Válasz G. Horváth Ákos bírálatára

Nagyon köszönöm G. Horváth Ákosnak disszertációm gondos bírálatát, és a támogató véleményt. A bírálatban feltett kérdésekre az alábbiakban egyenként válaszolok.

1. Kérdés: *Mit lehet mondani a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\mathbb{E}_{\varrho,K_\varepsilon}\int_{K_\varepsilon\setminus K_{(n)}}\lambda(x)\,dx$$

mennyiségről? Igaz-e, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\mathbb{E}_{\varrho,K}\int_{K\setminus K_{(n)}}\lambda(x)\,dx$$

mennyiséghez tart?

Válasz: A dolgozat 4.1.1. tételének feltevései szerint $K\subset\mathbb{R}^d$ konvex test, ϱ valószínűségi sűrűségfüggvény K-n, $\lambda: K\to\mathbb{R}$ integrálható függvény úgy, hogy ϱ és λ folytonos és ϱ pozitív ∂K egy K-ra vonatkozó környezetén.

Tegyük fel, hogy $o\in\operatorname{int}K$. Tetszőleges $t\in(0,1)$ számra, legyen $K_t:=(1-t)K$, és $x_t=(1-t)x$, ha $x\in\partial K$. Legyen $\varepsilon_0\in(0,1)$ olyan kicsiny, hogy tetszőleges $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ esetén a ϱ és λ függvények folytonosak és ϱ pozitív a ∂K_ε egy K_ε-ra vonatkozó környezetén. Ilyen ε_0 nyilván létezik.

A K_ε testen $\varrho(x)$ már nem valószínűségi sűrűségfüggvény, de normáltja igen; ezért legyen

$$\varrho_\varepsilon(x):=\left(\int_{K_\varepsilon}\varrho(y)dy\right)^{-1}\varrho(x),\quad \forall x\in K_\varepsilon.$$

Jelölje $(K_\varepsilon)_{(n)}$ a K_ε testből a ϱ_ε által meghatározott valószínűségi eloszlás szerint választott n független véletlen pont konvex burkát. Ekkor tetszőleges $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ esetén a K_ε testre, ϱ_ε valószínűségi sűrűségfüggvényre, és a λ függvényre teljesülnek a 4.1.1 tétel feltételei. A görbület és a felszínmérték homogenitási tulajdonságait kihasználva a 4.1.1 tétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\mathbb{E}_{\varrho_\varepsilon,K_\varepsilon}\int_{K_\varepsilon\setminus(K_\varepsilon)_{(n)}}\lambda(x)dx=c_d\int_{\partial K_\varepsilon}\varrho_\varepsilon^{\frac{-2}{d+1}}(z)\lambda(z)\kappa_\varepsilon(z)^{\frac{1}{d+1}}\mathcal{H}^{d-1}(dz)$$
$$=c_d\left(\int_{K_\varepsilon}\varrho(y)dy\right)^{\frac{2}{d+1}}\int_{\partial K}\varrho^{\frac{-2}{d+1}}(x_\varepsilon)\lambda(x_\varepsilon)(1-\varepsilon)^{\frac{-d+1}{d+1}}\kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}(1-\varepsilon)^{d-1}\mathcal{H}^{d-1}(dx).$$

Mivel az integrandus ϱ és λ folytonossága miatt majorálható, ha $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, az integrál előtti konstans pedig c_d-hez tart, ha $\varepsilon\to 0$, így a Lebesgue majoráns kritérium miatt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\mathbb{E}_{\varrho_\varepsilon,K_\varepsilon}\int_{K_\varepsilon\setminus(K_\varepsilon)_{(n)}}\lambda(x)dx\\
&= c_d\int_{\partial K}\lim_{\varepsilon\to 0}\varrho^{\frac{-2}{d+1}}(x_\varepsilon)\lambda(x_\varepsilon)(1-\varepsilon)^{\frac{d^2-d}{d+1}}\kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}\mathcal{H}^{d-1}(dx)\\
&= c_d\int_{\partial K}\varrho^{\frac{-2}{d+1}}(x)\lambda(x)\kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}\mathcal{H}^{d-1}(dx)\\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_{\varrho,K}\int_{K\setminus K_{(n)}}\lambda(x)dx.
\end{aligned}
$$

Tehát a kérdést a fenti formában feltéve, a válasz igen.

