mozgásegyenlet, a tartálydinamikát leíró (2.28) egyenlet, az egydimenziós kontinuitási egyenlet (2.41) és az áramló közegre vonatkozó (2.42) mozgásegyenlet. Mivel olyan megoldásokat keresünk, melyek a csőben egy  $4L_{cs}$  hullámhosszú állóhullámot írnak le, Ansatz-ként feltesszük, hogy a csőbeli nyomás- és sebességeloszlás

$$\tilde{p}(\xi, \tau) := \tilde{p}_t(\tau) + B(\tau) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \quad \text{ill.} \quad (3.62)$$

$$\tilde{v}(\xi, \tau) := \tilde{v}_v(\tau) + C(\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (3.63)$$

alakú. Emlékeztetőül, a csővezeték menti axiális koordináta  $0 \leq \xi \leq 1$  (ld. 4. ábra a 8. oldalon),  $\tilde{x}$  a dimenziótlan szelepnnyitás,  $\tilde{p}_t(\tau)$  a dimenziótlan tartálynyomás. A cső elején a nyomás megegyezik a tartálynyomással:  $\tilde{p}(0, \tau) = \tilde{p}_t(\tau)$  (a belépési nyomásesést jelenleg elhanyagoljuk), míg a cső szelep felőli végén a nyomás  $\tilde{p}(1, \tau) = \tilde{p}_t(\tau) + B(\tau) = \tilde{p}_v(\tau)$ . Ugyanitt a sebesség  $\tilde{v}(1, \tau) = \tilde{v}_v(\tau)$ , ahol

$$\tilde{v}_v(\tau) = \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_v(\tau) - 1} = \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_t(\tau) + B(\tau) - 1}, \quad (3.64)$$

ami biztosítja a (2.31) átfolyási egyenlettel kompatibilis peremfeltételt. ( $\sigma$  paraméter pl. a 2. táblázatban található a 23. oldalon.) A csővezeték tartály felőli végén  $\tilde{v}(0, \tau) = \tilde{v}_v(\tau) + C(\tau)$ .

Mivel folyadék a munkaközegünk, a csődinamika leírása közben elhanyagoljuk a konvektív tagokat ( $\Lambda = 0$ ) és a csősúrlódásból adódó nyomásesést is figyelmen kívül hagyjuk ( $\varphi = 0$ ). Az egydimenziós kontinuitási egyenletbe (2.41) és mozgásegyenletbe (2.42) ezután behelyettesítjük a (3.62) és (3.63) összefüggéseket. Mivel ezek csak közelítő megoldások, megköveteljük, hogy a  $\xi = 1/2$  pontban (a cső közepén) az egyenletek pontosan teljesüljenek,

azaz egy egy pontos kollokációs módszert alkalmazunk.<sup>14</sup> Mivel

$$\tilde{p}\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \tilde{p}_t(\tau) + \frac{\sqrt{2}}{2}B(\tau) \quad \text{és} \quad \tilde{v}\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = \tilde{v}_v(\tau) + \frac{\sqrt{2}}{2}C(\tau), \quad \text{ill.}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{p}(\xi, \tau)\right|_{\xi=\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}B(\tau) \quad \text{és} \quad \left.\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{v}(\xi, \tau)\right|_{\xi=\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}C(\tau).$$

Elvégezve a behelyettesítést és rendezve az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$B' = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\pi}{2}C - \sqrt{2}\tilde{p}'_t \quad \text{és}$$

$$C' = -\frac{1}{\alpha\gamma}\frac{\pi}{2}B - \sqrt{2}\tilde{v}'_v, \quad \text{ahol}$$

$$\tilde{v}'_v = \frac{d}{d\tau}\left(\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t + B - 1}\right) = \sigma\sqrt{\tilde{p}_t + B - 1}\left(\tilde{x}' + \frac{\tilde{x}\tilde{p}'_t + B'}{2\tilde{p}_t + B}\right).$$

Ezek tehát a redukált csődinamikát leíró egyenletek, melyek csak negyed állóhullám jelenléte esetén érvényesek. A teljesség kedvéért megadjuk a legegyszerűbb negyedhullámmodellt, mely a fenti két egyenlet és a szelep mozgásegyenlet, valamint a tartálydinamikát leíró egyenlet és az átfolyási egyenlet összekapcsolásával adódik:

$$\tilde{x}'' = -\tilde{k}\tilde{x}' - (\delta + \tilde{x}) + A_{\text{eff}}(\tilde{x})(\tilde{p}_t + B - 1), \quad (3.65)$$

$$\tilde{p}'_t = \beta \left[ q - \mu(\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t + B - 1} + C) \right], \quad (3.66)$$

$$B' = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\gamma}C - \sqrt{2}\tilde{p}'_t, \quad (3.67)$$

$$C' = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha\gamma}B - \sqrt{2}\sigma\frac{d}{d\tau}\left(\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t + B - 1}\right). \quad (3.68)$$

A fenti alak analitikus vagy numerikus számításokra alkalmas alakja a fenténél kissé bonyolultabb, mivel a (3.67) egyenletben  $\tilde{p}'_t$  helyére be kell helyettesíteni a (3.66) tartálydinamikát leíró egyenletet, valamint a (3.68) egyenlet utolsó tagja sincsen ( $\frac{d}{d\tau}\dots$ ) kifejtve. A D.1 mellékletben megtalálható a csődinamika levezetése 1 módusra, míg a D.2 mellékletben 2 módusra is közöljük az egyenleteket.

Mielőtt rátérnénk a 3.4.4. fejezetben a negyedhullám modell stabilitásvizsgálatra, megismételjük a számítást egy bonyolultabb esetre is.

### 3.4.3. Gáz munkaközeg, tetszőleges módusszám

Ebben a fejezetben egy jóval bonyolultabb negyedhullám modellt mutatunk be, de itt már csak formálisan vezetjük végig a lépéseket, mivel a levezetés meglehetősen hosszadalmas és

<sup>14</sup>Alkalmazhatnánk Galjorkin vetítést is, mely a teljes intervallumra minimalizálná a hibát, ám a kollokációs módszer egyszerűbb számítást igényel.

számítógépes algebra rendszerek (pl. Wolfram Mathematica, Maxima, Maple) segítségével jól automatizálható. Sőt, a numerikus szimulációhoz szükséges Matlab/Octave/C++/stb. kódok is automatikusan generálhatók. A modell bonyolultságának két oka van; egyrésztől gáz munkaközeg esetén sem a konvektív tagok, sem a belépő nyomásesés nem hanyagolható el, másrésztől meg fogjuk engedni tetszőleges módusszám jelenlétét. Ez utóbbira azért lesz szükségünk, hogy kimutassuk, hogy a magasabbrendű módusok jelenlétében is az első negyedhullám módus válik először instabillá, így a későbbi vizsgálatok során elegendő ezen egyetlen módus stabilitását ellenőrizni.

Gáz munkaközeg esetén néhány módosítást kell eszközölnünk az előző modellen. Mindezekelőtt a közeg összenyomhatóságával kell foglalkoznunk, ám korábban már bizonyítottuk, hogy a szóban forgó biztonsági szelepek a  $p_{ny}$  nyitónyomás 90 és 110 %-a között működnek (ld. 1.2. fejezet), tehát egy meglehetősen szűk nyomástartományban. Mindezek tükrében a csőbeli közeg dinamikáját leíró (2.38) - (2.39) (fizikai mennyiségeket tartalmazó forma), ill. (2.41) - (2.42) (dimenziótlan forma) *összenyomhatatlan* áramlást leíró egyenletek továbbra is alkalmazhatók, amennyiben a  $\rho$  sűrűség alatt a  $p_e$  egyensúlyi nyomáshoz tartozó sűrűséget értjük, a hangsebesség kiszámításánál pedig ugyanehhez az egyensúlyi nyomáshoz tartozó hőmérsékletet használjuk.<sup>15</sup>

A második kérdés, amit meg kell vizsgálnunk, a közeg a tartályból a csővezetékbe való belépése és izentrópus felgyorsulása miatti nyomásesés. Ez folyadékok esetében elhanyagolható mértékű, mivel az áramlási sebességek nem jelentősek<sup>16</sup>, gáz munkaközeg esetében azonban alaposabb vizsgálatra van szükség. A peremfeltételek az előzőekhez hasonlóak; a csővezeték elején a statikus nyomás a tartálynyomásból nyerhető izentrópus áramlás feltételezésével:

$$c_p T_t = c_p T + \frac{v(0,t)^2}{2} \quad \text{és} \quad \frac{p}{\rho} = RT, \quad \text{ezért}$$

$$p_t = p \frac{\rho_t}{\rho} + \frac{\rho_t}{2} v(0,t)^2 \frac{R}{c_p}.$$

Most megvizsgáljuk a  $\frac{\rho_t}{\rho}$  hányados nagyságrendjét. A C melléklet (M-8. oldal) a 8 táblázatában számos nyitónyomásra és szeleptípusra megadtuk a csőbeli Mach számot maximális (névleges) tömegáram esetére, a nyitónyomáson érvényes sűrűség feltételezésével. (Bár az áramlás sebessége nő a csőben – mivel a sűrűlődből eredő nyomáscsökkenés miatt expandál, ld. [84] vagy [38] Fanno áramlás fejezet – ez a változás nem jelentős.) Ez az  $M$  érték jellemzően 0.25-nél kisebb (kivéve kisebb szelepeket nagy nyitónyomáson, ld. 5 táblázat 3. oszlopa

<sup>15</sup>A későbbiekben az állandó hőmérséklet és sűrűség feltételezésével kapott eredményeket össze fogjuk vetni általános megoldók – GDM, CFD – eredményeivel is.

<sup>16</sup>Víz munkaközeg és 1m/s áramlási sebesség esetében  $\frac{\rho}{2}v^2 = 500 \text{ Pa} = 0,005 \text{ bar}$  dinamikus nyomásesésről van szó.

az M-11. oldalon). Mivel ideális gáz izentrópikus állapotváltozása esetén

$$\frac{\rho_t}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

ezért  $M = 0.25$ -ös értéknél levegőre ( $\kappa = 1.4$ ) a  $\frac{\rho_t}{\rho} = 1.0315$ , ezért a  $\rho_t \approx \rho$  közelítés csak 3.2%-os hibát jelent. Így a cső tartály-végi peremfeltétel végső alakja (gáz esetére) a

$$p(0,t) \approx p_t - \frac{\rho_t}{2} v(0,t)^2 \frac{R}{c_p}$$

alakot ölti. Ez csak az  $R/c_p$  szorzóban különbözik a folyadékok esetében érvényes összefüggéstől, ezért a tartály-felőli peremfeltétel dimenziótlan, közelítő alakja:

$$\tilde{p}(0,\tau) = \tilde{p}_t - \chi (\tilde{v}(0,\tau))^2 \quad \text{ahol} \quad \chi = \frac{\rho_t x_{\text{ref}}^2 \omega_v^2}{2p_{\text{ref}}} \times \begin{cases} \frac{R}{c_p} & \text{(ideális) gázokra és} \\ 1 & \text{folyadékokra.} \end{cases} \quad (3.69)$$

A cső szelep-felőli végén a (2.10) (fizikai mennyiségekkel megfogalmazott) vagy a (2.30) (dimenziótlan) átfolyási egyenlet teljesülését írjuk elő ( $q = \mu \tilde{v}$ ):

$$\tilde{v}(1,\tau) = \mathcal{A} \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}(1,\tau)}. \quad (3.70)$$

A továbbiakban tányérszelepet vizsgálunk, ezért  $\mathcal{A} = 1$ . Most állítsuk elő a csőbeli nyomás-és sebességeloszlást  $N$  számú állóhullám összegére

$$\tilde{p}(\xi,\tau) = \underbrace{\tilde{p}_t(\tau) - \chi (\tilde{v}(0,\tau))^2}_{:=\tilde{p}_e} + \sum_{k=1}^N B_k(\tau) \sin\left(2\pi \frac{\xi}{4}(2k-1)\right) \quad (3.71)$$

$$\tilde{v}(\xi,\tau) = \underbrace{\sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}(1,\tau)}}_{:=\tilde{v}_v} + \sum_{k=1}^N C_k(\tau) \cos\left(2\pi \frac{\xi}{4}(2k-1)\right). \quad (3.72)$$

Itt  $B_k(\tau)$  és  $C_k(\tau)$ ,  $k = 1, \dots, N$  egyenlőre ismeretlen amplitúdók. Vegyük észre, hogy a peremfeltételek teljesüléséhez csak a  $4L$ ,  $4L/3$ ,  $4L/5$ , ... hullámhosszakot választottuk ki, amik a tipikus "orgonasíp-módusok" (ld. [6] vagy 6.3.1. alfejezet) olyan csövek esetén, melyeknek egyik vége nyitott, másik vége zárt. A csővezeték elején és végén a nyomás és az áramlási sebesség:

$$\xi = 0: \quad \tilde{p}(0,\tau) := \tilde{p}_e = \tilde{p}_t(\tau) - \chi \tilde{v}_e^2 \quad \text{és} \quad \tilde{v}(0,\tau) := \tilde{v}_e = \tilde{v}_v + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_k(\tau)}_{:=\mathcal{C}(\tau)},$$

$$\xi = 1: \quad \tilde{p}(1,\tau) := \tilde{p}_v = \tilde{p}_e + \underbrace{\sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} B_k(\tau)}_{:=\mathcal{B}(\tau)} \quad \text{és} \quad \tilde{v}(1,\tau) := \tilde{v}_v = \sigma \tilde{x} \sqrt{\tilde{p}_v}.$$

(3.71) és (3.72) csupán *implicit* módon adja meg az eloszlásokat, hiszen  $(\tilde{v}(0,\tau))^2$  és  $\sqrt{\tilde{p}(1,\tau)}$  kifejezéseket még nem adtuk meg.  $\tilde{v}(0,\tau)$  összefüggést (3.72)-ből kifejezve, (3.71)-be behelyettesítve és  $\xi = 1$ -ben kiértékelve kapjuk, hogy

$$0 = \underbrace{(1 + \chi\sigma^2\tilde{x}^2)}_{:=Z} \tilde{p}_v + 2\chi\sigma\tilde{x}\mathcal{C}\sqrt{\tilde{p}_v} + \chi\mathcal{C}^2 - \tilde{p}_t - \mathcal{B}, \quad (3.73)$$

melyet most  $\tilde{p}_v$ -re kell megoldani. Amint már többször említettük, modellünket az egyensúlyi szelepnýtás közelében, kis  $B_k$  és  $C_k$  értékek esetén szeretnénk használni, ezért (3.73) megoldását Taylor-sorba fejtjük  $C_k = B_k = 0$  körül, melynek eredménye

$$\sqrt{\tilde{p}_v} \approx \sqrt{\frac{\tilde{p}_t}{Z}} \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{2\tilde{p}_t}\right) - \frac{\sigma\tilde{x}\chi}{Z}\mathcal{C} + \mathcal{O}(2), \quad (3.74)$$

lesz, ahol  $\mathcal{O}(2)$ -vel a  $B_k$ -ban és  $C_k$ -ban ( $k = 1, \dots, N$ ) legalább másodrendű tagokat jelöltük és bevezettük a

$$Z(\tilde{x}, \chi) = 1 + \chi\tilde{x}^2\sigma^2$$

rövidítést. Hasonló számítással kapjuk, hogy

$$\tilde{v}_e^2 = \left(\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_v} + \mathcal{C}\right)^2 \approx \frac{v_O^2}{Z} \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{\tilde{p}_t}\right) + \frac{2}{Z^{3/2}}v_O\mathcal{C} + \mathcal{O}(2), \quad (3.75)$$

ahol  $v_O = \sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t}$  jelöli a belépési nyomásesés és csőszűrlődés elhanyagolása mellett kialakuló, csővégi dimenziótlan áramlási sebességet. Végül a (3.74) és a (3.75) kifejezéseket visszahelyettesítjük (3.71)-be és (3.72)-be.

Most már behelyettesíthetjük (3.71) és (3.72) egyenleteket a (2.41) kontinuitási és (2.42) mozgásegyenletbe, majd a kollokációs módszer (ld. [15]) segítségével KDER<sup>17</sup>-re alakítjuk az egyenleteinket; megköveteljük, hogy a

$$\xi = \xi_k = \frac{k}{N+1}, \quad \text{ahol } k = 1, 2, \dots, N$$

pontokban az egyenletek hibája pontosan zérus legyen. Végül a kapott – immár csak időbeli deriváltakat tartalmazó egyenleteket – rendezzük a  $B'_k$  és  $C'_k$  tagokra. Ezeket a számításokat

<sup>17</sup>Közönséges differenciálegyenlet rendszer

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$a_1$	1.4142				
$a_2$	1.1547	0.4227			
$a_3$	1.3066	0.3244	0.2168		
$a_4$	1.2311	0.4242	0.1682	0.1336	
$a_5$	1.2869	0.3804	0.2392	0.1059	0.091

4. táblázat. Az  $a_k$  együttható értéke  $N = 1 \dots 5$  esetekben.

elvégezve az alábbi alakú,  $2N$  méretű KDER-t kapunk:

$$\begin{aligned}
B'_k &= -a_k \tilde{p}'_t + b_k \frac{\alpha}{\gamma} C_k \\
&+ \Lambda \left( v_O \sum_m \tilde{b}_{km} B_m + \sum_{m,n} \hat{b}_{kmn} B_m C_n + \frac{v_O}{\tilde{p}'_t} \sum_{m,n} \bar{b}_{kmn} B_m B_n \right) \\
&+ \mathcal{O}(\chi),
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
C'_k &= (-1)^k a_k \frac{d}{d\tau} \hat{V}_1 - b_k B_k \frac{1}{\alpha\gamma} + \\
&+ \Lambda \left( v_O \sum_m \tilde{c}_{km} C_m + \frac{v_O}{\tilde{p}'_t} \sum_{m,n} \hat{c}_{kmn} B_m C_n + \sum_{m,n} \bar{c}_{kmn} C_m C_n \right) \\
&+ \phi \left( f_k v_O^2 + 2v_O C_k + \hat{f}_k C_k^2 + \sum_m \tilde{f}_{km} \frac{v_O^2}{\tilde{p}'_t} B_m + \sum_{m,n} \bar{f}_{kmn} \frac{v_O^2}{\tilde{p}'_t^2} B_m B_n \right) \\
&+ \mathcal{O}(\chi).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

A fent jelzett,  $\mathcal{O}(\chi)$  tagok is explicit módon megadhatók, de ezek igen hosszú kifejezések és kiírásuk több oldalt venne igénybe. Az egyenletek struktúrája világosan látszik: a  $B'_k$  és  $C'_k$  egyenlet-párok négy részből állnak: a lineáris tagok  $a_k$  és  $b_k$  együtthatókkal, valamint három további nemlineáris tag, melyek a konvektív tagokból ( $\Lambda$  együttható), a csősúrlódásból ( $\varphi$  paraméter) és a belépési nyomásesésből ( $\chi$  paraméter) erednek. A  $b_k$  együtthatók explicit módon megadhatók:

$$b_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2}$$

és nem változnak a módusszám  $N$  változtatásával, míg a többi együttható ( $a_k$ ,  $\tilde{b}_{km}$ , stb.) kissé függenek  $N$ -től; példaképpen néhány értéket megadtunk a 4. táblázatban.

Végül, a fenti egyenletek csatoljuk a szelep- és tartálydinamikát leíró (2.22) és (2.28) egyenletekkel. Így a módusszám megadása után a csődinamikát leíró egyenletrendszer kézzel vagy számítógépes algebrai rendszerrel automatikusan generálható. Amennyiben pl. egyetlen

módusra szűkítjük a vizsgálatot, a

$$\begin{aligned}\tilde{x}'' &= -\tilde{k}\tilde{x}' - (\delta + \tilde{x}) + \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}) (\tilde{p}_t + B_1 - 1) \\ \tilde{p}_t' &= \beta (q_{be} - \mu\tilde{v}_e), \\ B_1' &= -\sqrt{2}\tilde{p}_t' + \frac{\pi\alpha}{2\gamma}C_1 - \Lambda\frac{\pi}{2}B_1 \left( \tilde{v}_v + \frac{C_1}{\sqrt{2}} \right), \\ C_1' &= -\sqrt{2}\frac{d}{d\tau}\tilde{v}_v - \frac{\pi}{2\alpha\gamma}B_1 + \Lambda\frac{\pi}{2}C_1 \left( \tilde{v}_v + \frac{C_1}{\sqrt{2}} \right) + \varphi \left( \sqrt{2}\tilde{v}_v^2 + 2\tilde{v}_vC_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}C_1^2 \right).\end{aligned}$$

KDER-t kapjuk, mely – a lineáris rész tekintetében – megegyezik a cseppfolyós közegre kapott (3.65) – (3.68) egyenletrendszerrel.

### 3.4.4. Stabilitás

Most vizsgáljuk meg a negyedhullám modell stabilitási tulajdonságait! Az egyszerűség kedvéért az analitikus számítások során

- elhanyagoljuk a csősúrlódás hatását ( $\varphi = 0$ ),
- elhanyagoljuk a konvektív tagokat ( $\Lambda = 0$ ),
- elhanyagoljuk a belépési nyomásesést ( $\chi = 0$ ),
- feltesszük, hogy csak a  $k$ -adik módust gerjesztjük és
- csillapítatlan szelepet vizsgálunk ( $\tilde{k} = 0$ ).

A későbbiekben mutatunk majd numerikus eredményeket a teljes rendszeren is a fent elhanyagolt hatások elemzésére. Legyen egy adott  $q_{be}$  (dimenziótlan) tömegáramhoz tartozó egyensúlyi szelepnívó  $\tilde{x}_e$ , az egyensúlyi tartálynomás pedig  $\tilde{p}_{t,e}$ . Az egyensúlyi helyzetben a szelep sebessége természetesen zérus és hasonlóan, a csőbeli állóhullám időfüggő amplitúdói is zérusok, azaz  $B_k = C_k = 0$ , ld. (3.76) és (3.77) egyenletek. Az egyensúlyi helyzetben teljesülnie kell a

$$\begin{aligned}\tilde{p}_e &= \tilde{p}_v = \tilde{p}_{t,e} && \text{ld. (3.69),} \\ (\tilde{x}_e + \delta) &= \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) (\tilde{p}_{t,e} - 1) && \text{ld. (2.22),} \\ q_{be} &= \mu\sigma\tilde{x}_e\sqrt{\tilde{p}_{t,e}} && \text{ld. (2.28) és (2.30)}\end{aligned}$$

összefüggéseknek. Vizsgáljunk az egyensúlyi helyzet körüli kis zavarásokat és tegyük fel, hogy csak a  $k$ -adik lengésképet gerjesztettük. Ekkor  $\tilde{x} = \tilde{x}_e + \varepsilon Y(\tau)$ ,  $\tilde{x}' = 0$ ,  $\tilde{p}_t = \tilde{p}_{t,e} + \varepsilon P(\tau)$ ,  $B_i = C_i = 0$  ha  $i \neq k$  és  $B_k, C_k = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , ahol  $\varepsilon > 0$  kis paraméter. Ekkor a (3.76) egyenletet újra deriválva  $\tau$  dimenziótlan idő szerint, majd felhasználva a (3.77) egyenletet, rendezés

után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B_k'' + \left( \frac{(2k-1)\pi}{\gamma} \right)^2 B_k &= a_k \beta \mu \sigma \frac{d}{d\tau} \tilde{v}_e + (-1)^k a_k b_k \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \tilde{v}_v \\ &= (-1)^k a_k b_k \frac{\alpha}{\gamma} \sigma \frac{d}{d\tau} \left( Y \sqrt{\tilde{p}_{t,e}} + \frac{\tilde{x}_e}{2\sqrt{\tilde{p}_{t,e}}} (-1)^{k+1} B_k \right) + \mathcal{O}(\beta), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy kis  $\beta$  (kellően nagy tartály) esetén a  $\tilde{p}_t$  tartálynyomás állandó. A szelepdinamika és a csődinamika egyensúlyi helyzet körüli perturbációjára a

$$Y'' = -Y + \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) (-1)^{k+1} B_k - \tilde{k} Y' \quad (3.78)$$

$$B_k'' = -\omega_k^2 B_k + (-1)^k K_k \left( \sqrt{\tilde{p}_{t,e}} Y' + (-1)^{k+1} \frac{\tilde{x}_e}{2\sqrt{\tilde{p}_{t,e}}} B_k' \right) \quad (3.79)$$

kifejezéseket kapjuk, ahol  $\omega_k$  a  $k$ -adik cső sajátfrekvencia:

$$\omega_k = \frac{b_k \pi}{2\gamma} = \frac{(2k-1)\pi}{2\gamma} \quad (3.80)$$

és  $K_k = a_k b_k \frac{\alpha}{\gamma} \sigma$ . A csődinamikát leíró (3.79) egyenlet jobb oldalának utolsó tagja (a  $K_k$  szorzóval) csillapítás-szerű, mivel  $B_k'$ -t tartalmaz. Amennyiben az  $Y'$  tagot is meg tudnánk adni  $B_k'$  függvényeként, a  $B_k'$  kiemelése után megmaradó mennyiség csillapítási tényező lenne és ennek pozitivitása lenne a stabil egyensúlyi helyzet feltétele, ld. pl. [49].

Vizsgáljuk tehát a (3.78) szelepdinamikát leíró egyenletet abban az esetben, amikor a szelep a stabilitásvesztés "közelében" van, tehát a (3.79) egyenletbeli  $K_k$  kicsi,  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  nagyságrendű. Ekkor  $B_k$  egy  $\omega_k$  frekvenciájú "gyors" rezgésből és egy  $\tau_2 = \varepsilon \tau$  időskálájú "lassú", exponenciálisan növekvő vagy lecsengő "burkoló" megoldásból áll, azaz írható

$$B_k(\tau; \tau_2) = A(\tau_2) \cos(\omega_k \tau) \quad (3.81)$$

alakban. Ezt behelyettesítve a szelepmozgást leíró (3.78) egyenletbe kapjuk, hogy

$$Y'' + \tilde{k} Y' + Y = \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) (-1)^{k+1} A(\tau_2) \cos(\omega_k \tau), \quad (3.82)$$

aminek a partikuláris megoldása (a kezdeti tranziensek lecsillapodása után):

$$Y(\tau) = \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) (-1)^k \frac{A(\tau_2)}{\omega_k^2 - 1} \cos(\omega_k \tau) + \mathcal{O}(\tilde{k}) = \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) \frac{(-1)^k}{\omega_k^2 - 1} B_k + \mathcal{O}(\tilde{k}). \quad (3.83)$$

Mivel feltettük, hogy a szelep csillapítatlan vagy gyengén csillapított ( $\tilde{k} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ ), a (3.83) összefüggést visszahelyettesítve a (3.79) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$B_k'' + K_k \left( \frac{\tilde{x}_e}{2\sqrt{\tilde{p}_{t,e}}} - \frac{\tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) \sqrt{\tilde{p}_{t,e}}}{\omega_k^2 - 1} \right) B_k' + \omega_k^2 B_k = 0. \quad (3.84)$$



A (3.84) alakból világosan látszik, hogy a csődinamika (és így a szelepdinamika) akkor stabil, ha a zárójelben levő csillapítási együttható pozitív, azaz ha

$$\tilde{x}_e > \tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x}_e) \frac{2\tilde{p}_{t,e}}{\omega_k^2 - 1}. \quad (3.85)$$

Amennyiben – az egyszerűség kedvéért – feltesszük, hogy  $\tilde{A}_{\text{eff}} \equiv 1$ , jól látható, hogy a fenti összefüggés csupán három mennyiséget tartalmaz: az adott átfolyó tömegáramhoz tartozó szelep egyensúlyi helyzetet (dimenziótlan nyomás és szelepnyitás), valamint a csővezeték  $k$ -adik sajátfrekvenciáját,  $\omega_k$ -t. Ez az összefüggés a  $(p_t, x)$  síkon (a fizikai mennyiségekre való visszatérés után) könnyen felrajzolható. Korábban már találkoztunk ezzel az ábrázolásmóddal, pl. a 3. vagy a 8. ábrán. Ezen a síkon a stabil tartomány a (3.85) összefüggéssel megadott egyenesek felett van és, mivel  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$ , a  $k+1$ -edik módus stabil tartománya nagyobb, mint a  $k$ -adik módusé. Így az első (negyedhullám módus) már teljes egészében kijelöli a stabil (fekete folytonos vonal) és instabil (fekete pontozott vonal) szelepnyitások tartományát.

A (3.85) összefüggést nehézkes lehet használni a gyakorlatban, ha nem ismerjük a szelep  $\tilde{x}_e(p_{t,e})$  karakterisztikáját (ami gyakran előfordul). Ezért célszerű kiküszöbölni  $\tilde{x}_e$ -t és  $\tilde{p}_{t,e}$ -t és helyette a szelepen átfolyó  $q_{be}$  tömegáramot használni. Térjünk vissza az egyensúlyi feltételhez és tegyük fel, hogy  $\tilde{A}_{\text{eff}} \equiv 1$ , ekkor az egyensúlyi szelepnyitás a

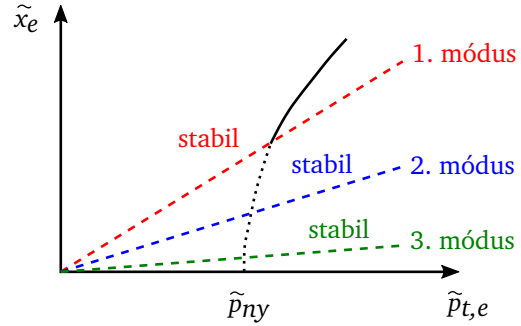
$$\tilde{x}_e + \delta = \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma\tilde{x}_e} \right)^2 - 1 \quad (3.86)$$

harmadfokú egyenlet megoldása, mely kis  $q_{be}/(\mu\sigma)$  értékekre közelítőleg

$$\tilde{x}_e|_{q_{be}=0} \approx \frac{q_{be}}{\mu\sigma\sqrt{\delta+1}} - \frac{q_{be}^2}{2\mu^2\sigma^2(\delta+1)^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{q_{be}}{\mu\sigma}\right)^3\right). \quad (3.87)$$

A lineáris tagot megtartva, a (3.85) stabilitási kritérium  $\tilde{A}_{\text{eff}} \equiv 1$  esetén a

$$q_{be} > 2\mu\sigma \frac{(1+\delta)^{3/2}}{\omega_k^2 - 1} \quad (3.88)$$



13. ábra. A szelep nyitási egyensúlyi görbéje (fekete) és az első három negyedhullám módus által kijelölt stabil tartomány (szaggatott vonalak). A folytonos fekete vonal a stabil szelepnyitásokat, míg a fekete pontvonal az instabil szelepnyitásokat jelöli.

alakot ölti, vagy, elvégezve a  $\omega_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2\gamma}$  helyettesítést, a kritikus csőhosszra kapjuk, hogy

$$\gamma_k < \frac{(2k - 1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + 2\mu\sigma\frac{(1+\delta)^{3/2}}{q_{be}}}} \propto (2k - 1)\sqrt{q_{be}}. \quad (3.89)$$

Ez az összefüggés már *explicit*, mivel direkt módon kiértékelhető, viszont  $q_{be}$  értékét növelve romlik a pontossága.

Összefoglalva ezt a fejezetet: a csőben kialakuló,

$$\omega_k = \frac{\pi(2k - 1)}{2\gamma} \rightarrow f_{NH,k} = \frac{2k - 1}{4} \frac{a_t}{L_{cs}} \quad (3.90)$$

frekvenciájú állóhullámok dinamikai viselkedését a (3.84) egyenlet értelmében a szelep *nonlineáris csillapításként* befolyásolja. A rendszer stabilitása azon múlik, hogy a (3.85) összefüggés teljesül-e, melyre alternatív, a szelep egyensúlyi nyitási görbáját nem igénylő alakot is megadtunk a (3.89) összefüggéssel. Bizonyítottuk, hogy elegendő az első, negyedhullám módust vizsgálni, melyre  $f_{NH} = \frac{a_t}{4L_{cs}}$ .

Az ebben a fejezetben ismertetett számításnál az állóhullámok jelenlétét *a priori* feltettük, bizonyítás nélkül. A 4.2. fejezetben további, kísérleti és numerikus bizonyítékokat fogunk bemutatni és a 6.3.3. fejezetben egy olyan alternatív levezetést mutatunk be, melynél a kritikus csőfrekvencia kiadódó mennyiség.

### 3.5. Pumpálás

Az utolsó instabilitási jelenség szoros összefüggésben van a 3.1. fejezetben már tárgyalt statikus instabilitással; amennyiben egy szelep  $x_e(p_{t,e})$  egyensúlyi görbéjének van visszahajló, instabil ága, és a szelephez kapcsolódó tartály nyomásdinamikája miatt a tartálynyomás nem állandó, hanem "lassan változó" paraméter, könnyen kialakulhat egy alacsonyfrekvenciás nyitás-lefúvás-zárás-töltődés ciklus. Valóban, a kapcsolódó szakirodalom is megjegyzi – ld. [5, 7] – hogy kialakulhatnak alacsonyfrekvenciás lengések is ("flutter"), de az eredetüket nem taglalja.

A jelenség magyarázata viszonylag egyszerűen megadható a korábban részletezett effektív felület segítségével. Tekintsük újra a (3.48)-(3.50) tartály-szelep modellt, de vegyük figyelembe az effektív felületet, ezért módosítsuk a (3.49) egyenletben a  $\tilde{p}_t - 1$  tagot  $\tilde{A}_{\text{eff}}(\tilde{x})(\tilde{p}_t - 1)$ -re. Az effektív felület görbe legyen

$$\tilde{A}_{\text{eff}} = A_0 + A'_0 \tilde{x} + \frac{A_{max} - A_0 - A'_0 \tilde{x}_{max}}{\tilde{x}_{max}^2} \tilde{x}^2 \quad (3.91)$$

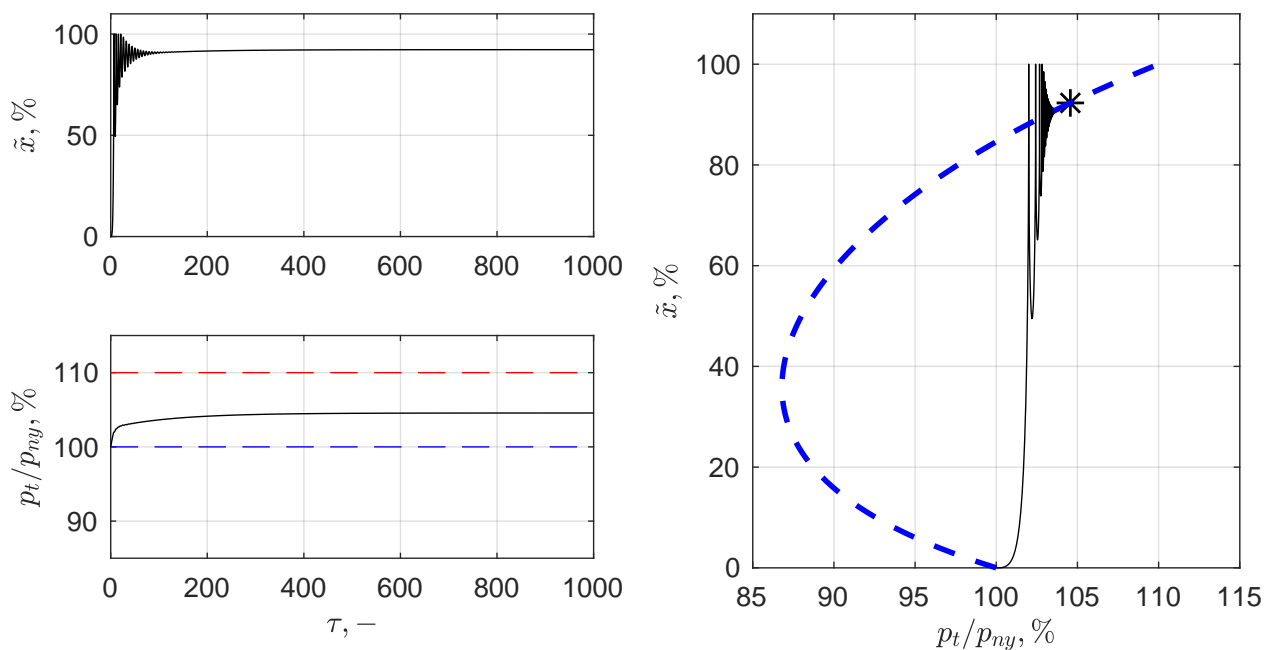
alakban adott. A fenti alakban  $A_0$  a zárt szelep ( $\tilde{x} = 0$ ) esetén mért felület,  $A'_0$  az effektív felület meredeksége  $\tilde{x} = 0$ -ban és a harmadik tag pedig garantálja, hogy  $\tilde{x} = \tilde{x}_{max}$ -ban  $A_{max}$

az effektív felület értéke. Mindhárom érték dimenziótlan és a továbbiakban (önkéntesen) az

$$A_0 = 1, \quad A'_0 = 2 \quad \text{és} \quad A_{max} = \frac{\delta + x_{max}}{1.1\delta} \quad (3.92)$$

értékeket használjuk. A (3.48)-(3.50) rendszer egyensúlyi helyzete  $\tilde{x} = 0$ -ban kielégíti a  $\delta = \tilde{p}_{ny}$  összefüggést ( $\tilde{p}_{ny}$  a szelep dimenziótlan nyitónyomása), míg a fenti  $A_{max}$  érték garantálja, hogy a nyitónyomás 110%-án érjük el a teljes  $\tilde{x}_{max}$  szelepnitást.

A következőkben a (3.48)-(3.50) egyenletrendszer numerikus szimulációján keresztül demonstráljuk a pumpálás jelenségét. A paraméterek  $\delta = 1$ ,  $\tilde{k} = 0.1$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\mu\sigma = 0.0103 \times 1.8$ ,  $\tilde{x}_{max} = 1$  lesz, a  $q_{be}$  térfogatáramot szabad paraméterként fogjuk kezelni.

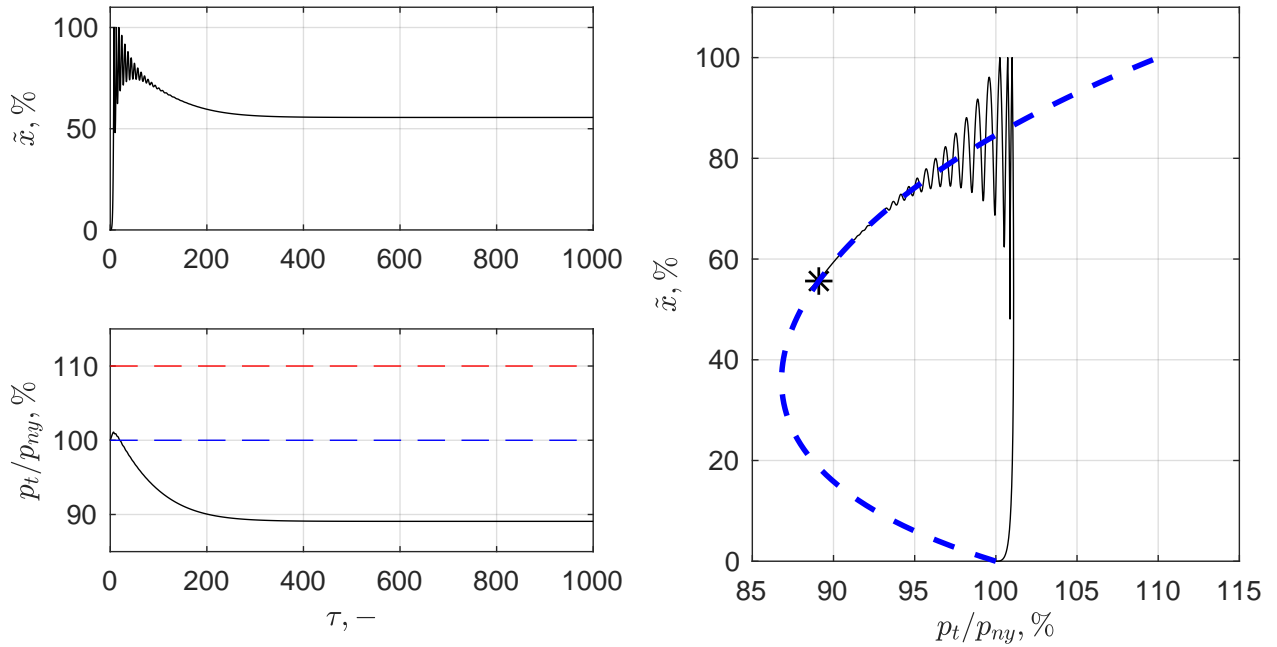


14. ábra. Stabil szelepnitás  $q = 0.9$  értéknél. Bal felső ábra: szelelmozdulás az idő függvényében. Bal alsó ábra: tartálynomás a nyitónyomás százalékában kifejezve, az idő függvényében. Jobb oldalon folytonos vonal jelöli a szimuláció eredményét, vastag szaggatott vonal az egyensúlyi szelepnitásokat és csillag az adott térfogatáramhoz tartozó egyensúlyi helyzetet, vö. 8. ábra jobb oldala a 17. oldalon.

A 14. és a 15. ábrán stabil nyitásra látunk példát. Az egyensúlyi helyzet mindkét esetben a stabil ágon helyezkedik el, így nem tapasztalunk lengéseket (a kezdeti tranziensek lecsillapodása után). Vegyük észre, hogy a  $q_{be} = 0.5$  esetben az egyensúlyi tartálynomás a nyitónyomásnál *kisebb* értéket vesz fel.

A 16. ábrán egy olyan szimulációt láthatunk, melyben a  $q_{be} = 0.2$  térfogatáram esetén az egyensúlyi helyzet az instabil szakaszra esik (ld. fekete csillag a jobb oldali ábrán). Ekkor a szelep lezár, a tartály töltődni kezd, majd a ciklus újra megismétlődik. Ezt a jelenséget

## 3. Elsődleges instabilitási típusok



15. ábra. Stabil szelepnnyitás  $q = 0.5$  értéknél. Bal felső ábra: szelepelmozdulás az idő függvényében. Bal alsó ábra: tartálynnyomás a nyitónyomás százalékában kifejezve, az idő függvényében. Jobb oldalon folytonos vonal jelöli a szimuláció eredményét, vastag szaggatott vonal az egyensúlyi szelepnnyitásokat és csillag az adott térfogatáramhoz tartozó egyensúlyi helyzetet.

nevezzük "pumpálás"-nak, és kialakulásának feltétele tehát az, hogy a szelep egyensúlyi karakterisztikájának legyen "visszahajló" része és hogy a  $q_{be}$  térfogatáram hatására kialakuló egyensúlyi helyzet ezen a negatív meredekségű részen legyen.

A kialakuló lengések periódusidejére úgy tehetünk becslést, hogy a lengéseket két részre osztjuk: 'lefúvatási'  $T_{le}$  időre és a tartály újbóli töltéséhez szükséges  $T_{fel}$  időre. A feltöltési idő becslése egyszerűbb, hiszen ilyenkor zárva van a szelep, így

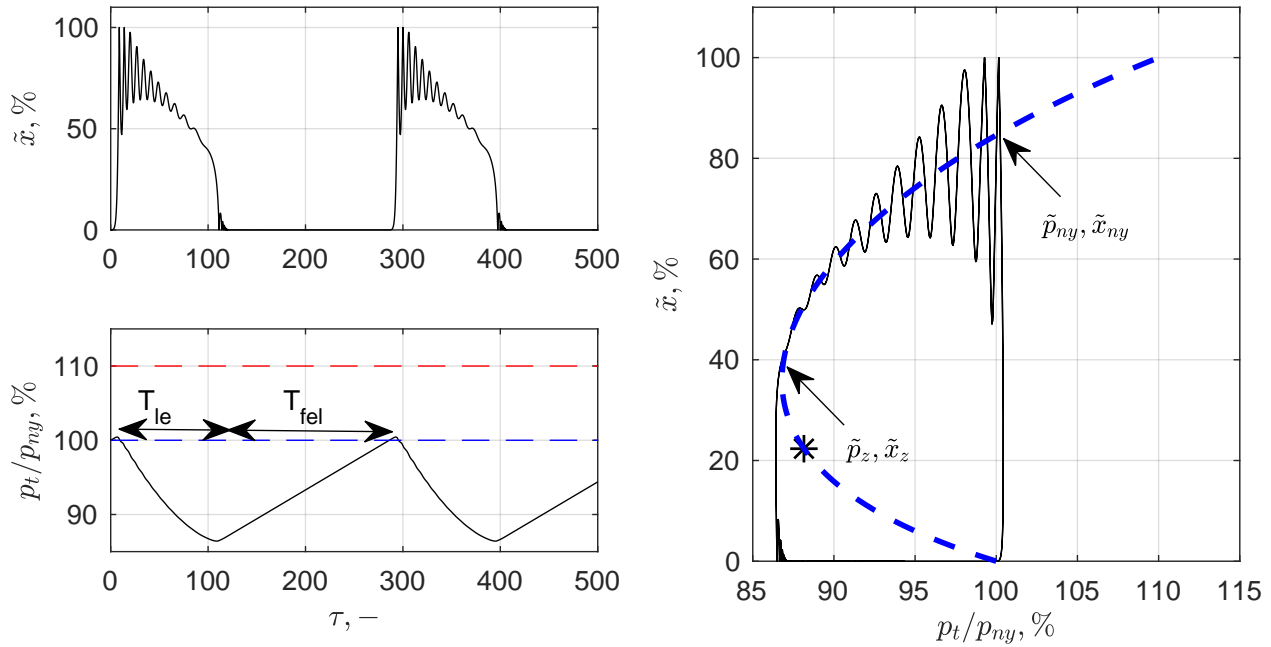
$$\tilde{p}'_t = \beta q_{be} \quad \rightarrow \quad \tilde{p}_t = \tilde{p}_z + \beta q_{be} \tau. \quad (3.93)$$

A szelep akkor nyit ki újra, ha  $\tilde{p}_t = \tilde{p}_{ny}$ , ezért

$$T_{fel} = \frac{\tilde{p}_{ny} - \tilde{p}_z}{\beta q_{be}} \quad (3.94)$$

A szelep hirtelen nyitása utáni lefúvatási  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_{ny}$  és  $\tilde{p}(0) = \tilde{p}_{ny}$  pontokban kezdődik és  $\tilde{x}(T_{le}) = \tilde{x}_z$  és  $\tilde{p}(T_{fel}) = \tilde{p}_z$  pontokban ér véget. Első lépésként e két pont között időben lineáris elmozdulást és nyomást feltételezünk:

$$\tilde{x}^0(\tau) \approx \tilde{x}_{ny} - \frac{\tilde{x}_{ny} - \tilde{x}_z}{T_{le}} \tau \quad \text{és} \quad \tilde{p}^0(\tau) \approx \tilde{p}_{ny} - \frac{\tilde{p}_{ny} - \tilde{p}_z}{T_{le}} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq T_{le}, \quad (3.95)$$



16. ábra. Instabil szelepnitítás  $q = 0.2$  értéknél. Bal felső ábra: szelepelmozdulás az idő függvényében. Bal alsó ábra: tartálynyomás a nyitónyomás százalékában kifejezve, az idő függvényében. Jobb oldalon folytonos vonal jelöli a szimuláció eredményét, vastag szaggatott vonal az egyensúlyi szelepnitásokat és csillag az adott térfogatáramhoz tartozó egyensúlyi helyzetet.

ahol a 0 felső index arra utal, hogy ez a nulladik közelítés. A tartály nyomásdinamikáját kihasználva javítani tudjuk a nyomáslefutás becslését:

$$\tilde{p}^1(\tau) \approx \int \beta \left( q_{be} - \mu\sigma \tilde{x}^0(\tau) \sqrt{\tilde{p}^0(\tau)} \right) dt + C, \quad 0 \leq \tau \leq T_{le}, \quad (3.96)$$

ahol a  $C$  konstans a  $\tilde{p}(0) = \tilde{p}_{ny}$  feltételből határozható meg, az integrálás pedig zárt alakban elvégezhető. Határozzuk meg azt a  $T_{le}$  időtartamot, amelyre igaz, hogy  $\tilde{p}^1(T_{le}) = \tilde{p}_z$ . A számításokhoz számítógépes algebrai rendszert igénybe véve – részletek a D.4 Mellékletben az M-18 oldalon kapjuk, hogy

$$T_{le} = \frac{1}{\beta} \frac{a_1}{a_2 \tilde{x}_z + a_3 \tilde{x}_{ny} + a_4 q_{be}}, \quad \text{ahol} \quad a_1 = -(\tilde{p}_{ny} - \tilde{p}_z)^3,$$

$$a_2 = -\frac{2}{15} \mu\sigma \left( 2\tilde{p}_{ny}^{5/2} - 5\tilde{p}_{ny}\tilde{p}_z^{3/2} + 3\tilde{p}_z^{5/2} \right),$$

$$a_3 = -\frac{2}{15} \mu\sigma \left( 3\tilde{p}_{ny}^{5/2} - 5\tilde{p}_{ny}^{3/2}\tilde{p}_z + 2\tilde{p}_z^{5/2} \right) \quad \text{és}$$

$$a_4 = (\tilde{p}_{ny} - \tilde{p}_z)^2.$$

Így a pumpálás frekvenciájára adódik, hogy

$$f_p \approx \frac{\omega}{T_{le} + T_{fel}} \quad (\text{Hz}), \quad (3.97)$$

### 3. Elsődleges instabilitási típusok

---

ahol az  $\omega$ -val (szelep sajátfrekvenciájával) való szorzásra azért van szükség, mert  $T_{le, fel}$  dimenziótlan időintervallumok.

A fenti összefüggések a 16. ábrán látható esetre –  $\tilde{p}_{ny} = 1$ ,  $\tilde{p}_z = 0.87$ ,  $\tilde{x}_{ny} = 0.8$  és  $\tilde{x}_z = 0.4$  értékekkel  $T_{le} = 94$  és  $T_{fel} = 167$  értéket ad, melyek jól egyeznek a 16. ábrán látható dinamikával. Vegyük észre, hogy ezek a frekvenciák a szelep sajátfrekvenciájának törtrészei, tehát alacsonyfrekvenciás lengésekről beszélünk.

Összefoglalva: amennyiben a szelep nyitási karakterisztikájának visszahajló, instabil ága van és a lefúvatott (alacsony) tömegáram miatt erre a szakaszra adódik ki az egyensúlyi helyzet, a szelep alacsonyfrekvenciás pumpálásba kezd, melynek során a szelepnitást követően a zárási nyomás elérése után a szelep lezár, majd zárva marad, amíg a tartálynyomás újra el nem éri a nyitónyomást.

**1. tézis** *Direkt rugóterhelésű biztonsági szelepek instabilitási (rezgési) jelenségeiért nem önmagában a szelep felelős, hanem a védendő nyomástartó edény, a szelep, valamint az ezeket összekötő csővezeték egymásrahatása. Meghatároztam és osztályoztam az ilyen rendszerek elsődleges instabilitási típusait, melyek*

**statikus instabilitás**, *mely csak a szelep (belső) geometriájával van összefüggésben és rezgések nélküli, hirtelen szelepnnyitás-változást okoz,*

**elégtelen szelep csillapítás**, *mely kisméretű tartályokhoz közvetlenül (csővezeték nélkül) kapcsolt szelep esetén jelentkezhethet, amennyiben a szelep csillapítása elégtelen,*

**Helmholtz instabilitás**, *melynek során a tartály és a felvázoldali csővezeték által alkotott Helmholtz rezonátor és a szelepdinamika csatolódik, elkerüléséhez a szelep sajátfrekvenciájának a Helmholtz-frekvenciánál nagyobbobbnak kell lennie,*

**negyedhullám instabilitás**, *melyet a csővezetékben kialakuló, az első akusztikus sajátfrekvenciához kapcsolódó állóhullám és a szelepdinamika egymásrahatása eredményez és*

**pumpálás vagy túlméretezett szelep**, *mely akkor jelentkezik, ha a szelep munkapontja az  $x(p)$  szelepnnyitás-karakterisztika kis nyitásokhoz tartozó instabil ágán található. Ez esetben a szelep egy lefúvatási ciklus után visszazár és zárva marad, amíg a tartálynyomás újra el nem éri a nyitónyomását.*

A fenti instabilitások elkerülésére ellenőrzési képleteket, eljárásokat dolgoztam ki.

Kapcsolódó publikációk: [HCs5, HCs9, HCs10, HCs11]

**2. tézis** *Kimutattam, hogy egy nyomáshatároló szelepből és a felvázoldali csőből álló rendszerben olyan instabilitás jelentkezhethet, melyben a felvázoldali cső akusztikai sajátmódusai okozzák a rezgést és a stabilitásvesztéskor a cső akusztikai sajátfrekvenciái dominálják a dinamikát. Kimutattam, hogy gyakorlati méretezés vagy ellenőrzés során elegendő az első akusztikai sajátfrekvenciát vizsgálni. A gyakorlatban könnyen alkalmazható méretezési képletet adtam az instabilitás elkerülésére.*

Kapcsolódó publikációk: [HCs7, HCs1, HCs9, HCs10]

## 4. Numerikus szimulációk és kísérletek

Az előző fejezetben egyszerűsített modellek segítségével azonosítottuk és osztályoztuk az elsődleges instabilitási típusokat, miközben jellemzően lineáris stabilitásvizsgálatot végeztünk, mely egy adott *konstans*  $q_{be}$  tömegáramhoz tartozó egyensúlyi helyzet "kis" zavarására létrejövő mozgásokat vizsgált. Az analitikus kezelhetőség érdekében sok elhanyagolást kellett tennünk (1D áramlás, belépő nyomásesés és csősúrlódás elhanyagolása, stb.). Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy valódi rendszerek esetén, a korábban elhanyagolt hatások jelenlétében is érvényesek-e a korábban levezetett összefüggések és milyen paramétertartományban adnak a mérnöki tervezéshez elfogadható pontosságú eredményt. Azt is vizsgálni fogjuk, hogy a lineáris stabilitásvizsgálat során alkalmazott kvázi-statikusság gondolkodásmód (állandó tömegáram) mennyire alkalmazható egy teljes nyitási-zárás transziens során. Továbbra is csak az eddig ismert konfigurációt vizsgáljuk: egyetlen, egyenes csővezeték köti össze a tartályt és a szelepet, mely alvízoldali vezeték nélkül, közvetlenül kapcsolódik az állandó nyomású kilépő térhez.

Amikor lehetséges, kísérleti eredményekhez fogjuk hasonlítani az analitikus becsléseket. Azokban az esetekben és paramétertartományokban, ahol nem áll rendelkezésre mérés, numerikus szimulációt (CFD és/vagy 1D instacionárius megoldók) fogunk alkalmazni.

Jelen fejezetnek az is célja, hogy a korábban bemutatott instabilitási jelenségek *együttes* hatását is bemutassa, mivel a mérnöki létesítményekben ezek gyakran kapcsolatosan jelentkeznek.

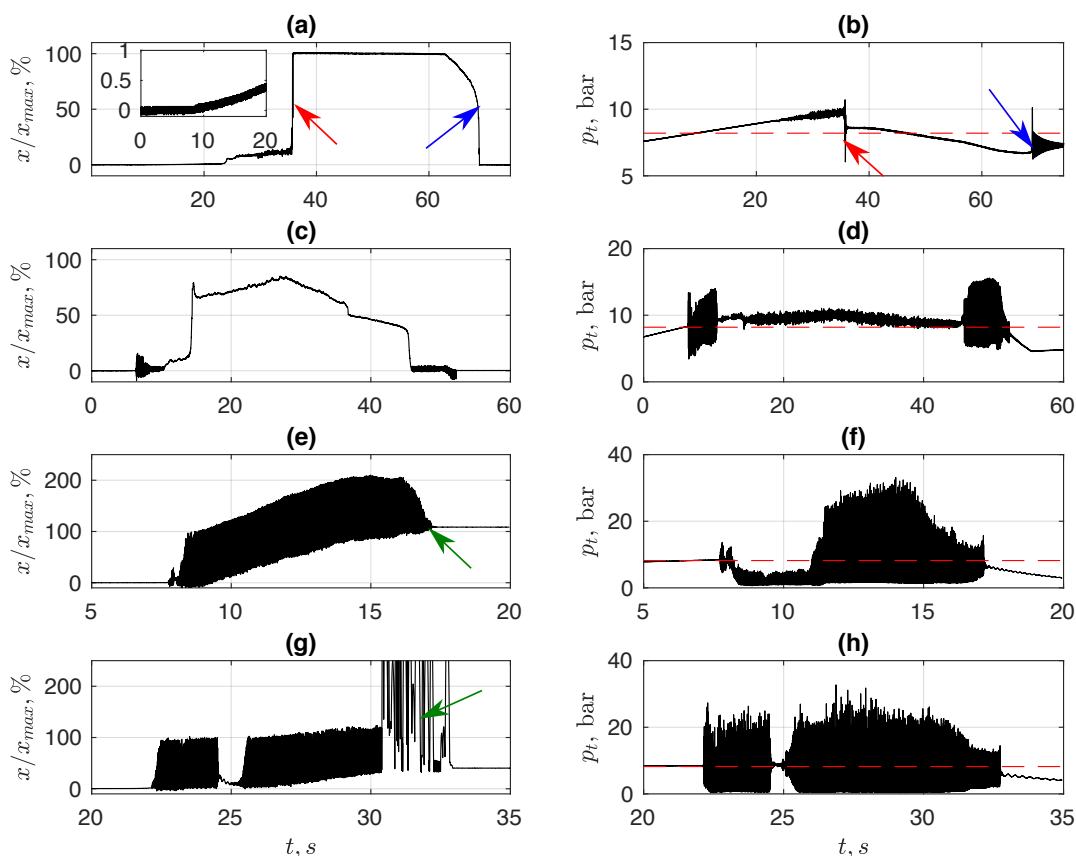
- A 4.1. alfejezetben folyadék munkaközeggel végzett mérési eredményeket mutatunk be, elsősorban időjelek segítségével.
- A 4.2. alfejezetben gáz munkaközeggel végzett szimulációs eredményeket mutatunk, ugyancsak időjelek segítségével.
- A 4.3. alfejezet a negyedhullám modellre összpontosít. Egyrészt bemutadjuk a modell validációját CFD szimuláció és 1D megoldó segítségével, másrészt az analitikusan megadott stabilitási határgörbék összehasonlítását mérési ill. numerikus szimulációval, végül az analitikus levezetések során elhanyagolt fizikai jelenségek (súrlódás, belépési nyomásesés) hatását vizsgáljuk meg a stabilitásra.
- A 4.5. alfejezetben a nyitási és zárás instabilitására adunk magyarázatot.
- A 4.4. alfejezetben az alvízoldali (elvezető) csővezeték hatását vizsgáljuk és végül
- a 4.6. alfejezetben a belépési nyomásesés és a csősúrlódási veszteség okozta lengéseket mutatjuk be.



## 4.1. Mérések folyadék munkaközeggel

A 17. ábrán vízzel végzett mérések eredménye látható. A mérőberendezést, a műszerezést és a mérési folyamatot a G.2. mellékletben dokumentáltuk ill. a [HCs10] közleményben részletesen ismertettük. Ezen az ábrason a bal oszlopban egy teljes nyitási-zárási folyamat során a szelepelmozdulás látható a maximális nyitás (felső ütköző határolja a szelep nyitását) százalékában kifejezve. A jobb oszlopban az ezekhez tartozó a tartálynymást ábrázoltuk. A szelep típusa: Crosby JOS 2J3, nyitónyomás: 8.27 bar, névleges kapacitás: 23.4 kg/s. Az egyes sorok között a csőhossz és a tömegáram változott:

1. sor:  $L_{cs} = 0$  m (a szelep közvetlenül a tartályra volt kapcsolva),  $\dot{m}/\dot{m}_n = 100\%$  ( $q_{be} = 1$ ),
2. sor:  $L_{cs} = 1.22$  m (4 láb),  $\dot{m}/\dot{m}_n = 85\%$  ( $q_{be} = 0.85$ ),
3. sor:  $L_{cs} = 1.83$  m (6 láb),  $\dot{m}/\dot{m}_n = 30\%$  ( $q_{be} = 0.3$ ) és
4. sor:  $L_{cs} = 1.83$  m (6 láb),  $\dot{m}/\dot{m}_n = 20\%$  ( $q_{be} = 0.2$ ).



17. ábra. Szelepelmozdulás (bal oszlop) és tartálynymás (jobb oszlop) különböző csőhosszak és tömegáramok esetén (sorok).

Kezdjük az ábrák értelmezését a legfelső sorral! Itt a szelep a tartályra közvetlenül volt

csatlakoztatva. A tartálynyomás növekedésével, kb. 10 másodperc után (ld. a bal felső ábrán a kis tengelyen kinagyítva) elérjük a szelep nyitónyomását (piros szaggatott vonal a jobb oszlop ábráin), a szelep először lassan nyit, majd hirtelen teljes nyitásra "ugrik" (piros nyilak). Hasonló ugrást figyelhetünk meg záráskor is (kék nyilak); a hirtelen nyitás-zárást nevezi az angol szakirodalom "popping action"-nek. A zárás megkezdése előtt a tartálynyomás *kisebb* a nyitónyomásnál, ezt a nyomást nevezzük zárási nyomásnak (blowdown pressure). Ezeket a hirtelen nyitásokat és zárásokat vizsgáltuk és magyaráztuk a 3.1. fejezetben (26. oldal), különösen a 9. ábrán.

A csőhossz növelésével és a térfogatáram csökkentésével (2. sor) kisebb rezgéseket tapasztalunk kis nyitások mellett, de összességében a szelep stabilnak mondható. Annak ellenére, hogy az elmozdulásjelen nehezen vehetőek észre ezek a rezgések, a tartálynyomásban már jelentős ingadozásokat tapasztalunk; akár a nyitónyomás kétszeresét is eléri a maximális érték.

A csővezeték hosszának további növelésével és a térfogatáram csökkentésével a szelep a teljes nyitás-zárás tartományon instabillá válik olyannyira, hogy az elmozdulásjelek eltoldódnak ill. még a műszer is sérül (zöld nyilak); a legutolsó mérés során a rezgések hevesége miatt eltört az indukciós nyomástávadót a szeleptesttel összekötő menetes szár. A kialakuló nyomáslengések a nyitónyomás sokszorosai.

Ilyen, a csőhossz növelésével megjelenő rezgéseket már a 3.4. fejezetben láttunk (negyedhullám instabilitás), ezért próbáljuk meg az ott levezett stabilitási kritériumot alkalmazni! A szelep adatai:  $s = 112 \text{ kN/m}$ ,  $m = 1.43 \text{ kg}$  és  $C_d = 0.36^{18}$ . A beállított nyitónyomás  $p_{ny} = 9.27 \text{ bar}$  (abszolút) nyomás és a maximális szelepelmozdulás  $x_{max} = 12 \text{ mm}$ . A csatlakozó cső átmérője  $50.8 \text{ mm}$  (2"), a *mért* hullámsebesség a folyadékban  $a = 890 \text{ m/s}$ . Ezekkel az adatokkal

1. a szeleprugó előfeszítése  $x_0 = \frac{A_{be} p_{ny}}{s} = 11.2 \text{ mm}$ ,
2. a szelep sajátkörfrekvenciája  $\omega = \sqrt{s/m} = 279.9 \text{ rad/s}$  (44.5 Hz),
3. a névleges tömegáram a (2.4) és a (2.5) összefüggések szerint (tányérszelep esete)  $\dot{m}_n = C_d D_{be} \pi x_{max} \sqrt{2\rho 1.1 \times p_{ny}} = 25.47 \text{ kg/s}$ ,
4. az ehhez ( $q_{be} = 1$ ) a tömegáramhoz tartozó egyensúlyi helyzetre, megoldva a (2.1) egyenletet  $\ddot{x} = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $x = x_e$  és  $p_v - p_a = p_e$  helyettesítéssel,  $x_e = 11.5 \text{ mm}$  és  $p_e = 10.84 \text{ bar}$  adódik. ( $A_{eff}(x_e) = 1.7$ .)
5. Mivel  $x_{ref} = \frac{A_{be} p_{ref}}{s} = 1.36 \text{ mm}$  és  $p_{ref} = p_a = 1 \text{ bar}$  (abszolút nyomás), ezért  $\tilde{x}_e = x_e/x_{ref} = 8.47$  és  $\tilde{p}_e = 10.84$  és a (3.85) egyenlőtlenséget egyenlőséggé téve kapjuk, hogy a kritikus szögsebesség  $\omega_{krit} = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_e}{\tilde{x}_e} + 1} = 1.88$  (ez dimenziótlan frekvencia, a fizikai megfelelője  $1.88 \times \omega_{sz} = 84 \text{ Hz}$ ), ahonnan
6. a kritikus csőhossz  $\gamma_{krit} = \frac{\pi}{2\omega_{krit}} = 0.832$ , ami  $L_{cs,krit} = \gamma_{krit} \frac{a}{\omega} = 2.65 \text{ m}$ -nek felel meg. Azt kaptuk tehát, hogy a névleges térfogatáram esetén a 2.29 m-nél hosszabb csövek ese-

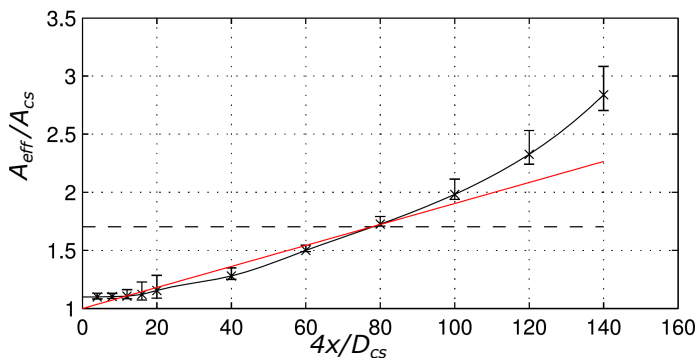
<sup>18</sup>Ezt az alacsony átfolyási tényezőt a szelepházbeli magas veszteségek magyarázzák.

tén a szelep rezegni fog. Megjegyezzük, hogy a fenti számítás során egyetlen helyen alkalmaztunk "Excel-en túlmutató" matematikai eszközt, mégpedig amikor az előírt térfogatáramhoz kiszámítottuk a szelep egyensúlyi állapotát (4.pont). Megismételve a számítást  $q=0.85$ , 0.3 és 0.2-es tömegáramokra, a kritikus csőhosszra rendre 2.57, 1.7 és 1.49 méter adódik, ami jól összevág a 17. ábrán megfigyelt tendenciával, hiszen az utolsó két csőhossz-tömegáram mérés (3. és 4. sor) már az instabil tartományban található.

## 4.2. Gáz munkaközeg: szimulációk

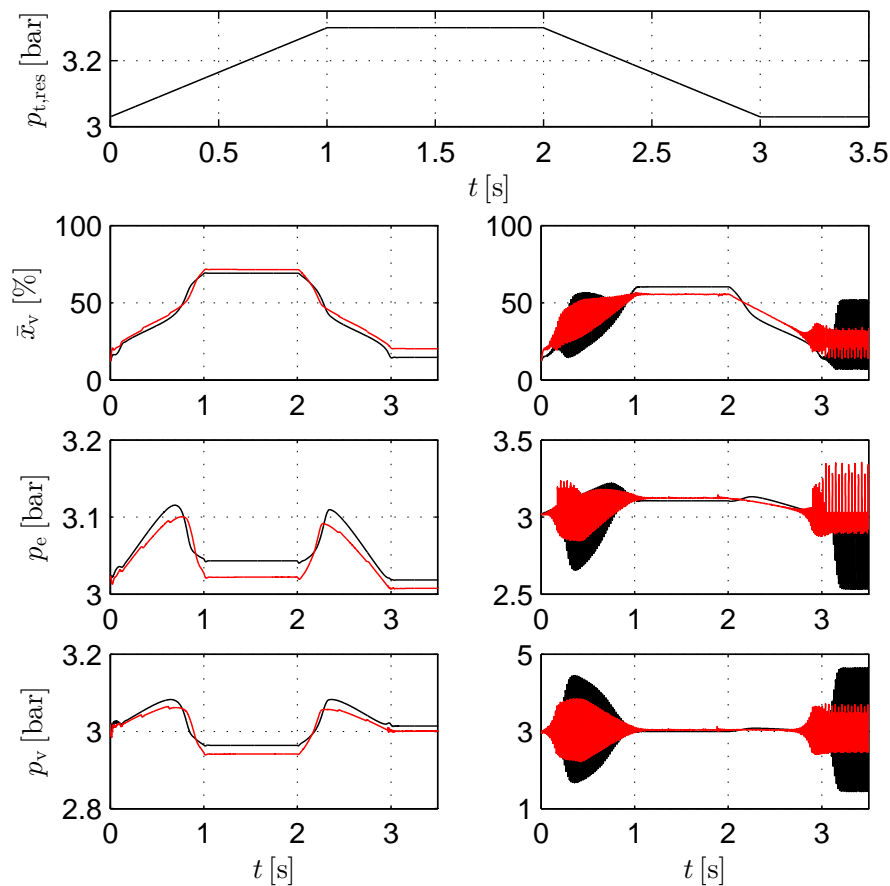
A mérések mellett numerikus szimulációkat is végeztünk két megközelítéssel: (a) egyrésztől 1D instacionárius módszerrel (gázok esetén Lax-Wendroff sémával, folyadék esetén karakterisztikák módszerével), másrésztől CFD kód (ANSYS CFX) segítségével. Az elsőre GDM-ként (**G**áz**D**inamikai **M**odell) vagy FDM-ként (**F**olyadék**D**inamikai **M**odell) fogunk hivatkozni, míg utóbbira a szokásos CFD (**C**omputational **F**luid **D**ynamics) rövidítéssel. A GDM és az FDM módszer részleteit a Melléklet F és E fejezetében ismertetjük. Itt elegendő arra felhívni a figyelmet, hogy az  $A_{\text{eff}}(x,p)$  effektív felület és a  $C_d(x,p)$  átfolyási tényező függvényeket a GDM és LDM modell esetében stacionárius CFD előszámításokból nyert görbékkel adjuk meg, míg a CFD szimulációk elkerülik ezen függvények használatát (mivel pl. a szeleptestre ható erő a nyomás- és csúsztatófeszültség-eloszlás felületi integrálja). Ezen kívül természetesen a CFD modellezés jóval pontosabb és részletesebb, aminek a kb. két nagyságrenddel nagyobb számítási idő az ára.

A 19. ábrán szimulált nyitáscsúszás folyamatot látunk levegő munkaközeggel, melynek során előírtuk a tartálynyomás időbeli lefutását (felső ábra). A főbb adatok:  $D_{cs} = D_{be} = 40.2 \text{ mm}$  ( $1\frac{1}{2}$ " ),  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $s = 21 \text{ kN/m}$ ,  $C_D = 0.878$  és  $p_{ny} = 2 \text{ bar}$  (túlnyomás). A levegő hőmérséklete  $20^\circ\text{C}$  volt, a szelep után légköri nyomás uralkodott. A szimulációk egyéb paraméterei - különös tekintettel a CFD beállításokra - megtalálhatóak a [HCs4] irodalomban.



18. ábra. Effektív felület a relatív szelepnyitás függvényében. Fekete vonal: CFD, piros vonal: elméleti érték.

Ennél a számításnál különösen fontos, hogy a szelep (2.1) mozgásegyenletében az effektív felület nyitáscsúszás-függését figyelembe vegyük, mely a 18. ábrán látható. Itt fekete x jelölökkel tüntettük fel a CFD eredményeket (számos nyomáskülönbséggel lefuttatva a számítást, ezen



19. ábra. A gázdinamikai modell (GDM, fekete) és CFD szimuláció (piros) összevetése. Bal oszlop:  $L_{cs} = 20 D_{cs} = 0.804\text{m}$ , jobb oszlop:  $L_{cs} = 36 D_{cs} = 1.45\text{m}$ .

értékek átlaga és szórása szerepel az ábrán), fekete folytonos vonallal jelöltük az illesztett polinomot, mely a GDM modell bemenő adata. Folytonos piros vonallal a (2.14) analitikus becslést tüntettük fel (63 fokos iránytörés és a nyitónyomáson kiértékelt gázsűrűséggel), szaggatott fekete vonallal pedig az átlagértéket. (Az iránytörési szöget az effektív felület görbe alapján számítottuk vissza, ld. 2.1.3 alfejezet.) Az abszcissa tengelyre azért választottuk a csőátmérővel dimenziótlantított nyitást, mert a  $4x/D_{cs} = 100\%$  érték elérésénél már nem a szelep palástfelülete a legszűkebb (fojtási) keresztmetszet, hanem a cső kilépő felülete és emiatt átrendeződik az áramlás (ezt részletesen taglaltuk a 2.1.2. fejezetben).

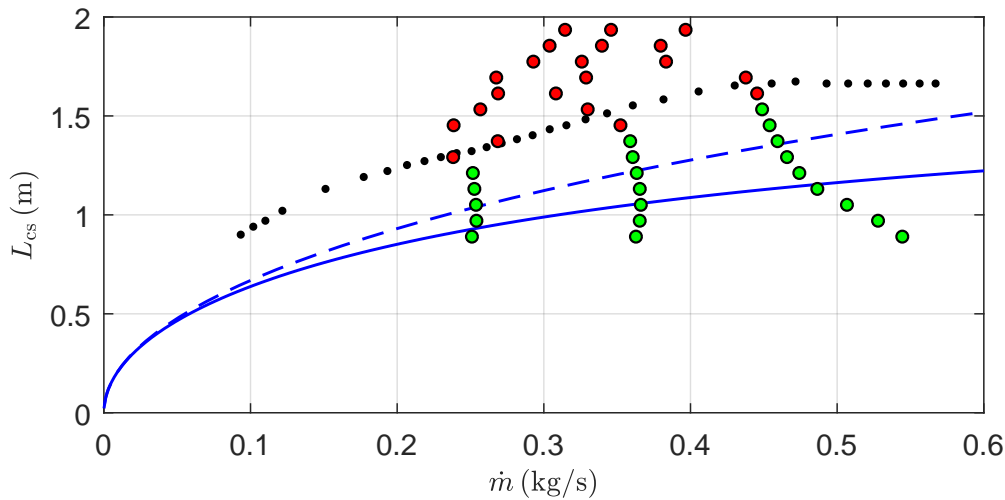
A korábban részletezett statikus instabilitás (szelep "ugrálás") itt is megfigyelhető és külön kihangsúlyozzuk, hogy a CFD szimuláció anélkül adta vissza ezt a hatást, hogy az effektív felület görbét explicit módon előírtuk volna.

Most végezzünk el egy kézi becslést a kritikus csőhosszra, negyedhullám instabilitást feltételezve!

1. A szeleprugó előfeszítése  $x_0 = \frac{A_{be} p_{ny}}{s} = 12.08 \text{ mm}$ ,

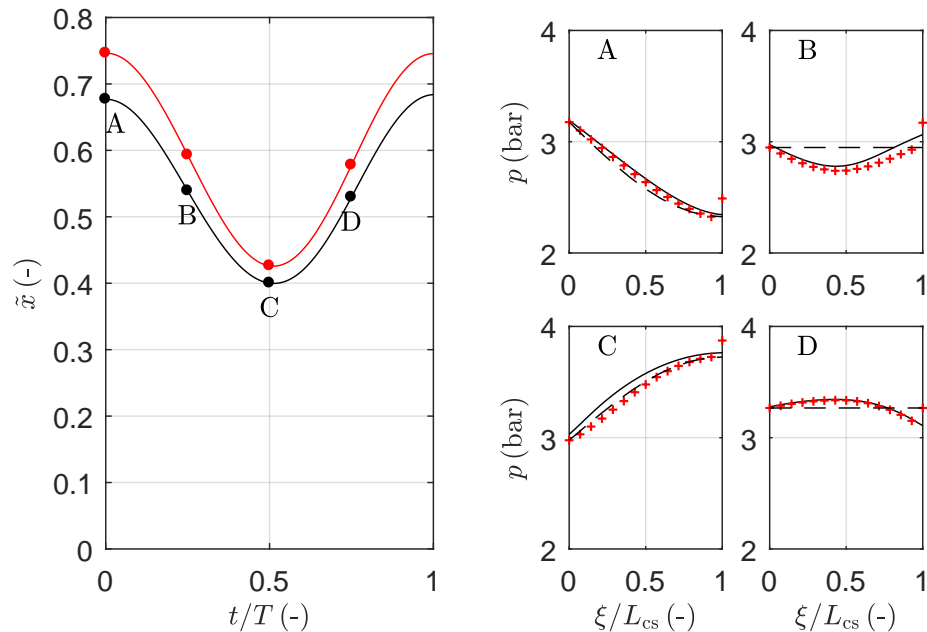
2. a szelep sajátkörfrekvenciája  $\omega = \sqrt{s/m} = 144.9 \text{ rad/s}$  (23.06 Hz),
3. a névleges tömegáram a (2.9) és a (2.5) összefüggések szerint (tányérszelep esete)  $\dot{m}_n = 0.6915 \text{ kg/s}$ ,
4. az  $\dot{m} = 0.5 \text{ kg/s}$  ( $q_{be} = 0.72$ ) tömegáramhoz tartozó egyensúlyi helyzet  $x_e = 3.1 \text{ mm}$  és  $p_e = 3.02 \text{ bar}$  (abszolút nyomás) adódik, ahol figyelembe vettük, hogy ennél a szelepnitátnál  $A_{\text{eff}} \approx 1.24A_{cs}$  (18. ábra).
5. Mivel  $x_{ref} = \frac{A_{\text{eff}}(x_{ref})p_{ref}}{x_{ref}} = 6.04 \text{ mm}$  és  $p_{ref} = p_a = 1 \text{ bar}$  (abszolút nyomás), ezért  $\tilde{x}_e = x_e/x_{ref} = 0.511$  és  $\tilde{p}_e = 3.02$  és a (3.85) egyenlőtlenséget egyenlőséggé téve kapjuk, hogy a kritikus szögsebesség  $\omega_{crit} = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_e}{\tilde{x}_e} + 1} = 3.578$ , ahonnan
6. a kritikus csőhossz  $\gamma_{krit} = \frac{\pi}{2\omega_{crit}} = 0.44$ , ami  $L_{cs,krit} = \gamma_{krit} \frac{a}{\omega} = 1.00 \text{ m}$ -nek ill.  $L_{cs,krit}/D_{cs} = 24.9$  értéknek felel meg.

Érdekes a kapott eredmények tükrében újra összehasonlítani a 19. ábra két oszlopát. Az analitikus számítások a kritikus csőhosszra  $24.9D_{cs}$  értéket adtak. Valóban, a bal oszlopban ( $L_{cs} = 20D_{cs}$ ) stabil nyitás-zárást látunk, míg a jobb oszlopban ( $L_{cs} = 36D_{cs}$ ) már megjelennek rezgések a nyitás és zárás során.



20. ábra. Kritikus csőhossz a tömegáram függvényében. Kék folytonos vonal: implicit negyedhullám kritérium, (3.85) összefüggés. Szaggatott kék vonal: explicit negyedhullám-kritérium, (3.89) egyenlet. Fekete pontok: a GDM segítségével kapott stabilitási határ. Piros és zöld körök: a CFD szimuláció eredményei: stabil (zöld) és instabil (piros) paraméterértékek.

A 20. ábrán a GDM és CFD szimulációs eredményeket vetjük össze a (3.85) (szaggatott vonal) és a (3.89) (folytonos vonal) analitikus összefüggésekkel, melyek közül az előbbihez szükséges az egyensúlyi helyzetek meghatározása (nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldása, pontos megoldás), míg az utóbbi explicit képlet. Itt a numerikus szimulációk során számos rögzített csőhossz mellett, a tartálynomást 3 és 3.4 bar között változtatva



21. ábra. Egy teljes szeleplengés (bal oldal) periódusa közben kialakuló nyomáseloszlások (jobb oldal) a betűkkel megjelölt időpillanatokban. A piros vonala CFD szimuláció eredményét, a fekete folytonos vonal a GDM eredményét, míg a fekete szaggatott vonal a negyedhullám kritérium levezetése közben alkalmazott (3.62) egyenlet által leírt görbét jelöli.

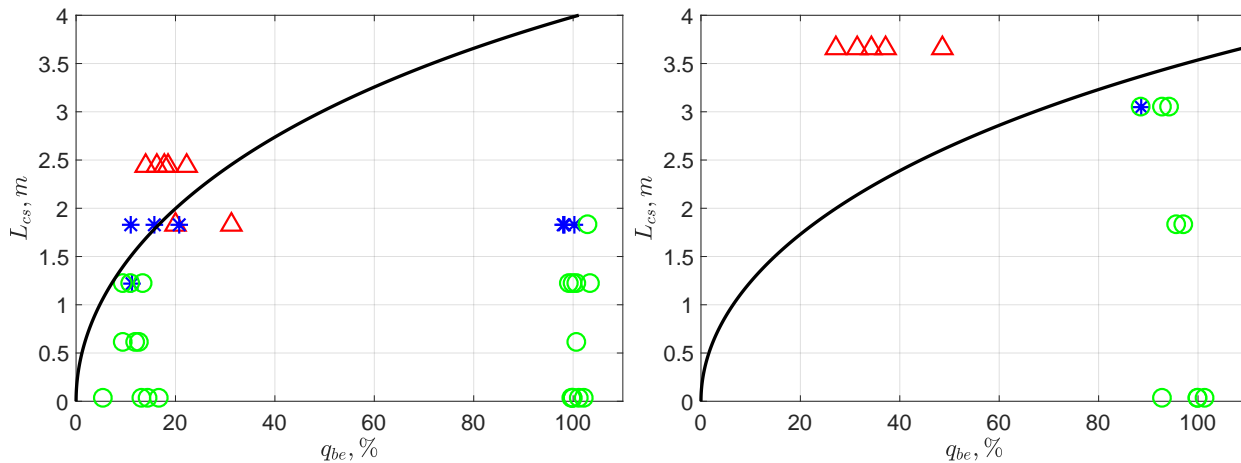
futtattuk le a CFD és a GDM számítást, majd vizsgáltuk a megoldás stabilitását. Fekete ponttal a GDM modell segítségével kapott stabilitási határt jelöltük; mivel ez a számítás viszonylag gyors, lehetőséget ad arra, hogy kellően finom felbontással letapogassuk a paraméterteret. Ezzel szemben a CFD számítások időigényessége miatt minden lefuttatott esetet jelöltünk: pirossal az instabil, zölddel a stabil eseteket. Mivel a CFD számítások során nyomás peremfeltételt adtunk meg, a tömegáram kiadódó mennyiség, ezért a szimulációs pontok nem egyenletesen helyezkednek el. Jól láthatóan az analitikus becslések korlátozottan alkalmazhatók, de jellegre és nagyságrendre helyes eredményt adnak (és a biztonság irányába tévednek), míg a GDM és a CFD modellek eredményei jól összecsendenek.

A 21. ábrán kirészleteztünk egy teljes periódus lengést a stabilitási határ közelében. A bal (nagy) ábrán a szelep elmozdulásjelét látjuk, összevetve a GDM (fekete) és a CFD (piros) modellt. A jobb oldali kisebb ábrákon a nyomáseloszlást ábrázoltuk a négy megjelölt időpontban: a fekete vonal a GDM modellt, a piros keresztet a CFD megoldást, a fekete szaggatott vonal pedig az analitikus levezetés során alkalmazott (3.62) egyenletet jelöli. Az ábrán világosan látható a  $4L_{cs}$  hosszúságú állóhullám dominanciája a csőben. A  $\zeta/L_{cs} = 1$ -nél látható, piros keresztrel megjelölt pont közvetlenül a szeleptest alatt található, ahol a "megállított" közeg nyomása kissé megnő.

### 4.3. Tömegáram-csőhossz stabilitási diagramok

Ebben a fejezetben mérésekkel meghatározott, a negyedhullám-instabilitáshoz tartozó csőhosszakat vetjük össze az elméleti számítások eredményeivel. A méréseket a Pentair cég (jelenleg Emerson) El Campo-ban (Texas, USA) található, akkreditált laboratóriumában végeztük ipari (Crosby) szelepekkel. A mérési környezet leírása megtalálható [HCs5] és [HCs10] közleményekben ill. a G.2 és a G.3 mellékletekben.

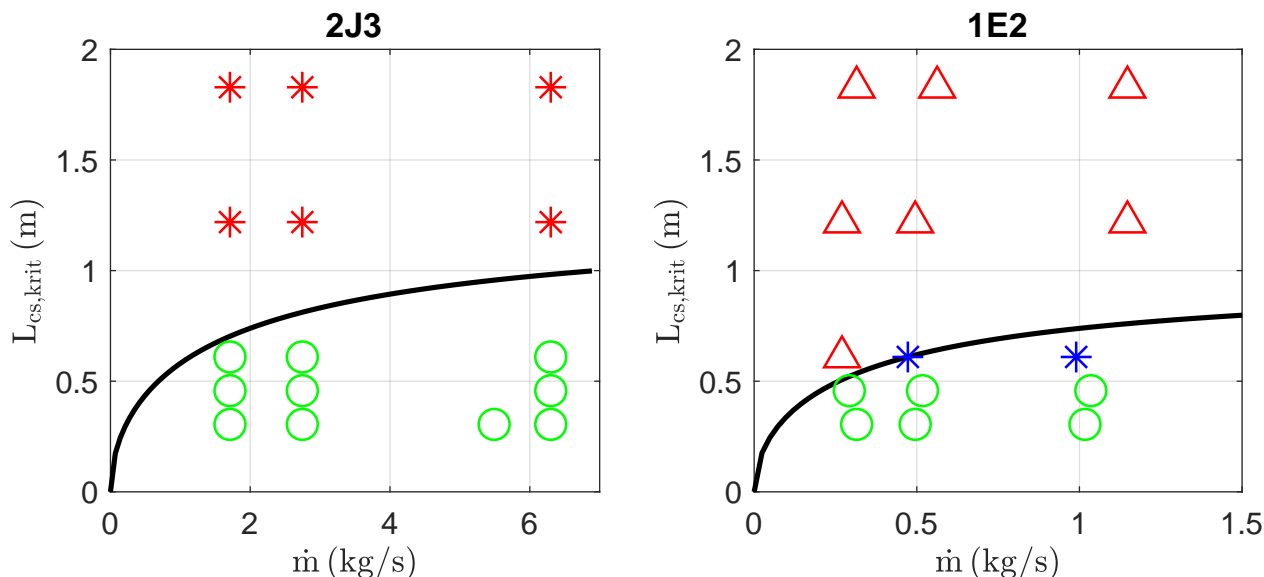
Ahogy azt már láttuk a (3.89) összefüggéssel kapcsolatban, a tömegáram növekedésével gyökösen növekszik a kritikus csőhossz, ami felett a rendszer instabillá válik. Pontosan ezt látjuk a 22. ábrán, ahol a vastag folytonos vonal a (3.85) összefüggés numerikusan kiértékelve. A jelölők mérési pontokat ábrázolnak: a stabil eseteket zöld körrel, az instabilokat piros háromszöggel jelöltük, míg a kék csillag bizonytalan méréseket jelöl, tehát olyan eseteket, amikor a mérés megismétlése során változott a stabilitási tulajdonság, tehát pl. az első mérésnél stabilan nyitott a szelep, míg a mérés megismétlésénél rezgett.



22. ábra. Kritikus csőhossz a tömegáram függvényében, víz munkaközeg esetében. Bal oldal: Crosby 2J3 szelep, kapacitás:  $\dot{m}_n = 25.5 \text{ kg/s}$ ,  $p_{ny} = 6.9 \text{ bar}$ . Jobb oldal: Crosby 1E2 szelep, kapacitás:  $\dot{m}_n = 3.83 \text{ kg/s}$ ,  $p_{ny} = 6.9 \text{ bar}$ .

A bal oldali (2J3) szeleppel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a 2.5 méteres cső esetében olyan hevesek voltak a rezgések, hogy nem tudtuk a jelzett tömegáram (a kapacitás kb. 20%-a) felett méréseket végezni, ami látványosan demonstrálja az instabilitások veszélyességét: a szelep képtelen leengedni a tervezett tömegáramot, mivel a rezgés lehetetlenné teszi a szükséges átfolyási keresztmetszet elérését.

A 23. ábrán hasonló mérési eredményeket látunk levegő munkaközeg esetére, magasabb nyitónyomások mellett. A vízzel végzett mérésekhez hasonló tendenciát látunk itt is: az elméleti modell megfelelő pontossággal jelzi a stabil és instabil tartományokat.



23. ábra. Kritikus csőhossz a tömegáram függvényében, *levegő* munkaközeg esetében. Bal oldal: Crosby 2J3 szelep, kapacitás:  $\dot{m}_n = 3.46 \text{ kg/s}$ ,  $p_{ny} = 17.4$  bar (relatív nyomás). Jobb oldal: Crosby 1E2 szelep, kapacitás:  $\dot{m}_n = 1.35 \text{ kg/s}$ ,  $p_{ny} = 31.1$  bar (relatív nyomás).

#### 4.4. Az alvízoldali nyomás hatása

A  $p_a$  alvízoldali nyomás gyakran nem légköri, ennek oka kétféle lehet: (a) a szelep nem a szabadba, hanem valamilyen tartályba üríti a közeget (pl. mert az veszélyes anyag), amelyben a nyomás nem légköri, vagy (b) bár a szelep a szabadba ürít, de egy alvízoldali csővezetéken keresztül, így annak sűrűlási veszteségei miatt a szelep kilépő csonkján megnövekszik a nyomás a nyitás után felépülő áramlás miatt.

[16] közleményben a szerzők CFD és kísérletek segítségével vizsgálták ennek hatását és 25-30%-nál (a nyitónyomáshoz képest) nagyobb alvízoldali nyomás esetén rezgéseket tapasztaltak. [66] is enyhe instabilitásról ('slight instability') számol be zárás közben. Smith & Burgess a [67] közleményben figyelmeztet, hogy a megnövekedett alvízoldali nyomás növeli a rezgések megjelenésének valószínűségét, ugyanerre jutnak a [16] cikk írói is numerikus szimuláció segítségével.

2015-ben a korábban már említett El Campo-beli laboratóriumban egy 2J3 szelepen végzett mérések során vizsgáltuk a kérdést mind víz, mind *levegő* munkaközeg esetén. A mérés során az alvízoldalra csővezetékot kapcsoltunk, melynek hossza 0 és kb. 6 méter között változott. Egyrészt azt tapasztaltuk, hogy egy instabil konfigurációt nem tudunk alvízoldali csővezetékkel stabilizálni (ami jól összecseng az említett irodalommal), másrészt, minél hosszabb volt az alvízoldali csővezeték, annál hajlamosabb volt a rendszer az instabilitásra, ám *jelentős különbséget nem tapasztaltunk*. Így azt a következtetést vonhatjuk le, hogy bár az alvízoldali vezeték hátrányosan érinti a rendszer stabilitási tulajdonságait, ezek csupán

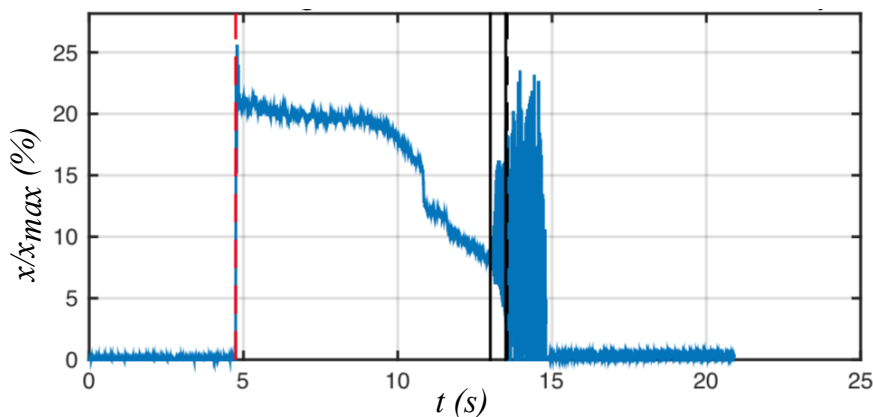


másodlagos hatások.

A 4.1. alfejezetben elvégzett számítási példát folytatva vizsgáljuk meg az alvízoldali nyomás növelésének hatását a kritikus csőhosszra! Az eredeti esetben  $p_a = p_0 = 1\text{bar}$  volt, ehhez a névleges tömegáram mellett  $L_{krit} = 2.65\text{ m}$  kritikus csőhossz tartozott. Ha a tömegáramot megtartva, az alvízoldali nyomást 2, 3 és 4 bar-ra emeljük, kritikus csőhosszra rendre 2.56, 2.48 és 2.41 m-t kapunk, tehát az alvízoldali nyomás növelése kismértékben csökkenti a kritikus csőhosszat.

## 4.5. Nyitási és zárási instabilitás

Az előző fejezetben ismertetett mérések és szimulációk segítségével könnyedén magyarázható az ún. nyitási és/vagy zárási instabilitás jelensége, melyre egy példát láthatunk a 24. ábrán. Ebben az esetben a szelep ugyan stabilan működik, ám nyitáskor és/vagy záráskor, a kis szelepnnyitási tartományban, instabil. A jelenség megértéséhez térjünk vissza pl. a 23. ábrához! Egy teljes nyitási-zárási ciklus során vízszintesen mozgunk (állandó csőhossz mentén); zérus tömegáramról indulva (zárt szelep), fokozatosan nő a tömegáram, majd a szelep záródása során újra lecsökken zérusra. Így, még ha a csövünk kellően rövid is ahhoz, hogy pl. a kapacitáshoz tartozó nagy térfogatáramon stabilan nyisson a szelep, a szelep nyitása és zárása során óhatatlanul áthaladunk az instabil zónán. Mivel ezek a szelepek gyakran gyorsan nyitnak (a korábban részletezett effektív felület miatt), könnyen előfordulhat, hogy a nyitás során "átugorjuk" az instabil tartományt, ám záráskor - ami lassabb folyamat - ismét áthaladunk az instabil tartományon és a rezgésnek "van ideje" kialakulni. A nyitáskor és záráskor tapasztalható aszimmetria megfigyelhető a korábbi 16. ábrán (48. oldal).