2. Kérdés: *A 7.1.1 illetve 7.1.2 tetelekbeli simasági feltételek a Taylor közelítés szükséges nagyságrendjéből a bizonyítás alapján adódnak. Történt-e vizsgálat ezen feltételek gyengíthetőségével kapcsolatban?*

   Válasz: Véleményem szerint a simasági feltételek valószínűleg enyhíthetők, bár a részleteket még nem számoltam végig. A 7.1.1 tétel esetében elegendő lehet például, ha a C^2 tulajdonság helyett a gördülőkör létezését tesszük fel, amellett, hogy a véletlen közelítésre használt körök sugara szigorúan nagyobb, mint a lemez orsókonvexitásának sugara. A gördülőkör garantálja, hogy a lemeznek nincsenek csúcsai, amelyek megváltoztatnák a nagyságrendet n-ben. Ebben az esetben a kétszeres differenciálhatóság hiánya kezelhető más módszerekkel. A 7.1.2 tétel esetében az erős differenciálhatósági feltételek alapvetőbb szerepet játszanak, ezért valószínű, hogy gyengítésük nagyobb nehézségekbe ütközik, mint a 7.1.1 tételnél.

3. Kérdés: *Az orsókonvexitás fogalma természetes módon értelmezhető Minkowski terekben (véges dimenziós Banah terekben), így az összes felvetett probléma átfogalmazható ebbe a környezetbe. A vizsgált geometriai mennyiségek léteznek, de tipikusan nem affin invariánsak; az analitikus apparátus kidolgozott így a bizonyításokhoz kapcsolódó lokális eszköztár a norma megfelelő simasága mellett alkalmazható. A kérdés az, hogy közvetlen átfogalmazása a bizonyításoknak lehetséges-e? (Ezek mennyire támaszkodnak olyan metrikus összefüggésekre, melyek jelentősen új számításokat követelnek általános norma esetén?)*

   Válasz: Természetes gondolat, hogy a orsókonvexitást kiterjesszük Minkowski terekbe a Minkowski-tér gömbjeit használva. Valójában ennél még általánosabb környezetbe is átfogalmazható ez a fogalom: Lángi, Naszódi és Talata (Aequationes Math. 85 (1–2) (2013), 41–67) általánosították az orsókonvexitást úgy, hogy gömb helyett egy rögzített L konvex test eltoltjait használták a konvex burok képzésére. Ezt a fogalmat röviden L-konvexitásnak hívjuk. Itt L-nek nem kell centrálisan szimmetrikusnak lenni, tehát ez nem feltétlenül egységgömbje egy Minkowski-térnek. Papvári Dániellel és Vígh Viktorral közösen (Mathematika 66 (2020), 498–513) írt cikkünkben a 7. fejezetbeli véletlen modellt általánosítottuk az L-konvex esetre, ahol a K lemez, amelyből az uniform véletlen pontokat választjuk C^2_+ határú és L-konvex úgy, hogy L határa is C^2_+, illetve K és L görbülete megfelelő módon el van korlátozva egymástól. Ebben az esetben a 7.1.1 tétellel analóg aszimptotikus formulákat igazoltunk. A bizonyításban felhasznált módszerek hasonlóak a 7. fejezetben használtakhoz, bár azoknál technikailag bonyolultabbak. Meglátásom szerint az orsókonvex esetben használt módszerek jó része átvihető erre az általánosabb esetre, bár ez néha komoly technikai nehézséget okoz.

Szeged, 2021.02.24.

Fodor Ferenc