24. ábra. Zárási instabilitás.

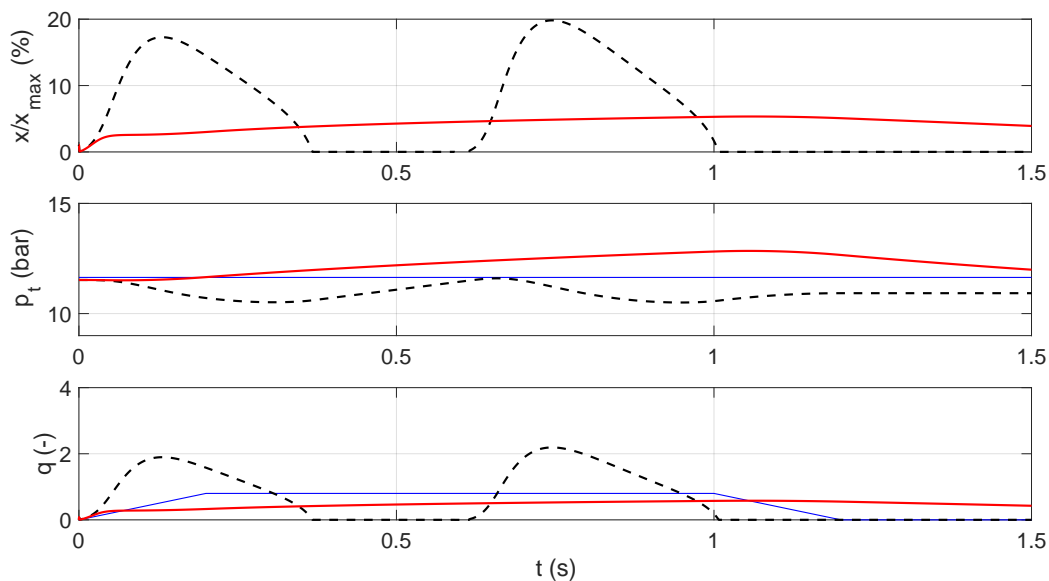
#### 4.6. Csősúrlódás és belépési nyomásesés hatása

A tartályból a csőbe való belépéskor a közeg felgyorsul, ezért csökken a nyomása, majd a csővezetékbeli súrlódás miatt tovább esik a nyomás egészen a szelepig, ezért

$$p_v = p_t - \Delta p_{be}(\dot{m}) - \Delta p_{súrl.}(\dot{m}), \quad (4.98)$$

ahol  $\Delta p_{be}$  jelöli a tartályból a csőbe való veszteségmentes belépés során kialakuló nyomásesést, míg  $p_{súrl.}$  jelöli a csőbeli súrlódási veszteséget, mindkét esetben kihangsúlyoztuk, hogy ezek a veszteségek függenek az aktuális tömegáramtól. Amennyiben ezen nyomásesések miatt a szelep alatti nyomás a  $p_z$  zárónyomás alá esik, a szelep bezár. Ekkor – mivel a nincs nyomásesés a csővezeték és a tartály között – újra felépül a nyitónyomásnak megfelelő nyomás a csőben és újra kinyit a szelep, az áramlás megindul és újra kezdődik a ciklus.

Bár ez a jelenség is alacsonyfrekvenciás lengésekhez vezet, mint a 3.5. alfejezetben taglalt pumpálás, nem tekintjük instabilitásnak, mivel itt egy egyszerű méretezési hibáról van szó. További különbség a pumpáláshoz képest, hogy ez a jelenség végtelen nagy tartály esetében is jelentkezik, míg a pumpálást éppen a nem megfelelő méretű (túl kicsi) tartály okozta.



25. ábra. Csősúrlódás hatása.

A belépő oldali nyomásesés hatását a Helmholtz modell segítségével demonstráljuk, melyet a 3.3. fejezetben a (3.58) egyenletrendszer definiál. A szimuláció során felhasznált paraméterek:  $\delta = 11.6$ ,  $\alpha = 8.92$ ,  $\sigma = 2.93$ ,  $\beta = 0.017$ ,  $\mu = 0.121$ ,  $\tilde{k} = 0.0$  és  $\gamma = 0.1$ . A 25. ábrán a tartályba előírt tömegáram-lefutás (alsó ábra, kék vonal) hatására a szelep kinyit, majd lezár. A piros vonallal jelölt szimulációban nem volt súrlódás beállítva  $\varphi = 0$ , míg a

fekete szaggatott vonallal jelölt esetben  $\varphi = 0.1$ -es érték volt megadva. Ezen kívül, mindkét esetben egy valódi Crosby 2J3 szelep effektív felület görbáját adtuk meg.

Meg kell jegyeznünk, hogy ez a jelenség régóta ismert: Fromann és Friedel kísérleti úton tanulmányozta [30] irodalomban ezt az esetet és egészen 2015-ig ez volt az egyetlen méretezési kritérium a szelepstabilitás elkerülésére: az API-520 szabvány nem engedett meg a nyitónyomás 3%-ánál nagyobb nyomásesést a felvízoldali csővezetékben (ld. [5]).

## 4.7. További hatások, megjegyzések

Az eddig bemutatott analitikus levezetések, numerikus modellek és mérések számos további hatást elhanyagolnak. Nem vizsgáltuk például a szelepből esetlegesen kialakuló periodikus örvényleválások gerjesztő hatását annak ellenére, hogy az áramlástanban közismert tény, hogy T elágazások vagy szabadsugarba helyezett ékszerű testek esetén ezek a jelenségek felléphetnek, ld. pl. [61, 60]. Tamura [72] tanulmányában egy ilyen, T-elágazásokban leváló örvények és a szelep dinamikai egymásra hatását vizsgálta, ám azt nem jelenti ki a szerző, hogy ezek az instacionárius örvényleválások okoznák a szelep instabilitását. Annak ellenére, hogy a szerző konkrét, tudományos igényességű adatokkal nem tudja alátámasztani az állítást, mégis úgy gondolja, hogy ezek a hatások pusztán önmagukban nem okoznak szelepinstabilitást (természetesen kizárva az egyértelmű tervezési hibát).

Szintén nem vizsgáltuk a szelepház hatását az alvízoldali áramlásra, amely a szeleptest "felső", alvízoldali nyomáeloszlását befolyásolja. Az alvízoldali nyomásváltozás hatásának kiküszöbölésének érdekében alkalmazzák a fémharangos, ún. "bellows balanced" szelepeket, amelyeknél a szelep alvízoldali felületének egy részét kitakarják egy rugalmas fémharang segítségével. Ilyen szelepek esetében a rugómerevséget korrigálni kell a fémharang, mint párhuzamosan kapcsolt rugó merevségével, ami könnyen megtehető.

Az ipari alkalmazások esetében az állítógyűrű szerepe fontos, ui. ezzel tudjuk beállítani a kívánt zárési nyomást. Ezzel jelen dolgozatban nem foglalkoztunk, ugyanakkor megemlítjük, hogy CFD szoftverek segítségével az állítógyűrű hatása jól modellezhető és összességében az állítógyűrű segítségével az effektív felület görbét manipuláljuk. Különösen érdekes áramlási mikrostruktúrák alakulnak olyan esetekben, amikor gáz kritikus nyomásviszony feletti, fojtott expanziója esetén.

A kapcsolódó szakirodalomban – pl. [65, 19, 57, 21] – elterjedt az a nézet, hogy a szelep nyitási ideje és a felvízoldali csővezeték főidejének összevetésével elkerülhető a szeleprezgés. Konkrétan, Cremers [19] cikkében azt állítja, hogy *"the valve is expected to operate in a stable manner, resp., not to chatter if twice the transmission line time  $t_w$  of the expansion wave in the inlet pipe, generated by the abrupt valve opening, is shorter than the total opening time  $t_{open}$  of the valve"*. Az állításra ezután egy olyan elméletet építenek, amely keveri a statikus és dinamikus hatásokat. Jelen dolgozat szerzője a numerikus szimulációk során nem tudta

megerősíteni ezt az állítást. Valóban, [30] sem tudta mérések segítségével igazolni ezt az elméletet és ki is jelenti, hogy a szóban forgó méretezési eljárás ("pressure surge criteria") elégtelen lehet ("may be insufficient") a jelenség leírásához.

A csővezeték súrlódási nyomásesését a szokásos, stacionárius körülmények között alkalmazott  $\lambda$  csősúrlódási tényezővel közelítjük. Ez dinamikus esetekben pontatlan becslést adhat, ld. [11] és további vizsgálatokat igényelne annak pontos meghatározása, hogy egy bonyolultabb, instacionárius csősúrlódási modell mennyiben befolyásolná, javítaná az eredményeket. Hasonló a helyzet a modellezetlen mechanikai csillapításokkal is (pl. szelepszár megvezetése). Ugyanakkor mindkét hatás esetén kijelenthetjük, hogy a nem modellezett csillapítások javítják a szelepek stabilitási tulajdonságait, ezért elhanyagolásuk a biztonság irányába vét.

## 5. Globális ütközéses dinamika a Tartály-Szelep Modellben

### 5.1. Előzmények, motiváció

Stanislaw Ulam híres mondása szerint a "nemlineáris rendszerek" kifejezést használni olyan, mintha az elővilág nagy részét "nem-elefántok"-nak neveznénk (a szerző fordítása). A műszaki életben a pusztán lineáris modellekkel megfelelően pontosan leírható jelenségek száma csekély. Természetesen ezeknek a lineáris modelleknek vitathatatlanul szerepük van a jelenségek megértésében vagy az oktatásban, és hosszú időn keresztül a nemlineáris modellek vizsgálatához szükséges matematikai eszközök sem álltak rendelkezésre sem numerikus, sem analitikus oldalról.

Az ezredforduló környékén azonban a nemlineáris dinamika gyors fejlődésnek indult és egyre több olyan módszer állt rendelkezésre, mely lehetővé tette ezen rendszerek viselkedésének *minőségi megértését*, ld. pl. Guckenheimer és Holmes híres [35] könyve, Wiggins [79] munkája vagy Kuznetsov [49] nagyszerű kézikönyve. A bifurkációelmélet (egyes megoldástípusok szétválásának vagy egyesülésének vizsgálata) és a nemlineáris dinamika eszköztárának segítségével értelmezhetővé váltak a numerikus szimulációk során tapasztalt jelenségek (pl. rezgések megjelenése/elhalása, újabb frekvenciakomponensek megjelenése a rezgésben, káosz megjelenése, egyszerre több megoldás létezése) és, ami még fontosabb, az új módszerek segítségével detektálni és követni tudjuk azokat a speciális paraméterértékeket, amelyeknél "valami fontos vagy érdekes" történik a (nemlineáris) dinamikai rendszerrel.

Ezek a vizsgálatok azonban "sima" (smooth) dinamikai rendszerekkel foglalkoztak és kizárták a szakaszosan folytonos vagy hibrid dinamikai rendszerek vizsgálatát. Szakaszosan folytonos dinamikai rendszer pl. egy kotyogó alkatrészt leíró modell, ahol egy bizonyos  $y_0$  elmozdulásig az alkatrész szabadlengéseket végez, majd a kritikus elmozduláson túl pl. egy rugóerő hat rá, így a leíró egyenletek

$$\dot{y} = \begin{cases} F_1(y,t) & \text{ha } |y| < y_0 \\ F_2(y,t) & \text{egyébként} \end{cases} \quad (5.99)$$

alakúak. Hasonlóan, nem-folytonos dinamikával találkozunk akkor is, ha a rendszerünk rezgés közben ütközéseket végezhet:

$$\dot{y} = F(y,t) \quad \text{ha } x \geq 0 \quad \text{és} \quad (5.100)$$

$$y \mapsto R(y) \quad \text{ha } H(y) = 0. \quad (5.101)$$

Ez azt jelenti, hogy a folytonos dinamikai rendszer ( $\dot{y} = F(y,t)$ ) integrálása közben figyelemmel kell kísérni  $H(y)$  értékét és amennyiben zérussá válik, meg kell állítani az integrálást

és alkalmazni az  $y \mapsto R(y)$  leképezést, majd újraindítani az integrálást. Például, esetünkben az  $F(y,t)$  függvény a szelepdinamikát írja le,  $H(y) = x$ , azaz akkor kell megállítanunk az integrálást, ha a szelep eléri az üléket ( $H(y) = x = 0$ ), az ütközési törvény pedig  $v^+ = -rv^-$ , ahol  $v$  a szelep sebessége,  $v^-$  és  $v^+$  az ütközés előtti és utáni sebesség,  $r$  pedig az ütközési tényező. A fenti egyenletek egy hibrid dinamikai rendszert írnak le, ami egy folytonos (a szelepdinamikát leíró) és egy diszkrét (az ütközést leíró) alrendszerből áll.

Ilyen szakaszosan folytonos vagy hibrid rendszerekkel gyakran találkozunk a műszaki életben. Egy hidraulikus rendszer visszacsapó szelepe vagy útváltója, egy szabályzó szaturációja vagy holtsávja, száraz sűrűlódás jelenléte vagy akár a véges számábrázolás miatti, mérések során tapasztalható kvantálás is ilyen hatást visz a rendszerbe. Az elmúlt évtizedben ez a terület hatalmas fejlődésen ment keresztül, különösen a [26] könyv megjelenése tekinthető mérföldkőnek, mivel ebben a szerzők rendszereztek a rendelkezésre álló matematikai eszközöket.

Az ebben a fejezetben bemutatott számítások mögötti mérnöki motiváció az, hogy szeretnénk meghatározni azokat a paramétertartományokat, ahol ütközéseket tartalmazó és nem tartalmazó rezgések vannak jelen, mivel a szeleptest ütközéseket nem tartalmazó rezgései ("flutter" az angol szaknyelvben) nagyságrendekkel kisebb problémát okoznak, mint az ütközéseket tartalmazó rezgések ("chatter"). Szeretnénk azt is meghatározni, hogy melyek azok a tartományok, ahol egyetlen frekvencia dominálja a mozgást és vannak-e olyan tartományok, ahol jóval bonyolultabb, kaotikus viselkedést várhatunk.

Ezeket a tartományokat a mozgásegyenletek direkt numerikus integrálásával is meghatározhatnánk (pl. Runge-Kutta eljárással), ám ez egyrésztől rossz hatásfokú, mivel a vizsgált paramétersíkon egy rácsot kellene kifeszítenünk és mindegyik pontjában egy (vagy több) numerikus integrálást kellene indítanunk. Másrésztől, szeretnénk *megérteni*, hogy pontosan milyen mechanizmusok vezetnek az egyes rezgéstípusok (megoldások) megjelenéséhez vagy eltűnéséhez.

Ez az fejezet a következő részekből áll. Az 5.2. alfejezetben újra megvizsgáljuk a 3.2 fejezetben korábban levezetett Tartály-Szelep Modellt és numerikus szimulációsegítségével feltérképezzük a globális dinamikát (a korábbi fejezetben csak az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgésekre koncentráltunk). A tapasztalt dinamika rendkívül gazdag és nagyrészt olyan rezgéseket tartalmaz, melyek során a szelep egyszer vagy többször ütközik a szelepülékkel. Az ilyen pályák hatékony kiszámítására és stabilitásuk meghatározására használt numerikus módszereket ismertetjük az 5.3, mivel ezek a módszerek – bár elemeikben nem újak – semmiképpen sem tekinthetők jól ismertnek vagy standardnak. Ezekkel a numerikus módszerekkel felvértezve az 5.4 alfejezetben újra kiszámítjuk a Tartály-Szelep Modell bifurkációs ábráit és minőségileg is megmagyarázzuk az egyes megoldástípusok születését és eltűnését. Végül, az 5.5 alfejezetben egy matematikai szempontból érdekes (mérnöki szempontból inkább

egzotikus) megoldástípust kialakulását vizsgálunk, amely egy ütközést tartalmazó, végtelen periódusidejű, egyensúlyi helyzetet önmagával összekötő ún. Shilnikov-szerű homoklinikus pálya.

## 5.2. A TSzM globális viselkedése

Ebben a fejezetben részletesen megvizsgáljuk a 3.2. alfejezetben bevezetett Tartály-Szelep Modell viselkedését, különös tekintettel a kis térfogatáramú tartományra, ahol jellemzően ütközéseket tartalmazó mozgásokat találunk. A fejezetben elsősorban a rendszer viselkedésének *nemlineáris dinamikai szempontból érdekes tartományaira* koncentrálnak akár olyan áron is, hogy a megadott paraméterek nem okvetlenül a műszaki (tervezési) szempontból fontos tartományba esnek.

A modellünk tehát  $(y_1 = \tilde{x}, y_2 = \tilde{x}', y_3 = \tilde{p}_t - 1)$ , ld. (3.48)–(3.50) rendszer a 29 oldalon:

$$y_1' = y_2, \quad (5.102)$$

$$y_2' = -\tilde{k}y_2 - (y_1 + \delta) + y_3 \quad \text{és} \quad (5.103)$$

$$y_3' = \beta (q_{be} - \mu\sigma y_1 \sqrt{y_3}) = \beta\mu\sigma \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} - y_1 \sqrt{y_3} \right) := \hat{\beta} (\hat{q}_{be} - y_1 \sqrt{y_3}), \quad (5.104)$$

ahol az utolsó átalakítást ( $\hat{\beta}$  és  $\hat{q}_{be}$  bevezetését) kényelmi megfontolások indokolják. A fenti egyenletben  $\mu$  a korábban – pl. a 2. táblázatban – bevezetett dimenziótlan csőkeresztmet-szetet jelenti, ám ebben a fejezetben minden más alkalommal általános paramétert vagy paramétervektort jelöl (igazodva a szokásos nemlineáris dinamikai jelöléshez).

A továbbiakban csak a szelep és a szeleplék ütközését vesszük figyelembe, az  $y_1$  elmozdulásra felső határt nem szabunk. Amennyiben tehát az  $y_1 = 0$  esemény (a szeleptest eléri az üléket) bekövetkezik, a mozgásegyenlet integrálását megállítjuk és újraindítjuk  $(0, -ry_2^-, y_3^-)$  kezdeti feltétellel, ahol  $y_{2,3}^-$  az ütközés előtti (a "becsapódás" pillanatában mért) állapotot jelenti.

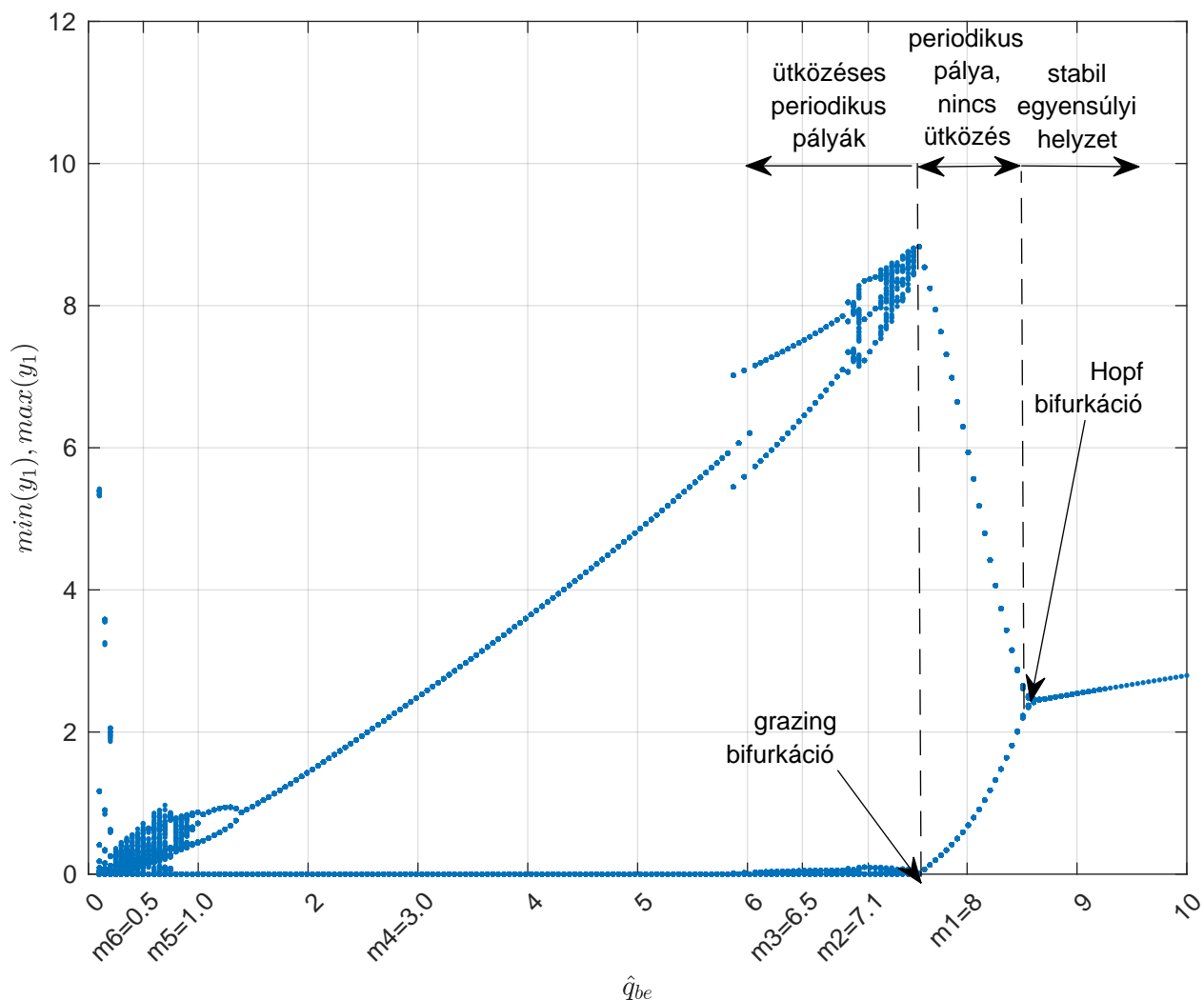
Ahogy azt már láttuk a 3.2. fejezetben, az egyensúlyi szelepnitítás instabillá válik a (3.52) összefüggéssel meghatározott kritikus csillapítási tényező elérésekor. A választott paraméterértékeink:  $\tilde{k} = 1.25$ ,  $\delta = 10$  és  $\hat{\beta} = 20$ , továbbá  $\mu = \sigma = 1$ . A szelepléssel való ütközési tényezőt  $r = 0.8$ -ra választjuk. Ezeket behelyettesítve a (3.52) kritériumba kapjuk, hogy

$$1.25 = - \frac{\hat{q}_{be} \left( \frac{100\tilde{x}_e^4}{\hat{q}_{be}^2} - \sqrt{\left( \frac{100\tilde{x}_e^4}{\hat{q}_{be}^2} + 1 \right)^2 + 800\tilde{x}_e + 1} \right)}{20\tilde{x}_e^2},$$

másrésről, a (3.53) egyensúlyi feltétel az

$$\tilde{x}_e^3 + 10\tilde{x}_e^2 - \hat{q}_{be}^2 = 0$$

alakot ölti. Ezt a két egyenletet numerikus megoldva kapjuk a Hopf bifurkáció paraméterértékeit:  $\hat{q}_{be} = 8.49$  és  $\tilde{x}_e = 2.41$ .



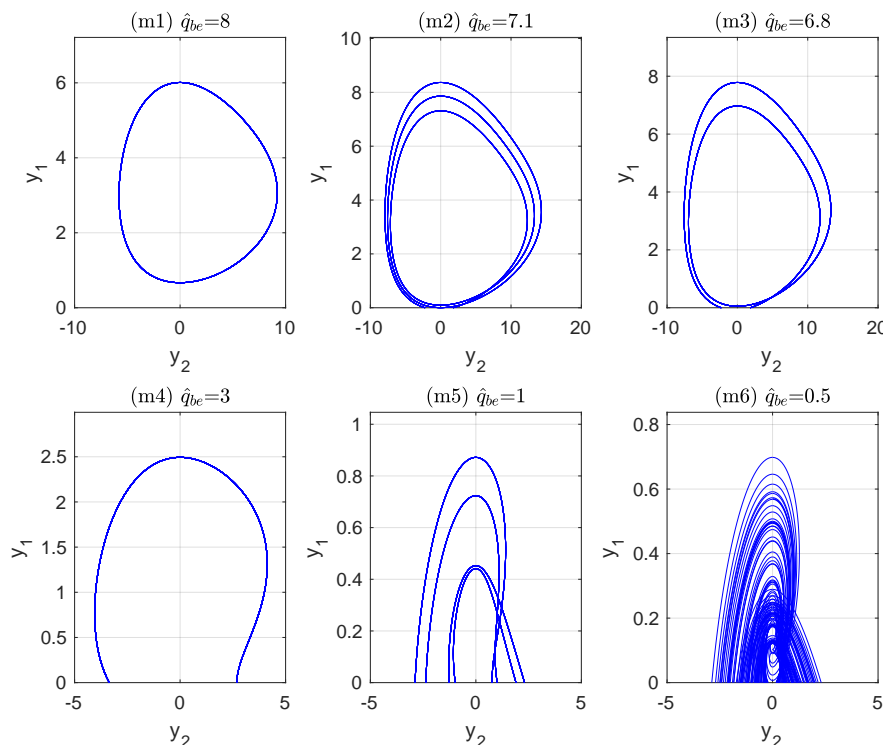
26. ábra. Az (5.104) rendszer bifurkációs diagramja  $\tilde{k} = 1.25$ ,  $\delta = 10$  és  $\hat{\beta} = 20$  paraméterértékek esetén. Az  $m = \dots$  helyen megjelölt paraméterértékek esetén a 27. ábra tartalmazza a pályákat.

A 26. ábrán a fenti rendszer direkt numerikus szimulációjával kapott bifurkációs ábrát láthatjuk, ahol feltüntettük a Hopf bifurkációt is. A térfogatáram csökkentésével egy periodikus pálya keletkezik, melynek amplitúdója folyamatosan növekszik, majd közelítőleg  $\hat{q}_{be} = 7.6$ -nél eléri a szeleptületet, azaz  $\min(y_1) = 0$ . Ezt az esetet a szakirodalom "grazing" (súrló, súrlódó) bifurkációnak nevezi, mivel a szeleptest "súrolja" a szeleptületet. A térfogatáramot tovább csökkentve hirtelen kaotikus, ütközéseket tartalmazó pályák jelennek meg. Ezt a speciális (a grazing bifurkációhoz tartozó) pontot [HCs12] publikációban részletesen vizsgáltuk és bizonyítottuk, hogy valóban kaotikus pályák keletkeznek. A térfogatáram további



csökkentésével egyszerűsödnek ezek a pályák és a  $1.4 < \hat{q}_{be} < 5.8$  tartományban egyetlen, ütközést tartalmazó pályát találunk. Ennél kisebb térfogatáramok esetén egy perióduskettőző bifurkációsorozaton keresztül egyre bonyolultabb pályák keletkeznek, melyek végül letapadó pályákhoz vezetnek, tehát olyan pályákhoz, amelyek periódusidejének egy részében a szelep folyamatosan zárva van, hasonlóan a korábbi a 3.5. alfejezetben bemutatott 16. ábrán látható mozgáshoz (túlméretezett szelep esete). Néhány pályát részletesen bemutatunk a 27. ábrásorozaton.

Az (m1) metszeten ( $\hat{q}_{be} = 8$ ) a Hopf bifurkáció után kialakuló, ütközést nem tartalmazó periodikus pályát mutatjuk be az  $(y_1, y_2)$  síkra vetítve. (Az  $y_1$  szelepnnyitás változó a függőleges tengelyen szerepel a szemléletesség kedvéért.) A térfogatáramot tovább csökkentve, a grazing pont elérése után "hirtelen" magas periódusú, kaotikus, számos ütközést tartalmazó pályával szembesülünk, erre mutat példát az (m2) metszet, melyen egy 3 periódusú pályát ábrázoltunk<sup>19</sup>. Tovább csökkentve a térfogatáramot, az  $1.4 \dots 5.7$  tartományban 1 periódusú, ütközéses pályákat találunk, pl. (m4) metszet, míg egészen kis térfogatáramok esetén perióduskettőző bifurkációk sorozatán (ahol minden új periódus megjelenésekor újabb ütközés is történik) újabb kaotikus tartományt találunk.



27. ábra. Pályák a 26. ábrán bejelölt m1...m6 paraméterek esetén, vö. 26. ábra.

<sup>19</sup>Bár számos, ennél nagyobb periódusú pálya is létezik ebben a paramétertartományban, a 3 periódusú pályát történelmi okok – ld. [53] – miatt választottuk.

### 5.3. Ütközéseket tartalmazó periodikus pályák numerikus követése

Az előzőekben bemutatott mozgásformák kapcsán felmerül a kérdés, hogy egy ütközéseket tartalmazó dinamikai rendszer esetén milyen módszerekkel végezhető el – a folytonos rendszerek esetében megszokott – minőségi vizsgálat? Hogyan azonosítsunk pl. ütközéses periodikus pályák perióduskettőző bifurkációját? Hogyan számítsuk ki egy ütközéseket tartalmazó pálya stabilitását?

Ebben a fejezetben a korábban megfigyelt különleges – főként ütközéseket tartalmazó – periodikus pályák követéséhez ill. bifurkációinak meghatározásához fejlesztünk numerikus módszereket. Folytonos rendszerek esetén mind az elméleti háttér, mind a numerikus módszerek jól kidolgozottak és implementáltak, előzőre jó példa Kuznetsov [49] könyve, melyben receptszerűen megtalálhatjuk az összes 1 és 2 kodimenziós bifurkáció normálformáját és vizsgálati módszertanát, míg utóbbira példa az AUTO [27] szoftver, melyben kényelmesen és gyorsan elvégezhetjük a minőségi vizsgálatot (további példák: MatCont [25], DSTool [9]).

Szakaszosan folytonos rendszerekre jelenleg nincs "kiforrott" programcsomag, mellyel hasonló vizsgálatok elvégezhetőek lennének. A [73] publikációban részletezett módszer ugyan általános célú, ám homoklinikus pályákat nem képes követni. (Egy alkalmazási példát találhatunk a [18] irodalomban.) Hasonlóan, a SlideCont [24] szoftver, amely valójában az AUTO [27] szoftvert irányító eljárásgyűjtemény, csak Filippov rendszerek (ld. [26]) vizsgálatára alkalmas. [28] cikkben egy szakaszosan lineáris függőhídmodell periodikusan gerjesztett modelljét vizsgálják a kutatók, megintcsak az AUTO szoftver segítségével. Ezek a szoftverek hasznosak, ám nagy hátrányuk, hogy nem férünk hozzá (vagy csak nehézkesen) periodikus pályák monodrómia mátrixához, amire azért van szükség, hogy a kapcsolóvonal menti korrekciót elvégezhesük, ld. az (5.111) egyenlet. Enélkül a korrekció nélkül nem tudjuk a periodikus pályák bifurkációit detektálni és követni, különösen a 27. ábrán  $\hat{q}_{be} \approx 7.6$  értéknél megjelölt grazing bifurkációt és a  $\hat{q}_{be} \approx 1.4$  értéknél megfigyelt első perióduskettőző bifurkációját az ütközéses pályának.

Periodikus pályák kiszámítására széles körben elterjedtek a peremértékfeladat-megfogalmazáson alapuló módszerek, mivel ezek érzéketlenek a pálya stabilitására (ellentétben a kezdeti érték feladat alapú megfogalmazással), így az instabil pályák is könnyedén meghatározhatók. Ezek a módszerek valamilyen diszkretizációs módszerrel (jellemzően kollokációs módszerrel) algebrai egyenletrendszerre alakítják a peremértékfeladatot, melyet iteratív úton oldanak meg. Amennyiben valamilyen bifurkációs pont meghatározása a feladat, egy tetszőleges paramétert is ismeretlennek tekintünk és *a kollokációs egyenletekhez csatoljuk a megfelelő további feltételt*, pl. perióduskettőzés esetén azt, hogy a pálya karakterisztikus multiplikátorai közül az egyik pontosan -1 (ld. [35]).

### 5.3.1. Ütközéses periodikus pályák

Ütközéses dinamikai rendszerek esetén meglehetősen egyszerűen általánosíthatók a karakterisztikus multiplikátorok (ld. később részletesen ill. [26]), de a fentiek alapján ezekhez egy peremértékfeladat megoldó kódolása is szükséges lenne. Ez pazarlásnak tűnik, mivel számos kifinomult megoldó áll rendelkezésre a numerikus analízis körében megszokott keretrendszereken (pl. Matlab, Octava, Wolfram Mathematica, stb.) belül. Mindezek tükrében a továbbiakban elsődleges szempont lesz, hogy egy olyan "fekete doboz" peremértékfeladat megoldó szoftver létét adottnak tekintjük, mely megoldja a

$$\begin{aligned} y' &= F(x, y(x), \mu) \quad \text{feladatot az } a \leq x \leq b \text{ intervallumon a} \\ 0 &= G(y(a), y(b), \mu) \quad \text{feltételek mellett,} \end{aligned}$$

ahol  $x$  a független változó<sup>20</sup>  $\mu$  a szabad paraméterek vektorát jelöli és  $G$  megfelelő méretű: amennyiben  $y$   $N$  dimenziós vektor és  $\mu$   $M$  számú paramétert tartalmaz,  $G$  mérete  $N + M$  (azaz  $y \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^M$  és  $G \in \mathbb{R}^{N+M}$ ).

Példaként tekintsünk egy egyetlen ütközést tartalmazó periodikus pálya peremérték-megfogalmazását. A dinamikai rendszer legyen  $y' = F(x, y(x))$  ( $x \in \mathbb{R}$  és  $y \in \mathbb{R}^N$ ). Amennyiben nincs ütközés, egy  $T$  periódusú pályára igaz, hogy  $y(0) = y(T)$ , azonban ütközés esetén ezt kissé módosítani kell. Jelölje  $y^-$  az ütközés előtti,  $y^+$  pedig az ütközés utáni állapotot és az ütközőfelület legyen a  $H(y) = 0$  ( $H(y) \in \mathbb{R}^1$ ) skalárértékű kifejezéssel adott. A  $H(y) = 0$  feltétel teljesülésekor alkalmaznunk kell az ütközési törvényt, mely általánosan az

$$y \mapsto R(y), \quad \text{ha } H(y) = 0 \quad (5.105)$$

alakban írható. A periodikus pálya ebben az esetben azt jelenti, hogy  $y^+$  (ütközés utáni állapot,  $H(y^+) = 0$ ) kezdeti értékből kiindulva,  $T$  ideig integrálva  $y^-$ -ba érkezünk, ahol egyrészről  $H(y^-) = 0$  (azaz ütközés történik) és teljesül, hogy  $y^+ = R(y^-)$ . Fontos észrevennünk, hogy  $T$  periódus – a peremérték feladat végpontja – ismeretlen, ezért az időt újraszkalázzuk ezzel az ismeretlen periódussal, így a végpont az  $x = 1$  lesz. A megoldandó peremérték probléma tehát:

$$y' = TF(x, y(x)) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y \in \mathbb{R}^N \quad (5.106)$$

$$0 = y_a - R(y_b) \quad (N \text{ db ütközési leképzés}) \quad \text{és} \quad (5.107)$$

$$0 = H(y_a) \quad (1 \text{ db, az ütközés létrejöttének feltétele), \quad (5.108)$$

ahol  $y_a := y(0)$ ,  $y_b := y(1)$  és az egyszerűség kedvéért nem vezetünk be új jelölést a  $0 \dots 1$  közé átskalázott  $x$ -re, ill. az  $e$  változó szerinti differenciálásra. Nem szükséges előírni a  $H(y_b) = 0$

<sup>20</sup>Ebben a fejezetben, mivel általános matematikai témát tárgyalunk,  $x$  nem a szelepelmozdulást, hanem a szokásos független változó jelenti.

feltételt, mivel  $R$  ütközési törvénynek olyannak kell lennie, hogy a  $H = 0$  felületről ugyanoda képez. Amint látjuk,  $N$  dimenziós dinamikai rendszer esetén  $N + 1$  peremfeltételünk lesz, ami helyes, mivel  $T$  ismeretlen paramétert is meg kell határoznunk.

Az általunk vizsgált Szelep-Tartály modell esetén az ütközési felület egyszerűen  $H(y) = y_1 = 0$  egyenlettel adott, a  $R$  ütközési törvény pedig:

$$R : (y_1^-, y_2^-, y_3^-) \mapsto (y_2^+, y_2^+, y_3^+), \quad \text{ahol} \quad y_1^+ = y_1^-, \quad y_2^+ = -ry_2^- \quad \text{és} \quad y_3^+ = y_3^-. \quad (5.109)$$

### 5.3.2. Ütközéses periodikus pályák stabilitása

A következő természetes kérdés, hogy amennyiben meghatároztunk egy ilyen pályát, hogy dönthetjük el, hogy stabil vagy instabil? Folytonos (ütközéseket nem tartalmazó) periodikus pályák esetén a rendszer  $y_p$  periodikus pályájához tartozó  $\mathcal{M}_{y_p}$  monodrómia mátrixát kell meghatároznunk, mely a  $z' = \mathcal{A}(y_p(x))z$  lineáris *időfüggetlen* kezdeti érték feladat (variációs probléma) megoldását jelenti. Itt  $\mathcal{A}(y_p(x))$  az eredeti nemlineáris rendszer  $y_p$  körül vett linearizáltját jelöli. Ütközéseket tartalmazó periodikus pályák esetén ezt a monodrómia mátrixot (melyet a  $0 \leq x \leq 1$  tartományon oldunk meg) még korrigálni kell az ütközés miatt a

$$Q_y(y^-) = R_y(y^-) + \frac{[F(R(y^-)) - R_y(y^-)F(y^-)] H_y(y^-)}{H_y(y^-)F(y^-)}, \quad (5.110)$$

korrekciós mátrixszal ("saltation matrix", ld. [26]). A fenti kifejezésben átvettük a könyv jelöléseit, az alsó indexek differenciálást jelölnek. Esetünkben, mivel  $y^- = (0, y_2^-, y_3^-)^T$ ,  $R(y) = (y_1, -ry_2, y_3)^T$  és  $H(y) = y_1$ , ezért

$$R_y(y^-) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_y(y^-) = \text{grad}H(y)|_{y=y^-} = (1, 0, 0) \quad \text{és}$$

$$H_y(y^-)F(y^-) = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} y_2 \\ -\tilde{k}y_2 - (y_1 + \delta) + y_3 \\ \hat{\beta}(\hat{q}_{be} - \mu\sigma y_1 \sqrt{y_3}) \end{pmatrix} = y_2$$

és a behelyettesítések után kapjuk, hogy

$$Q_y(y^-) = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ Q_{2,1} & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad Q_{2,1} = (1+r) \frac{y_3^- - \delta}{y_2^-}. \quad (5.111)$$

Így az  $y_p$  egyetlen ütközést tartalmazó periodikus pálya stabilitását az  $\mathcal{M}_{y_p} Q_y(y^-)$  mátrix sajátértékei (karakterisztikus multiplikátorok) adják meg. Ezen mátrix tulajdonságai hasonlóak a folytonos rendszerek esetén kiszámított monodrómia mátrixokhoz: az egyik multiplikátor

mindig 1 és a stabil pálya feltétele, hogy minden karakterisztikus multiplikátor a komplex egységkörön belül legyen (ld. [49, 33]).

Kiemelt fontossága lesz azoknak a pályáknak, melyek grazing bifurkáción esnek át, azaz az "ütközés" pillanatában a  $H(y) = 0$  felületre merőleges sebesség nulla. Ez a vizsgált rendszerben annak az esetnek felel meg, amikor a periodikus pálya először érinti ("súrolja") a szeleptületet. Ebben az esetben  $H(y^-) = 0$  feltétel mellett a  $H_y(y^-)F(y^-) = 0$  feltételnek is teljesülnie kell, mely esetünkben pontosan  $y_2^- = 0$  alakot ölti, azaz az ütközés pillanatában a szeleptest nulla sebességét írja elő. Ez utóbbi feltételt tehát csatolni kell az (5.108) rendszerhez és, mivel már  $N + 2$  peremfeltételünk van, ezért egy további paramétert is fel kell szabadítani.

### 5.3.3. A pszeudo-ív hossz módszer

Most térjünk át a periodikus pályák követésének problémájára ('continuation problem'). A széles körben elterjedt pszeudo-ív hossz módszer tulajdonképpen egy prediktor-korrektor módszer, amely lehetővé teszi az  $\mathcal{F}(x, \mu) = 0$  ( $\mathcal{F}, x \in \mathbb{R}^N, \mu \in \mathbb{R}^1$ ) nemlineáris egyenletrendszer zérushelyeinek követését  $\mu$  paraméter változtatás közben. Ennek akkor van különösen nagy jelentősége, ha nem csupán egy megoldás létezik és egy  $\mu$  paraméterhez több megoldás is tartozik (pl. szubkritikus Hopf bifurkáció esetén egyszerre stabil és instabil periodikus pályák). A módszer lépései (ld. 28. ábra):

**Inicializálás.** Legyen adott egy  $y_0 = (x_0, \mu_0)$  pont (amely kielégíti a megoldandó egyenletet) és ebben a pontban az egység hosszúságú  $v_0$  érintővektor.

**Prediktor lépés.** Lépünk előre az  $y_0$  pontból  $v_0$  irányban  $\Delta s$  távolságot, azaz  $y_p = y_0 + v_0 \Delta s$ , ahol  $\Delta s$  a lépéshossz. Ez a pont (általában) nem fogja kielégíteni az eredeti egyenletet, azaz  $\mathcal{F}(x_p, \mu_p) \neq 0$ .

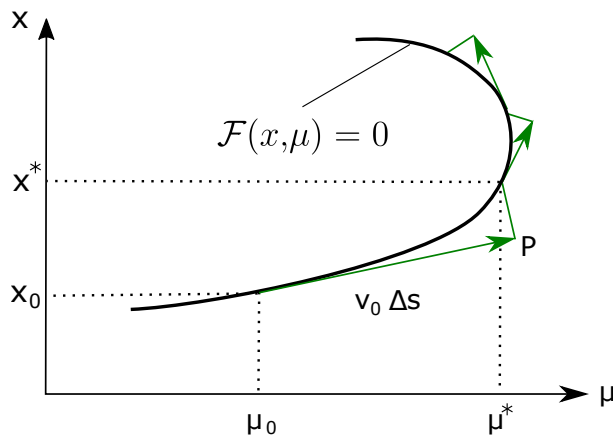
**Korrektor lépés.** Keressük meg azt az  $y^*$  pontot a görbén, melyre  $y_p$ -ből indulva,  $v$ -re merőleges irányban helyezkedik el:  $0 = \langle y^* - y_p, v \rangle = \langle y^* - y_0 - v \Delta s, v \rangle = \langle y^* - y_0, v \rangle - \Delta s$ . ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a skalárszorzatot jelöli.)

Így a pszeudo-ív hossz módszer alkalmazása során az alábbi *kibővített* egyenletrendszert oldjuk meg:

$$\mathcal{F}(x^*, \mu^*) = 0 \quad (N \text{ db egyenlet}) \quad (5.112)$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i^* - x_{0,i}) v_i + (\mu_0 - \mu^*) = \Delta s. \quad (1 \text{ db egyenlet}) \quad (5.113)$$

Most vagyunk abban a helyzetben, hogy megfogalmazhatjuk az ütközéses periodikus pályák követésére alkalmas módszert. Mint már említettük, a módszer lényege, hogy egy "fekete doboz" peremértékmegoldó algoritmust ötvöz a pszeudo-ív hossz módszerrel. A hagyományos pszeudo-ív hossz módszer a kollokációs egyenleteket (vagy bármilyen más diszkretizációs mód-



28. ábra. Pszeudo-ív hossz módszer.

szereből kapott egyenletrendszer) egészíti ki a pszeudo-ív hossz feltétellel, ám az itt bemutatott módszer ennek egyszerűsített változata, ezért pszeudo-pszeudo ív hossz módszernek (röviden  $p^2$  ív hossz módszernek) fogjuk nevezni.

A módszer lényege, hogy a szabad paraméterek által kifeszített térben alkalmazzuk a pszeudo-ív hossz módszert, azaz a korábban megfogalmazott (5.106) – (5.108) peremfeltétel rendszert egészítjük ki az (5.113) feltétellel. Így egy ütközéses periodikus pálya esetén a megoldandó peremértékfeladat

$$y' = TF(x, y(x), \mu) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y \in \mathbb{R}^N \quad (5.114)$$

$$0 = y_a - R(y_b) \quad (N \text{ db feltétel}), \quad (5.115)$$

$$0 = H(y_a) \quad (1 \text{ db feltétel}) \quad \text{és} \quad (5.116)$$

$$0 = \Delta s - ((\mu - \mu_0) v_1 + (T - T_0) v_2) \quad (1 \text{ db feltétel}), \quad (5.117)$$

ahol  $\mu$  tetszőleges paraméter (pl.  $\hat{\beta}, \delta$ ) és  $\mu_0, T_0$  az előző megoldást jelöli. Az (5.115) egyenlet az ütközésnél alkalmazott leképezés, az (5.116) összefüggés az ütközés létrejöttének feltétele, míg az (5.117) egyenlet a pszeudo-ív hossz feltétel. A  $v$  érintő egységvektort az előző két pont segítségével közelítjük.

Az itt vizsgált problémára (Tartály-Szelep Modell) explicit módon is megadjuk az egyenleteket. A választott paraméterek a  $\hat{q}_{be}$  térfogatáram és a  $T$  periódus, a dinamikai rendszer pedig

$$\begin{aligned} y'_1 &= T y_2, \\ y'_2 &= T \left( -\tilde{k} y_2 - (y_1 + \delta) + y_3 \right), \\ y'_3 &= T \left( \hat{\beta} (\hat{q}_{be} - y_1 \sqrt{y_3}) \right), \end{aligned}$$

A peremfeltételek ( $\hat{q}_{be}$  a választott szabad paraméter):

$$0 = y_{a,1} \quad (\text{az ütközés pillanatában a szelep hozzáér az ülékhez, ld. (5.116)})$$

$$0 = y_{a,2} + ry_{b,2} \quad (\text{a sebességre teljesül az ütközési törvény, ld. (5.115)})$$

$$0 = y_{a,3} - y_{b,3} \quad (\text{a nyomás nem változik az ütközés során, ld. (5.115)})$$

$$0 = y_{a,1} - y_{b,1} \quad (\text{a szelepelmozdulás nem változik az ütközés során, ld. (5.115)})$$

$$0 = \Delta s - ((\hat{q}_{be} - \hat{q}_{be,0})v_1 + (T - T_0)v_2) \quad (\text{ld. (5.117) } p^2 \text{ ívhossz feltétel}).$$

## 5.4. Ütközéses pályák bifurkációi a TSzM-ben

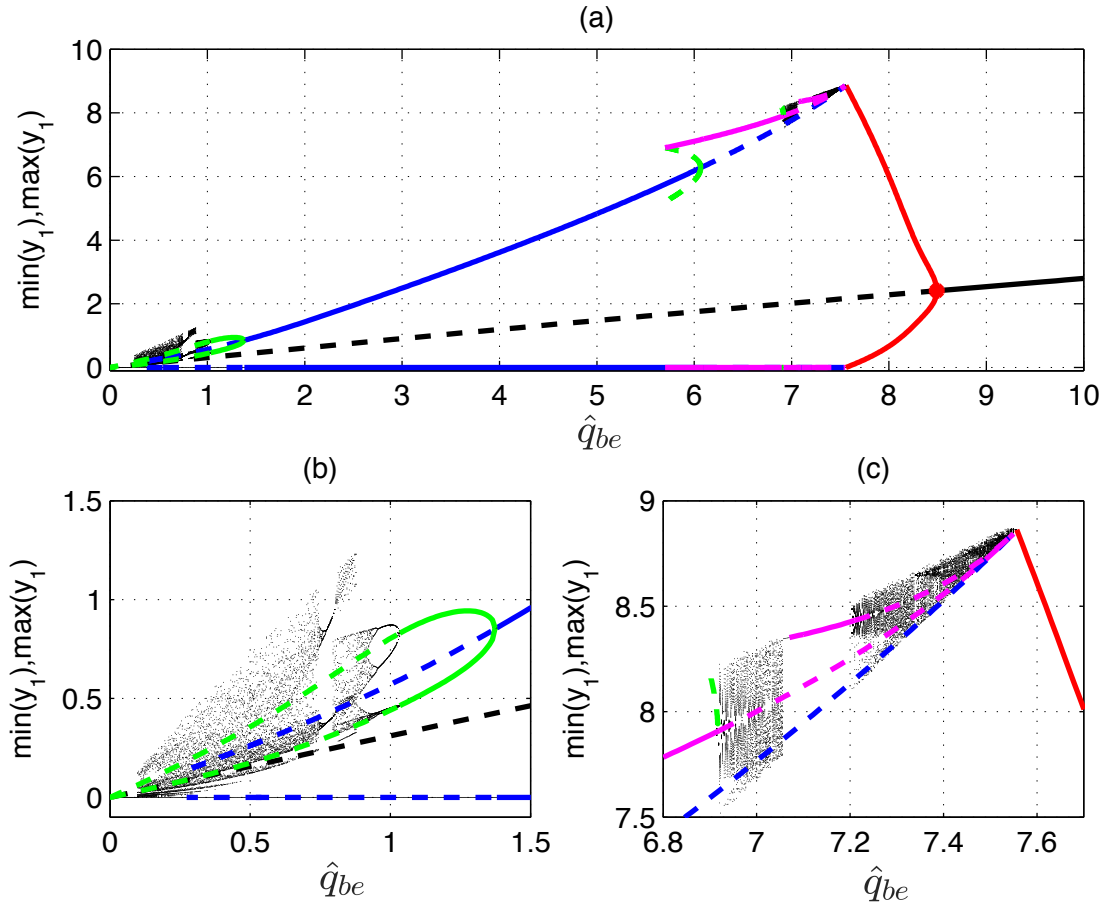
A 29. ábrán újra ábrázoltuk a korábbi, 26. ábrán bemutatott bifurkációs ábrát, ezúttal az előző fejezetben bemutatott numerikus módszerek segítségével kiszámított pályákkal együtt. A 30. ábrán ezzel párhuzamosan minőségi magyarázatot adunk az egyes mozgástípusokra.

Induljunk ki tehát egy nagy térfogatáramon (pl.  $\hat{q}_{be} = 10$ ) megfigyelhető stabil egyensúlyi helyzetből és csökkentjük a térfogatáramot!  $\hat{q}_{be} \approx 8.56$  értéknél (HB pont a 30. ábrán) ez a stabil egyensúlyi helyzet Hopf bifurkáción megy keresztül és elveszíti a stabilitását (fekete szaggatott vonal az ábrákon), ugyanakkor egy stabil periodikus pálya jön létre (piros folytonos vonal, Br2-vel jelölve). A térfogatáram további csökkentésével a pálya amplitúdója növekszik és  $\hat{q}_{be} \approx 7.6$  értéknél az alsó holtpont (min $y_1$ , Gr1) eléri az ülékét, azaz a  $H(y) = 0$  kapcsolófelületet és egy grazing bifurkáción megy keresztül.

A GR1 ponton túl "hirtelen" végtelenül sok instabil periodikus pálya jön létre, azaz a bifurkáción túl kaotikus a mozgás. Segítségül hívva a [26] szakirodalom 4.3.1 fejezetének eredményét, a kritikus pontbeli periodikus pálya monodrómia mátrixának sajátértékei  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 0.8537$  és  $\nu_3 = 0$  (itt alkalmaztuk az (5.111) korrekciót). Ebből azt a következtetést vonhatjuk le (ld. [26] 189. oldal, 4.2 tétel), hogy mivel  $2/3 < \nu_2 < 1$ , a gyengén stabil ("weakly stable") esettel állunk szemben és a kritikus értéken túl hirtelen robusztus káosszal szembesülünk, ld. 29. ábra (c) panel.

Most "ugorjunk" jóval kisebb paraméterértékekre és pl.  $\hat{q}_{be} = 4$  értékről, ahol egyetlen, stabil, egy darab ütközést tartalmazó pályát figyelhetünk meg, *növeljük* a térfogatáramot – azaz vizsgáljuk meg, hogy a "másik irányból" hogyan juthatunk el ehhez a kaotikus tartományhoz ill. a GR1 ponthoz! A térfogatáram növelésével egy olyan sorozatot figyelhetünk meg, mely során a pálya először egy perióduskettőző bifurkáción esik át (pl. PD1 pont), majd a dupla periódusú *instabil* pálya egyik "ága" újra érinti a  $H = 0$  kapcsolófelületet (grazing bifurkáció, pl. GR2 pont) és "ütközés nélkülivé" válik. Az újabb és újabb perióduskettőzések egyre növelik a pálya periódusát, a grazing pontok pedig az ütközések számát csökkentik. Az itt választott paraméterértékeknél ez a kaszkád nem teljes, mivel a  $\hat{q}_{be} \approx 7.05 \dots 7.2$  tartományban egy stabil 3 periódusú pályát figyelhetünk meg, ld. 26. és 27. ábrák (m2) metszet.

Végezetül, vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az előzőekben vizsgált  $\hat{q}_{be} = 4$  értékről



29. ábra. A TSZM rendszer bifurkációs ábrája, vö. 26. ábrával. A pontok direkt numerikus szimulációk Poincare-metszetei, a folytonos és szaggatott vonalak az előző fejezetben ismertetett peremérték megoldóval számított pályák. A folytonos vonalak stabil, a szaggatott vonalak instabil pályákat jelölnek. A két alsó ábra egy-egy nagyítás a kis térfogatáramú, ill a Hopf bifurkáció tartományának. Az ábra minőségi magyarázatát a 30. ábrán ismertetjük.

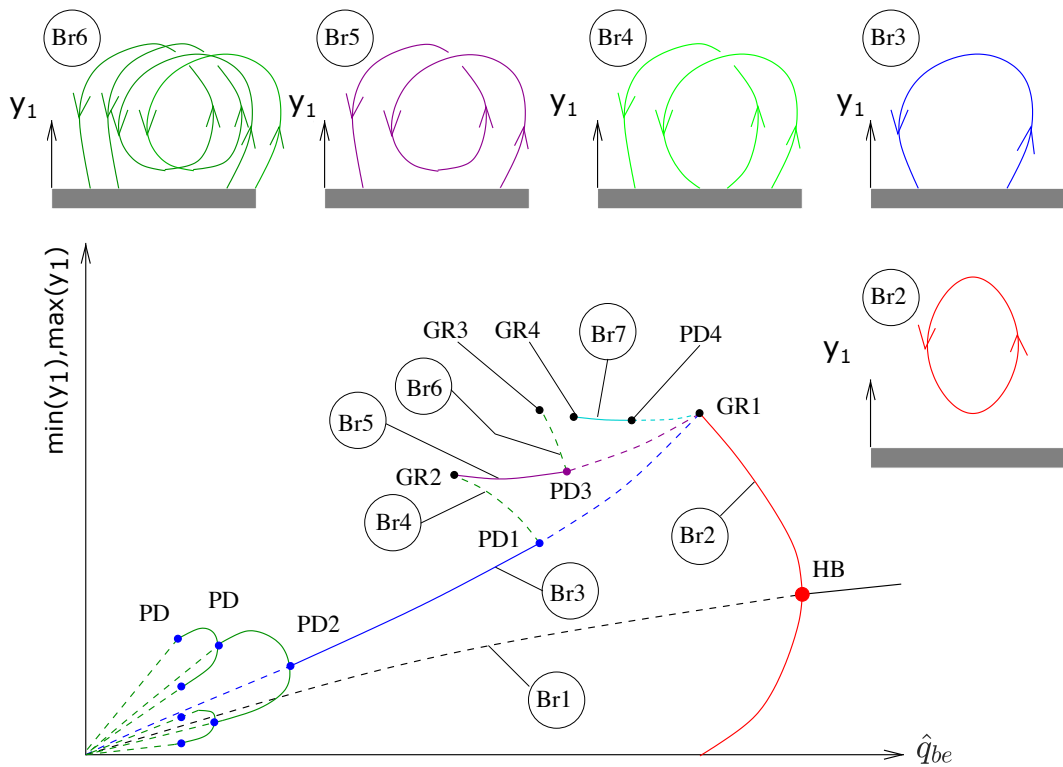
kiindulva *csökkentjük* a térfogatáramot. Ez esetben szintén egy perióduskettőző sorozatot figyelhetünk meg, ám ezúttal grazing pontok nélkül, azaz az ütközések száma nem növekszik, csupán a pálya periódusideje, ld. 29. ábra (b) panel.

Ezek a vizsgálatok azt sugallják, hogy a globális dinamika négy szakaszra osztható.

- $\hat{q}_{be} < \hat{q}_{be}^{PD2}$ : nagyfrekvenciás, kis amplitúdójú, kaotikus rezgés.
- $\hat{q}_{be}^{PD2} < \hat{q}_{be} < \hat{q}_{be}^{PD1}$ : ütközéssel periodikus pályák, egyetlen domináns frekvenciacsúccsal.
- $\hat{q}_{be}^{PD1} < \hat{q}_{be} < \hat{q}_{be}^{GR1}$ : nagyfrekvenciás, nagy amplitúdójú, kaotikus rezgés.
- $\hat{q}_{be}^{GR1} < \hat{q}_{be} < \hat{q}_{be}^{HB}$ : ütközés nélküli rezgés, egyetlen domináns frekvenciacsúccsal.
- $\hat{q}_{be}^{HB} < \hat{q}_{be}$ : stabil egyensúlyi helyzet.

A 31. ábrán a nyitónyomást változtatva feltérképeztük az egyes jellemző mozgásformák

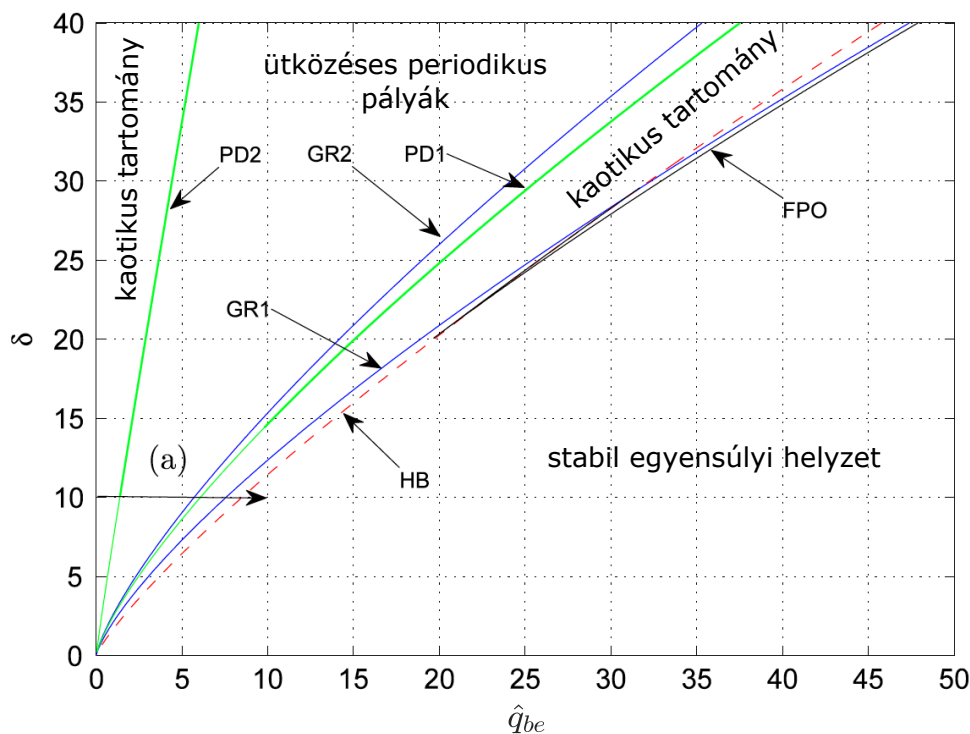




30. ábra. A 29. ábrán bemutatott bifurkációs ábra minőségi magyarázata.

tartományait. Ezen az ábrán néhány kitüntetett bifurkációs pontot követtünk a paramétersíkon a  $p^2$  ívhossz módszer segítségével. A piros szaggatott vonal a Hopf bifurkációt – a (3.53) feltételt – jelöli, ettől jobbra jellemzően a rendszer stabil. A "jellemzően" szót azért használjuk, mert a piros szaggatott vonal közelében található fekete folytonos vonal egy periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját jelzi (FPO - fold of periodic orbits). Ez annyit jelent, hogy  $\delta < 20$  esetén a Hopf bifurkáció után ( $\hat{q}_{be}$  csökkentésével) a rezgés amplitúdója folytonosan növekszik ("soft stability loss", superkritikus Hopf bifurkáció), míg az FPO vonal megjelenése azt jelenti (dióhéjban), hogy miután az egyensúlyi helyzet elveszítette a stabilitását, azonnal egy nagyamplitúdójú rezgést tapasztalunk ("hard stability loss", szubkritikus Hopf bifurkáció). Mivel ez a tartomány meglehetősen szűk, a gyakorlati szempontból nincs nagy jelentősége.

A két grazing bifurkációt kék vonallal jelöltük. A HB és GR1 vonal között szűk tartományban a szelep rezeg, ám a rezgés amplitúdója nem elég nagy ahhoz, hogy beleverjen a szelepülékbe, ezt nevezi "flutter"-nek a szakirodalom. A GR1 és a GR2 pontok között bonyolult, sok frekvenciakomponenst tartalmazó, nagy amplitúdójú rezgéseket tapasztalhatunk. A térfogatáramot tovább csökkentve, a PD2 pontig egyetlen ütközést tartalmazó, jól definiált frekvenciacsúccsal rendelkező mozgásformát figyelhetünk meg. Végül a PD2 ponthoz tartozó térfogatáram alatt ismét sok ütközést tartalmazó, alacsony amplitúdójú, kaotikus



31. ábra. Kétparaméteres követése néhány kitüntetett bifurkációs pontnak. Az (a) nyíllal jelzett metszék látható a 29. és a 26. ábrán.

mozgásokat tapasztalhatunk.

Összefoglalva ezt az alfejezetet: a Tartály-Szelep modell egyszerűsége ellenére meglepően gazdag globális dinamikával rendelkezik, melyet elsősorban a szeleppüléssel való ütközés hoz létre. A bemutatott numerikus módszerekkel a direkt numerikus szimulációnál hatékonyabban térképezhető fel a stabilitásvesztés utáni viselkedése a rendszernek.

**3. tézis** *A tartályhoz közvetlenül (csővezeték nélkül) kapcsolt szelep viselkedését leíró Tartály-Szelep Modell globális, stabilitásvesztés utáni viselkedésének előrejelzésére speciális, a korábban rendelkezésre álló megközelítésekénél hatékonyabb numerikus módszereket fejlesztettem ki. Ezek segítségével kimutattam, hogy*

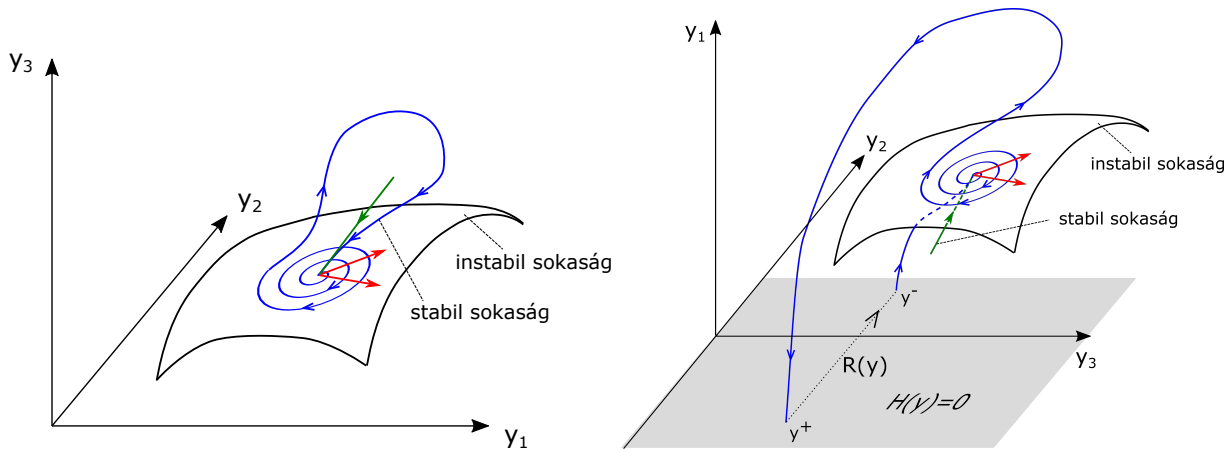
- *a stabilitásvesztést követően a rezgések jellemzően ütközéseket tartalmaznak, ezért mechanikailag is gerjesztik a teljes rendszert,*
- *a stabilitásvesztés környezetében és az alacsony térfogatáramú tartományokban kaotikus mozgásformák jelennek meg és*
- *a nyitónyomás növelése csökkenti a rendszer stabil tartományát.*

Kapcsolódó publikációk: [HCs8, HCs12]

## 5.5. Shilnikov-szerű ütközéses homoklinikus pálya

Jelen fejezet lezárásaként egy érdekes, Shilnikov homoklinikus pályához hasonló, de ütközést tartalmazó periodikus pályát vizsgálunk. A szerző legjobb tudomása szerint a kapcsolódó [HCs8] az első olyan tudományos közlemény, amely előrevetíti ilyen megoldás létezésének lehetőségét.

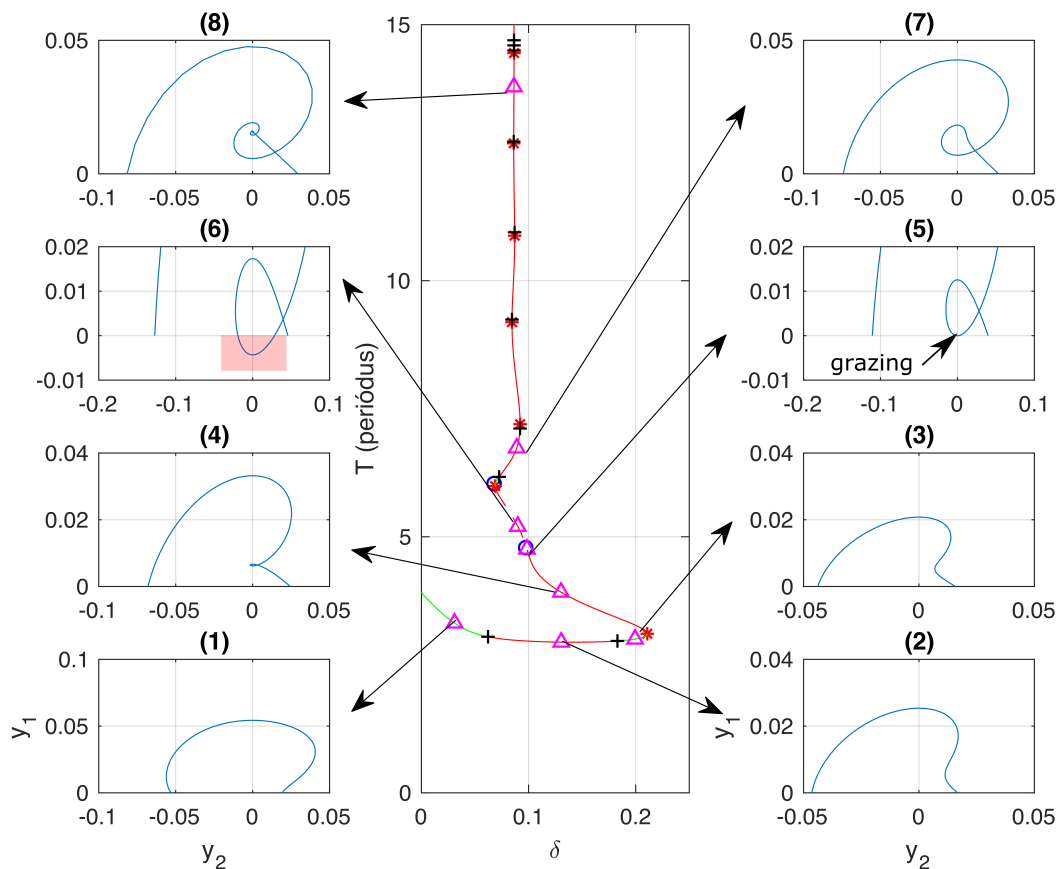
Kiindulásként tekintsük át röviden a folytonos dinamikai rendszerek esetén kialakuló Shilnikov-féle pályát! Ezek a homoklinikus pályák (egy egyensúlyi helyzetet önmagával összekötő, végtelen periódusidejű pálya) akkor jönnek létre a legegyszerűbb esetben, ha a 3 dimenziós térben egy egyensúlyi helyzetnek egy stabil iránya és 2 instabil (fókusz) iránya van, mint azt a 32. ábra bal oldalán vázoltuk. Az ábrán az egyensúlyi helyzet  $\lambda_{1,2}$  instabil sajátértékéhez tartozó  $v_{1,2}$  sajátvektorai (piros nyilak) által kifeszített érintősíkban instabil fókusz található ( $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$  és  $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ ). A két piros instabil (piros) vektor érinti az ún. instabil sokaságot, amely egy invariáns felület (ha pontosan erről a felületről indítjuk a megoldást, azt nem hagyja el). A harmadik  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$  és  $\lambda_3 < 0$ , a  $\lambda_3$  sajátértékhez tartozó  $v_3$  sajátvektort zölddel jelöltük, ez vonzó és szintén hozzárendelhető egy olyan, instabil sokaságnak nevezett térgörbe, mely szintén invariáns. Megfelelő paraméterértékek esetén előfordulhat, hogy ez a két sokaság összekapcsolódik és egy záródó pályát kapunk, melynek periódusideje végtelen. Példát találhatunk ilyen pályákra többek között a [41, 36, 49] szakirodalmakban.



32. ábra. Bal oldal: Shilnikov-féle homoklinikus pálya folytonos dinamikai rendszerben. Jobb oldal: ütközést tartalmazó Shilnikov-szerű pálya.

Amint az a 32. ábrán látható, ütközéses rendszerekben is kialakulhat hasonló homoklinikus pálya abban az esetben, amikor az instabil sokaság ( $\mathcal{W}_{is}$ ) és a kapcsolófelület ( $\mathcal{H} := \{y : H(y) = 0\}$ ) metszetének képe ( $R(\mathcal{W}_{is} \cap \mathcal{H})$ ) tartalmazza a stabil sokaság ( $\mathcal{W}_s$ ) és a kapcsolófelület metszetét, tehát röviden:  $\mathcal{W}_s \cap \mathcal{H} \in R(\mathcal{W}_{is} \cap \mathcal{H})$ . Egy ilyen pálya létrejöttéhez két paraméternek kell megfelelő értéket felvenni (tehát technikailag megfogalmazva, ez

egy 2 kodimenziós pont), mivel egy paraméter ahhoz szükséges, hogy a fent leírt metszést elérjük, a másik pedig ahhoz, hogy  $\mathcal{W}_{is} \cap \mathcal{H}$  vonal mentén pontosan abban a pontban érjük el a kapcsolósíkot, melyet az  $R$  leképezés a  $R(\mathcal{W}_s \cap \mathcal{H})$  pontba fog képezni.



33. ábra. Középső panel: egy ütközéses periodikus pálya követésének eredménye: periódusidő  $\delta$  függvényében. Jelölések: (piros csillag) periodikus pályák nyereg-csomó (fold) bifurkációja, (kék kör) grazing bifurkáció és (fekete plusz) perióduskettőző bifurkáció. (Zöld) stabil pálya, (piros) instabil pálya, (folytonos vonal) fizikailag értelmes pálya és (szaggatott vonal) fizikailag értelmetlen ( $\min(y_1) < 1$ ) pályák. Jobb és bal oszlop: a periodikus pályák az  $(y_2, y_1)$  síkra vetítve. Csillapítási tényező:  $\tilde{k} = 0.25$ .

Továbbra is a Tartály-Szelep Modellt vizsgáljuk, tehát (5.102)–(5.104) rendszert, a választott paraméterértékek:  $\tilde{k} = 0.25$ ,  $\hat{\beta} = 20$ ,  $\hat{q}_{be} = 0.005$  és  $r = 0.36$ . Egy ilyen, Shilnikov-szerű homoklinikus pálya kialakulását követhetjük nyomon a 33. ábrán. Az előző fejezetben ismertetett peremértékmegoldót az (1) panelen (bal alsó ábra) látható pályához hasonló megoldásból inicializáltuk, majd a periódusidőt és a  $\delta$  dimenziótlan rugóelőfeszítést szabad paraméternek tekintve követtük a pályát. A középső panelen a periódusidőt láthatjuk, amint

folyamatosan növekszik, miközben a pálya számos perióduskettőző (fekete kereszt), nyereg-csomó (fold, piros csillag) ill. grazing (kék kör) bifurkáción megy keresztül. Az egyértelműség kedvéért néhány pályát (a magenta háromszöggel megjelölt pontokban) is ábrázoltunk az  $(y_1, y_2)$  síkra vetítve.

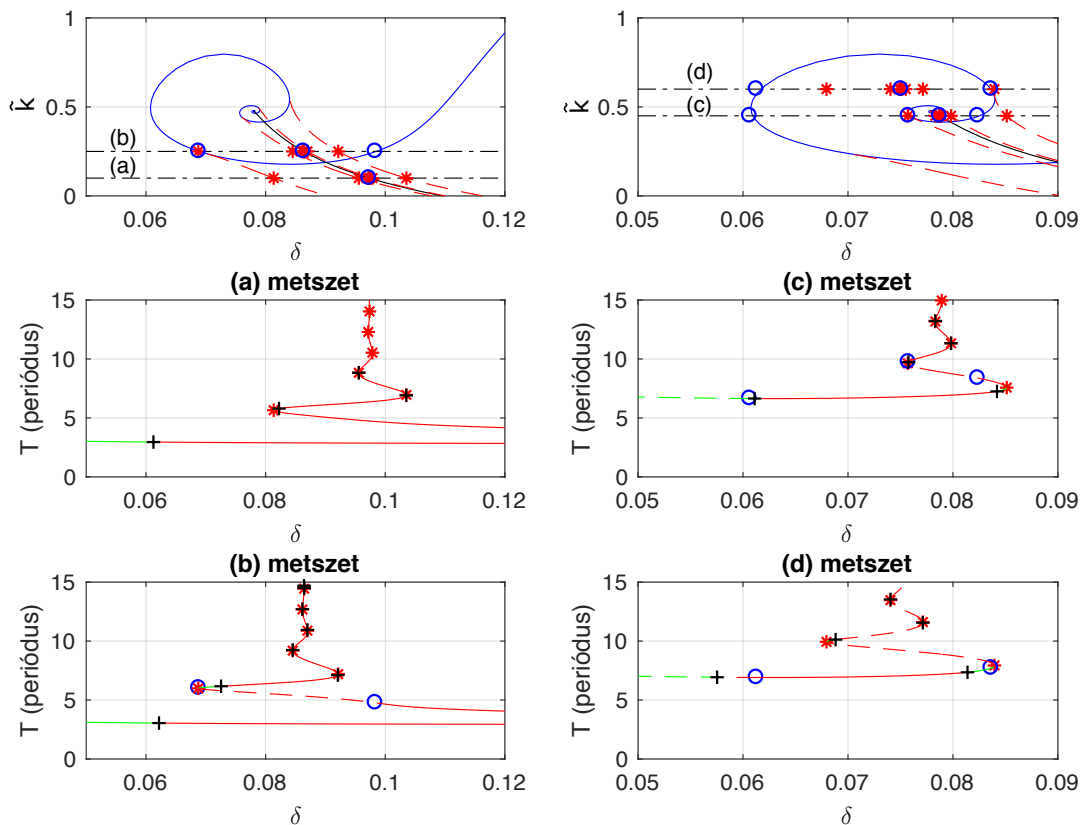
Figyelemreméltó, hogy bár a pálya két grazing bifurkáción is keresztülmegy – (kék körök, az egyiket az (5) panelen láthatjuk, nyíllal kiemeltük – és e két paraméterérték között a megoldás nem fizikai – ld. (6) panel, pirossal kiemelt terület, mivel  $\min y_1 < 0$ . Ez azt jelentené, hogy a szeleptest belehatol a szelepülékbe, ami nem következhet be. Ugyanakkor a dinamika teljes megértéséhez szükséges ezen megoldások kiszámítása is, mivel ha megszakítanánk a számítást az (5) panelen látható pálya elérésekor – mondván, hogy a  $\min y_1 < 0$  megoldások fizikailag nem értelmezhetők – elveszítenénk a görbe egész felső részét, így azokat a megoldásokat, melyek akkor "buknának fel", amikor a fizikailag értelmetlen megoldások egy újabb grazing bifurkáción (második kék kör,  $T = 5$  közelében) fizikailag értelmessé válnak.

Természetesen a perióduskettőzések (fekete plusz jelek) során újabb pályák keletkeznek, de ezeket nem követtük. Az ábrán nehezen látszik, de a nyereg-csomó bifurkációkhoz (piros csillagok a görbe "szélei") közel perióduskettőzéseket is találunk hasonlóan a még jól kivethető  $\delta \approx 0.2$  tartományhoz, a (3) panelhez tartozó paraméterértékek környéke. A nyereg-csomó bifurkációk egyik ága stabil, a másik instabil és a stabil ág a keletkezés után röviddel a perióduskettőzésen keresztül elveszíti stabilitását. Így a kiszámított pályák túlnyomó többsége instabil, a viszonylag rövid zöld (stabil) ágakat leszámítva.

Ezután egy újabb paramétert, a  $\tilde{k}$  csillapítási tényezőt hozzáadva elvégeztük a nyereg-csomó bifurkációk 2 paraméteres követését is, melynek eredménye a 34. ábrán közöljük. Az előző, 33. ábrán megjelenített,  $\tilde{k} = 0.25$ -ös értékhez mellett ugyanilyen metszékeket készítettünk  $\tilde{k} = 0.1$  (a) panel, 0.2 (b) panel, 0.45 (c) panel és 0.6 (d) panel értékeknél. A felső sor ezen kitüntetett pontok elhelyezkedését mutatják a kétparaméteres síkon.

Alaposan szügyre véve a 34. ábra felső sorát (a két egymás melletti ábrán ugyanazok a görbék láthatók, de a jobb oldalon kinagyítva) azt látjuk, hogy a piros szaggatott vonalakkal jelölt a nyereg-csomó bifurkációk a kékekkel ábrázolt spirálba futnak. Ez a kék görbe egy olyan pálya követése, mely egyszer ütközik és egy közbenső pontban érinti a kapcsolósíkot, ld. (5) panel a 33. ábrán. A spirálon befelé haladva a periódusidő nő, így a pálya  $T \rightarrow \infty$  határátmenete pontosan a korábban említett Shilnikov-féle homoklinikus pálya, a spirál középpontja.

A dinamika jobb átláthatósága érdekében négy darab  $\tilde{k} = 0.1, 0.2, 0.45$  és  $0.6$  értékeknél egyparaméteres metszéket is készítettünk. Az egyes oszlopok vízszintes tengelyeit azonos skálával láttuk el, így az alsó két ábrán jelölt speciális pontokat függőlegesen felvetítve a legfelső ábrára összerendelhetők az egyes esetek. Ezekon az ábrákon a periódusidőt ábrázoltuk a  $\delta$  paraméter függvényében és háromféle bifurkációt detektáltunk: a fekete kereszt



34. ábra. Felső két panel: ugyanazok a görbék, más nagyítással. Jelölők: (kék vonal) egy grazing-et és egy transzverzális ütközést tartalmazó pálya, a spirálon befelé haladva növekvő periódusidővel és (fekete vonal) grazing-et nem tartalmazó, egyetlen ütközéses pálya növekvő periódussal. A két vonal közös pontja a Shilnikov-szerű ütközéses homoklinikus pálya. (a) ... (d) metszetek: 1 paraméteres metszések,  $\tilde{k} = 0.1, 0.2, 0.45$  és  $0.6$  értékeknél. Jelölések: (piros csillag) periodikus pályák nyereg-csomó (fold) bifurkációja, (kék kör) grazing bifurkáció és (fekete plusz) perióduskettőző bifurkáció. (Zöld) stabil pálya, (piros) instabil pálya, (folytonos vonal) fizikailag értelmes pálya és (szaggatott vonal) fizikailag értelmetlen ( $\min(y_1) < 1$ ) pályák.

perióduskettőzés, a kék kör grazing, míg a piros csillag periodikus pályák nyereg-csomó (fold) bifurkációja, ez utóbbi tulajdonképpen az egyparaméteres metszetek fordulópontjait jelöli. A metszeteken a piros és zöld vonalak instabil ill. stabil megoldásokat jelölnek, míg a szaggatott vonalak olyan pályákat, melyek nem fizikaiak mivel  $\min y_1 < 0$ , ugyanakkor fontosak, mivel egy ilyen megoldás követése során újabb grazing-et detektálhatunk, mely során újra fizikai megoldássá válik és így összeköt két, egymástól függetlennek tűnő fizikailag értelmes

megoldást.

Az ebben a fejezetben bemutatott számítások nemlineáris dinamikai szempontól érdekesek, mivel egy új típusú megoldás (Shilnikov-szerű ütközést tartalmazó homoklinikus pálya) születését dokumentálják. Láttuk, hogy a megfelelő numerikus és analitikus módszerekkel (pl. monodrómia mátrix korrekciója a kapcsolóvonalon,  $p^2$  ívhossz módszer) a folytonos dinamikai rendszerek területén bevett és már megszokott fogalmak és módszerek (nyereg-csomó bifurkáció, perióduskettőzés, stb.) természetes módon kiterjeszthetők szakaszosan folytonos dinamikai rendszerekre is. A szerző nem tartja valószínűnek, hogy ezeket a finom struktúrákat valódi berendezésen mérésrel ki lehessen mutatni. Ugyanakkor rámutattunk arra, hogy a fizikailag értelmetlen megoldások is fontos szerepet játszhatnak a globális dinamika feltérképezésében.

**4. tézis** *Kimutattam, hogy a tartályhoz közvetlenül (csővezeték nélkül) kapcsolt szelep viselkedését leíró Tartály-Szelep Modellben ütközést tartalmazó, Shilnikov-féle homoklinikus pályák léteznek. Minőségileg leírtam ezek keletkezését és rámutattam, hogy kialakulásukban a fizikailag nem megvalósuló, negatív szelepelmozduláshoz tartozó megoldások is fontos szerepet játszanak.*

Kapcsolódó publikációk: [HCs8]

## 6. Bonyolult csővezetékek: a módosított impedancia módszer

A dolgozat korábbi részeiben egyszerű geometriai elrendezést vizsgáltunk: egyetlen, egyenes csővezeték kötötte össze a szelepet és a védendő tartályt. Ez az elrendezés, bár lehetővé tette a minőségi vizsgálatot és az alapvető mechanizmusok megértését, nem alkalmas az ipari létesítményekben előforduló rendszerek vizsgálatára, ahol (általában) bonyolultabb csővezetékrendszerek fordulnak elő, számos átmérőlépcsővel, csőcsatlakozással és -elágazással, akár több szeleppel. Ilyen valós rendszereket részletesen taglal Dr. Bozóki Géza [34] könyvében és további példákat találunk a [52, 83, 56] irodalmakban. Ilyen, bonyolultabb felépítésű rendszerek esetében az analitikus stabilitásvizsgálat vagy a direkt numerikus szimuláció (pl. CFD segítségével) igen időigényes feladat, különösen akkor, ha egyes paraméterek (vagy paramétercsoportok) hatására vagyunk kíváncsiak. Ebben a fejezetben egy olyan módszert mutatunk be, amely képes ilyen komplex rendszerek *lineáris stabilitásának* hatékony előrejelzésére.

A tervezett vizsgálatok során a fő nehézséget a csővezetékekben lejátszódó hullámjelenségek leírása és ezek ismeretlen hullámhossza jelenti. Valóban, a 3.4. fejezetben (35. oldal) levezettünk egy stabilitási kritériumot a negyedhullám-instabilitásra, ám a számítások legelején (*a priori*) kihasználtuk azt a – mind numerikus szimulációk, mind mérések során tapasztalt – tényt, hogy az első, negyedhullám módus lesz a kritikus a stabilitásvesztés környezetében: a (3.62) és (3.63) egyenleteket és az általuk leírt hullámalakokat "Ansatz"-ként fogalmazzuk meg. Egy bonyolult csővezetékrendszer esetén azonban nem tudjuk előre a kritikus hullámhosszakot és az sem világos, hogy valóban elegendő-e a csővezetékrendszer sajátfrekvenciáihoz tartozó módusok vizsgálata. Az ebben a fejezetben bemutatott módszer eredményeképpen a kritikus hullámhosszak (módusok, frekvenciák) *kiadódó* mennyiségek lesznek.

A klasszikus lineáris stabilitásvizsgálat<sup>21</sup> közvetlen alkalmazását az nehezíti meg, hogy a csővezetékrendszerben lejátszódó áramlástanai folyamatokat parciális differenciálegyenletekkel írjuk le. Ugyanakkor az áramlástanai alapegyenleteknek bizonyos speciális körülmények között (a konvektív tagok elhanyagolásával, állandó sűrűség és egy egyensúlyi állapot körüli kis *periodikus* zavarások esetén) *létezik analitikus megoldása*. Ezt a megoldási módszert *impedanciamódszernek* nevezzük (ld. [38, 80]) és klasszikusan csővezetékek hidraulikus sajátfrekvenciáinak meghatározására használható (ld. [38, 48, 10, 75]). A módszer segítségével könnyen kezelhetők az egyéb szerelvények, pl. tartályok (ld. [69]) vagy fojtások (ld. [51]) is. Az impedancia módszer hatékonyan alkalmazható akusztikai vizsgálatokra is, ám ezzel a területtel jelen dolgozatban nem foglalkozunk, csupán rámutatunk néhány irodalomra: [31, 74, 63]. Végül megemlítjük, hogy maga az impedancia a villamosmérnöki és mechatro-

<sup>21</sup>Az  $\dot{x} = F(x, \mu)$  ( $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^M$ ) dinamikai rendszer egyensúlyi helyzet körüli sorfejtésével kapott lineáris rendszer vizsgálata, ld. [49, 35]. (Itt  $\mu$  a paraméterek vektorát jelenti.)



nikai tudományokban is széleskörűen alkalmazott koncepció, ld. [14, 42].

Amint azt látni fogjuk, egy kisebb módosítás segítségével ez a módszer alkalmassá tehető lineáris stabilitásvizsgálatra tetszőleges bonyolultságú, hurkolt csővezeték és akár több nyomáshatároló szelep esetén is. A fejezet további részében a kapcsolódó szakirodalom rövid áttekintése (6.1. alfejezet) után a 6.2. alfejezetben bemutatjuk a módosított impedancia módszert, melynek alkalmazását néhány egyszerű eseten demonstráljuk a 6.3. alfejezetben. A csőhálózatokra vonatkozó általános eredményt a 6.4. alfejezetben ismertetjük, melynek segítségével a 6.5. alfejezetben egy, az eddigieknél bonyolultabb, a valósághoz közelebb álló rendszert vizsgálunk.

## 6.1. Irodalmi áttekintés

Szelepstabilitás vizsgálata során a legtöbb elméleti és numerikus vizsgálat egyenes, állandó átmérőjű csövet feltételez a szelep és a tartály között, ez az elrendezés azonban a valós létesítményekben ritka. A szelep felvíz és alvíz oldalán található csővezeték gyakran tartalmaz könyököket, T elágazásokat és ezek hatása a rendszer stabilitására kevésbé ismert. Ráadásul, még a tendenciák sem világosak, azaz hogy ezek az elemek elnyomják vagy erősítik-e a rezgéseket. Egyrészt, a könyökök és elágazások segíthetnek "széttörni" azokat a negyedhullámmódusokat, melyek az instabilitásért felelősek, másrészt, az ezen elemek miatt megnövekedett áramlási ellenállás erősítheti az alacsonyfrekvenciás, csősúrlódással összefüggő szeleprezgéseket. Ráadásul, a könyökök visszaverhetik a csővezetékrendszerben kialakuló hullámokat, így megrövidítik a csővezeték hatásos (effektív) hosszát és ezek a magasfrekvenciás rezgések jobban csillapodhatnak. A [30] közleményben a szerzők kísérletekre alapozva állítják, hogy a szelep elmozdulás időjelében nem tapasztaltak észrevehető változást, miután két könyököt beépítettek a csővezetékbe. Amint [76]-ben a szerzők bemutatják, bonyolult csővezeték geometria – több oldalág esetén – is lehetséges minőségi becslést adni a geometriai paraméterek hatására, azonban az ott bemutatott módszer általánosítása nem magától értetődő (legalábbis jelen dolgozat szerzőjének számára). Az egyes elemek akusztikai viselkedését is több kutató vizsgálta, pl. [23]-ban egy 90 fokos könyököt vizsgálnak. Annak ellenére, hogy a valóságban gyakori a több, párhuzamosan kapcsolt nyomáshatároló szelep (jellemzően egy kisebb és egy nagyobb szelep, melyek közül a második nyitónyomása néhány százalékkal magasabb), ezt az elrendezést nemigen vizsgálja az szakirodalom. A néhány, ezzel a kérdéssel foglalkozó tanulmány egyike Tamura [72] munkája, melyben arra jutnak, hogy a két szelep alatti Y alakú elágazásról periodikusan leváló örvények okozzák a szeleprezgéseket és a rezonanciát, ld. pl. [60].

Mindent összevetve – a mindig rendelkezésre álló, de irreálisan nagy erőforrást igénylő numerikus szimuláción kívül – nem áll rendelkezésre olyan módszer, melynek segítségével a csővezetékrendszer hatása előrejelezhető lenne.

## 6.2. A módosított impedancia módszer

Ebben a fejezetben a hidraulikus impedanciák módszerének kiterjesztésével adunk olyan számítási eljárást, melynek segítségével *tetszőleges méretű és topológiájú* hálózat lineáris stabilitása vizsgálható.

Az impedancia módszert jellemzően hidraulikus (akusztikus) sajátfrekvenciák kiszámítására alkalmazzák; segítségével a rendszer egy pontján megadott periodikus gerjesztésre adott választ határozzuk meg. A módszer azon alapul, hogy egy (időben) átlagos áramkép körül kis amplitúdójú, *tisztán periodikus* megoldást feltételezve és annak frekvenciáját szabad paraméternek tekintve meghatározhatjuk az amplitúdókra kapott lineáris egyenletrendszer megoldását, és így a csőhálózat hidraulikus nagyítási függvényét. A módszer alap gondolatát megtartjuk, de két ponton kiegészítjük.

- Egyrésztől, a tisztán periodikus (csillapítatlan,  $e^{i\Omega t}$  típusú) megoldások helyett tetszőlegesen (de előre megadott mértékben) csillapodó/erősödő ( $e^{(\Psi+i\Omega)t}$  típusú) megoldásokat is meghatározunk. Erre azért van szükség, hogy a kiszámított stabilitási határgörbe ( $\Psi = 0$ ) mellett azt is meg tudjuk határozni, hogy annak melyik "oldalán" léteznek stabil megoldások.<sup>22</sup>
- Másrésztől, arra leszünk kíváncsiak, hogy egy adott  $\Psi$  exponenciális burkolójú és  $\Omega$  frekvenciájú megoldás létezik-e (vagy nem); így nem a nagyítási függvényt számítjuk ki, hanem arra vagyunk kíváncsiak, hogy adott  $(\Psi, \Omega)$  tulajdonságú megoldás létezik-e és ha igen, milyen bemenő paraméterek (például tömegáram és csőhossz) esetén. Másként megfogalmazva: két tetszőlegesen megválasztott paraméter által kifeszített síkon keressük azokat a görbéket, amelyek mentén létezik tisztán periodikus megoldás ( $\Psi = 0$ ), mivel ez jelenti majd a határvonalat a csillapodó (stabil) és erősödő (instabil) rezgések között.

A modell levezetésénél a kontinuitási- és mozgásegyenlet (2.41) és (2.42) (ld. 21. oldal) dimenziótlan alakjából indulunk ki. Ahogy azt már a 2.4. fejezetben részleteztük a konvektív tagok  $\Lambda$  szorzója kellően kicsi ahhoz, hogy ezeket a tagokat elhanyagoljuk (ld. még 5 – 8 táblázatok utolsó két sora).

Bontsuk fel a csőbeli nyomás- és sebességeloszlást két részre:  $\bar{p}(\xi)$ ,  $\bar{v}(\xi)$  időtől független (de a  $\xi$  axiális koordináta mentén esetleg változó), átlagos nyomás- és sebességmezőre és  $\hat{p}(\xi, \tau)$ ,  $\hat{v}(\xi, \tau)$  ingadozó komponensre:

$$\tilde{p}(\xi, \tau) = \bar{p}(\xi) + \varepsilon \hat{p}(\xi, \tau), \quad \text{ahol} \quad \bar{p}(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p}(\xi, \tau) d\tau \quad \text{és} \quad \varepsilon \ll 1, \quad (6.118)$$

<sup>22</sup>Matematikai értelemben  $f(t)$  függvény periodikus  $T$  periódussal, ha  $f(t+T) = f(t)$  tetszőleges  $t$ -re, ezért az  $e^{(\Psi+i\Omega)t}$  függvény  $\Psi \neq 0$  esetén nem nevezhető szigorú értelemben periodikusnak. Ennek ellenére ebben a fejezetben megtartjuk a periodikus elnevezést, mivel hangsúlyozni kívánjuk, hogy egy speciális megoldáscsaládot keresünk, mely szoros kapcsolatban van a szigorúan periodikus megoldásokkal.

és

$$\tilde{v}(\xi, \tau) = \bar{v}(\xi) + \varepsilon \hat{v}(\xi, \tau), \quad \text{ahol} \quad \bar{v}(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{v}(\xi, \tau) d\tau \quad \text{és} \quad \varepsilon \ll 1, \quad (6.119)$$

tehát feltesszük, hogy  $\varepsilon$  "kis" paraméter,  $\|\bar{p}\|$ ,  $\|\bar{v}\|$ ,  $\|\hat{p}\|$  és  $\|\hat{v}\|$  egy nagyságrendbe esik, így az ingadozó komponens  $\varepsilon\|\hat{p}\| \ll \|\bar{p}\|$ , ill.  $\varepsilon\|\hat{v}\| \ll \|\bar{v}\|$  és  $\varepsilon\|\hat{v}\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . A fenti egyenletben  $T$  kellően nagy az időbeli átlagolás elvégzéséhez. Így a kontinuitási- és mozgásegyenlet  $\varepsilon$ -ban nulladrendű tagjaira kapjuk, hogy

$$\varepsilon^0 : \quad \frac{\alpha d\bar{v}}{\gamma d\xi} + \Lambda \bar{v} \frac{d\bar{p}}{d\xi} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{\alpha\gamma} \frac{d\bar{p}}{d\xi} + \varphi \bar{v}^2 + \Lambda \bar{v} \frac{d\bar{v}}{d\xi} = 0, \quad (6.120)$$

ahol az átláthatóság kedvéért nem hangsúlyoztuk a mennyiségek helyfüggését. Ezen egyenletek megoldása természetesen az állandósult állapotra vonatkozó átlagáramkép. Az  $\varepsilon$ -ban elsőrendű tagokra pedig adódik, hogy

$$\varepsilon^1 : \quad 0 = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \Lambda \left( \bar{v} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \hat{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \right) \quad \text{és} \quad (6.121)$$

$$0 = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + 2\varphi \bar{v} \hat{v} + \Lambda \left( \bar{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} + \hat{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right). \quad (6.122)$$

Ez a két egyenlet átírható egyetlen csillapított hulláme egyenletre (vagy az ún. telegráf egyenletekre, ld. [50])

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \tau^2} - \mathcal{R} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{ahol} \quad \mathcal{R} = 2\varphi \bar{v}. \quad (6.123)$$

Hasonló alak vezethető le a sebességre is. A fenti egyenlet megoldásának általános alakja

$$\hat{p}(\xi, \tau) = e^{(\Psi+i\Omega)\tau} (Ae^{\Gamma\xi} + Be^{-\Gamma\xi}) \quad \text{ahol} \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{és} \quad \Gamma^2 = \gamma^2 ((\Psi + i\Omega)^2 + (\Psi + i\Omega) \mathcal{R}), \quad (6.124)$$

ahol  $\Omega$  a periodikusan változó perturbáció egyenlőre ismeretlen (tetszőleges) szögsebessége,  $\Psi$  pedig a megoldás "burkolója", azaz exponenciális csillapodást (stabil megoldást) várunk  $\Psi < 0$  esetén és exponenciálisan növekvő (instabil) megoldást, ha  $\Psi > 0$ .  $A$  és  $B$  paraméterek kiszámításához a peremfeltételek még szükségesek.

Kihasználva a (6.121) összefüggést kapjuk, hogy

$$\hat{v}(\xi, \tau) = -\frac{\gamma}{\alpha} \int \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} d\xi = -\frac{1}{Z_c} e^{(\Psi+i\Omega)\tau} (Ae^{\Gamma\xi} - Be^{-\Gamma\xi}) \quad \text{ahol} \quad Z_c = \frac{\alpha\Gamma}{\gamma(\Psi + i\Omega)}. \quad (6.125)$$

Kényelmesebb írásmódot és a peremfeltételek egyszerűbb kezelését teszi lehetővé, ha az  $A$  és  $B$  konstansokat a csővégi nyomásokra és sebességekre vezetjük vissza. A cső két végén jelentkező amplitúdókra vezessük be a  $\hat{p}(0, \tau) = \hat{p}_u e^{(\Psi+i\Omega)\tau}$  és  $\hat{v}(0, \tau) = \hat{v}_u e^{(\Psi+i\Omega)\tau}$ , valamint a  $\hat{p}(1, \tau) = \hat{p}_d e^{(\Psi+i\Omega)\tau}$  és  $\hat{v}(1, \tau) = \hat{v}_d e^{(\Psi+i\Omega)\tau}$  jelöléseket, melyek segítségével az  $A$  és  $B$  konstansok

$$A = \frac{1}{2} (\hat{p}_u - Z_c \hat{v}_u) \quad \text{és} \quad B = \frac{1}{2} (\hat{p}_u + Z_c \hat{v}_u) \quad (6.126)$$

alakban írhatók, amivel

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_d \\ \hat{v}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma) & -Z_c \sinh(\Gamma) \\ -Z_c^{-1} \sinh(\Gamma) & \cosh(\Gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_u \\ \hat{v}_u \end{pmatrix} := \mathcal{Z}(\Omega) \begin{pmatrix} \hat{p}_u \\ \hat{v}_u \end{pmatrix}, \quad (6.127)$$

ahol a tömörebb írásmód kedvéért nem hangsúlyoztuk, hogy mind  $\Gamma$ , mind  $Z_c$  függ a megoldás  $\Psi$  burkolójától és  $\Omega$  frekvenciájától, valamint a  $\gamma$  csőhossztól és  $\mathcal{R}$  súrlódási paramétertől. A (6.127) egyenlet tehát egy lineáris egyenletrendszeren és az impedanciamátrixon keresztül összekapcsolja a felvív-oldali és alvív-oldali sebesség- és nyomásamplitúdókat. A fenti írásmód előnye, hogy tetszőleges topológiájú hálózatra könnyen általánosítható, amint azt a következőkben látni fogjuk. A fenti levezetés  $\Psi = 0$  esetre és az eredeti, dimenziós áramlástan alapegyenletekre megtalálható [82, 38] irodalmakban.

Végezetül megjegyezzük, hogy a dimenziótlan  $\Omega$  frekvencia és a fizikai  $\omega_g$  gerjesztőfrekvencia között a szelep  $\omega$  sajátfrekvenciája az arányossági tényező, mivel

$$e^{i\omega_g t} = e^{i\frac{\omega_g}{\omega} \omega t} = e^{i\Omega \tau} \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{\omega_g}{\omega}. \quad (6.128)$$

### 6.3. Néhány egyszerű eset

Mielőtt továbblépnénk, vizsgáljunk meg három egyszerű esetet:

- (a) az egyik végén ( $\xi = 1$ ) zárt, másik végén ( $\xi = 0$ ) állandó nyomású térhez kapcsolt cső esetét (6.3.1 alfejezet),
- (b) a mindkét végén nyitott, állandó nyomású terekhez kapcsolt cső esetét (6.3.2 alfejezet) és
- (c) egyik végén ( $\xi = 0$ ) állandó nyomású térhez, másik végén nyomáshatároló szelephez kapcsolt csővezeték (6.3.3 alfejezet).

#### 6.3.1. Fedett orgonasíp

Ebben az esetben a cső egyik vége zárt, a másik vége nyitott, ezért a  $\bar{v}$  átlagsebesség zérus, így  $\mathcal{R} = 0$ . Továbbá állandó amplitúdójú periodikus megoldásokat keresünk ( $\Psi = 0$ ), ezért  $\text{Re}(\Gamma) = 0$  és  $\text{Im}(\Gamma) = \gamma\Omega$ . A peremfeltételek:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{p}(0, \tau) = (A + B) e^{i\Omega\tau} \quad \text{a nyitott végen és} \\ 0 &= \hat{v}(1, \tau) = -Z_c^{-1} (Ae^\Gamma - Be^{-\Gamma}) e^{i\Omega\tau} \quad \text{a zárt végen,} \end{aligned} \quad (6.129)$$

ahonnan

$$B = -A \quad \text{és így} \quad \text{Im}(\Gamma) = \gamma\Omega = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (6.130)$$

ahol  $n$  tetszőleges egész szám. Így a csővezeték első sajátfrekvenciájára  $\Omega = \gamma^{-1}\pi/2$  adódik, ami egy negyed állóhullámnak felel meg, a nyomás- és sebességeloszlás első harmonikusára

pedig

$$\hat{p}(\xi, \tau) = -2A \sin(\Omega\tau) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad \text{és} \quad \hat{v}(\xi, \tau) = -2A \frac{1}{\alpha} \cos(\Omega\tau) \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \quad (6.131)$$

ahol  $\Omega = \frac{\pi}{2\gamma} = 2\pi \frac{1}{4\gamma} = 2\pi \frac{a}{4L_{cs}} \frac{1}{\omega}$ . Így az egyik végén zárt, másik végén nyitott cső esetében  $4L_{cs}$  hosszúságú állóhullámok figyelhetők meg a csőben, az első sajátfrekvencia pedig  $a/(4L_{cs})$ , ami megtalálható pl. [64] szakirodalomban is. A további sajátfrekvenciákra a fenti gondolatmenettel  $f_n = \frac{a}{4L_{cs}}(2n - 1)$  adódik.

### 6.3.2. Mindkét végén állandó nyomású térhez kapcsolt cső

Ha a cső mindkét vége állandó nyomású térhez kapcsolódik és állandó amplitúdójú periodikus megoldásokat keresünk ( $\Psi = 0$ ), a peremfeltételek:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{p}(0, \tau) = (A + B)e^{i\Omega\tau}, \quad \text{és} \\ 0 &= \hat{p}(1, \tau) = (Ae^\Gamma + Be^{-\Gamma})e^{i\Omega\tau} \end{aligned} \quad (6.132)$$

alakúak, ahonnan a nyomásingadozás amplitúdójára kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B &= -A, \quad \text{és} \quad 0 = e^\Gamma - e^{-\Gamma} \\ &= \cos(\text{Im}(\Gamma)) (e^{\text{Re}(\Gamma)} - e^{-\text{Re}(\Gamma)}) + i \sin(\text{Im}(\Gamma)) (e^{\text{Re}(\Gamma)} + e^{-\text{Re}(\Gamma)}). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Így azt látjuk, hogy a második feltétel teljesülése nemnulla  $\text{Re}(\Gamma)$ , azaz súrlódásos áramlás esetén *nem lehetséges* (mivel egyszerre kellene teljesülnie a  $\cos(\text{Im}(\Gamma)) = 0$  és a  $\sin(\text{Im}(\Gamma)) = 0$  feltételeknek), csakis akkor, ha  $\mathcal{R} = 0$  és emiatt  $\text{Re}(\Gamma) = 0$ . Ebben az esetben  $\text{Im}(\Gamma) = \gamma\Omega = n\pi$  megoldás, ami a klasszikus fél-állóhullám (és ennek a felharmonikusai) megoldásnak felel meg.

### 6.3.3. Negyedhullám instabilitás alternatív levezetése

Most kapcsoljuk hozzá a szelepet a csővezeték végéhez, tehát vizsgáljuk a 4. ábrán bemutatott elrendezést! A szelepdinamika leírására induljunk ki a (2.22) egyenletből (17. oldal), jelöljük a szelephez csatlakozó csővezeték szelep-végi (dimenziótlan) nyomását  $\tilde{p}_v$ -vel és a kilepő keresztmetszetre vonatkoztatott (dimenziótlan) átlagsebességét  $\tilde{v}_v$ -vel! Az egyszerűség kedvéért tekintsük az  $\tilde{A}_{\text{eff}} \equiv 1$  esetet. A szelep elmozdulását szintén felbontjuk átlagos (stationárius) és periodikusan változó, kis amplitúdójú komponensekre, tekintsük ismét a  $\Psi = 0$  esetet (azaz állandó amplitúdójú periodikus megoldásokat keresünk), de  $\phi$  fáziseltolódást megengedünk:  $\tilde{x}(\tau) = \bar{x} + \hat{x}e^{i(\Omega\tau + \phi)}$ . Így az állandósult állapotra kapjuk, hogy  $\delta + \bar{x} = \bar{p}_v$ , az ingadozó komponensekre pedig, hogy

$$\hat{x} \left( -\Omega^2 + i\Omega\tilde{k} + 1 \right) = \hat{p}_v e^{-i\phi} = \hat{p}_v (\cos \phi - i \sin \phi). \quad (6.134)$$

A valós és képzetes részek összevetéséből adódik, hogy

$$\Omega \tilde{k} = -\frac{\tilde{p}_v}{\hat{x}} \sin \phi \quad \text{és} \quad 1 - \Omega^2 = \frac{\hat{p}_v}{\hat{x}} \cos \phi \quad (6.135)$$

ill.

$$\phi = \text{atan} \left( \frac{\tilde{k}\Omega}{\Omega^2 - 1} \right) \quad \text{és} \quad \hat{x} = \frac{\hat{p}_v}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (\Omega \tilde{k})^2}}. \quad (6.136)$$

(Ezek az összefüggések a kapcsolódó szakirodalomban, pl. [40] 3.9 fejezetében is megtalálhatók.) A szelep átfolyási egyenletét – ld. (2.30) egyenlet a 19. oldalon –  $\bar{x}$  és  $\bar{p}$  körül linearizálva kapjuk, hogy

$$\bar{q} + \hat{q} \approx \mu\sigma\bar{x}\sqrt{\bar{p}_v} + \mu\sigma \left( \hat{x}\sqrt{\bar{p}_v} + \frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{p}_v}}\hat{p}_v \right). \quad (6.137)$$

E két – (6.136) és (6.137) – egyenlet összevetésével és felhasználva, hogy  $\hat{q} = \mu\hat{v}_v$  – (2.29) egyenlet a 18. oldalon – kapjuk a szelep impedanciára, hogy

$$\hat{v}_v = \sigma \left( \frac{\sqrt{\bar{p}_v}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (\Omega \tilde{k})^2}} + \frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{p}_v}} \right) \hat{p}_v := Z_{sz}\hat{p}_v. \quad (6.138)$$

A csődinamikára áttérve, az egyszerűség kedvéért tekintsük a csillapítatlan szelep ( $\tilde{k}=0$ ) esetét, ugyanakkor a csősúrlódást megengedjük, azaz  $\mathcal{R} \neq 0$ . A peremfeltételek tehát<sup>23</sup>

$$\begin{aligned} \text{a cső elején végtelen nagy tartály:} & \rightarrow \hat{p}_d = \hat{p}_e = \hat{p}(0, \tau) = 0 = (A + B) \quad \text{és} \\ \text{a cső végén szelep impedancia:} & \rightarrow \hat{v}_u = \hat{v}_v = \hat{v}(1, \tau) = -Z_c^{-1}A(e^\Gamma + e^{-\Gamma}) \\ & = Z_{sz}\hat{p}_v = Z_{sz}A(e^\Gamma - e^{-\Gamma}), \end{aligned}$$

ahonnan átrendezés után kapjuk, hogy

$$i\frac{\alpha\Gamma}{\Omega\gamma}(\tanh \Gamma)^{-1} = \sigma \left( \frac{\sqrt{\bar{p}_v}}{1 - \Omega^2} + \frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{p}_v}} \right). \quad (6.139)$$

Ezen egyenlet bal oldalán egy komplex szám áll, a jobb oldalon pedig valós, így az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha mindkettő zérus. A továbbiakban vizsgáljuk (ismét) a veszteségmentes cső esetét a stabilitási határon, azaz  $\mathcal{R} = 0$  és  $\Psi = 0$ ! Ekkor a (6.124) egyenlet értelmében  $\Gamma = i\Omega\gamma$  és mivel  $\tanh(i\Omega\gamma) = i \tan(\Omega\gamma)$ , a (6.139) összefüggés bal oldalára azt kapjuk, hogy

$$i\frac{\alpha\Gamma}{\Omega\gamma}(\tanh \Gamma)^{-1} = i\frac{\alpha i\gamma\Omega}{\Omega\gamma}i(\tan \gamma\Omega)^{-1} = -i\alpha\frac{\cos \gamma\Omega}{\sin \gamma\Omega}, \quad (6.140)$$

<sup>23</sup>Az  $u, d$  alsó indexek *általános* jelölések egy cső al- és felvív oldalára, míg az  $e, v$  alsó indexek a 4. ábrán látható rendszerre vonatkoznak.

ami egy tisztán képzetes szám. Így tehát a (6.139) egyenlőség teljesüléséhez mindkét oldalnak zérusnak kell lennie, azaz

$$-i\alpha \frac{\cos \gamma\Omega}{\sin \gamma\Omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma\Omega = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{és} \quad (6.141)$$

$$\frac{\sqrt{\bar{p}_v}}{1 - \Omega^2} + \frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{p}_v}} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = 2 \frac{\bar{p}_v}{\Omega^2 - 1} = 2 \frac{\bar{p}_v}{\left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^2 - 1}. \quad (6.142)$$

Ezek pontosan a korábban, a 3.4. fejezetben levezetett (3.85) összefüggések (44. oldal),  $\tilde{A}_{\text{eff}} = 1$  egyszerűsítéssel. Újra hangsúlyozzuk, hogy a jelen megközelítésnél *eredményként* kapjuk, hogy a negyedhullámhosszhoz tartozó módus a kritikus, míg korábban ezt kénytelenek voltunk előzetesen feltenni.

Az eddig bemutatott "kézi" számítás mellett az impedancia módszer jóval algoritmusabban is alkalmazható. Legyen ugyanis az ismeretlen amplitúdókat tartalmazó vektor  $(\hat{p}_e, \hat{v}_e, \hat{p}_v, \hat{v}_v)^T$ . Ekkor a négy lineáris egyenlet röviden

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cosh \Gamma & -Z_c \sinh \Gamma & -1 & 0 \\ -Z_c^{-1} \sinh \Gamma & \cosh \Gamma & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -Z_{sz} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_e \\ \hat{v}_e \\ \hat{p}_v \\ \hat{v}_v \end{pmatrix} := \mathcal{M} \begin{pmatrix} \hat{p}_e \\ \hat{v}_e \\ \hat{p}_v \\ \hat{v}_v \end{pmatrix} \quad (6.143)$$

alakban írható, ahol az első sor a  $\hat{p}_e = 0$  peremfeltétel, a második és harmadik egyenlet pedig a (6.127) csővezeték impedancia és az utolsó sor pedig a (6.138) szelepipedancia. A fenti lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa zérus:

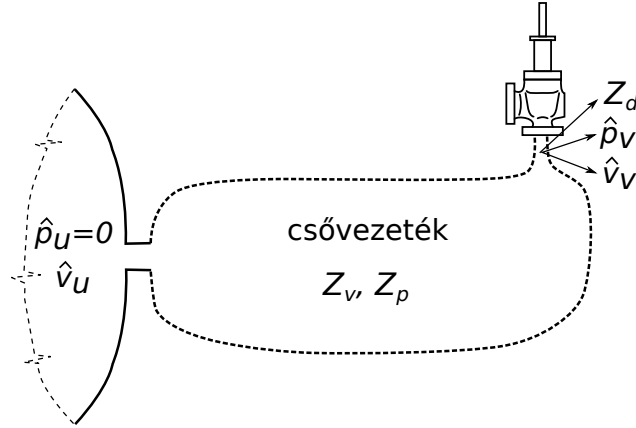
$$0 = \det \mathcal{M} = \cos(\gamma\Omega) + iZ_{sz}\alpha \sin(\gamma\Omega) \quad \rightarrow \quad Z_{sz} = -i \frac{\cot(\gamma\Omega)}{\alpha}. \quad (6.144)$$

Így ugyanarra jutottunk, mint korábban: mind a valós résznek zérussá kell válnia ( $\cos(\gamma\Omega) \rightarrow \gamma\Omega = \pi/2 + k\pi$ ), mind a  $Z_{sz}$  szelepipedanciának el kell tűnnie a lineáris stabilitás határán.

A fenti "recept" segítségével egyszerűen vizsgálhatjuk nagyobb, összetett csőhálózatok stabilitását néhány egyszerű továbbgondolással. Egyrésztől, ahogy a hálózat mérete növekszik, úgy nő az együtthatómátrix mérete is, így célszerűbb lehet a determinánst numerikusan kiszámítani és a gyökhelyét is valamilyen numerikus eljárás segítségével megkeresni. Ilyenkor azonban nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy az állandósult állapot egyenleteit (az  $\bar{p}$  és  $\bar{v}$  változókra) is egyszerre kell megoldanunk a  $\det \mathcal{M} = 0$  egyenlettel. Másrésztől, több cső vagy egyéb elem csatlakozásánál szükséges kontinuitási egyenletekkel kibővíteni a rendszert, ami könnyedén megtehető és a 6.5. fejezetben mutatunk is erre példát.

### 6.4. Csőhálózat és szelep stabilitása - általános eredmények

Most térjünk át a 35. ábrán látható, véges térfogatú tartályból, csővezetékrendszerből és egyetlen szelepből álló rendszer vizsgálatára. Az alábbiakban általános jellegű eredményeket fogalmazunk meg, különös tekintettel a szelep impedanciára vonatkozóan.



35. ábra. Vázlat az impedanciamódszer alkalmazásához.

Rendezzük az ismeretlen amplitúdókat egy  $y$  vektorba oly módon, hogy  $y_1 = \tilde{v}_v$  és  $y_2 = \tilde{p}_v$  legyen (tehát a szelep csatlakozókarimájánál mért nyomás- és sebesség amplitúdó), a többi ismeretlen tetszőleges sorrendben következhet. Első lépésként számítsuk ki a hidraulikus rendszer sajátfrekvenciáit *zárt szelep* esetén! Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_0} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{v}_v \\ \hat{p}_v \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_y = 0, \quad (6.145)$$

ahol a szürkével kiemelt sorok (tetszőleges számban) a rendszer belső dinamikáját leíró impedancia-, kontinuitási- vagy tartályegyenletek. A csővezeték  $\omega_k$  sajátfrekvenciáinak meghatározása egyenértékű a

$$\mathcal{M}_0(\omega_k)y = 0 \quad (6.146)$$

*nemlineáris* sajátértékprobléma<sup>24</sup> megoldásával, azaz azon  $\omega_k$  frekvenciák meghatározásával, melyekre  $\det \mathcal{M}_0(\omega_k) = 0$ , így létezik nemtriviális (esetünkben periodikus) megoldás. A

<sup>24</sup>A "szokásos" mérnöki szóhasználatban "sajátértékprobléma" alatt a lineáris esetet értjük, azaz egy  $A$  mátrix sajátértékeinek meghatározása során felmerülő  $0 = \det(A - \lambda I) := \mathcal{M}(\lambda)$  feladatot. Esetünkben azonban az  $\mathcal{M}$  mátrix nemlineárisan függ a sajátértéktől, ami speciális numerikus módszereket igényel, ld. pl. [37].



mérnöki életben gyakran nem közvetlenül ezt az egyenletet oldjuk meg, hanem a csőhálózat egy pontján periodikus gerjesztést előírva nagyítási függvény segítségével határozzuk meg a rendszer sajátfrekvenciáit.

Másrésztől, ha a szelepet hozzáadjuk a rendszerhez és a neutrális stabilitási görbét keressük, akkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -Z_{sz} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{v}_v \\ \hat{p}_v \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_y = 0, \quad (6.147)$$

ahol az első sorban megjelent a szelep impedancia, de a mátrix többi része változatlan. A (6.145) és a (6.147) egyenletek együtthatómátrixai esetében a szürkével kiemelt sorok ugyanazok, ezért az  $\mathcal{M}$  és  $\mathcal{M}_0$  mátrixok hasonló struktúrájúak és írható, hogy

$$\det(\mathcal{M}(\Omega)) = \det(\mathcal{M}_0(\Omega)) + Z_{sz} \det(\mathcal{M}_{1,2}(\Omega))|_{\Omega=\omega_k} = Z_{sz} \det(\mathcal{M}_{1,2}(\omega_k)), \quad (6.148)$$

ahol  $\mathcal{M}_{1,2}$ -vel az  $\mathcal{M}$  mátrix (1,2) eleméhez ( $Z_{sz}$ -hez) tartozó aldeterminánst jelöltük<sup>25</sup>. Így tehát, ha meghatározzuk a szelep nélküli, lezárt csőrendszer  $\omega_k$  sajátfrekvenciáit, biztosak lehetünk benne, hogy amennyiben a  $Z_{sz} = 0$  feltétel is teljesül (ezen a frekvencián), a neutrális görbén vagyunk, tehát a rendszer a lineáris stabilitás határán van.

Ugyanakkor nem szabad elfelejtenünk, hogy létezhetnek olyan  $(\Omega, Z_{sz})$  paraméter párok is, melyekre  $\det(\mathcal{M}) = 0$  annak ellenére, hogy  $\Omega \neq \omega_k$  és  $Z_{sz} \neq 0$ . A következő fejezetben mutatni fogunk ilyen megoldásokat.

Ez a megközelítés nagyban megkönnyíti a negyedhullám-típusú instabilitások megkeresését: első lépésként meg kell határozni a csővezetékrendszer lezárt szeleppárhoz tartozó akusztikus sajátfrekvenciáit (ami más célokból is hasznos), majd ellenőrizzük, hogy ezeken frekvenciákon a (6.138) egyenlet által definiált szelepipedancia milyen egyensúlyi helyzetekben  $(\bar{p}, \bar{x})$  válik zérussá. Másként megközelítve: adott  $\bar{p}_v$  és  $\bar{x}$  egyensúlyi helyzethez kiszámítjuk azt a frekvenciát, melyre a szelepipedancia zérus, majd ellenőrizzük, hogy ez a frekvencia egybeesik-e a csővezetékrendszer legalacsonyabb sajátfrekvenciájával.

Példaként visszautalunk a negyedhullám kritérium alternatív levezetésére (6.3.3. fejezet) és azon belül a (6.144) egyenletre. A fenti gondolatmenet alapján

$$0 = \det \mathcal{M} = \underbrace{\cos(\gamma\Omega)}_{\mathcal{M}_0} + Z_{sz} \underbrace{i\alpha \sin(\gamma\Omega)}_{\mathcal{M}_{1,2}} \Big|_{\gamma\Omega=\pi/2} = Z_{sz} i\alpha,$$

ami pontosan a fenti (6.148) általános összefüggés megfelelője.

<sup>25</sup> $\Omega$  általános (dimenziótlan) frekvencia,  $\omega_k$  viszont a rendszer  $k$ -adik sajátkörfrekvenciája.

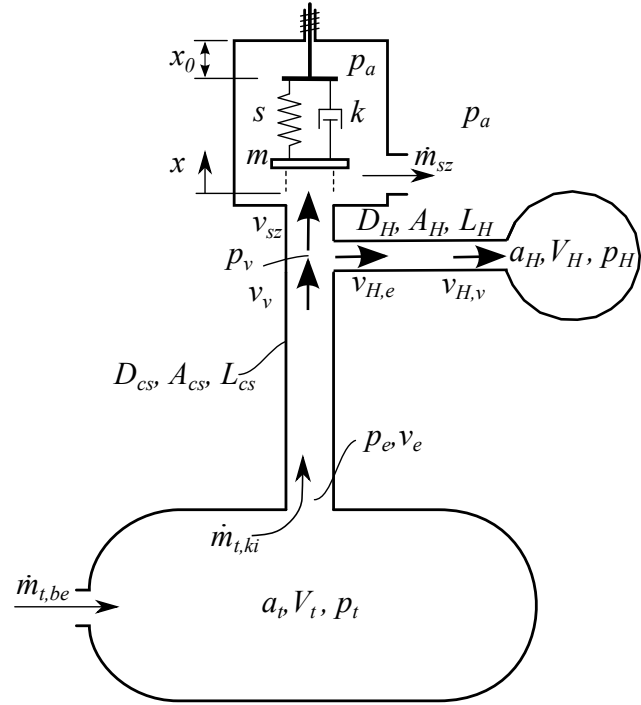
### 6.5. Szelep alatti vakcső és Helmholtz rezonátor hatása

Ebben a fejezetben az impedancia módszer alkalmazására mutatunk példát. Tekintsük a 36. ábrán látható rendszert, melyben a szelep alatt egy második csővezetéken keresztül egy második tartály kapcsolódik.

Ezen elrendezés segítségével kétféle esetet is vizsgálhatunk.

1. Amennyiben  $V_H \approx 0$ , azaz a második tartály elhanyagolhatóan kis térfogatú (vagy nincs is jelen), azt vizsgálhatjuk, hogy milyen hatása van egy szelep alatti "vakcsőnek", vagy annak, ha a szelep nem a csővezeték végére van szerelve, hanem a teljes  $L_{cs} + L_H$  csőhosszon a tartálytól  $L_{cs}$  távolságra.

2. Amennyiben  $V_H \neq 0$ , azt a kérdést tehetjük fel, hogy javíthatók-e a stabilitási tulajdonságok egy Helmholtz rezonátor beépítésével, melyet az  $L_H$  hosszú,  $D_H$  átmérőjű második cső és tartály a  $V_H$  térfogatú tartály alkotnak.



36. ábra. Vázlat az impedanciamódszer alkalmazásához.

Mindkét esetben figyelembe kell vennünk, hogy a csövek és a szelep csatlakozásánál kontinuitási egyenletnek teljesülnie kell mind az időátlagolt komponensekre:

$$A_{cs} \bar{v}_v = A_{sz} \bar{v}_{sz} + A_H \bar{v}_{H,e}, \quad (6.149)$$

mind az ingadozó komponensekre:

$$A_{cs} \hat{v}_v = A_{sz} \hat{v}_{sz} + A_H \hat{v}_{H,e}. \quad (6.150)$$

Feltesszük továbbá, hogy a T elágazásban egyetlen közös nyomás uralkodik és nincs iránytörési, leválási, vagy Borda-Carnot veszteség. A csővezetésekre a korábbi impedanciaegyenleteket felírva kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_v \\ \hat{v}_v \end{pmatrix} = \mathcal{Z}(\Omega) \begin{pmatrix} \hat{p}_e \\ \hat{v}_e \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} \hat{p}_{H,v} \\ \hat{v}_{H,v} \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_H(\Omega) \begin{pmatrix} \hat{p}_v \\ \hat{v}_{H,e} \end{pmatrix} \quad (6.151)$$

ahol

$$\mathcal{Z}_j = \begin{pmatrix} \cosh(\Gamma_j) & -Z_{c,j} \sinh(\Gamma_j) \\ -(Z_{c,j})^{-1} \sinh(\Gamma_j) & \cosh(\Gamma_j) \end{pmatrix} \quad (6.152)$$

és  $j$ -vel értelemszerűen a két cső paramétereit különböztetjük meg. Így nyolc darab ismeretlenünk van:  $\hat{p}_e$ ,  $\hat{v}_e$ ,  $\hat{p}_v$ ,  $\hat{v}_v$ ,  $\hat{v}_{sz}$ ,  $\hat{v}_{H,e}$ ,  $\hat{p}_{H,v}$  és  $\hat{v}_{H,v}$ . A fenti két cső-impedanciaegyenlet ad 4 egyenletet, további egyet a (6.150) kontinuitási egyenletet, egy további a szelep impedanciája (6.138). Két további egyenlet a tartályhoz kapcsolódik; a (2.28) egyenleten elvégezve a korábbi felbontást kapjuk, hogy

$$i\Omega\hat{p}_e = -\beta\mu\hat{v}_e \quad \text{és} \quad i\Omega\hat{p}_H = \beta_H\mu_H\hat{v}_{H,v}. \quad (6.153)$$

Amennyiben vakcső hatását szeretnénk vizsgálni,  $V_H \rightarrow 0$  azaz  $\beta_H \rightarrow \infty$ , ezért a fenti egyenletből adódik, hogy  $\hat{v}_{H,v} = 0$  és természetesen ilyenkor az átlagsebesség is zérus a második csőben:  $\bar{v}_H = 0$ . Ezzel ellentétben, végtelen nagy Helmholtz tartály esetén  $V_H \rightarrow \infty$  azaz  $\beta_H \rightarrow 0$ , ezért  $\hat{p}_H = 0$ .

### 6.5.1. Vakcső hatása

Vizsgáljuk meg tehát a vakcső esetét! Mivel a szelep utáni cső vége zárt, ezért  $\hat{v}_{H,v} = 0$  és a megoldandó lineáris egyenletrendszer tömören a

$$0 = \begin{pmatrix} i\Omega & \beta\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cosh \Gamma & -Z_c \sinh \Gamma & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sinh \Gamma}{Z_c} & \cosh \Gamma & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{A_H}{A_{cs}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_{sz} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \Gamma_H & 0 & 0 & -Z_{c,H} \sinh \Gamma_H & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sinh \Gamma_H}{Z_{c,H}} & 0 & 0 & \cosh \Gamma_H & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_e \\ \hat{v}_e \\ \hat{p}_v \\ \hat{v}_v \\ \hat{v}_{sz} \\ \hat{v}_{H,e} \\ \hat{p}_{H,v} \\ \hat{v}_{H,v} \end{pmatrix} \quad (6.154)$$

alakot ölti. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a csövek sűrűdásmentesek ( $\mathcal{R} = 0$ ), "kellően nagy" a tartály ( $\beta \approx 0$ ) és tisztán periodikus megoldásokat keresünk. Ekkor kapjuk, hogy akkor és csak akkor léteznek ilyen megoldások, ha az együtthatómátrix determinánása zérus, amit  $Z_{sz}$ -re megoldva adódik, hogy

$$Z_{sz} = i \frac{1}{\alpha} (\tan^{-1}(\gamma\Omega) - \tan(\gamma_H\Omega)). \quad (6.155)$$

Ez azt jelenti, hogy egyrészt a szelep impedanciának zérusnak kell lennie – hasonlóan a negyedhullám instabilitás vizsgálatánál, ld. (6.144) egyenlet a 90. oldalon – másrészt teljesülnie kell, hogy

$$\frac{\cos \gamma\Omega}{\sin \gamma\Omega} = \frac{\sin \gamma_H\Omega}{\cos \gamma_H\Omega} \quad \text{ahonnan} \quad \Omega(\gamma + \gamma_H) = \frac{\pi}{2} + n\pi. \quad (6.156)$$

Tehát a vizsgált konfiguráció esetében a két cső *együttes* hosszát kell figyelembe venni a stabilitásvizsgálat során. Így azt találtuk, hogy a szelep alá elhelyezett vakcső nem javít a stabilitási tulajdonságokon, sőt, még ront is a helyzeten, hiszen a két cső együttes hosszának kell a kritikus érték alatt maradnia, így értelemszerűen a tartály és szelep közötti csőnek rövidebbnek kell lennie.

A fenti elméleti számítások ellenőrzésére numerikus szimulációt is végeztünk és ezeket összevetettük a módosított impedanciamódszer eredményeivel. A számítás során a (6.154) egyenlet által definiált  $\mathcal{M}$  lineáris együtthatómátrixban két paramétert tekintettünk ismeretlennek: a megoldás  $\Omega$  frekvenciáját és a tartályt és szelepet összekötő cső hosszát, tehát  $\mathcal{M} = f(\Omega, \gamma)$ . Természetesen ismeretlen volt az egyensúlyi állapotot leíró  $\bar{p}_v$  és  $\bar{x}$  szelepnyomás és szelepnnyitás. Így, előírva a többi paramétert (különösképpen  $\Psi$  exponenciális burkoló és  $L_H, \gamma_H$  vakcső hosszát) numerikusan megoldjuk a

$$0 = \text{Re}(\det \mathcal{M}(\Omega, \gamma))$$

$$0 = \text{Im}(\det \mathcal{M}(\Omega, \gamma))$$

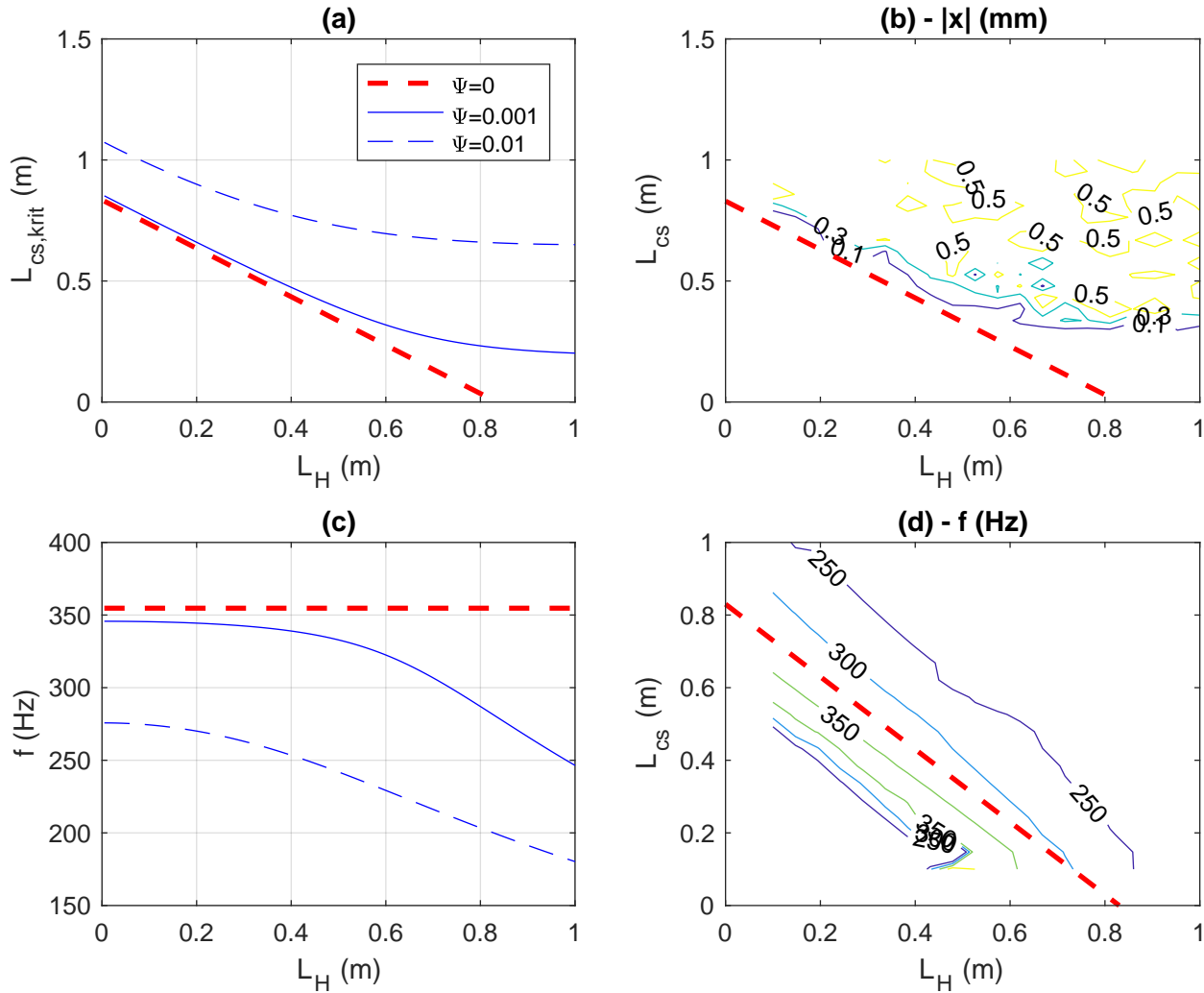
$$0 = \delta + \bar{x} - (\bar{p}_v - 1)$$

$$0 = \bar{q} - \mu\sigma\bar{x}\sqrt{\bar{p}}$$

egyenletrendszer. Bár az első két egyenlet függetlennek tűnik a második kettőtől, valójában a  $Z_{sz}$  szelepipedancián keresztül összekapcsolódnak (bár a kapcsolat egyirányú, azaz a második két egyenlet megoldható lenne önállóan is). Hangsúlyozzuk, hogy ezeknél a számításoknál már figyelembe vesszük a csősúrlódást ( $\mathcal{R} \neq 0$ ), véges tartálméretet  $\beta \neq 0$  feltételezünk és a számítást elvégeztük adott csillapítású megoldásokra  $\Psi \neq 0$  is. Így adódnak a 37. ábra bal oldali oszlopai: a felső sorban a kritikus  $L_{cs}$  csőhossz az  $L_H$  csőhossz függvényében ill. a keletkező rezgés frekvenciája (alsó ábra). A bal felső ábrán jól látszik a (6.156) kritérium: a második cső  $L_H$  hosszának növelésével lineárisan csökken az első cső  $L_{cs}$  hossza (a stabil tartomány a piros szaggatott vonal alatti terület).

A vizsgált rendszert direkt numerikus szimulációk eredményeivel is összevetettük, ez látható a 37. ábra jobb oszlopában. Ezeknél a szimulációknál a szelepet az egyensúlyi helyzetből, annak kis megzavarása után elindítva tíz szeleplengés ( $t_{max} = 10T_{szelep}$ ) után mértük az egyensúlyi helyzettől való eltérést (jobb felső ábra) és a mozgás frekvenciáját (jobb alsó ábra). Itt a teljes bemutatott síkon  $20 \times 20$  rácspontban ( $L_{cs}$  és  $L_H$  tekintetében) futtattunk szimulációkat és az eredményeket szintvonalasan jelenítettük meg.

A két felső ábra a stabilitási határt hasonlítja össze: jó egyezést látunk az impedancia módszerrel kapott (bal oldal) és a direkt szimulációval kapott (jobb oldal) eredmények között. Világosan látszik az elméleti úton kapott (6.156) összefüggés is: a stabilitási határ mentén a két csővezeték hosszának összege állandó. A  $\Psi > 0$  számításokból az is jól látszik, hogy a stabil tartomány a kritikus csőhossz alatt található. A két alsó ábrán feltüntetett frekvenciák



37. ábra. Vakcső hatása a kritikus csőhosszra. Bal oszlop: a módosított impedancia módszerrel kapott eredmények. Jobb oszlop: numerikus szimuláció; felül a legnagyobb szelepelmozdulást, alul a szelepmozgás domináns frekvenciáját jelenítettük meg szintvonalak segítségével.

összevetéséből azt látjuk, hogy az instabilitás frekvenciája állandó marad (kb. 350 Hz, bal oldal) és jó közelítéssel egyezik a numerikus szimulációkkal kapott eredményekkel: a kritikus csőhossz  $\sum L_{krit.} = L_{cs} + L_H = 0.86\text{m}$ , amelynek jellemző negyedhullám-frekvenciája  $f_{NH} = \frac{1}{4} \frac{a}{\sum L_{krit.}} = 348\text{Hz}$  (a folyadékban mért hangsebességet  $a = 1200\text{m/s}$ -ra választottuk).

### 6.5.2. Helmholtz rezonátor a szelep alatt

Teljesen hasonló gondolatmenettel vizsgálhatjuk a  $V_H \neq 0$  esetet, tehát amikor Helmholtz rezonátort kapcsolunk a szelep alá. Ekkor a (6.154) egyenletben az utolsó sor változik: az eddigi  $\hat{v}_{H,v} = 0$  egyenlet helyére  $i\Omega\hat{p}_H - \beta_H\mu_H\hat{v}_{H,v} = 0$  egyenlet lép.

Legyen  $A_{sz} = A_{cs}$ , tekintsük megint a végtelen nagyra tekinthető tartály esetét ( $\beta \approx 0$ ),

tisztán periodikus megoldást ( $\Psi = 0$ ) és súrlódásmentes csöveket ( $\mathcal{R} = 0$ ). Ekkor a fenti megszorításokkal a determináns

$$\det \mathcal{M}|_{\beta=0} = i\Omega \left[ \alpha \frac{A_H}{A_{cs}} \Omega \sin((\gamma_H + \gamma)\Omega) - \beta_H \mu_H \cos((\gamma_H + \gamma)\Omega) \right] + \quad (6.157)$$

$$Z_{sz} \alpha \Omega \sin(\gamma\Omega) \left[ \beta_H \mu_H \cos(\gamma_H \Omega) - \alpha \frac{A_H}{A_{cs}} \Omega \sin(\gamma_H \Omega) \right] \quad (6.158)$$

ahonnan a negyedhullám-típusú instabilitáshoz tartozó kritikus rezonátor-nagyság

$$\beta_{H,krit}|_{Z_{sz}=0} = \frac{A_H}{A_{cs}} \frac{\alpha \Omega}{\mu_H} \tan((\gamma + \gamma_H)\Omega). \quad (6.159)$$

Ellenőrzésképpen rögtön megjegyezzük, hogy amennyiben a Helmholtz tartály végtelenül kicsi (tehát az előző fejezetben részletezett vakcső esetét vizsgáljuk),  $\beta_H \rightarrow \infty$ , ezért  $\gamma_H + \gamma = \pi/2 + k\pi$ , ami az előző fejezet (6.156) összefüggése.

Egy másik fajta instabilitás is tetten érhető a (6.158) összefüggés segítségével. Ehhez első lépésként fejtük sorba a determináns értékét  $\gamma_H = 0$  körül elsőrendig, ekkor kapjuk, hogy

$$\det \mathcal{M}|_{\beta=0, \gamma_H=0} \approx \gamma_H \alpha \Omega \left( \frac{\beta_H \mu_H}{\gamma_H \alpha} - \Omega^2 \right) [Z_{sz} \alpha \sin(\gamma\Omega) - i \cos(\gamma\Omega)] + \quad (6.160)$$

$$i \gamma_H \alpha \Omega \left( \frac{\beta_H \mu_H}{\gamma_H \alpha} + 1 \right) \sin(\gamma\Omega) + \mathcal{O}(\gamma_H^2)$$

Ezt az összefüggést szemügyre véve azt látjuk, akkor egy lehetséges (speciális) megoldást kapunk, ha

- $\frac{\beta_H \mu_H}{\gamma_H \alpha} = \Omega^2$ , továbbá
- $\frac{\beta_H \mu_H}{\gamma_H \alpha} = \Omega^2 = 1$ , ekkor az  $(1 - \Omega^2) Z_{sz} \alpha \sin(\gamma\Omega)$  összefüggés nullához tart<sup>26</sup> és végül, ha
- $\gamma = k\pi$ .

A fenti feltételek egy Helmholtz-típusú instabilitást írnak le, ahogy azt már a 3.3 fejezetben láttuk; ld. (3.60) összefüggés a 34. oldalon. Természetesen a fent megadott paraméterértékek csupán egyetlen, speciális pontot írnak le. A numerikus tapasztalatok azt mutatják, hogy az  $L_1$  cső hosszától függetlenül, a Helmholtz-rezonancia ( $\gamma_H = \mu_H \beta_H / \alpha$ ) előírása már jó becslést ad a kritikus csőhosszra.

Az előzőekhez hasonlóan ismét ellenőrző szimulációkat végeztünk, melyek eredményeit összevetettük az impedanciamódszer által szolgáltatott határgörbékkel. Az eredményeket a 38. és a 39. ábrán mutatjuk be. A két számítási sorozat között az egyetlen különbség a szelep és a tartály közötti csőhossz volt: az első esetben – 38. ábra – a kritikus csőhossz 70%-a volt beállítva  $L_{cs}$  értékére, míg a második sorozatban – 39. ábra – a 120%-a. A felső

---

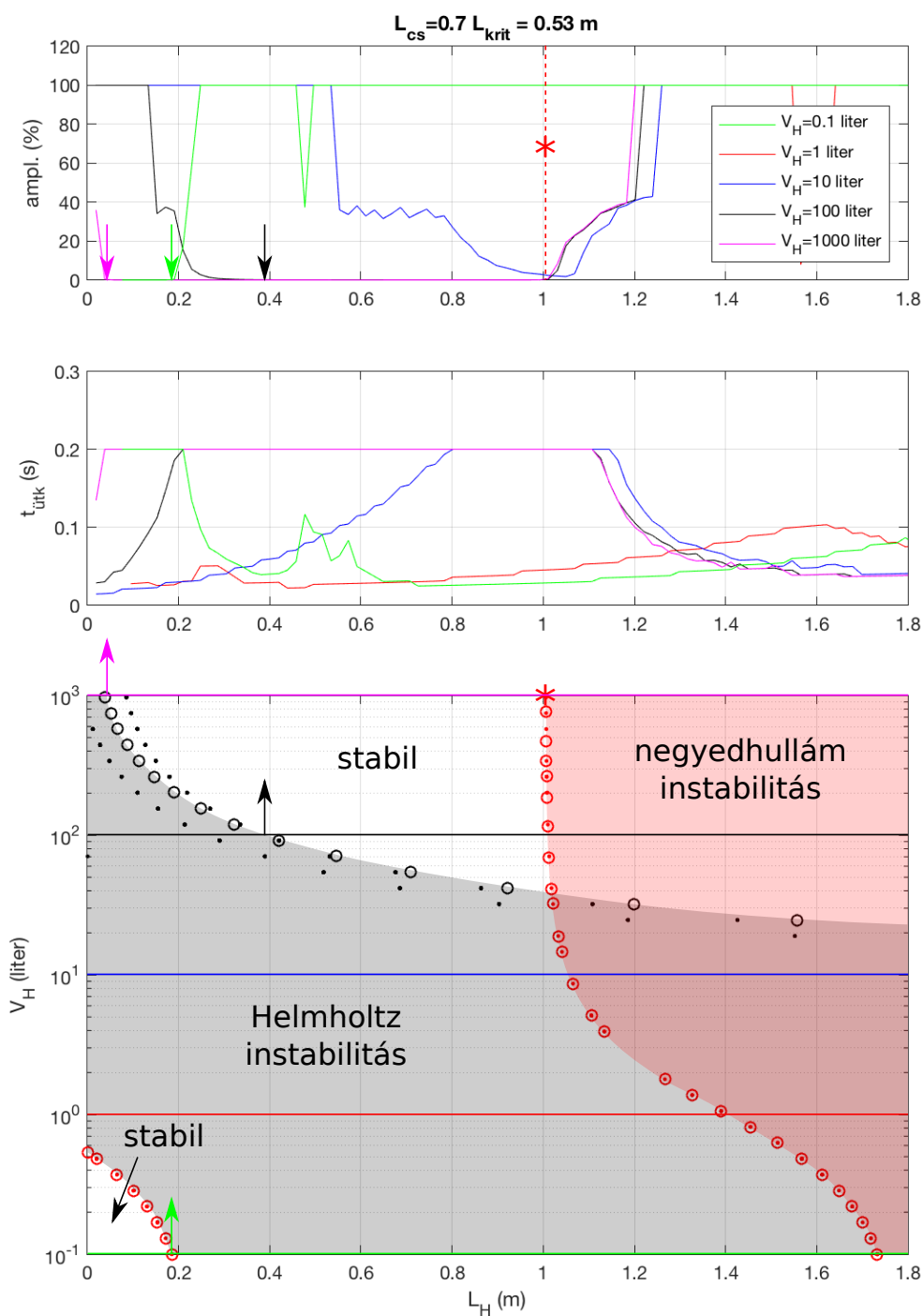
<sup>26</sup> $(1 - \Omega^2) Z_{sz} \alpha \sin(\gamma\Omega) = (1 - \Omega^2) \sigma \left( \frac{2p}{1 - \Omega^2} + x \right) \alpha \sin(\gamma\Omega) = \sigma \left( p + (1 - \Omega^2) \frac{x}{2} \right) \alpha \sin(\gamma\Omega)$

két ábrán numerikus szimulációk eredményeit látjuk: az egyensúlyi állapotból kis zavarással ( $v_{szelep}(0) = 0.01 \text{ m/s}$ ) indítottuk a szimulációt, mely maximum 0.2 másodperc szimulációs időtartamig futott. A szimuláció végeztével az időjel második felére ( $t > 0.1 \text{ s}$ ) kigyűjtöttük a szelepelmozdulás amplitúdóját és ezt ábráztuk a felső diagramon, a maximális szelepelmozdulás függvényében. Így a 0 érték stabil egyensúlyi helyzetet jelent, a 100% ütközés (chatter), míg a köztes értékek ütközés nélküli szeleprezgést (flutter). A középső ábrán az első ütközésig eltelt időt ábráztuk, ill. amennyiben nem történt ütközés, a szimuláció végét (0.2 s) tüntettük fel. A szimulációkat számos tartálmérettel elvégeztük, ezeket különböző színek jelölik.

A legelső ábrán az impedancia módszerrel kapott eredményeket ábráztuk. A piros és fekete pontokkal a (6.158) egyenlet numerikus megoldásával kapott pontokat jelöltük. Ezen számítások során rögzítettünk minden paramétert, majd véletlenszerű  $(\Omega, \gamma_H)$ , melyek közül pirossal jelöltük a negyedhullám-szerű instabilitási formákat (ekkor  $Z_{sz} \approx 0$ ), feketével pedig az egyéb ( $Z_{sz} \neq 0$ ) pontokat. Végül, piros körökkel jelöltük a negyedhullám-típusú instabilitások (6.159) összefüggéssel megadott kritikus értékét és fekete körökkel a Helmholtz-típusú instabilitáshoz tartozó  $\gamma_H = \mu_H \beta_H / \alpha$  becsült kritikus  $\gamma_2$  értéket.

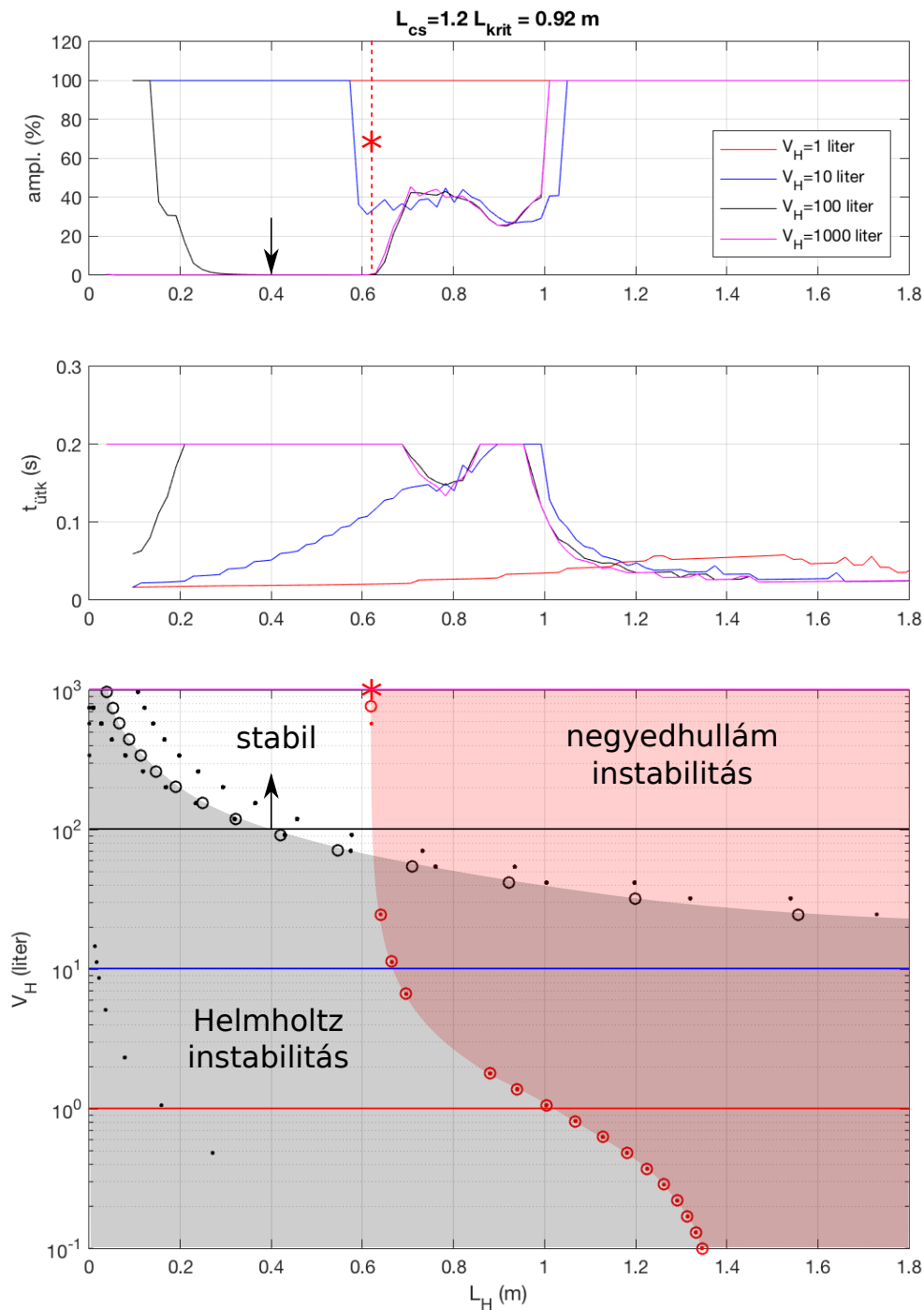
Az eredmények értékelését a 38. ábrával kezdjük. Ebben az esetben, mivel a szelep és a tartály közti cső hossza a kritikus érték alatt van ( $L_{cs} = 0.7L_{krit}$ ), az ábra bal alsó sarka  $-L_H \approx 0$  és  $V_H \approx 0$  – az eredeti negyedhullám esetet írja le, melyet pl. a 6.3.3. fejezetben taglaltunk. Érdekes megfigyelnünk, hogy ennek a bal alsó stabil tartománynak a maximális  $L_H$  értéke ahhoz a  $L_{cs} + L_H = L_{krit} = 0.75$  értékhez tart, melyet korábban már, a vakcsővel foglalkozó 6.5.1. fejezetben levezettünk. Mind a csőhosszat (vízszinten irányban mozogva az alsó ábrán), mind a Helmholtz tartály méretét növelve (függőlegesen mozogva) kilépünk a stabil tartományból és instabillá válik a rendszer, a csőhossz növelése önmagában nem is képes stabilizálni a rendszert. A tartálytérfogatot növelve azonban, miután a Helmholtz rezonátor frekvenciája a szelep sajátfrekvenciája alá kerül, stabilizálódik a rendszer, ez jól megfigyelhető a feketével jelölt 100 literes és a magentával jelölt 1000 literes Helmholtz tartályhoz tartozó szimulációkon (felső két ábra). (Természetesen, a konkrét szelepgeometriát és a műszaki szempontokat figyelembe véve még egy 100 literes tartály csatolása is irreális lenne.) Ami pedig még fontosabb: a Helmholtz instabilitás tartományában a kialakuló rezgések kisebb amplitúdójúak, mint a negyedhullám tartományban, ez jól látszik pl. a 100 literes tartályhoz tartozó kék vonallal jelzett szimulációkon.

## 6. Bonyolult csővezetékek: a módosított impedancia módszer



38. ábra. Szimulációs és analitikus eredmények összevetése stabilis tartály-szelep csőhossz  $L_{cs} = 0.7 L_{krit}$ . esetén.





39. ábra. Szimulációs és analitikus eredmények összevetése stabilis tartály-szelep csőhossz  $L_{cs} = 1.2 L_{krit}$ . esetén.

Az előző esetenél jóval érdekesebb a 39. ábra, ahol a szelep és a tartály közötti  $L_{cs}$  hossz a kritikus érték 120%-a, tehát ez az elrendezés a Helmholtz rezonátor nélkül instabil. (Ennek megfelelően a bal alsó sarokból eltűnt a stabil "sziget".) Itt azt látjuk, hogy alapvetően instabil rendszer stabilizálható kellően nagy tartállyal és megfelelően rövid Helmholtz-csővel. Ilyenkor a kapcsolt Helmholtz-rezonátornak olyannak kell lennie, hogy kielégítse a

$$\beta_H < \gamma_H \frac{\alpha}{\mu_H} \quad \text{és a} \quad \beta_H > \frac{A_H}{A_{cs}} \frac{\alpha}{\mu_H} \tan(\gamma + \gamma_H) \quad (6.161)$$

feltételeket, vagy, dimenziós formában megadva:

$$\omega_H = a^2 \frac{A_H}{L_H V_H} < \omega^2 = \frac{s}{m} \quad \text{és} \quad \frac{1}{V_t} > \frac{A_H}{A_{cs}} \frac{\omega}{A_{cs} a} \tan\left(\frac{(L_{cs} + L_H)\omega}{a}\right). \quad (6.162)$$

Összefoglalva ezt a fejezetet, a klasszikus impedanciamódszer továbbfejlesztésével olyan módszert kaptunk, mely tetszőleges méretű és bonyolultságú csőhálózat esetén is képes megjósolni a tartály, a csővezetékrendszer és a szelep instabilitásait. Analitikus számítással igazoltam, hogy az egyenes csővezetékhez hasonlóan, a csővezetékrendszer esetén is annak első sajátfrekvenciáján szükséges ellenőrizni a negyedhullám-instabilitást.

Az itt bemutatott számítási eljárás stabilitási szempontból lineáris, így nem képes előrejelezni a nemlineáris hatásokat, például azt az esetet, amikor a lineárisan stabil egyensúlyi helyzet mellett létezik egy nagy amplitúdójú rezgés is. Így a kapott stabilitási határgörbék mentén érdemes numerikus ellenőrző szimulációkat végezni.

**5. tézis** *A hidraulikus impedanciamódszer továbbfejlesztésével általános, hatékony eljárást dolgoztam ki csővezetékekből, tartályokból és szelepekből álló áramlástechnikai rendszerek lineáris stabilitásának vizsgálatára. A módszer nem igényli a csővezetékrendszer hidraulikus/akusztikai módusainak előzetes ismeretét vagy feltételezését, ezek a számítás során kiadódnak. A módszer a tisztán periodikus megoldások mellett alkalmas előre meghatározott rátával erősödő vagy csillapodó megoldások megkeresésére is, így a kapott stabilitási határgörbéken áthaladva a stabilitásváltás iránya is azonosítható.*

Kapcsolódó publikáció: [HCs6]

**6. tézis** *Kimutattam, hogy tetszőleges bonyolultságú felvízoldali csővezetékrendszer esetében a negyedhullám-típusú instabilitás megjelenésekor a biztonsági szelep  $Z_{sz} = \bar{x} + \frac{2\bar{p}}{1-\Omega^2}$  impedanciája zérussá válik a csővezetékrendszer legalacsonyabb  $\Omega$  sajátfrekvenciáján.*

Kapcsolódó publikáció: [HCs6]

## 7. Kitekintés

A nyomáshatároló szelepek dinamikus viselkedésének kérdésköre még PhD munkám során merült fel, amikor egy laboratóriumi mérés során olyan rezgésekkel szembesültem, melyekre nem számítottam és először mérési hibára gyanakodtam. Miután azonban a méréseket számítógépes szimulációkkal megpróbáltam ellenőrizni és ezeknél is rezgéseket tapasztaltam, nyilvánvalóvá vált, hogy nem véletlenről vagy mérési hibáról van szó. A PhD megszerzése után is foglalkoztam a kérdéssel, de az igazán nagy lökést egy többéves ipari megbízás adta, amely biztosította a munka feltételrendszerét, mind laboratóriumi, mind személyi, mind határidők tekintetében. Ritka kegyelemnek tartom, hogy úgy dolgozhattam együtt egy szelepek gyártó cég szakembereivel, hogy nem a mihamarabbi termékfejlesztés volt a cél, hanem partnerek voltak abban is, hogy megpróbáljuk valóban megérteni, hogy mi okozza a szelepek rezgését.

Az itt bemutatott munka legfontosabb eredményének azt tekintem, hogy megmutattam, hogy *nem maga a szelep stabil vagy instabil*, hanem a szelep, a védendő tartály és a csővezetékrendszer együttesét kell vizsgálnunk. Hasonlóan fontosnak gondolom, hogy az alapvető instabilitási típusokat osztályoztam és elkülönítettem, mivel ez megnyitja az utat a szisztematikus ellenőrzéshez és méretezéshez. Nehézséget okoz azonban, hogy az ebben a dolgozatban közölt méretezési egyenletek alkalmazásához számos olyan bemenő adatra van szükség, melyet a gyártók vonakodnak kiadni (pl. rugómerevségek különböző nyitónyomásokhoz vagy az effektív felület görbe). A továbbfejlesztett impedanciamódszer rendszerszintű méretezést, ellenőrzést tesz lehetővé, ám, mivel csupán a lineáris stabilitásról ad felvilágosítást, nem kerülhető el a direkt numerikus szimuláció sem, legalább a kritikusként ítélt esetekben.

Számos további irányban szükséges a továbblépés. A direkt rugóterhelésű biztonsági szelepek mellett az elővezérelt nyomáshatároló szelepek is hajlamosak rezgésekre és ezek is hatalmas számban találhatók ipari létesítményekben. Ezekben a szelepekben a rugót egy kis-méretű, hidraulikus vagy pneumatikus elővezérlő fokozat váltja ki, így már nem egy, hanem két darab, kapcsolt, egyszabadságfokú lengőrendszer kapcsolódik a csővezetékhez. Nyilvánvalónak tűnik, hogy a rezgési problémák ilyenkor megsokszorozódnak.

Az ipari létesítményekben az is gyakori, hogy a munkaközeg viselkedése nem írható le az ideális gáztörvénnyel, vagy többfázisú az áramlás. Földgáz vagy nagynyomású vegyszeti alkalmazások esetében például a Peng-Robinson vagy a Soave-Redlich-Kwong állapotegyenletek az elterjedtek, ld. [1]. Víz/vízgőz esetében (pl. gőzerőművek, bojlerok, stb.) a többfázisú közeg jelenléte (pl. vízcseppek gőzfázisban, szelepbeli nyomásesés miatti fázisátalakulás) miatt nem (vagy csak jelentős megkötésekkel) alkalmazhatók a bemutatott eredmények. Az ilyen esetekkel nem foglalkoztunk jelen munkában, ugyanakkor az ipari alkalmazások szempontjából fontosak.

A modelljeink olyan szempontból is egyszerűsítőek voltak, hogy a csillapítást igyekez-

tünk pesszimista megközelítéssel becsülni (az esetek többségében nem is vettük figyelembe). Azt gyaníthatjuk, hogy a valós rendszereinkben rendelkezésre álló csillapítóhatások javítják a stabilitási tulajdonságokat, ugyanakkor a számszerű értékeket nehézkes megbecsülni. Egyrésztől érdekes lenne a folyadék természetes csillapítására (ld. B. melléklet) jobb becslést adni. Ez messze nem tűnik lehetetlennek, mivel a CFD számítások visszaadják ezt hatást, pl. a viszkózus erők munkáján vagy az örvényleválásokon keresztül, a valódi kihívás inkább az, hogy ezeket a rendkívül bonyolult, mikroléptékű folyamatokat hogyan írjuk le makroszkopikus egyenletekkel. A másik ilyen csillapító hatás a csővezetékbeli energiaveszteség. Itt nem csak a csősúrlódásra gondolunk, melynek instacionárius modellezésére szintén pontatlanok lehetnek a stacionárius csősúrlódási tényezők (ld. pl. [11]), hanem a csővezetékbeli könyökök, elágazások, átmérőváltások közelében kialakuló akusztikai veszteségekre (pl. visszaverődések).

Végül megemlítjük, hogy ritkán található egyetlen nyomáshatároló szelep egy rendszerben. Még ha tartályonként egy-egy szelep is van beépítve, az alvízoldali elvezető gyűjtőcsőrendszeren keresztül ezek gyakran össze vannak kapcsolva, ezért az egyik szelep rezgése nyilvánvalóan hat a többi szelep viselkedésére.

## Tézisekhez kapcsolódó publikációk

- [HCs1] C. Bazsó, A.R. Champneys, and C.J. Hős. Bifurcation analysis of a simplified model or a pressure relief valve attached to a pipe. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 13:704–721, 2014.
- [HCs2] C. Bazsó and C.J. Hős. An experimental study on the stability of a direct spring loaded poppet relief valve. *Journal of Fluids and Structures*, 42:456–465, 2013.
- [HCs3] Cs. Bazsó and Cs. Hős. A CFD study on the stability of a hydraulic pressure relief valve. In *Proceedings of CMFF'12*, pages 428–434, 2012.
- [HCs4] I. Erdődi and C. Hős. Prediction of quarter-wave instability in direct spring operated pressure relief valves with upstream piping by means of CFD and reduced order modelling. *Journal of Fluids and Structures*, 73:37–52, AUG 2017.
- [HCs5] C. J. Hős, A. R. Champneys, K. Paul, and M. McNeely. Dynamic behavior of direct spring loaded pressure relief valves in gas service: Model development, measurements and instability mechanisms. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 31(1):70–81, 2014.
- [HCs6] C.J. Hős. An impedance-based technique for predicting valve chatter. In *Proceedings of CMFF'18, Conference on Modelling Fluid Flow*, Budapest, 2018.
- [HCs7] C.J. Hős, C. Bazsó, and Alan Champneys. Model reduction of a direct spring-loaded pressure relief valve with upstream pipe. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 80(4):1009–1024, 2014.
- [HCs8] C.J. Hős and A.R. Champneys. Grazing bifurcations and chatter in a pressure relief valve model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241:2068–2076, 2012.
- [HCs9] C.J. Hős, A.R. Champneys, K. Paul, and M. McNeely. Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves in gas service: II reduced order modelling. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 36:1–12, 2015.
- [HCs10] C.J. Hős, A.R. Champneys, K. Paul, and M. McNeely. Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves: III valves in liquid service. 2016.
- [HCs11] C.J. Hős, A.R. Champneys, K. Paul, and M. McNeely. Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves connected to inlet piping: IV review and recommendations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 48:270 – 288, 2017.
- [HCs12] G. Licskó, A.R. Champneys, and C.J. Hős. Nonlinear Analysis of a Single Stage Pressure Relief Valve. *International Journal of Applied Mathematics*, 39(4), 2009.

## Hivatkozások

- [1] T.H. Ahmed. *Hydrocarbon phase behavior*. Contributions in petroleum geology & engineering. Gulf Pub. Co., 1989.
- [2] Magyar Tudományos Akadémia. *A magyar helyesírás szabályai, 12. kiadás*. Akadémiai Kiadó, 2015.
- [3] T.C. Allison and K. Brun. Testing and modeling of an acoustic instability in pilot-operated pressure relief valves. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138, 2015.
- [4] American Petroleum Institute. Sizing, selection, and installation of pressure-relieving devices, part 1: Sizing and selection. Technical report, API, July 2014.
- [5] American Petroleum Institute. Sizing, selection, and installation of pressure-relieving devices, part 2: Sizing, selection and installation of pressure-relieving devices. Technical report, API, July 2014.
- [6] J Angster, G Paál, W Garen, and A Miklós. The effect of wall vibrations on the timbre of organ pipes. In *Proc. 16th International Congress on Acoustics and 135th JASA Meeting, Seattle*, volume 3, pages p753–754, 1998.
- [7] ASME. Pressure relief devices, performance test codes, ptc 25-2014. Technical report, ASME, 2014.
- [8] ASME. Boiler and pressure vessel code, section i: Rules for construction of power boilers. Technical report, ASME, 2017. ISBN:9780791870754.
- [9] A. Back, J. Guckenheimer, M. Myers, F. Wicklin, and P. Worfolk. dstool: Computer assisted exploration of dynamical systems. *Notices Amer. Math. Soc*, 39:303–309, 1995.
- [10] Krzysztof Bartecki. Transfer function models for distributed parameter systems: application in pipeline diagnosis. In Sarrate, R, editor, *2016 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, Conference on Control and Fault-Tolerant Systems, pages 145–151. Univ Politecnica Catalunya, Res Ctr Sypervis Safety & Automat Control; Ministerio Economia Competitividad; European Union; Inst Elect & Elect Engineers; IEEE Control Syst Soc; IEEE Reliabil Soc; Monitoring Safety & Automat Control Res Ctr, 2016. 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), Barcelona, Spain, SEP 07-09, 2016.
- [11] Anton Bergant, Angus Ross Simpson, and John Vitkovsk. Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 39(3):249–257, 2001.
- [12] K.K. Botros, G.H. Dunn, and J.A. Hrycyk. Riser-relief valve dynamic interactions. *Journal of Fluids Engineering*, 119(3):671–679, 1997.
- [13] Bazsó C. *Nyomáshatároló szelepek instabilitási jelenségei*. PhD thesis, Pattantyús-Ábrahám Géza Gépészeti Tudományok Doktori Iskola, 2015.
- [14] L. Callegaro. *Electrical Impedance: Principles, Measurement, and Applications*. Series

- in Sensors. Taylor & Francis, 2012.
- [15] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Springer, New York, 2007.
- [16] S. Chabane, S. Plumejault, D. Pierrat, A. Couzinet, and M. Bayart. Vibration and chattering of conventional safety relief valve under built up back pressure. In *Proceedings of the 3rd IAHR International Meeting of the WorkGroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*, pages 281–294, 2009.
- [17] R.C. Chanaud. Effects of geometry on the resonance frequency of helmholtz resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 178:337 – 348, 1994.
- [18] Joseph Páez Chávez and Marian Wiercigroch. Bifurcation analysis of periodic orbits of a non-smooth jeffcott rotor model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(9):2571–2580, 2013.
- [19] J Cremers, L Friedel, and B Pallaks. Validated sizing rule against chatter of relief valves during gas service. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 14:261–267, 2001.
- [20] CSB. US Chemical Safety Board. <http://www.csb.gov/>. Accessed: 2016-02-05.
- [21] R. Darby. The dynamic response of pressure relief valves in vapour or gas service. part 1: mathematical model, 2012. Proprietary report for PERF 99-05.
- [22] Ron Darby and A. A. Aldeeb. The dynamic response of pressure relief valves in vapor or gas service. Part III: Model validation. *Journal of loss prevention in the process industries*, 31:133–141, SEP 2014.
- [23] S Dequand, S J Hulshoff, and Y Aur. Acoustics of 90 degree sharp bends . Part I : Low-frequency acoustical response. 89(June 2002):1025–1037, 2003.
- [24] Fabio Dercole and Yuri A Kuznetsov. Slidecont: An auto97 driver for bifurcation analysis of filippov systems. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 31(1):95–119, 2005.
- [25] A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov. matcont: A matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM TOMS*, 29:141–164, 2003.
- [26] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer, 2007.
- [27] EJ Doedel, AR Champneys, TF Fairgrieve, Yu A Kuznetsov, B Sandstede, and X Wang. Auto07p, continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont), 2007. Available at <http://sourceforge.net/projects/auto-07p/> (accessed 24/06/2014).
- [28] S. H. Doole and S. J. Hogan. A piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation. *Dynamics and Stability of Systems*, 11(1):19–47, 1996.
- [29] Mikhail A. Ermilov, Alexander N. Kryuchkov, Maxim V. Balyaba, and Konstantin U.

- Shabanov. Development of a pressure pulsation damper for gas pressure regulators with account of operation parameters. *Procedia Engineering*, 106:277 – 283, 2015. Proceedings of the 2nd International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM2014) September 15 –17, 2014 Samara, Russia.
- [30] O. Frommann and L. Friedel. Analysis of safety relief valve chatter induced by pressure waves in gas flow. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 11(4):279–290, 1998.
- [31] Koscsó Gábor. *Műszaki akusztika (egyetemi jegyzet)*, 2002.
- [32] Stépán Gábor. *Dinamika. Előadásjegyzet (kézi)*, 1999.
- [33] Stépán Gábor. *Nemlineáris rezgések. Előadásjegyzet (kézi)*, 2000.
- [34] Bozóki Géza. *Nyomástartó rendszerek túlnyomáshatárolása*. Műszaki Könyvkiadó, 1977.
- [35] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2002.
- [36] John Guckenheimer and Ian Lizarraga. Shilnikov Homoclinic Bifurcation of Mixed-Mode Oscillations. *SIAM Journal On Applied Dynamical Systems*, 14(2):764–786, 2015.
- [37] P. Guillaume. Nonlinear eigenproblems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 20(3):575–595, 1999.
- [38] Kullmann László Halász Gábor, Kristóf Gergely. *Áramlás csőhálózatokban*. Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [39] Anis Hamza, Sami Ayadi, and Ezzeddine Hadj-Taïeb. The natural frequencies of waves in helical springs. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(9):672 – 686, 2013.
- [40] L.N. Hand and J.D. Finch. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [41] Qiong He and Hai-Yun Xiong. Shilnikov chaos and hopf bifurcation in three-dimensional differential system. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 127(19):7648 – 7655, 2016.
- [42] T. Huba A. Aradi P. Czmerk A. Lakatos B. Chován, T. Varga. *Mechatronikai berendezések tervezése*. Elektronikus jegyzet, 2014.
- [43] Crosby Valve Inc. *Crosby Pressure Relief Valve Engineering Handbook*, 1997. Technical Document No. TP-V300.
- [44] American Petroleum Institute. *Flanged steel pressure relief valves*, 1995. American Petroleum Institute.
- [45] International Organization for Standardization. *ISO 4126-1 Safety devices for protection against excessive pressure — Part 1: Safety valves*. Technical report, ISO, 2014.
- [46] H. Izuchi. *Stability analysis of safety valve*, 2010. American Institute of Chemical Engineers, *10th Topical Conference on Natural Gas Utilization ISBN: 9781617384417*.
- [47] Kenji Kawashima, Toshiharu Kagawa, and Toshinori Fujita. Instantaneous flow rate measurement of ideal gases. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*,



- 122(1):174–178, 2000.
- [48] Sang Hyun Kim. Multiple leakage function for a simple pipeline system. *Water Resources Management*, 31(9):2659–2673, Jul 2017.
- [49] Yu.A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer-Verlag, 2004.
- [50] Dr. Zombory László. *Elektromágneses terek*. Műszaki Kiadó, 2008.
- [51] K K Lau, K A Edge, and D N Johnston. Impedance characteristics of hydraulic orifices. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 209(4):241–253, 1995.
- [52] In-Bok Lee and Insung Woo. Optimal Design of Safety Instrumented Systems for Pressure Control of Methanol Separation Columns in the Bisphenol a Manufacturing Process. *Sustainability*, 9(1), JAN 2017.
- [53] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [54] G. MacLeod. Safety valve dynamic Instability: An analysis of chatter. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 107:172–177, May 1985.
- [55] T. Madea. Studies on the dynamic characteristic of a poppet valve: 1st report, theoretical analysis. *Bulletin of JSME*, 13(56):281–289, 1970.
- [56] A. Manimaran, Somashekhar S. Hiremath, and K. Panuganti Shekhar. Dynamic simulation and validation of a vent and safety valve for cryogenic flight tanks. *Procedia Technology*, 25:1320 – 1334, 2016. 1st Global Colloquium on Recent Advancements and Effectual Researches in Engineering, Science and Technology - RAEREST 2016 on April 22nd & 23rd April 2016.
- [57] A. Melham. Prv stability requirements, 2012. Business confidential document by ioMosaic for 50th DIERS User Group Meeting, Concord Mass.
- [58] A. Misra, K. Behdinan, and W.L. Cleghorn. Self-excited vibration of a control valve due to fluid-structure interaction. *Journal of Fluids and Structures*, 16(5):649 – 665, 2002.
- [59] P. Moussou, R. J. Gibert, G. Bresseur, Ch. Teygeman, J. Ferrari, and J. F. Rit. Instability of Pressure Relief Valves in Water Pipes. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 132(4):041308, 2010.
- [60] G Paál and I Vaik. Unsteady phenomena in the edge tone. *International journal of heat and fluid flow*, 28(4):575–586, 2007.
- [61] György Paál, Fernando Pinho, and Rodrigo Maia. The effect of corner radius on the energy loss in 90 t-junction turbulent flows. *The 13th International Conference on Fluid Flow Technologies*, pages 470–477, 2006.
- [62] Lu Qiu, Yue Wang, and Rolf D. Reitz. On regular and retrograde condensation in multiphase compressible flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 64:85 – 96, 2014.

- 
- [63] R.H. Randall. *An Introduction to Acoustics*. Dover books on music. Dover Publications, 2005.
- [64] Mihael Sekavčnik, Tine Ogorevc, and Leopold Škerget. CFD analysis of the dynamic behaviour of a pipe system. *Forschung im Ingenieurwesen*, 70(3):139–144, 2006.
- [65] A. Singh. An analytical study of the dynamics and stability of a spring loaded safety valve. *Nuclear Engineering and Design*, 72(2):197–204, 1982.
- [66] A. Singh. On the stability of a coupled safety valve-piping system. 1983.
- [67] D. Smith, J. Burgess, and C. Powers. Relief device inlet piping: Beyond the 3 percent rule. *Hydrocarbon Processing*, November:59–66, 2011.
- [68] Xue Guan Song, Young Chul Park, and Joon Hong Park. Blowdown prediction of a conventional pressure relief valve with a simplified dynamic model. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(1-2):279–288, 2013.
- [69] W. t. Feng and J. d. Yang. Study on the hydraulic impedance of surge tank. In *2011 Second International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering*, pages 2624–2627, July 2011.
- [70] Lajos Tamás. *Az áramlástan alapjai*. Műegyetemi Kiadó, 2000.
- [71] A. Tamura, K. Okuyama, S. Takahashi, and M. Ohtsuka. Development of numerical analysis method of flow-acoustic resonance in stub pipes of safety relief valves. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 49(8):793–803, 2012.
- [72] Akinori Tamura, Keita Okuyama, Shiro Takahashi, and Masaya Ohtsuka. Development of numerical analysis method of flow-acoustic resonance in stub pipes of safety relief valves. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 49(8):793–803, 2012.
- [73] P. Thota and H. Dankowicz.  $T\hat{C}$ : A novel toolbox for the continuation of periodic trajectories in hybrid dynamical systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7(4):1283–1322, 2008.
- [74] Szentmártony Tibor and Kurutz Imre. *A műszaki akusztika alapjai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [75] Arris S. Tijsseling, Qingzhi Hou, Bjornar Svingen, and Anton Bergant. Acoustic Resonance Experiments In A Reservoir - Pipeline - Orifice System. In Tijsseling, AS, editor, *Proceedings Of The Asme Pressure Vessels And Piping Conference - 2013, Vol 4: Fluid-structure Interaction*. ASME, Pressure Vessels & Pip Div, 2014. ASME Pressure Vessels and Piping Conference (PVP-2013), Paris, France, JUL 14-18, 2013.
- [76] D. Tonon, J. F. H. Willems, and A. Hirschberg. Self-sustained oscillations in pipe systems with multiple deep side branches: Prediction and reduction by detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 330(24):5894–5912, 2011.
- [77] Jun-ichi Ueda and Yoshiro Sadamoto. A measurement of the effective mass of coil springs. *Journal of the Physical Society of Japan*, 66(2):367–368, 1997.
-

- [78] E. Urata. Thrust of poppet valve. *Bulletin of The Japan Society of Mechanical Engineers*, 12(53):1099–1109, 1969.
- [79] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2003.
- [80] E.B. Wiley and V.L. Streeter. *Fluid transients*, volume 1. New York, McGraw-Hill International Book Co., 1978. 401 p., 1978.
- [81] Duqiang Wu, Richard Burton, and Greg Schoenau. An empirical discharge coefficient model for orifice flow. *International Journal of Fluid Power*, 3(3):13–19, 2002.
- [82] E.B. Wylie and V.L. Streeter. *Fluid transients in systems*. Printice Hall, New Jersey, 1993.
- [83] Jianxin Zhu, Xuedong Chen, YunRong Lu, and Weihe Guan. Stability analysis of a pilot operated counterbalance valve for a big flow rate. In *Proceedings of the ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference PVP2013*. ASME, 2013.
- [84] D.Z. Zucker and O. Biblarz. *Fundamentals of Gas Dynamics*. John Wiley and Sons, New York, 2002.

## Mellékletek

## A. Együttmozgó tömegek

A (2.1) szeleptest mozgásegyenletben (9. oldal) az  $m$  együttmozgó tömeg két részből áll: egyrészt természetesen a szeleptányér, a szelepszár és a többi merevtestszerűen,  $\dot{x}$  sebességgel mozgó test tömegének összege, ezeket a tagokat jelöljük  $m_{sz}$ -mel. Másrészt, a rugó  $m_r$  tömegének egy részét is figyelembe kell vennünk. Legyen tehát a rugó hosszmenti koordinátája  $\xi$  és tegyük fel, hogy a rugó hossza mentén lineáris a sebességeloszlás:  $v_r = \dot{x} \xi / L_r$  ( $L_r$  a rugó hossza), azaz a rugó rögzített végén ( $\xi = 0$ ) nulla a sebessége:  $v_r(0) = 0$  és a szeleptányér felőli végén ( $\xi = L_r$ ) pedig együtt mozog a szeleptányérral:  $v_r(L_r) = \dot{x}$ . A rugó kinetikus energiája

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{m_r}{L_r} \int_{\xi=0}^{L_r} \left( \dot{x} \frac{\xi}{L_r} \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} m_r \dot{x}^2 \frac{1}{3} \quad (\text{A.163})$$

alakban írható, azaz a rugó *energetikailag* helyettesíthető egy, a tömegének harmadát kitevő,  $\dot{x}$  sebességgel mozgó merev testtel. Ez megegyezik a [77] irodalom eredményével, azonban meg kell jegyeznünk, hogy ez az eredmény csak a  $0 \leq \frac{m_{sz}}{m_r} \leq 7$  tartományban érvényes ( $m_{sz}$  a szeleptányér és a szár együttes tömege), ennél nagyobb  $\frac{m_{sz}}{m_r}$  értékek esetén  $1/3$ -nál kisebb szorzót kell alkalmazni. A fenti vizsgálat során elhanyagoltuk mind a rugó összenyomódása miatti hosszváltozást (konstans  $L_r$ -t tételeztünk fel), mind az esetlegesen kialakuló hosszirányú lengéseket, melyeket pl. a [39] részletesen taglal.



negatív előjel abból ered, hogy az  $\underline{n}$  normális vektor és a  $\underline{v}$  sebességvektor a belépő felületen egymással ellentétes.) Mivel a kilépés tisztán radiális, a többi felületen nem keletkezik függőleges impulzus erő.

- A nyomáseloszlás egyenletes, ennek integrálja zérus.
  - A viszkózus erőket és a gravitációt (az egyszerűség kedvéért) elhanyagoljuk.
- Így stacionárius esetben kapjuk, hogy a testre átadódó  $y$  irányú  $R$  reakcióerő:

$$R_{\text{stac}} = \rho A_{be} (v_{be} - u)^2 \quad \text{ha} \quad |\dot{x}| < v_{be}, \quad (\text{B.165})$$

ami természetesen annyit jelent, hogy amennyiben a szelep nyugalomban van ( $u = 0$ ), a testre átadódó erő a folyadéksugár impulzusváltozásával egyezik meg és zérussá válik, ha a test együtt mozog a folyadékkal ( $u = v_{be}$ ). Ugyanez az eredmény megtalálható minden (jobb) áramlástan tankönyvben, ld. pl. [70], 287. oldal. Amennyiben a szeleptestet egy egyszabadságfokú lengőrendszer részeként képzeljük el, a mozgásegyenletre a

$$m\ddot{x} + s(x + x_0) = R_{\text{stac}} = \rho A_{be} (v_{be} - \dot{x})^2 = \underbrace{\rho A_{be} v_{be}}_{\dot{m}_{be}} v_{be} \left(1 - \frac{\dot{x}}{v_{be}}\right)^2$$

$$m\ddot{x} + 2\dot{m}_{be} \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2v_{be}}\right) + s(x + x_0) = \dot{m}_{be} v_{be}, \quad (|\dot{x}| < v_{be}) \quad (\text{B.166})$$

kifejezést kapjuk, ahol  $\dot{m}_{be} = \rho A_{be} v_{be}$  és  $\dot{x} = u$ . Így a szeleptest mozgása miatt természetes folyadékcsillapítás keletkezik, mely a szeleptest sebességének másodfokú függvénye. Érdekesképpen megjegyezzük, hogy a (viszkózus) csillapítás mértéke pontosan az  $\dot{m}$  tömegáram kétszerese; valóban, a tömegáram  $kg/s$  mértékegysége átírható

$$\frac{kg}{s} \times \frac{m/s^2}{m/s^2} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} = \frac{\text{erő}}{\text{sebesség}} \quad (\text{B.167})$$

alakra<sup>27</sup>.

Most tekintsük a 40. (b) ábrán látható ülék és mozgó szeleptest esetét! Itt az ellenőrző felület az ülékhez kötött, de a szelep feletti felület  $u = \dot{x}$  sebességgel mozog, ezért az ellenőrző térfogat változik, így az impulzustétel bal oldalának első (instacionárius) tagját is ki kell értékeljük és a nyomáseloszlást is figyelembe kell vegyük. Általánosságban írható, hogy

$$R = \rho A_{be} v_{be}^2 - \int_V \rho \underline{v} dV - \int_A p \underline{n} dA, \quad (\text{B.168})$$

ahol az első tag az *álló* ellenőrzőfelületen beáramló impulzus.

<sup>27</sup>Itt az áramlástan és mechanikai jelölések "torlódása" kissé zavaró lehet: az  $\dot{m}$  tömegáramot jelöl ( $kg/s$ ), míg a  $\dot{x}$  a szeleptest sebességét ( $m/s$ )

Az  $\int_V \rho \underline{v} dV$  integrál kiértékeléséhez ismernünk kell a  $V$  térfogatban kialakuló sebességeloszlást. (Éppen ez teszi általában nehézkesé az impulzustétel alkalmazását deformálódó ellenőrző felület esetén, mivel az impulzustételnek éppen az a hatalmas előnye, hogy csupán a határolófelületen van szükségünk az áramlástan jellemzőkre.)

Esetünkben, mivel csak az  $y$  irányra vagyunk kíváncsiak, feltehetjük, hogy a szeleptől kezdve egyenletes  $v_{be}$  átlagsebességgel áramlik a közeg, majd a  $0 \leq y \leq x$  tartományon ( $x$  a szelepnitárts értéke,  $y$  a függőleges koordináta) lelassul a szeleptest  $u = \dot{x}$  sebességére. Ezt az ismeretlen sebességeloszlást jelöljük  $v(y,u)$ -val, ahol az  $y$  függés mellett kihangsúlyoztuk, hogy a sebességeloszlás függ a szeleptest aktuális  $u = \dot{x}$  sebességétől is. Az impulzustétel első tagja tehát az

$$\left. \frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV \right|_y = \frac{d}{dt} \rho A_{be} \int_0^{x(t)} v(y, u(t)) dy = \rho A_{be} \int_{y=0}^{y=x(t)} \left( \dot{u} \frac{dv(y, u)}{du} + u \frac{dv(y, u)}{dx} \right) \quad (\text{B.169})$$

alakot ölti. Az egyszerűség kedvéért az  $u$  sebesség legyen időben állandó, azaz  $\dot{u} = 0$ . Az ismeretlen sebességprofilal szemben három követelményt támasztunk: (1)  $v(0, u) = v_{be}$ , (2)  $v(x, u) = u$  és (3) a (B.169) kifejezés értéke legyen  $u^2$ , mert így kapjuk vissza állandósult állapotra (állandó nyomású térre) az  $R = \rho A_{be} (v_{be} - u)^2$  alakot, ld. (B.165). Azonban ezek a követelmények sem adják meg egyértelműen a sebességeloszlást, mindenesetre egy lehetséges megoldás a

$$v(y, u) = v_{be} \left( 1 - 3 \frac{y}{x} \right) \left( 1 - \frac{y}{x} \right) + u \frac{y}{x} \left( 4 - 3 \frac{y}{x} \right) \quad (\text{B.170})$$

sebességeloszlás. Valóban,

- $v(y = 0, u) = v_{be}$ ,
- $v(y = x, u) = u$  és
- $\left. \frac{d}{dt} \int_0^x v(y, u) dt \right|_{u=\text{konst}} = u^2$ .

Amennyiben lineáris sebességeloszlást feltételezünk, azaz

$$v_y^{lin}(y) = v_{be} \left( 1 - \frac{y}{x(t)} \right) + u \frac{y}{x(t)},$$

azt kapjuk, hogy

$$\left. \frac{d}{dt} \int_0^x v^{lin}(y, u) dt \right|_{u=\text{konst}} = \frac{1}{2} u (u + v_{be}). \quad (\text{B.171})$$

Érdekes módon a két véghelyzetben ez az összefüggés az előzővel azonos eredményt ad, hiszen álló szelepre ( $u = 0$ ) a teljes impulzuserő  $\rho A_{be} v_{be}^2$ , míg ha  $u = v_{be}$ , akkor zérus.

Végül, a (B.168) összefüggésben a nyomáseloszlást összegeznünk kell a határolófelületre, melyet az alábbi módon becsülünk. Az  $r < R_{be}$  tartományban a nyomás konstans  $p_{be}$ , míg az



$r > R_{be}$  részen (az üléken) a közeg *össznyomása* állandó, azaz  $p_{be} + \rho/2v_{be}^2 = p(r) + \rho/2v(r)^2$  és természetesen a kontinuitás miatt  $Q = v(r)2r\pi x$  is állandó. Így adódik, hogy

$$p(r) = \begin{cases} p_{be} & \text{ha } r < R_{be} \\ p_{be} + \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{A_{be}^2} \left(1 - \left(\frac{A_{be}}{2\pi r x}\right)^2\right) & \text{ha } R_{be} < r < R_{ki} \end{cases} \quad (\text{B.172})$$

Az így adódó erő:

$$\begin{aligned} -F_p := \int_A \underline{pn} dA \Big|_y &= \int_0^{R_{ki}} -2r\pi p(r) dr = \\ &= - \left[ p_{be} A_{be} + \left( p_{be} + \frac{\rho}{2} v_{be}^2 \right) \pi (R_{ki}^2 - R_{be}^2) - \frac{\rho}{2} v_{be}^2 \frac{A_{be}^2}{2\pi x^2} \ln \frac{R_{ki}}{R_{be}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.173})$$

Az első és a második a konstans nyomásokból adódó kifejezések, míg a 3. tag a radiálisan diffúzoros áramlás miatti nyomásváltozás miatti korrekció. Ebben a tagban nem jelenik meg direkt módon a szelepsebesség, viszont a szelepnyitás természetesen igen, így – mechanikai szempontból – egyfajta hiperbolikus karakterisztikájú rugóként értelmezhető ( $F_r \propto 1/x^2$ ).

Összefoglalva a fentieket: mozgó szelep esetén természetes módon keletkeznek olyan áramlástanai eredetű erők, melyekben a szelepsebesség paraméterként megjelenik, így mechanikai értelemben csillapításnak tekinthetők. Ezek jellemzően mind lineáris (viszkózus) tagot, mind nemlineáris tagot tartalmaznak. A nyomáseloszlás integráljából eredő erő a szelep sebességét nem, ám a helyzetét (elmozdulását) tartalmazza, így erősen nemlineáris rugóként tekinthetünk rá. Bonyolult geometriák esetén, amikor az ellenőrző felületet sem álló, sem együttmozgó koordináta-rendszerben nem tudjuk definiálnunk, deformálni kell azt, ekkor azonban az erő kiértékeléséhez szükséges ismerni (vagy becsülni) az áramlási tér belsejében a sebességeloszlást, ami igen nehézkessé teszi az ilyen vizsgálatokat.

## C. Szám adatok

Ebben a fejezetben számos szelepméretre, csőhosszra és tartályméretre, valamint munkaközegre mutatunk be szám adatokat. Első lépésként elvégzünk vízre és levegőre egy-egy részletes példaszámítást, majd a következő oldalakon további szám adatokat közlünk. A táblázatok utolsó három sora az instabilitási kritériumok teljesülésének ellenőrzése, pirossal kiemeltük azokat az eseteket, amikor rezgés várható. A csillapítási tényező (utolsó sor) esetén önkényesen a 2.5% relatív csillapítási tényezőt ( $\tilde{k}_{krit} = 0.05$ ) tekintettük kritikusnak. A táblázatokban feltüntettük a névleges tömegáramhoz tartozó csőbeli Mach számot is:  $\text{Mach}_{cs} = \frac{\dot{m}_n}{A_{cs}\rho^{**}a}$ , ahol  $\rho^{**}$  a nyitónyomás 110%-án vett sűrűséget jelenti.

### 2J3 szelep víz munkaközeggel (ld. 7. táblázat 4. oszlop)

- Szelep adatok:  $m = 1.523\text{kg}$ ,  $s = 125\text{kN/m}$ ,  $p_{ny} = 250\text{psig} = 17.24\text{bar}$ ,  $p_a = 1\text{bar}$ ,  $D_{be} = 32.5\text{mm}$ ,  $x_{max} = D_{be}/4 = 8.125\text{mm}$ ,  $C_d = 0.73$ ,  $\omega = \sqrt{s/m} = 286\text{rad/s}$ ,  $f_{sz} = \frac{\omega}{2\pi} = 45.6\text{Hz}$ ,  $\tilde{A}_{eff}(0) = 1$ ,  $\tilde{A}_{eff}(x_{max}) = 1.55$ ,  $x_0 = \frac{\tilde{A}_{eff}(0)A_{be}(p_0+p_{ny}-p_a)}{s} = 11.6\text{mm}$ . A zárótest tányérszelep, ezért  $\mathcal{A} = 1$ .
- A szelep kapacitása  $\dot{m}_n = C_d D_{be} \pi x_{max} \sqrt{2\rho 1.1 \times p_{ny}} = 37.3\text{kg/s}$ .
- A tartály térfogata  $V_t = 10\text{m}^3$ , a hullámsebesség:  $a_t = 1300\text{m/s}$ . Feltesszük, hogy a hullámsebesség az egész rendszerben állandó, ezért  $a = a_t$ .
- Cső adatok:  $D_{cs} = 2'' = 50.8\text{mm}$ ,  $L_{cs} = 10D_{cs} = 0.5\text{m}$ ,  $\lambda = 0.02$  (csősúrlódási tényező).
- Referencia mennyiségek:  $x_{ref} = \frac{A_{be}p_a}{s} = 0.66\text{mm}$ ,  $v_{ref} = 0.19\text{m/s}$ ,  $p_{ref} = p_a = 1\text{bar}$ .
- $\beta = \frac{a^2 \dot{m}_n}{V_t \omega p_a} = 0.22$
- $\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_{ref}) = C_d D_{be} \pi x_{ref} \sqrt{2\rho p_{ref}} = 0.7\text{kg/s}$
- $\sigma = \frac{\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_{ref})}{A_{cs} \rho v_{ref}} = 1.802$
- $\mu = \frac{A_{cs} \rho v_{ref}}{\dot{m}_n} = 0.0104$
- $\delta = \frac{x_0}{x_{ref}} = 17.23 (= p_{ny}/p_a)$
- $\alpha = \frac{\rho A_{cs} a}{m \omega} = 6.04$
- $\gamma = \frac{L_{cs} \omega}{a} = 0.112$
- $\varphi = \lambda \frac{x_{ref}}{2D_{cs}} = 0.00013$
- $\Lambda = \frac{x_{ref}}{L_{cs}} = 0.0013$
- Tartály Helmholtz-frekvencia:  $\omega_H = a_t \sqrt{\frac{A_{cs}}{L_{cs} V_t}} = 26\text{rad/s}$ ,  $f_H = 4.13\text{Hz}$ . Így a rendszer megfelel, mivel  $f_H < f_{sz}$ . (A részletes számítások a 3.3 fejezetben, különösen (3.60) összefüggés.)
- Számítsuk ki a negyedhullám instabilitás szempontjából kritikus csőhosszt a *névleges térfogatáram* esetére! Ekkor a szelepnitítás  $x = x_{max}$  és  $p_t = 1.1p_{ny}$ , vagy, dimenziótlan alakban  $\tilde{p}_{t,e} = \frac{p_t}{p_{ref}} = 18.96$  és  $\tilde{x}_e = \frac{8.125}{0.66} = 12.31$ . (A 6. fejezetben ugyanezekre a mennyiségekre a  $\tilde{p}$  és  $\tilde{x}$  jelöléseket használtuk.) A kritikus negyedhullám frekvencia a (3.85) vagy a (6.142) alapján:  $\Omega_{krit} = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_{t,e}}{\tilde{x}_e} + 1} = 2.024$ ,  $\gamma_{krit} = \frac{\pi}{2\Omega_{krit}} = 0.776$  és

$L_{cs,crit} = \frac{\gamma_{krit} a}{\omega} = 3.52\text{m}$ . A rendszer megfelel, mert  $L_{cs,krit} > L_{cs}$ , ám kisebb szelepnyitásoknál (kisebb tömegáram esetén) jelentkezhetnek instabilitások.

- Számítsuk ki a szükséges csillapítást a szelepnyitáshoz *névtelenes térfogatáram* esetén! Ekkor (ld. előző pont)  $\tilde{x}_e = 12.31$  és  $q_{be} = 1$ , ezért a (3.52) egyenlet értelmében  $\tilde{k}_{krit} = 0.018$ , ami a szokásos mechanikai írásmódban (pl. [32]) 0.9% relatív csillapítási tényezőt jelent (ld. még 2. táblázat a 23. oldalon).

### 2J3 szelep levegő munkaközeggel (ld. 8. táblázat 4. oszlop)

- Szelep adatok: ld. előző pont, de  $C_d = 0.9$ .
- A közeg sűrűsége a nyitónyomáson, 20°C-on  $\rho^* = \frac{p_0 + p_{ny}}{RT} = \frac{(17.24+1) \times 10^5}{287 \times 293} = 21.68\text{kg/m}^3$ .
- A közeg sűrűsége a maximális nyomáson (a nyitónyomás 110%-án), 20°C-on  $\rho^{**} = \frac{p_0 + 1.1 \times p_{ny}}{RT} = \frac{(1.1 \times 17.24 + 1) \times 10^5}{287 \times 293} = 23.74\text{kg/m}^3$ .
- A szelep kapacitása  $\dot{m}_n = C_d D_{be} \pi x_{max} \sqrt{2\rho^{**} 1.1 \times p_{ny}} \sqrt{\frac{\kappa}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} = 3.43\text{kg/s}$ .
- A tartály térfogata  $V_t = 10\text{m}^3$ , a hullámsebesség:  $a_t = 343\text{m/s}$ . Feltesszük, hogy a hullámsebesség az egész rendszerben állandó, ezért  $a = a_t$ .
- Cső adatok: ld. előző pont
- Referencia mennyiségek: ld. előző pont
- $\beta = \frac{a^2 \dot{m}_n}{V_t \omega p_a} = 0.0014$
- Mivel az ellenőrzéseket maxiális térfogatáramon fogjuk elvégezni, az egyensúlyi állapotban a sűrűség:  $\rho_e = \rho^{**}$ .
- $\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_{ref}) = C_d D_{be} \pi x_{max} \sqrt{2\rho^{**} p_{ref}} \sqrt{\frac{\kappa}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}} = 0.0644\text{kg/s}$
- $\sigma = \frac{\dot{m}_{sz}(x_{ref}, p_{ref})}{A_{cs} \rho v_{ref}} = 7.0$
- $\mu = \frac{A_{cs} \rho^{**} v_{ref}}{\dot{m}_n} = 0.0027$
- $\delta = \frac{x_0}{x_{ref}} = 17.23 (= p_{ny}/p_a)$
- $\alpha = \frac{\rho^{**} A_{cs} a}{m \omega} = 0.04$
- $\gamma = \frac{L_{cs} \omega}{a} = 0.426$
- $\varphi = \lambda \frac{x_{ref}}{2D_{cs}} = 0.0001$
- $\Lambda = \frac{x_{ref}}{L_{cs}} = 0.0013$
- Tartály Helmholtz-frekvencia:  $\omega_H = a_t \sqrt{\frac{A_{cs}}{L_{cs} V_t}} = 6.85\text{rad/s}$ ,  $f_H = 1.09\text{Hz}$ . Így a rendszer megfelel, mivel  $f_H < f_{sz}$ .
- Számítsuk ki a negyedhullám instabilitás szempontjából kritikus csőhosszt a *névtelenes térfogatáram* esetére! Ekkor a szelepnyitás  $x = x_{max}$  és  $p_t = 1.1 p_{ny}$ , vagy, dimenziótlan alakban  $\tilde{p}_{t,e} = \frac{p_t}{p_{ref}} = 18.96$  és  $\tilde{x}_e = \frac{8.125}{0.66} = 12.31$ . (A 6 fejezetben ugyanezekre a mennyiségekre a  $\bar{p}$  és  $\bar{x}$  jelöléseket használtuk.) A kritikus negyedhullámfrekvencia a (3.85) vagy a (6.142) alapján:  $\Omega_{krit} = \sqrt{\frac{2\tilde{p}_{t,e}}{\tilde{x}_e} + 1} = 2.024$ ,  $\gamma_{krit} = \frac{\pi}{2\Omega_{krit}} = 0.776$ ,  $L_{cs,crit} = \frac{\gamma_{krit} a}{\omega} = 0.93\text{m}$ . A rendszer megfelel, mert  $L_{cs,krit} > L_{cs}$ , ám kisebb szelepnyitásoknál (kisebb tömegáram esetén) jelentkezhetnek instabilitások.

- Számítsuk ki a szükséges csillapítást a szelepnyitáshoz *névleges térfogatáram* esetén!  
Ekkor (ld. előző pont)  $\tilde{x}_e = 12.31$  és  $q_{be} = 1$ , ezért a (3.52) egyenlet értelmében  $\tilde{k}_{krit} = 0.000115$  (0.006% relatív csillapítás).

## C. Számadatok

Szelep	1E2	1E2	2J3	2J3	3L4	3L4
Közeg	víz	levegő	víz	levegő	víz	levegő
$m$ , kg	0.442	0.442	1.523	1.523	6.543	6.543
$s$ , kN/m	72.68	72.68	125.04	125.04	120.49	120.49
$f_{sz}$ , Hz	64.50	64.50	45.60	45.60	21.60	21.60
$p_{ny}$ , bar	31.16	31.16	17.44	17.44	6.89	6.89
$D_{be}$ , mm	12.7	12.7	32.5	32.5	48.4	48.4
$x_0$ , mm	5.4	5.4	11.6	11.6	10.5	10.5
$p_{ref} = p_a$ , bar	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$x_{max}/D_{be}$ , -	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
$\tilde{A}_{(eff)}(x_{max})$ , -	1.440	1.440	1.547	1.547	1.954	1.954
$\dot{m}_n$ , kg/s	7.66	0.94	37.54	3.47	52.34	3.16
$x_{ref}$ , mm	0.17	0.17	0.66	0.66	1.53	1.53
$v_{ref}$ , m/s	0.07	0.07	0.19	0.19	0.21	0.21
$a$ , m/s	1300.0	343.1	1300.0	343.1	1300.0	343.1
$\rho^*$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	9.4	1000.0	21.9	1000.0	38.2
$\rho^{**}$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	10.2	1000.0	24.0	1000.0	42.0
$D_{cs}$ , mm	25	25	51	51	76	76
$L_{cs}/D_{cs}$ , m	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\text{Mach}_{cs}@ \dot{m}_n, \rho^{**}$ , -	0.012	0.528	0.014	0.208	0.009	0.048
$V_t$ , m <sup>3</sup>	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\beta$ , -	0.0319	0.0003	0.2214	0.0014	0.6518	0.0027
$\mu$ , -	0.0047	0.0004	0.0103	0.0027	0.0181	0.0126
$\delta$ , -	31.16	31.16	17.44	17.44	6.89	6.89
$\sigma$ , -	2.0	11.9	1.8	7.0	2.5	7.4
$\alpha$ , -	3.67	0.01	6.04	0.04	6.68	0.07
$\gamma$ , -	0.0792	0.3000	0.1120	0.4242	0.0795	0.3014
$\varphi$ , -	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
$\Lambda$ , -	0.0007	0.0007	0.0013	0.0013	0.0020	0.0020
$\mu\sigma$ , -	0.009	0.005	0.019	0.019	0.046	0.093
$(\alpha/\gamma)/\Lambda$ , -	67 600.0	48.1	41 259.8	69.0	41 868.1	122.4
$1/(\alpha\gamma)/\Lambda$ , -	5010.0	490 780.7	1131.9	47 147.3	939.1	22 383.7
$f_H$ , Hz	2.92	0.77	4.13	1.09	5.06	1.34
$L_{NH,krit}@ \dot{m}_n$ , m	2.31	0.61	3.50	0.93	8.81	2.33
$\tilde{k}_{krit}@ \dot{m}_n$ , %	0.175	0.001	1.809	0.012	8.184	0.035

5. táblázat. Tartálytérfogat:  $V_t = 10\text{m}^3$ , csőhossz:  $L = 10 D_{cs}$ .  $\rho^*$ : sűrűség a nyitónyomás 100%-án,  $20^\circ\text{C}$ -on.  $\rho^{**}$ : sűrűség a nyitónyomás 110%-án (maximális nyomás),  $20^\circ\text{C}$ -on.

Szelep	1E2	1E2	2J3	2J3	3L4	3L4
Közeg	víz	levegő	víz	levegő	víz	levegő
$m$ , kg	0.442	0.442	1.523	1.523	6.543	6.543
$s$ , kN/m	72.68	72.68	125.04	125.04	120.49	120.49
$f_{sz}$ , Hz	64.50	64.50	45.60	45.60	21.60	21.60
$p_{ny}$ , bar	31.16	31.16	17.44	17.44	6.89	6.89
$D_{be}$ , mm	12.7	12.7	32.5	32.5	48.4	48.4
$x_0$ , mm	5.4	5.4	11.6	11.6	10.5	10.5
$p_{ref} = p_a$ , bar	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$x_{max}/D_{be}$ , -	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
$\tilde{A}_{(eff)}(x_{max})$ , -	1.440	1.440	1.547	1.547	1.954	1.954
$\dot{m}_n$ , kg/s	7.66	0.94	37.54	3.47	52.34	3.16
$x_{ref}$ , mm	0.17	0.17	0.66	0.66	1.53	1.53
$v_{ref}$ , m/s	0.07	0.07	0.19	0.19	0.21	0.21
$a$ , m/s	1300.0	343.1	1300.0	343.1	1300.0	343.1
$\rho^*$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	9.4	1000.0	21.9	1000.0	38.2
$\rho^{**}$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	10.2	1000.0	24.0	1000.0	42.0
$D_{cs}$ , mm	25	25	51	51	76	76
$L_{cs}/D_{cs}$ , m	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\text{Mach}_{cs}@ \dot{m}_n, \rho^{**}$ , -	0.012	0.528	0.014	0.208	0.009	0.048
$V_t$ , m <sup>3</sup>	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$\beta$ , -	3.1930	0.0272	22.1445	0.1427	65.1784	0.2738
$\mu$ , -	0.0047	0.0004	0.0103	0.0027	0.0181	0.0126
$\delta$ , -	31.16	31.16	17.44	17.44	6.89	6.89
$\sigma$ , -	2.0	11.9	1.8	7.0	2.5	7.4
$\alpha$ , -	3.67	0.01	6.04	0.04	6.68	0.07
$\gamma$ , -	0.0792	0.3000	0.1120	0.4242	0.0795	0.3014
$\varphi$ , -	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
$\Lambda$ , -	0.0007	0.0007	0.0013	0.0013	0.0020	0.0020
$\mu\sigma$ , -	0.009	0.005	0.019	0.019	0.046	0.093
$(\alpha/\gamma)/\Lambda$ , -	67 600.0	48.1	41 259.8	69.0	41 868.1	122.4
$1/(\alpha\gamma)/\Lambda$ , -	5010.0	490 780.7	1131.9	47 147.3	939.1	22 383.7
$f_H$ , Hz	29.22	7.71	41.33	10.91	50.62	13.36
$L_{NH,krit}@ \dot{m}_n$ , m	2.31	0.61	3.50	0.93	8.81	2.33
$\tilde{k}_{krit}@ \dot{m}_n$ , %	17.351	0.149	95.894	1.165	38.926	3.429

6. táblázat. Tartálytérfogat:  $V_t = 0.1\text{m}^3$ , csőhossz:  $L = 10 D_{cs}$ .  $\rho^*$ : sűrűség a nyitónyomás 100%-án,  $20^\circ\text{C}$ -on.  $\rho^{**}$ : sűrűség a nyitónyomás 110%-án (maximális nyomás),  $20^\circ\text{C}$ -on.

## C. Számadatok

Szelep	2J3	2J3	2J3	2J3	2J3	2J3
Közeg	víz	víz	víz	víz	víz	víz
$m$ , kg	1.131	1.229	1.327	1.523	2.013	2.993
$s$ , kN/m	16.55	46.93	80.91	125.04	257.44	522.58
$f_{sz}$ , Hz	19.25	31.10	39.30	45.60	56.92	66.51
$p_{ny}$ , bar	3.45	6.89	10.34	17.24	34.47	68.95
$D_{be}$ , mm	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5
$x_0$ , mm	17.3	12.2	10.6	11.4	11.1	11.0
$p_{ref} = p_a$ , bar	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$x_{max}/D_{be}$ , -	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
$\tilde{A}_{(eff)}(x_{max})$ , -	1.336	1.515	1.605	1.555	1.574	1.584
$\dot{m}_n$ , kg/s	16.69	23.60	28.91	37.32	52.78	74.64
$x_{ref}$ , mm	5.02	1.77	1.03	0.66	0.32	0.16
$v_{ref}$ , m/s	0.61	0.35	0.25	0.19	0.12	0.07
$a$ , m/s	1300.0	1300.0	1300.0	1300.0	1300.0	1300.0
$\rho^*$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
$\rho^{**}$ , kg/m <sup>3</sup>	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
$D_{cs}$ , mm	51	51	51	51	51	51
$L_{cs}/D_{cs}$ , m	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\text{Mach}_{cs}@ \dot{m}_n, \rho^{**}$ , -	0.006	0.009	0.011	0.014	0.020	0.028
$V_t$ , m <sup>3</sup>	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\beta$ , -	0.2332	0.2041	0.1979	0.2201	0.2494	0.3019
$\mu$ , -	0.0737	0.0297	0.0178	0.0103	0.0044	0.0018
$\delta$ , -	3.45	6.89	10.34	17.24	34.47	68.95
$\sigma$ , -	4.3	2.7	2.1	1.8	1.5	1.2
$\alpha$ , -	19.26	10.97	8.04	6.04	3.66	2.11
$\gamma$ , -	0.0473	0.0764	0.0965	0.1120	0.1397	0.1633
$\varphi$ , -	0.0010	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
$\Lambda$ , -	0.0099	0.0035	0.0020	0.0013	0.0006	0.0003
$\mu\sigma$ , -	0.317	0.079	0.037	0.019	0.006	0.002
$(\alpha/\gamma)/\Lambda$ , -	41 259.8	41 259.8	41 259.8	41 259.8	41 259.8	41 259.8
$1/(\alpha\gamma)/\Lambda$ , -	111.3	342.9	638.2	1131.9	3079.8	9294.7
$f_H$ , Hz	4.13	4.13	4.13	4.13	4.13	4.13
$L_{NH,krit}@ \dot{m}_n$ , m	7.08	5.04	4.20	3.52	2.85	2.45
$\tilde{k}_{krit}@ \dot{m}_n$ , ‰	<b>14.316</b>	4.439	2.497	1.798	0.990	0.590

7. táblázat. 2J3 szelep különböző nyitónyomásokkal, víz munkaközeg esetén.

Szelep	2J3	2J3	2J3	2J3	2J3	2J3
Közeg	levegő	levegő	levegő	levegő	levegő	levegő
$m$ , kg	1.131	1.229	1.327	1.523	2.013	2.993
$s$ , kN/m	16.55	46.93	80.91	125.04	257.44	522.58
$f_{sz}$ , Hz	19.25	31.10	39.30	45.60	56.92	66.51
$p_{ny}$ , bar	3.45	6.89	10.34	17.24	34.47	68.95
$D_{be}$ , mm	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5	32.5
$x_0$ , mm	17.3	12.2	10.6	11.4	11.1	11.0
$p_{ref} = p_a$ , bar	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$x_{max}/D_{be}$ , -	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
$\tilde{A}_{(eff)}(x_{max})$ , -	1.336	1.515	1.605	1.555	1.574	1.584
$\dot{m}_n$ , kg/s	0.46	1.06	2.09	3.43	6.78	13.47
$x_{ref}$ , mm	5.02	1.77	1.03	0.66	0.32	0.16
$v_{ref}$ , m/s	0.61	0.35	0.25	0.19	0.12	0.07
$a$ , m/s	343.1	343.1	343.1	343.1	343.1	343.1
$\rho^*$ , kg/m <sup>3</sup>	2.0	5.3	13.5	21.7	42.2	83.2
$\rho^{**}$ , kg/m <sup>3</sup>	2.1	5.7	14.7	23.7	46.3	91.4
$D_{cs}$ , mm	51	51	51	51	51	51
$L_{cs}/D_{cs}$ , m	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\text{Mach}_{cs}@ \dot{m}_n, \rho^{**}$ , -	0.313	0.268	0.205	0.208	0.211	0.212
$V_t$ , m <sup>3</sup>	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0
$\beta$ , -	0.0004	0.0006	0.0010	0.0014	0.0022	0.0038
$\mu$ , -	0.0056	0.0038	0.0036	0.0027	0.0016	0.0009
$\delta$ , -	3.45	6.89	10.34	17.24	34.47	68.95
$\sigma$ , -	56.1	21.1	10.4	7.0	4.0	2.5
$\alpha$ , -	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05
$\gamma$ , -	0.1791	0.2893	0.3656	0.4242	0.5295	0.6187
$\varphi$ , -	0.0010	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
$\Lambda$ , -	0.0099	0.0035	0.0020	0.0013	0.0006	0.0003
$\mu\sigma$ , -	0.317	0.079	0.037	0.019	0.006	0.002
$(\alpha/\gamma)/\Lambda$ , -	6.0	16.4	42.3	68.2	133.0	262.6
$1/(\alpha\gamma)/\Lambda$ , -	53 208.2	60 165.9	43 360.8	47 684.7	66 541.5	101 714.8
$f_H$ , Hz	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09
$L_{NH,krit}@ \dot{m}_n$ , m	1.87	1.33	1.11	0.93	0.75	0.65
$\tilde{k}_{krit}@ \dot{m}_n$ , ‰	0.027	0.014	0.013	0.012	0.009	0.007

8. táblázat. 2J3 szelep különböző nyitónyomásokkal, levegő munkaközeg esetén.



## D. Néhány levezetés főbb lépései

### D.1. A Tartály-Szelep Modell egyensúlyi helyzete

A 3.2 fejezetben a Tartály-Szelep modellt vizsgáljuk, melynek (3.48)–(3.50) a leíró egyenletei. Egyensúlyi helyzetben minden idő szerinti derivált zérus, így

$$\begin{aligned} 0 &= y_2 \\ 0 &= -\tilde{k}y_2 - (\tilde{x} + \delta) + \tilde{p}_t - 1 \\ 0 &= \beta \left( q_{be} - \mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t - 1} \right), \end{aligned}$$

A második egyenletből  $\tilde{p}_t - 1 = \tilde{x} + \delta$ , ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe kapjuk, hogy

$$q_{be} = \mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{p}_t - 1} = \mu\sigma\tilde{x}\sqrt{\tilde{x} + \delta},$$

ahonnan

$$\left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \right)^2 = \tilde{x}^2(\tilde{x} + \delta) \quad \rightarrow \quad 0 = \tilde{x}^3 + \delta\tilde{x}^2 - \left( \frac{q_{be}}{\mu\sigma} \right)^2.$$

Ez az egyensúlyi helyzet zárt alakban megoldható, majd kis  $q_{be}$  értékekre sorfejthető számítógépes algebrai program segítségével:

```
In[1]:= (* A Tartály-Szelep Modell egyensúlyi helyzetének sorfejtése*)
(* qq = (q/μσ)² *)
sols = Solve[x³ + δ x² - qq == 0, x];
sols[[1]][[1]][[2]] // Simplify
ExpSol = Series[sols[[1]][[1]][[2]], {qq, 0, 1}] // Normal;
Simplify[ExpSol, Assumptions -> {q > 0, δ > 0}]
```

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{3} \left( -\delta + \frac{\delta^2}{\left( \frac{27qq}{2} - \delta^3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{qq(27qq - 4\delta^3)} \right)^{1/3}} + \right. \\ \left. \left( \frac{27qq}{2} - \delta^3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\sqrt{qq(27qq - 4\delta^3)} \right)^{1/3} \right)$$

$$\text{Out[4]} = \sqrt{\frac{qq}{\delta}} - \frac{qq}{2\delta^2}$$

## D.2. Negyedhullám modell levezetése, folyadék munkaközeg, 1 módus

```

In[76]:= Clear["Global`*"];
(* Negyedhullám modell, folyadék, 1 módus *)
(* Mozgásegyenlet és kontinuitás *)
EM =  $\partial_\tau v[\xi, \tau] + \frac{1}{\alpha \gamma} \partial_\xi p[\xi, \tau] - \varphi v[\xi, \tau]^2$ ;
EC =  $\partial_\tau p[\xi, \tau] + \frac{\alpha}{\gamma} \partial_\xi v[\xi, \tau]$ ;
(* Feltételezett nyomáseloszlás *)
p[\xi_, \tau_] = pt[\tau] + B[\tau] Sin[2 \pi \frac{\xi}{4}];
(* Feltételezett sebességeloszlás *)
v[\xi_, \tau_] = vend[\tau] + C[\tau] Cos[2 \pi \frac{\xi}{4}];

In[81]:= sols = Solve[{ $\theta == EC /. \{\xi \rightarrow \frac{1}{2}\}$ ,  $\theta == EM /. \{\xi \rightarrow \frac{1}{2}\}$ }, {B'[\tau], C'[\tau]}] // Simplify;
Beq = sols[[1]][[1]][[2]]
Ceq = Collect[sols[[1]][[2]][[2]],  $\varphi$ ]

Out[82]=  $\frac{\pi \alpha C[\tau]}{2 \gamma} - \sqrt{2} pt'[\tau]$ 

Out[83]=  $-\frac{\pi B[\tau]}{2 \alpha \gamma} + \varphi \left( \frac{C[\tau]^2}{\sqrt{2}} + 2 C[\tau] vend[\tau] + \sqrt{2} vend[\tau]^2 \right) - \sqrt{2} vend'[\tau]$ 

```

### D.3. Negyedhullám modell levezetése, folyadék munkaközeg, 2 módus

```

In[84]:= Clear["Global`*"];
(* Negyedhullám modell, folyadék, 2 módus *)
(* Mozgásegyenlet és kontinuitás *)
EM =  $\partial_\tau v[\xi, \tau] + \frac{1}{\alpha \gamma} \partial_\xi p[\xi, \tau] - \varphi v[\xi, \tau]^2$ ;
EC =  $\partial_\tau p[\xi, \tau] + \frac{\alpha}{\gamma} \partial_\xi v[\xi, \tau]$ ;
(* Feltételezett nyomáseloszlás *)
p[\xi_, \tau_] = pt[\tau] + B1[\tau] Sin[2 \pi \frac{\xi}{4}] + B2[\tau] Sin[2 \pi \frac{3 \xi}{4}];
(* Feltételezett sebességeloszlás *)
v[\xi_, \tau_] = vend[\tau] + C1[\tau] Cos[2 \pi \frac{\xi}{4}] + C2[\tau] Cos[2 \pi \frac{3 \xi}{4}];

In[89]:= sols = Solve[{0 == EC /. {\xi -> \frac{1}{3}}, 0 == EM /. {\xi -> \frac{1}{3}}, 0 == EC /. {\xi -> \frac{2}{3}},
0 == EM /. {\xi -> \frac{2}{3}}], {B1'[\tau], C1'[\tau], B2'[\tau], C2'[\tau]}] // Simplify;

B1eq = sols[[1]][[1]][[2]]
C1eq = Collect[sols[[1]][[2]][[2]], {B1[\tau], vend'[\tau]}]
B2eq = sols[[1]][[3]][[2]]
C2eq = Collect[sols[[1]][[4]][[2]], {B2[\tau], vend'[\tau]}]

Out[90]=  $\frac{\pi \alpha C1[\tau]}{2 \gamma} - \frac{2 pt'[\tau]}{\sqrt{3}}$ 

Out[91]=  $-\frac{\pi B1[\tau]}{2 \alpha \gamma} + \frac{1}{6} \left( 3 \sqrt{3} \varphi C1[\tau]^2 + 12 \varphi C1[\tau] vend[\tau] + 4 \sqrt{3} \varphi vend[\tau]^2 \right) - \frac{2 vend'[\tau]}{\sqrt{3}}$ 

Out[92]=  $\frac{3 \pi \alpha C2[\tau]}{2 \gamma} + \frac{1}{3} \left( -3 + \sqrt{3} \right) pt'[\tau]$ 

Out[93]=  $-\frac{3 \pi B2[\tau]}{2 \alpha \gamma} + \frac{1}{4} \left( -1 + \sqrt{3} \right) \varphi C1[\tau]^2 + \varphi C1[\tau] C2[\tau] - \varphi C2[\tau]^2 +$ 
 $2 \varphi C2[\tau] vend[\tau] + \frac{1}{3} \left( -3 + \sqrt{3} \right) \varphi vend[\tau]^2 + \frac{1}{3} \left( 3 - \sqrt{3} \right) vend'[\tau]$ 

```

## D.4. Pumpálás periódusának becslése

```

In[1]:= x0[τ] = xny -  $\frac{xny - xz}{T_{1e}}$  τ;
p0[τ] = pny -  $\frac{pny - pz}{T_{1e}}$  τ;
sol = Integrate[β (qbe - μ σ x0[τ] √p0[τ]), τ] + K;
CC = Solve[pny == sol /. {τ → 0}, K];
p1 = sol /. CC;
TT = Solve[(p1 /. {τ → T1e}) == pz, T1e]

```

$$\text{Out[6]} = \left\{ \left\{ T_{1e} \rightarrow \left( -\frac{pny^3}{(pny - pz)^2} + pz + \frac{2 pny^2 pz}{(pny - pz)^2} - \frac{pny pz^2}{(pny - pz)^2} \right) / \right. \right. \\ \left. \left( qbe \beta - \frac{2 pny^{5/2} xny \beta \mu \sigma}{5 (pny - pz)^2} + \frac{2 pny^{3/2} pz xny \beta \mu \sigma}{3 (pny - pz)^2} + \frac{2 pz^{5/2} (xny - xz) \beta \mu \sigma}{5 (pny - pz)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{4 pny^{5/2} xz \beta \mu \sigma}{15 (pny - pz)^2} + \frac{2 pz^{3/2} (-pz xny + pny xz) \beta \mu \sigma}{3 (pny - pz)^2} \right) \right\} \left. \right\}$$

$$\text{In[7]} = \text{Szaml} = -\frac{pny^3}{(pny - pz)^2} + pz + \frac{2 pny^2 pz}{(pny - pz)^2} - \frac{pny pz^2}{(pny - pz)^2}; \\ \text{Nev} = qbe \beta - \frac{2 pny^{5/2} xny \beta \mu \sigma}{5 (pny - pz)^2} + \frac{2 pny^{3/2} pz xny \beta \mu \sigma}{3 (pny - pz)^2} + \\ \frac{2 pz^{5/2} (xny - xz) \beta \mu \sigma}{5 (pny - pz)^2} - \frac{4 pny^{5/2} xz \beta \mu \sigma}{15 (pny - pz)^2} + \frac{2 pz^{3/2} (-pz xny + pny xz) \beta \mu \sigma}{3 (pny - pz)^2};$$

$$\text{In[13]} = \text{a1} = \text{Szaml} (pny - pz)^2 // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[13]} = -(pny - pz)^3$$

$$\text{In[17]} = \text{a2} = \text{Coefficient}[\text{Nev} (pny - pz)^2, xz] // \text{Simplify}$$

$$\text{a3} = \text{Coefficient}[\text{Nev} (pny - pz)^2, xny] // \text{Simplify}$$

$$\text{a4} = \text{Coefficient}[\text{Nev} (pny - pz)^2, qbe] // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[17]} = -\frac{2}{15} (2 pny^{5/2} - 5 pny pz^{3/2} + 3 pz^{5/2}) \beta \mu \sigma$$

$$\text{Out[18]} = -\frac{2}{15} (3 pny^{5/2} - 5 pny^{3/2} pz + 2 pz^{5/2}) \beta \mu \sigma$$

$$\text{Out[19]} = (pny - pz)^2 \beta$$

## E. Karakterisztikák módszere 1D, enyhén összenyomható közeg esetén

Folyadék munkaközeg esetén a dolgozatban bemutatott numerikus szimulációkat a klasszikus karakterisztikák módszerének segítségével kaptuk, melyet részleteiben tárgyal a [38, 80] szakirodalom, de a könnyebb követhetőség kedvéért és a bírálati munka megkönnyítésére itt dióhéjban összefoglaljuk.

A módszer az 1D instacionárius kontinuitási- és mozgásegyenletből indul ki, majd a folyadékot barotrópnak – a sűrűséget csak nyomásfüggőnek:  $\rho = \rho(p)$  – feltételezve bevezeti a hullámsebességet:  $\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{izentr.} = a^2$ . A sűrűség deriváltjait nyomásderiváltakkal helyettesítjük, majd a megmaradó sűrűséget tartalmazó tagokat állandónak tekintjük. Így kapjuk az "enyhén összenyomható" folyadékot: bár sűrűsége állandó, a nyomáshullámok  $a$  hullámsebességgel terjedni tudnak benne.

Egy koordinátatranszformációval az egyenletek újraírhatók

$$\frac{\mathcal{D}^+ \alpha}{\mathcal{D}t} = \rho a \mathcal{S} \quad \text{és} \quad \frac{\mathcal{D}^- \beta}{\mathcal{D}t} = -\rho a \mathcal{S} \quad (\text{E.174})$$

alakban, ahol  $\alpha = p + \rho av$  és  $\beta = -\rho av$  (Riemann-invariánsok) és  $\frac{\mathcal{D}^+}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt} + a \frac{d}{dx}$  ( $\mathcal{C}^+$  karakterisztika), valamint  $\frac{\mathcal{D}^-}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt} - a \frac{d}{dx}$  ( $\mathcal{C}^-$  karakterisztika) és  $\mathcal{S}$  a cső lejtést és a csősűrűlódást tartalmazó forrástag. Itt az a feltételezés bújik meg az egyenletek mögött, hogy (a)  $|v| \ll a$ , azaz a közeg áramlási sebessége elhanyagolható a hullámsebességhez képest és (b) az  $a$  hullámsebesség konstans.

A fenti egyenletekre stabil és pontos numerikus módszer építhető, melyben  $\Delta x$  térbeli osztás esetén  $\Delta t = \Delta x/a$  időlépés választása esetén az  $i$ -edik térbeli osztáspontból indított  $\mathcal{C}^+$  karakterisztika az  $i + 1$ -edik rácspontba "fut"  $\Delta t$  idő alatt, mialatt az  $\alpha$  mennyiség – a forrástag hiányában – állandó marad (ha a forrástag nemnulla, pl. explicit Euler módszerrel diszkretizálható). Hasonlóan, az  $i$ -edik térbeli osztáspontból indított  $\mathcal{C}^-$  karakterisztika az  $i - 1$ -edik rácspontba "fut"  $\Delta t$  idő alatt, mialatt az  $\beta$  mennyiség – megintcsak az  $\mathcal{S}$  forrástag hiányában – állandó marad.

Peremfeltételek tekintetében a két ismeretlenre – az új,  $j + 1$ -es időszinten a sebesség és a nyomás az  $i = 1, N$  osztáspontban,  $v_{1,N}^{j+1}$  és  $p_{1,N}^{j+1}$  nyomás) – két egyenletre van szükségünk. Az első minden esetben a karakterisztikaegyenlet, mely pl. a bal oldali ( $i = 1$ ) peremre

$$(p_1^{j+1} - \rho av_1^{j+1}) = (p_2^j - \rho av_2^j) + \Delta t \mathcal{S}_2^j. \quad (\text{E.175})$$

A második egyenlet az adott peremfeltételtől függ, így pl.

- zárt cső esetén  $v_1^{j+1} = 0$ ,
- tartályból csőbe való veszteségmentes beáramlás esetén a  $p_t$  össznyomás állandó, azaz  $p_t = p_1^{j+1} + \frac{\rho}{2} (v_1^{j+1})^2$ ,

- csőből tartályba való kiáramlás esetén a  $p_t$  statikus nyomás állandó, azaz  $p_t = p_1^{j+1}$  és
  - szelep esetén a (2.4) átfolyási egyenletnek kell teljesülnie:  $\rho A_{cs} \rho v_1^{j+1} = C_d A_{sz} \sqrt{2\rho(p_1^{j+1} - p_a)}$ .
- A jobb oldali  $i = N$  perem esetén hasonlóan implementálhatók a peremfeltételek.

## F. Lax-Wendroff séma

Gáz munkaközeg esetén a dolgozatban bemutatott numerikus szimulációkat az ún. Lax-Wendroff séma segítségével kaptuk, melyet részleteiben tárgyal a [38, 80] szakirodalom, de az előbbi fejezethez hasonlóan, a könnyebb követhetőség kedvéért és a bírálati munka megkönnyítésére itt dióhéjban összefoglaljuk.

A séma maga a

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \mathcal{Q}, \quad (\text{F.176})$$

általános alakú parciális differenciálegyenletek megoldására kifejlesztett, másodrendű (mind térben, mind időben) módszer. Mi a gázdinamika differenciális alakban felírt egyenleteire alkalmazzuk:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \rho A_{cs} \\ \rho v A_{cs} \\ \rho e A_{cs} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \rho v A_{cs} \\ (\rho v^2 + p) A_{cs} \\ (\rho e v + p v) A_{cs} \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_p + F_s \\ \dot{Q} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.177})$$

ahol  $e = c_V T$  a belső energia ( $T$  a közeg hőmérséklete,  $c_V$  pedig az állandó térfogaton mért fajhő),  $F_p = p \frac{dA_{cs}}{dx}$  nyomásból származó többleterő változó keresztmetszetű csatornában (esetünkben ez a tag zérus, mivel a cső keresztmetszete nem változik), míg  $F_s$  a csősúrlódásból adódó fékezőerő,  $\dot{Q}$  pedig a nem-adiabatikus csőfalon keresztüli hőáram, melyet szintén elhanyagolunk. A fenti egyenletekhez az ideális gáztörvényt még csatolnunk kell. Amennyiben  $\mathcal{U}$  ismert, a primitív változók kiszámíthatók:  $\rho = \mathcal{U}_1/A_{cs}$ ,  $v = \mathcal{U}_2/\mathcal{U}_1$  és  $e = \mathcal{U}_3/\mathcal{U}_1$ , majd az  $\mathcal{F}$  fluxusvektor felépíthető.

A séma az alábbi lépésekből áll:

1. (Előkészítő lépés.) Frissítsük  $\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$  értékét térben fél rácsponttal eltolva és időben fél lépést téve:

$$\frac{\mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^i}{\Delta t/2} + \frac{\mathcal{F}_{j+1}^i - \mathcal{F}_j^i}{\Delta x} = \frac{\mathcal{Q}_{j+1}^i + \mathcal{Q}_j^i}{2}, \quad \text{ahol} \quad \mathcal{U}_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{\mathcal{U}_{j+1}^i + \mathcal{U}_j^i}{2}. \quad (\text{F.178})$$

2. Számítsuk ki az  $\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$  fluxusvektort ebben a térben és időben fél osztással eltolt pontban. ( $\mathcal{U}$ -ból számítsuk ki a primitív változókat, majd abból  $\mathcal{F}$ -et.)
3. (Fő lépés.) Tegyük egy teljes lépést  $\mathcal{U}_j^{i+1}$  kiszámítására, felhasználva az  $\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$ :

$$\frac{\mathcal{U}_j^{i+1} - \mathcal{U}_j^i}{\Delta t} + \frac{\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\mathcal{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{Q}_{j-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}}{2}. \quad (\text{F.179})$$

Mivel a fő lépés centrális mind térben, mind időben, a kapott módszer másodrendű. A  $\Delta t$  időlépés nem választható meg tetszőlegesen; a stabilitás érdekében nem engedjük meg, hogy

az  $a + |v|$  sebességgel terjedő információ  $\Delta t$  idő alatt  $\Delta x$ -nél nagyobb távolságot tegyen meg (azaz "átugorjon" egy cellát):

$$\Delta t = C \min_j \frac{\Delta x}{a_j + |v_j|}, \quad (\text{F.180})$$

ahol  $C < 1$  egy alkalmasan megválasztott biztonsági tényező és  $a_j = \sqrt{\kappa RT_j}$  a helyi hangsebesség.

A peremfeltételeket az izentrópikus karakterisztikák módszerének segítségével implementáltuk. Ez az előző fejezetben bemutatott módszerhez hasonló, ám ideális gáz izentrópikus áramlására levezetett karakterisztikák esetére vonatkozik, így az (E.174) egyenletben  $\alpha = a + \frac{\kappa-1}{2}v$  és  $\beta = a - \frac{\kappa-1}{2}v$ . A módszert magát is kissé módosítanunk kell, mivel mind a hangsebesség változik pontról pontra (a közeg hőmérséklete változik) és az áramlási sebesség sem hanyagolható el hullámsebesség mellett. A cső bal oldali peremét véve alapul, minden időlépésben meg kell határoznunk azt a  $0 \leq x_R \leq \Delta x$  pontot, amelybe a két szomszédos pontból interpolálva a sebességet és hangsebességet a  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_R - a_R$  meredekségű karakterisztika pontosan a kívánt  $x = 0$  pontba fut a következő,  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$  időpontban. Ezután az (E.175) egyenlethez hasonlóan az egyik peremegyenlet a

$$\left( a_1^{j+1} - \frac{\kappa-1}{2}v_1^{j+1} \right) = \left( a_R^j - \frac{\kappa-1}{2}v_R^j \right) + \Delta t \mathcal{S}_R^j \quad (\text{F.181})$$

alakot ölti, míg a második egyenletet a peremfeltétel adja az előző fejezetben tárgyalthoz hasonlóan.



## G. Mérések

Ebben a fejezetben ismertetjük azokat a mérési sorozatokat, melyek segítségével az eddigiekben leírt matematikai modelleket ellenőriztük. A G.2 alfejezetben a folyadék (víz) munkaközeggel, míg a G.3 alfejezetben (M-32. oldal) a gáz munkaközeggel (nitrogénnel) végzett méréseket ismertetjük.

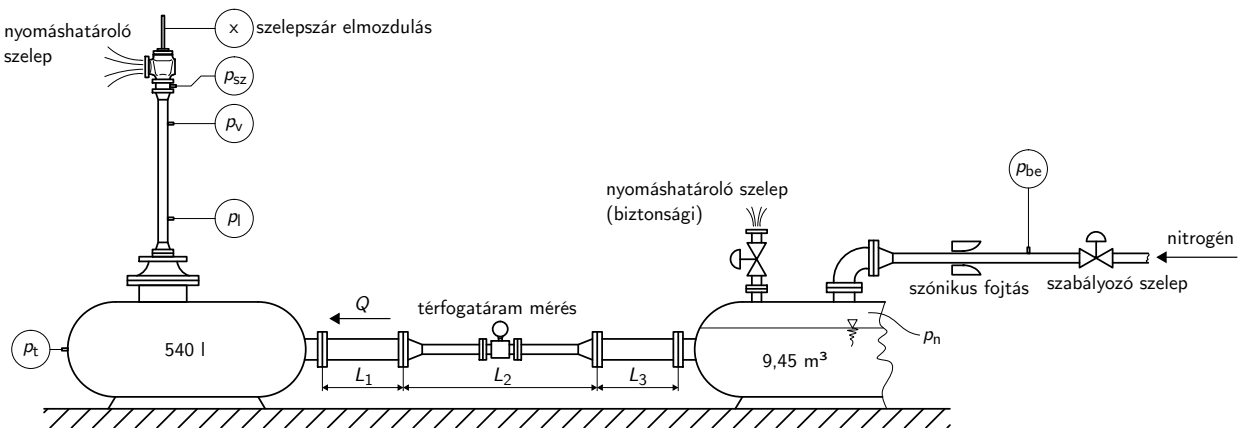
### G.1. Bevezetés

A méréseket az Amerikai Szabványügyi Hivatal által akkreditált, a Pentair (napjainkban Emerson) cég által létrehozott laboratóriumban végeztük (El Campo, Texas, USA) 2014 novemberében.

### G.2. Folyadék munkaközeg

#### G.2.1. A mérőberendezés leírása

A kísérleti berendezés felépítését a 41. ábrán láthatjuk. A berendezés két nagy részből áll: egy nagyobb,  $9,45 \text{ m}^3$ -es tartályból, melyben a szabad folyadékfelszín fölé nitrogént bevezetve elő tudjuk állítani a kívánt nyomást, és egy kisebb, 540 literes tartályból, melyhez egy függőleges csövön keresztül csatlakozik a mérendő nyomáshatároló szelep. A nagy tartályba beáramló nitrogén tömegáramát a  $0,6208''$  átfolyási átmérőjű szónikus fúvóka segítségével tudjuk meghatározni. (Mivel a szónikus fúvóka legszűkebb keresztmetszetében az áramlás sebessége eléri a helyi hangsebességet, az átáramló tömegáram független az alvízoldali nyomástól, tehát a betáplált tömegáram konstans marad az alvízoldali állapottól függetlenül.)



41. ábra. Mérési elrendezés vízzel történő mérésekhez.

A nagy tartályból a kis tartályba átáramló vízmennyiséget a térfogatáram mérő segítségével tudtuk meghatározni. Mivel ez egy mágneses elven működő ipari célokra készült műszer,

nem alkalmas hirtelen (néhány másodpercnél rövidebb) változások megbízható rögzítésére, ezért az instabil mérések esetén csak a mérések átlagát használhatjuk tájékoztató értéként.

Négy darab nagyfrekvenciás statikus nyomástávadót szereltünk a berendezésre: a kis tartálybeli nyomás ( $p_t$ ), a cső elején ( $p_e$ ) és végén ( $p_v$ ) uralkodó nyomás és a szeleptest alatti nyomás ( $p_{sz}$ ) mérésére. Több hosszúságú csövet is készítettünk, a  $p_e$  és  $p_v$  nyomásmegcsapolások a csőszegmens hosszának 1/3-ára ill. 2/3-ára kerültek. (A későbbiekben, amikor több csőszegmens összekapcsolásával mértünk, ezek a távolságok kiadódtak.)

Több szeleppel ill. állítógyűrű pozícióval végeztünk méréseket<sup>28</sup>. A mérések során

- 35 darab mérést végeztünk 2J3 szeleppel 0 és 2.44 m (8 láb) felvízoldali csőhosszal, az állítógyűrű -5 (alapbeállítás) és -25-ös beállítása között és
- 38 darab mérést végeztünk 1E2 szeleppel 0 és 3.96 m (13.5 ft) felvízoldali csőhosszal.

Minden mérést 7.5 bar nyitónyomás esetén végeztük el. Ennél a nyitónyomásnál a 2J3 szelep kapacitása  $\dot{m}_n = 25.23\text{kg/s}$  (400 USgpm), míg az 1E2 szelepé 4.41 kg/s (70 USgpm).

A mérések kiértékelése során nyitási nyomásnak tekintettük a szelep első 1%-os nyitáshoz tartozó tartálynyomás értéket, míg a zárási nyomást ahhoz az állapothoz definiáltuk, amikor a szelep elmozdulása legalább 1 másodperc hosszan tartó nyitás után először 1%-os alá esik. (Erre a körülményes megfogalmazásra azért volt szükség, mert számos mérés során kisebb-nagyobb rezgéseket tapasztaltunk.) A 9. táblázat az állítógyűrű hatását szemlélteti a zárási nyomásra.

szelep típus	állítógyűrű helyzet	zárási nyomás a nyitónyomás %-a.
2J3	-5	18%
2J3	-25	5%
1E2	-5	20%
1E2	-25	5%

9. táblázat. Állítógyűrű helyzetének hatása a zárási nyomásra. Az állítógyűrű helyzet (-5 ... -25) az állítógyűrű legfelső helyzetétől mért egész elfordulásokat jelenti, a zárási nyomás pedig az a nyomáskülönbség, amennyivel kisebb nyomáson a szelep a nyitáshoz képest zár, a nyitónyomás százalékában kifejezve. (Pl. 100 bar nyitónyomás esetén 5% zárási nyomás azt jelenti, hogy a szelep 95 bar nyomáson zár újra be.) Lásd még: a 3. ábra az 5. oldalon.

<sup>28</sup>Az állítógyűrűt a 2. ábrán (5. oldal) láthatjuk, funkcióját pedig az 1.2. alfejezet utolsó bekezdése magyarázza.

### G.2.2. Mérőkör sajátfrekvencia

Az eredmények frekvenciatartománybeli kiértékelése során figyelembe kell vennünk, hogy a mérőkör sajátfrekvenciája természetes módon megjelenik az eredményekben, ezért becslést kell adnunk a két tartály és az azokat összekötő csővezeték sajátfrekvenciájára. Legyen a nagyobb tartálybeli nyomás  $p_n$ , a kisebb, 540 literes tartályé  $p_t$ , ekkor a két tartály között csővezetékre felírt instacionárius Bernoulli egyenlet a

$$p_n = p_t + \rho \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_3}{A_3} \right) \frac{dQ}{dt} \quad (\text{G.182})$$

alakot ölti, ahol  $Q$  a térfogatáramot jelöli és a csősúrlódásból és egyéb forrásokból származó nyomásesést elhanyagoltuk ( $D_{1,2,3} = 6'', 4'', 6''$  és  $L_{1,2,3} = 106'', 163'', 50''$ , azaz rendre 2.69, 4.14 és 1.27 m). A nagyobb, 9.45  $m^3$ -es tartályban a folyadékszint feletti nitrogénpárna nyomásdinamikája:

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{p_n}{V_N} \frac{dV_N}{dt} = -\frac{p_n}{V_N} Q, \quad (\text{G.183})$$

ahol  $V_N$  a nitrogénpárna térfogata és a fenti összefüggés azt az egyszerű tényt rögzíti, hogy a nitrogénpárna térfogatának időegységenkénti megváltozása megegyezik a két tartályt összekötő csővezetéken átáramló víz térfogatáramával. Ezen térfogatáram hatására megváltozik a kisebb, 540 literes, vízzel teljesen kitöltött tartálybeli nyomás is:

$$\frac{dp_t}{dt} = \frac{a^2}{V_t} \rho Q, \quad (\text{G.184})$$

ahol  $a$  a folyadékban mért hullámterjedési sebesség és  $V_t$  a kisebbik tartály térfogata. A (G.182) egyenletet idő szerint differenciálva és a fenti nyomásdinamikát felhasználva kapjuk, hogy

$$-\frac{p_n}{V_N} Q = \frac{a^2}{V_t} \rho Q + \rho \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_3}{A_3} \right) \frac{d^2 Q}{dt^2} \quad (\text{G.185})$$

vagy, egy rövid átrendezés után a mechanikában szokásos formába öntve

$$\mathcal{M} \ddot{Q} + \mathcal{S} Q = 0, \quad (\text{G.186})$$

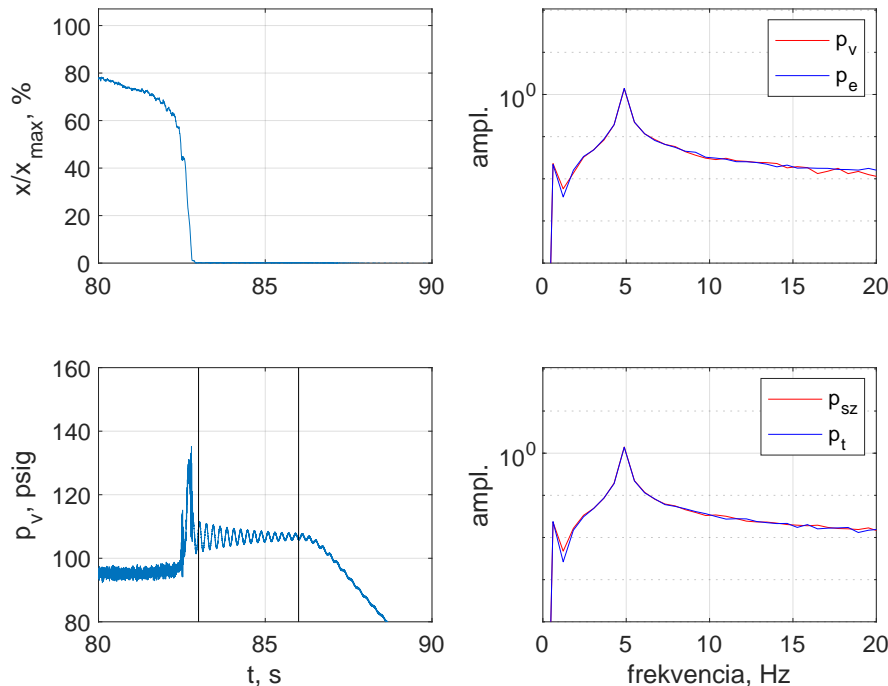
ahol

$$\mathcal{M} = \rho \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_3}{A_3} \right) \quad \text{és} \quad \mathcal{S} = \frac{p_n}{V_N} + \frac{a^2}{V_t} \rho, \quad (\text{G.187})$$

ami egy egyszabadságfokú csillapítatlan lengőrendszer mozgásegyenlete. Így a mérőberendezés sajátfrekvenciája

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mathcal{S}/\mathcal{M}} = 6.6 \text{ Hz}, \quad (\text{G.188})$$

amennyiben feltételezzük, hogy a nitrogénpárna a teljes  $9.45 \text{ m}^3$  30%-át teszi ki ( $2.835 \text{ m}^3$ ). (A mérések időtartama alatt ez a térfogat alig változott: nagyobbik, 2J3 szelep kapacitása 25.23 liter/s volt, így másodpercenként ez a térfogat  $25.23/2835=0.9\%$ -ot változott.)



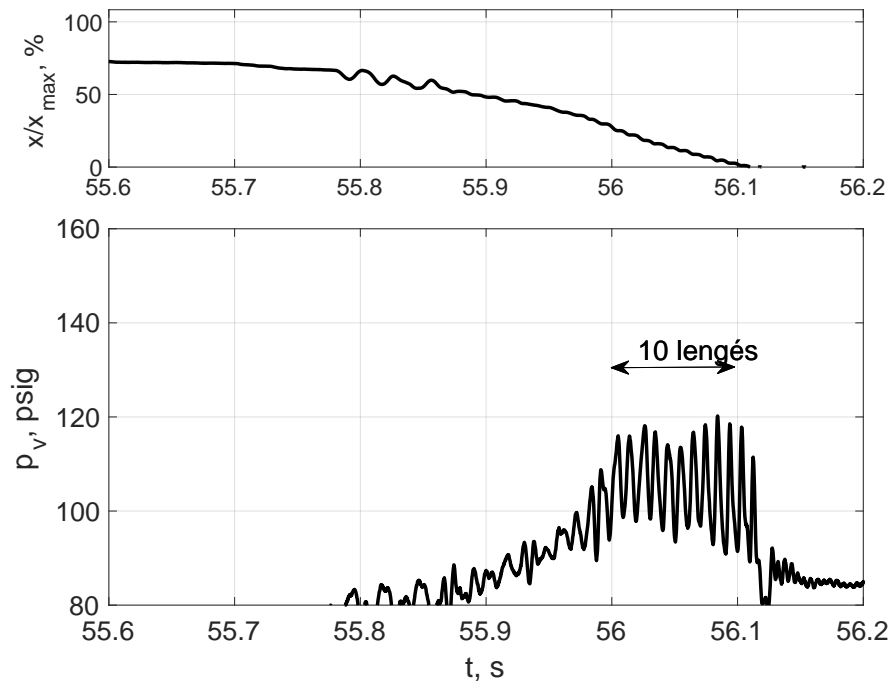
42. ábra. Bal oldal: a szelepnitítás (felül) és a szeleptest alatti nyomás (alul) időjele szelepszárás közben. Jobb oldal: a nyomásjelek frekvenciatartalma.

A 42. ábrán egy tipikus mérési eredményt láthatunk. A bal oszlopban két időjelet ábrázoltunk: a szelepnitítást (felső ábra) és a csővegi nyomást (alsó ábra). A jobb oszlopban a nyomásjelek frekvenciatartalmát tüntettük fel (az FFT-re kiválasztott időintervallumot a bal alsó ábrán két függőleges vonallal jeleztük). Minden nyomásjelben jól kivehető egy kb. 5 Hz-hez tartozó csúcs, ami alapján – figyelembe véve a számos elhanyagolást, amivel a fenti levezetés során éltünk – elfogadható a 6.6 Hz becslés.

A mérési és elméleti eredmények összevetése során az egyik legnagyobb bizonytalanság a hangsebességet terheli, ahogy azt korábban a 2.2. alfejezetben már említettük. A következő alfejezetben ezt a kérdést járjuk körül.

### G.2.3. Hullámterjedési sebesség a mérőkörben

Az  $a$  hullámterjedési sebesség fontos paraméter, amely a számítási eredményeket jelentősen befolyásolja. Tiszta vízben, merev csőben, tartályban 1450 m/s az értéke (a víz rugalmassági modulusa  $E_{v\acute{i}z} = 2.1 \text{ GPa}$ , így  $a_t = \sqrt{E_{v\acute{i}z}/\rho}$ ), ám ezt mind a csőfal rugalmassága, mind a folyadék gáztartalma jelentősen csökkentheti, ld. [38].



43. ábra. Szelepzárás után kialakuló nyomáslengések, cső hossza 3.96 m.

A 43. ábrán egy szelepzárás után kialakuló nyomáslengéseket ábrázoltunk. Egy teljes ciklus periódusideje  $T = 2L/a$  (az ahhoz szükséges idő, hogy a nyomáshullám oda-vissza végighaladjon a csövön) és az ábráról leolvassa azt találjuk, hogy  $T_{10} = 0.1002$ , így a hullámsebességre  $a = \frac{2L}{T_{10}/10} = 843 \text{ m/s}$  adódik.

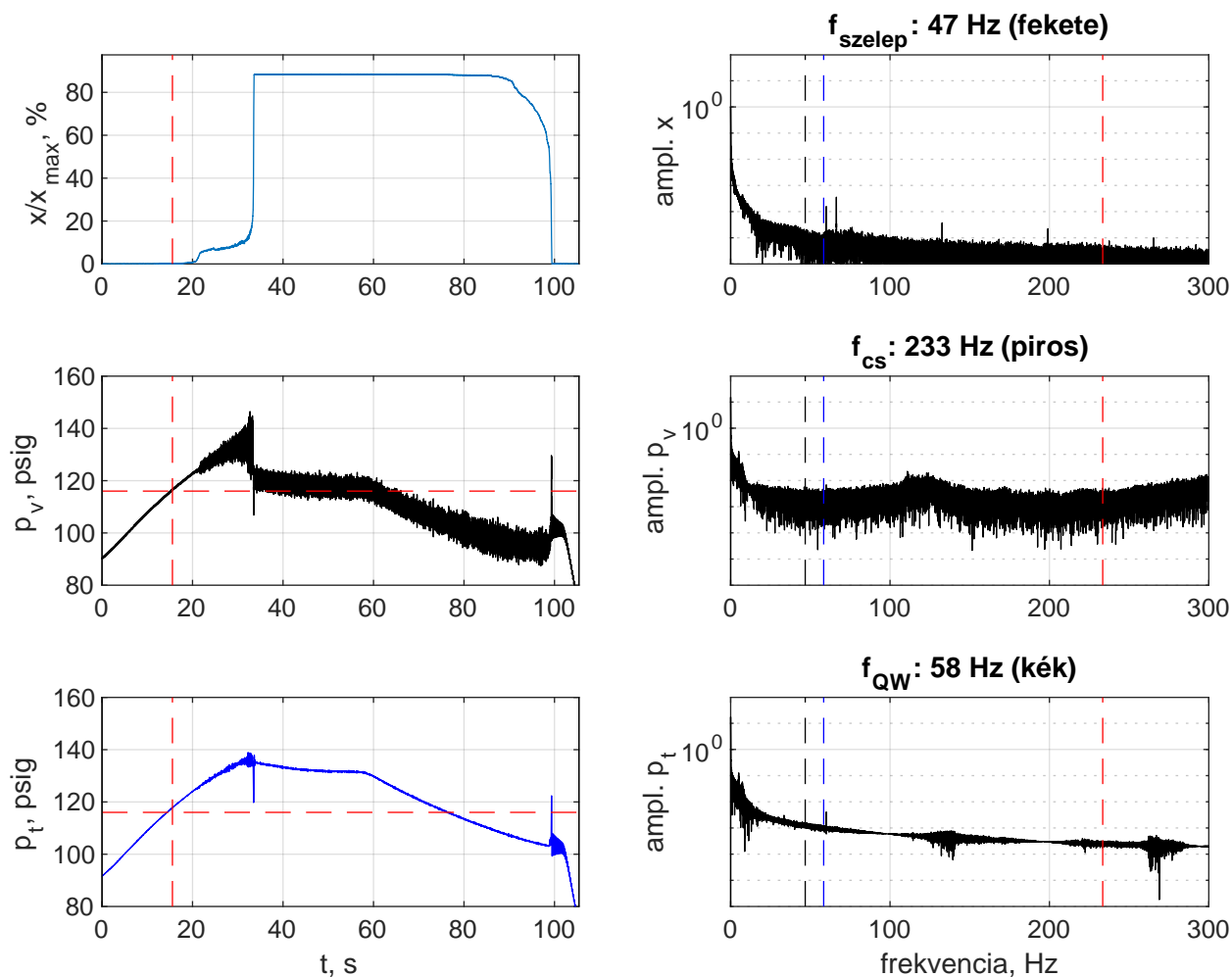
#### G.2.4. Mérési eredmények

A mérések során három tipikus viselkedést figyeltünk meg: (a) stabil nyitás-zárás, (b) teljesen instabil dinamika és (c) instabil zárás, de (általában) stabil nyitás. A továbbiakban mindhárom esetre mutatunk példát.

A 44. ábrán egy stabil nyitás-zárás ciklusra látunk példát. Ennél a szeleptípusnál azt figyeltük meg, hogy a nyitási tartomány alsó 5-10%-ában a nyomással arányos a szeleplemozdulás, majd hirtelen "átugrik" a középső nyitási tartományba. Ez a 3.1. alfejezetben tárgyalt statikus instabilitással magyarázható.

Megjegyezzük azt is, hogy a szelepnitítás és a csőbeli nyomás felépülése után a nyomásjelek jóval zajosabbak a tartálynyomáshoz képest, ami ugyan nem meglepő, ám később is megfigyelhetjük ezt a tendenciát, hogy a tartálynyomás még akkor is meglehetősen stabil, amikor a csővezetékben jelentős amplitúdójú rezgések vannak jelen, pl. szeleprezgés miatt. Ez a gyakorlat szempontjából azért fontos, mert felhívja az üzemeltetők figyelmét arra, hogy a szelepinstabilitások detektálásához a csővezetéken (a szelephez minél közelebb) is szükséges nyomásszenzorokat elhelyezni, mivel pusztán a tartályon végzett mérésekből nem következ-

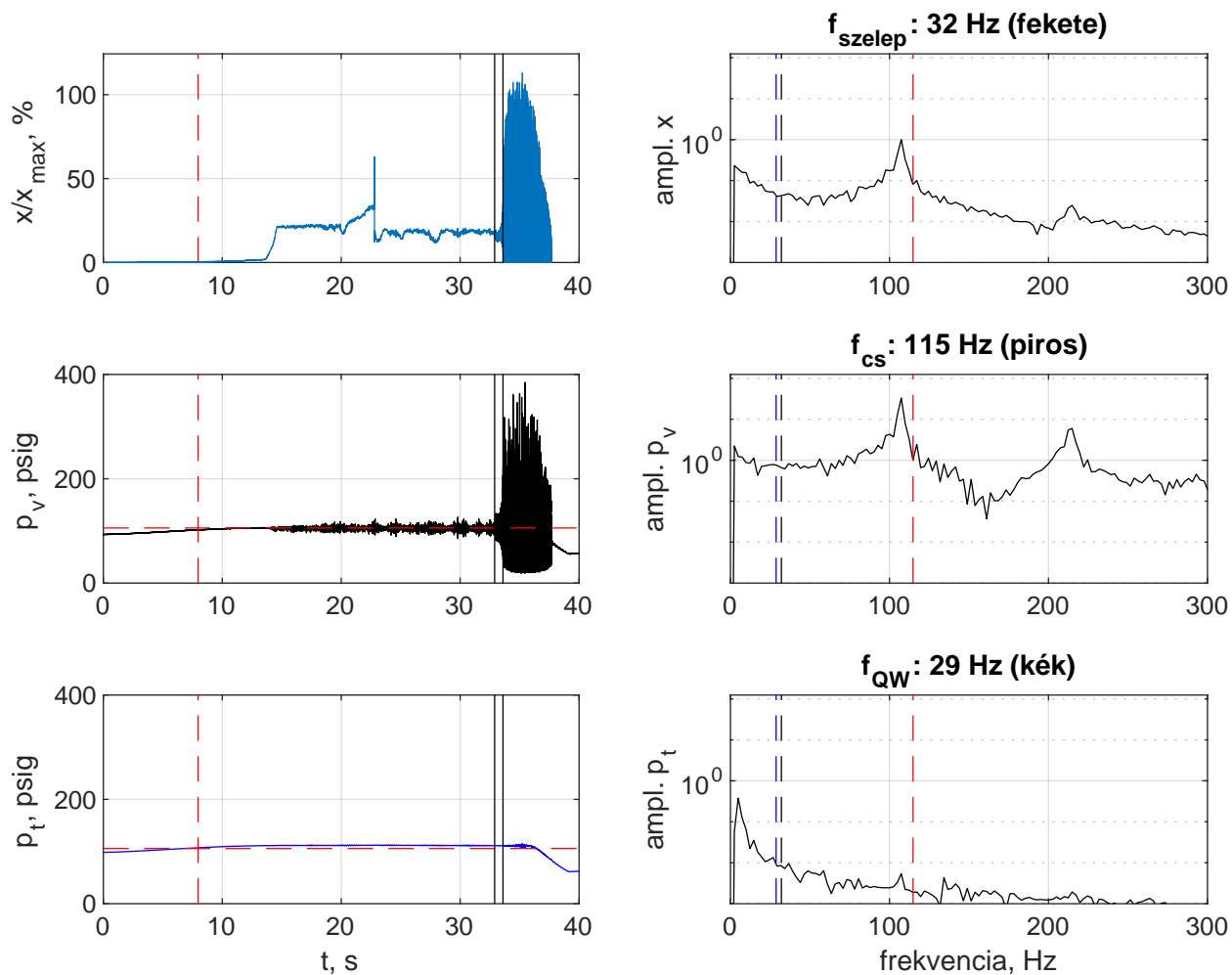
tethetünk a szeleprezgés megjelenésére.



44. ábra. Példa a stabil nyitás-zárás ciklusra. A piros vonal a szelepnitítás időpontját jelöli. Az FFT során a teljes időintervallumot felhasználtuk.

A 45. ábra egy olyan esetet mutat, amelynél a szelep részlegesen nyitott (kb. a teljes nyitás 20%-ára), majd a zárás során instabillá vált. Fontos észrevennünk, hogy a tartálynyomásnak jóval a zárási nyomás alá kellett süllyednie ahhoz, hogy a rezgés megszűnjön és a szelep véglegesen bezárjon. A frekvenciatartalom azt is jól mutatja, hogy a rezgés keletkezésakor (függőleges fekete vonalak közti intervallumban) a csővezeték sajátfrekvenciája jelenik meg markánsan.

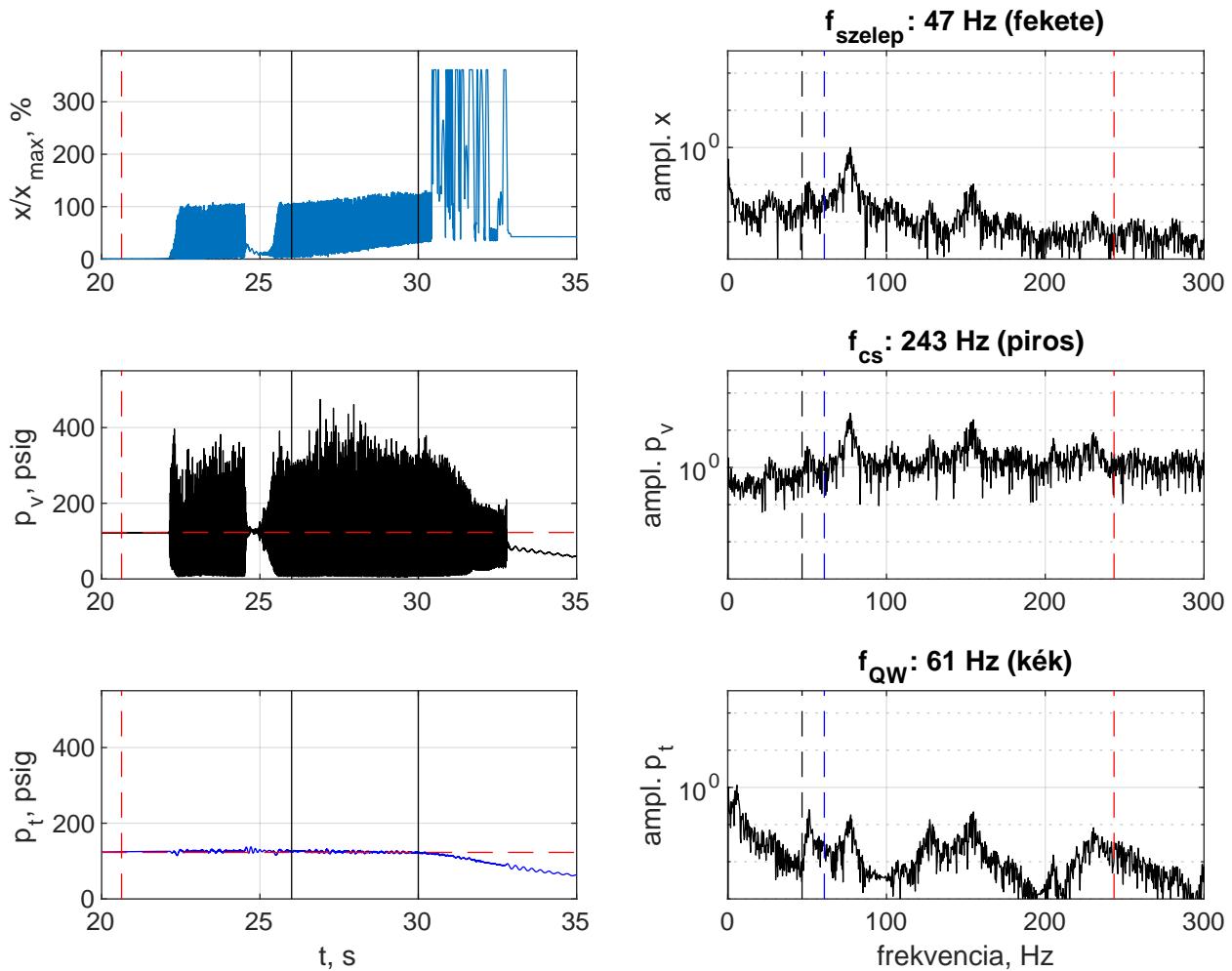
A 46. ábra egy instabil nyitás-zárást mutat be. A domináns frekvencia magasabb a korábban megfigyeltnél, mivel a szelepléssel ill. a felső elmozdulás-határolóval való ütközés miatt a rezgés periódusideje kisebb, mint a szabadlengések periódusideje lenne. Érdekes jelenség, hogy kb. 25 másodperc után a szelepmozgás mintha stabilizálódna, majd újra megindul a rezgés. Ennek egy lehetséges – ám véglegesen nem tisztázott – oka lehet, hogy ez



45. ábra. Példa stabil szelepnitásra, melyet instabil zárás követ. A piros vonal a szelepnitás időpontját jelöli. Az FFT során a fekete függőleges vonalak közötti tartományt használtuk.

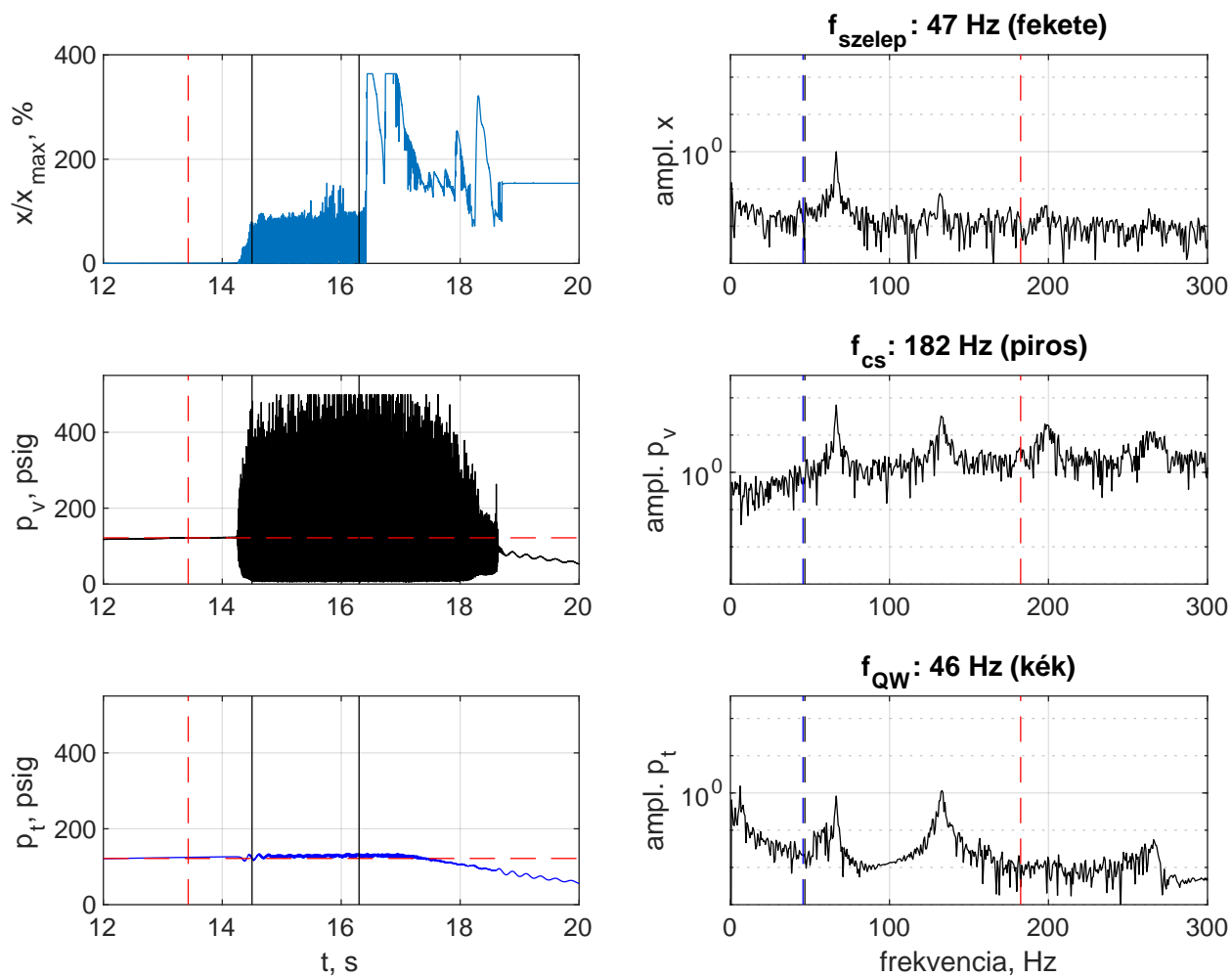
a mérés a stabilitási határ közelébe esik, ahol (folyadék esetén) a negyedhullám instabilitáshoz tartozó Hopf bifurkáció *szubkritikus*, tehát egy stabil egyensúlyi helyzet és egy instabil határciklus egyszerre van jelen a rendszerben, ld. [HCs10].

Végül, a 47. ábrán egy olyan mérésre láthatunk példát, ahol a csővezeték negyedhullám-frekvenciája és a szelep sajátfrekvenciája egybeesik, rezonanciát eredményezve. A maximális nyomás meghaladja a 34 bar (500 psi) értéket, ami a nyomásmérő szenzor felső határértéke.



46. ábra. Példa instabil szelepnyitásra. A piros vonal a szelepnyitás időpontját jelöli. Az FFT során a fekete függőleges vonalak közötti tartományt használtuk.



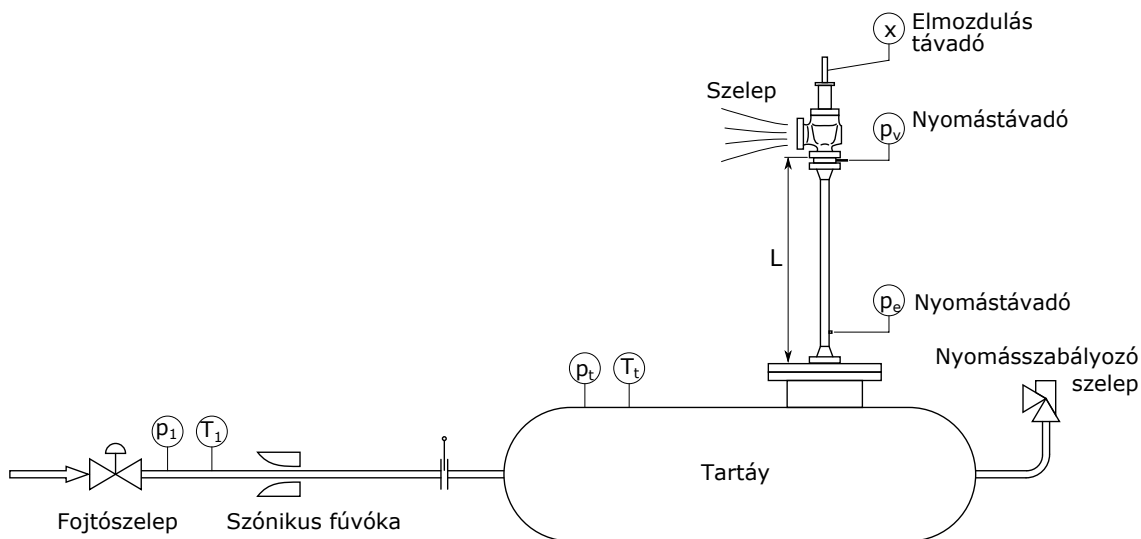


47. ábra. Instabil szelepnívítás, a csővezeték negyedhullám frekvenciája és a szelep sajátfrekvenciája egybeesik. A piros vonal a szelepnívítás időpontját jelöli. Az FFT során a fekete függőleges vonalak közötti tartományt használtuk.

### G.3. Gáz munkaközeg

Ebben a fejezetben a gáz munkaközeggel végzett méréseket részletezzük 1E2, 2J3 és 3L4 szelepek esetén.

A kísérleti berendezés a 48. ábrán látható, mely egy tartályból, egy nyomáshatároló szelepből, és az ezeket összekötő csővezetékéből áll. A tartályt egy szónikus fúvókán keresztül (konstans tömegárammal) egy, gyakorlati szempontból végtelen nagy térfogatúnak tekinthető tartály táplálja nitrogénnel. Az ábrán jelzetteknek megfelelően nyomás- és szelepelmozdulás jeleket rögzítünk 1 kHz mintavételezési frekvenciával.



48. ábra. Mérési elrendezés gáz munkaközeg esetén.

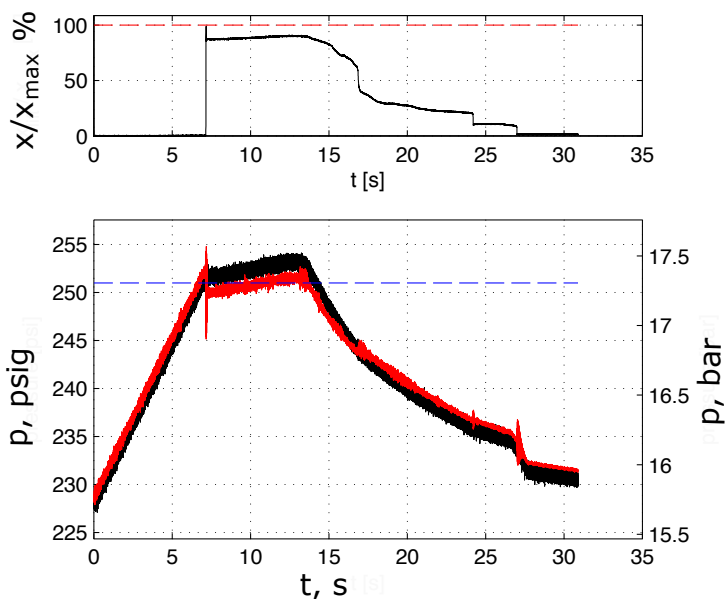
#### G.3.1. Eredmények

A 49–52. ábrák tipikus mérési eredményeket ábrázolnak, mind stabil, mind instabil eseteket.

A 49. és az 50. ábra két szélsőséges esetet mutat be: stabil és instabil szelepnitást. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy annak ellenére, hogy a 49. ábrán egy stabil esetet látunk, a szeleptest mozgásában hirtelen "ugrásokat" figyelhetünk meg, mind a nyitás, mind a zárás során. Ez egy újabb bizonyítéka a 3.1 fejezetben részletezett statikus instabilitásnak.

Az 50- ábrán egy "teljesen" instabil mérést láthatunk: a szelepnitást után azonnal elindul a szeleptest rezgése, mely a szeleptüllel való folyamatos ütközés miatt különösen intenzív gerjesztést visz a rendszerbe. Valóban, a mérések során ezek a rezgések nem csupán szabad füllel is jól hallhatóak és zavaróak voltak, hanem a szeleptestet és az üléket is rövidesen károsították volna, ha nem avatkozunk közbe.

A gáz munkaközeggel elvégzett mérések során is találtunk példát zárási instabilitásra, ld.

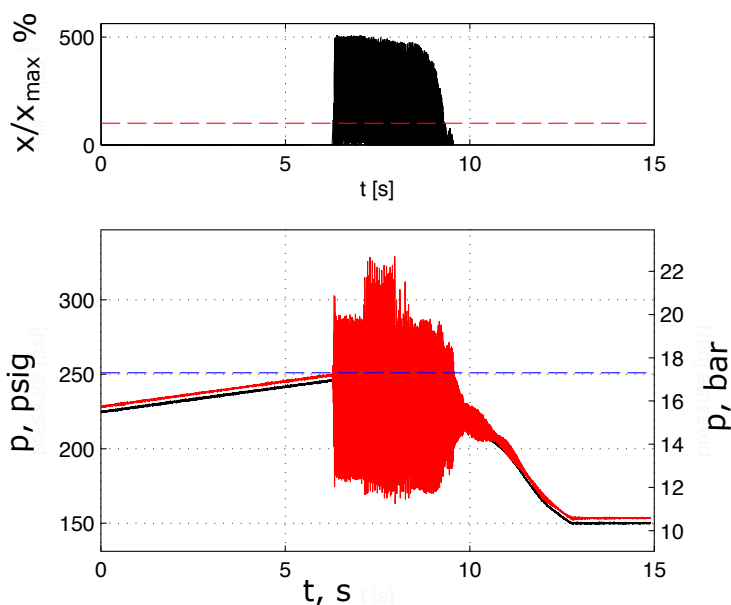


49. ábra. Példa stabil szelepdinamikára, 2J3 szelep 0.61 m (24") hosszú cső esetében, nitrogén munkaközeggel. Felső ábra: szelepnitítás a teljes nyitás (szaggatott vonal) százalékában kifejezve. Alsó ábra: nyomáslefutás a tartályban ( $p_t$ , piros) és a szelep alatt ( $p_v$ , fekete). A szaggatott vonal a nyitónyomást jelöli.

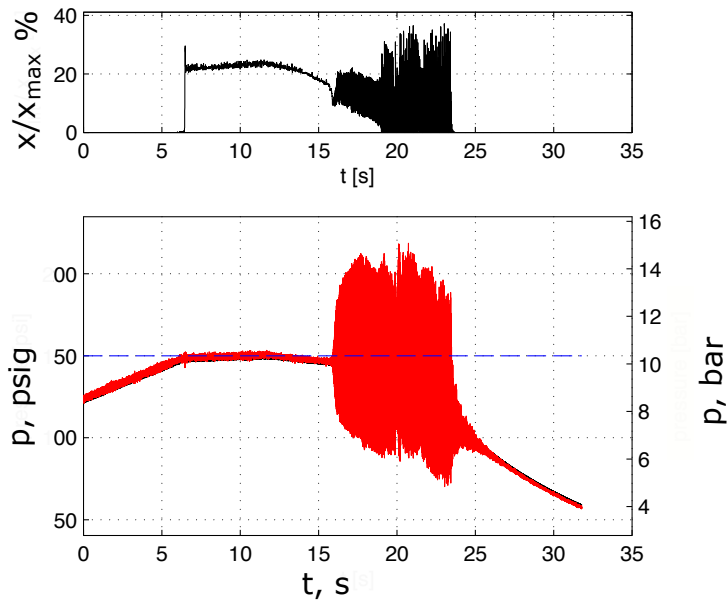
51. ábra. Itt azt vehetjük észre, hogy a kb. 16 másodperc környékén kialakuló szeleprezgés amplitúdója még nem okoz ütközést a szeleplélekkel ("flutter"), azonban 19 másodperc környékén a rezgés ütközést is implikál ("chatter"), mely szabad füllel is könnyen megkülönböztethető a korábban "flutter" jelenségtől

Az 52. ábra egy közbenső esetet mutat be, ahol az instabilitás ugyan kialakuló. 3 mp-nél, ám 4.5 mp-nél hirtelen eltűnik. Egy ehhez hasonló instabilitást figyelhetünk meg a szelep zárása során, amely nem "eszkalálódik" klasszikus szelepcsattogássá. Az intenzív rezgések során a szelepszárra rögzített elmozdulásadó menetes csatlakozása sérült és elengedett, ez magyarázza a 100%-nál nagyobb nyitásokat.

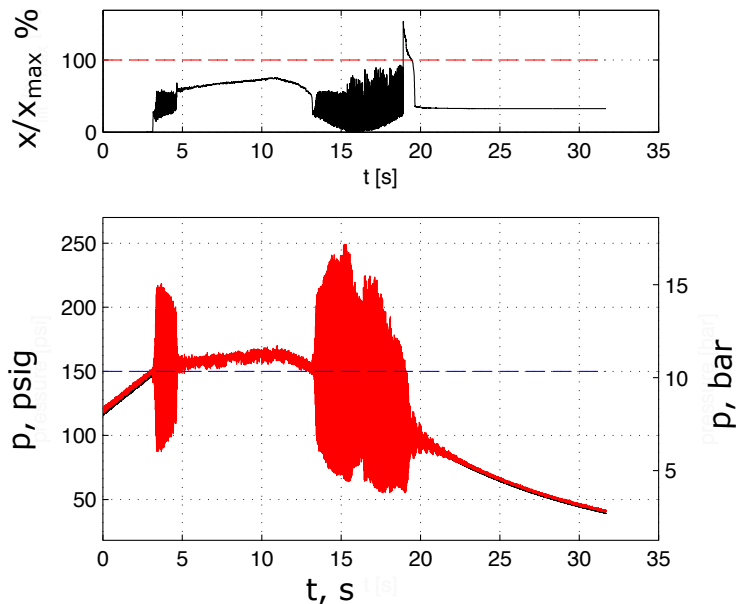
Az 53. ábrán egy kinagyított részt láthatunk, mely a szelepnitítás és a szelep alatti nyomást mutatja. Vegyük észre, hogy a rezgés alatt a nyomás egy negyed periódussal követi a szelepelmozdulás jelét.



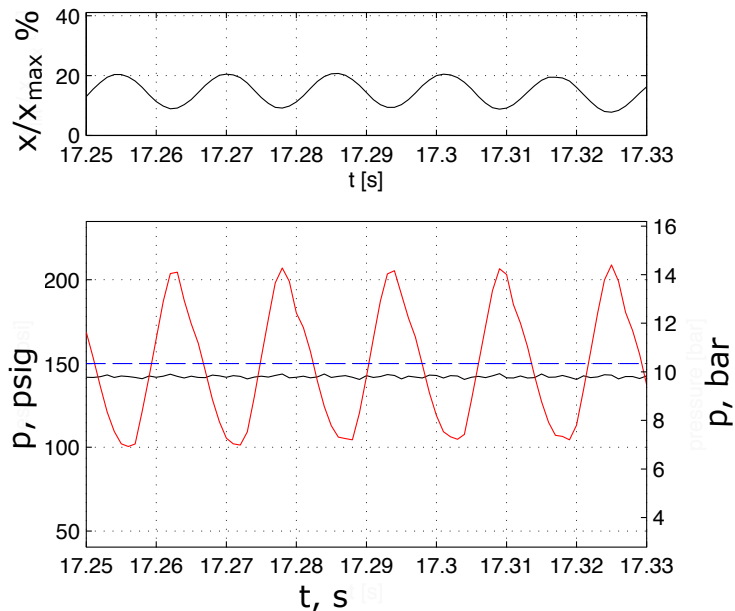
50. ábra. Példa instabil szelepdinamikára, 2J3 szelep 1.83 m (72") hosszú cső esetében, nitrogén munkaközeggel. Felső ábra: szelepnnyitás a teljes nyitás (szaggatott vonal) százalékában kifejezve. Alsó ábra: nyomáslefutás a tartályban ( $p_t$ , piros) és a szelep alatt ( $p_v$ , fekete). A szaggatott vonal a nyitónyomást jelöli. A látszólag 500%-os szelepnnyitás oka az, hogy a heves rezgések eredményeképpen az elmozdulás távadót a szelepszárral összekötő menet elszakadt. Vegyük észre, hogy a szeleprezgés kialakulása után a nyomás csak jóval a nyitónyomás alatt - annak kb.  $150/250=60\%$ -án - stabilizálódik.



51. ábra. Példa zárási instabilitásra, 3L4 szelep 1.22 m (4 láb) hosszú cső esetében, nitrogén munkaközeggel. Felső ábra: szelepnyitás a teljes nyitás (szaggatott vonal) százalékában kifejezve. Alsó ábra: nyomáslefutás a tartályban ( $p_t$ , piros) és a szelep alatt ( $p_v$ , fekete). A szaggatott vonal a nyitónyomást jelöli. Tömegáram: a kapacitás 50%-a.



52. ábra. Példa nyitási és zárási instabilitásra, 3L4 szelep 1.83 m (6 láb) hosszú cső esetében, nitrogén munkaközeggel. Felső ábra: szelepnyitás a teljes nyitás (szaggatott vonal) százalékában kifejezve. Alsó ábra: nyomáslefutás a tartályban ( $p_t$ , piros) és a szelep alatt ( $p_v$ , fekete). A szaggatott vonal a nyitónyomást jelöli. Tömegáram: a kapacitás 100%-a.



53. ábra. Szelepelmozdulás (felső ábra) és szelep alatti nyomás (alsó ábra, piros vonal) egy olyan esetben, amikor ugyan rezeg a szelep, de még nem ver bele a szelepülékbe ill. a felső nyitáshatárolóba. (Az angolszász szakirodalom ezt nevezi "flutter"-nek.) Paraméterek: 3L4 szelep, 1.22 m (4 láb) hosszú cső, tömegáram: a kapacitás 50%-a. A nyomásdiagramon szaggatott kék vonal jelzi a nyitónyomást és folytonos fekete vonal a tartálynymóást. Az elmozdulás- és a nyomásjel között közelítőleg 90 fok a fáziseltolás.



54. ábra. 2J3 szelep közvetlenül a tartályra szerelve, működés közben.



55. ábra. 2J3 szelep 3 m felvízoldali csővel, működés közben.