Bírálat Muzsnay Zoltán “Differenciálrendszerek geometriai alkalmazásai” c. MTA-doktori értekezéséről

Szabó Szilárd

Budapest, 2021. február 3.

1 Az értekezés eredményeinek tárgyalása

Az értekezés előszóból és 4 fejezetből áll, utóbbiak témája rendre a variációszámítás inverz problémája, Finsler-metrizálhatóság, Finsler-sokaságok holonómiája, végül síkbeli 3-szövetek linearizálhatósága. Függelékként tartalmazza a bevezetett jelölések listáját. Ebben a szakaszban röviden bemutatom a fejezetek tartalmát.

1.1 A variációszámítás inverz problémája

A téma eredete a XIX. század végére, Helmholtz munkásságára nyúlik vissza; jelentős lökést adott a kutatásának a Fields-érmes J. Douglas 1941-es cikke, amelyben a Helmholtz-rendszer integrálhatóságának feltételeit tárgyalta.

Legyen M egy sima sokaság. Egy *spray* M-en egy olyan vektormező a TM érintőnyalábon, amely a Liouville-mező a vertikális endomorfizmusra vett valamely őséképéből egy fibrumirányban másodfokú homogén tag hozzáadásával keletkezik. Amennyiben adott egy E reguláris Lagrange-függvény TM-en, akkor belőle kanonikusan származik egy spray. Egy ilymódon nyert sprayt *variációsnak* mondunk. A variációszámítás inverz problémája annak megállapítása, hogy mely sprayk variációsak.

A jelölt minden sprayhez hozzárendel egy gradált Lie-algebrát, amelynek elemei algebrai feltételeket határoznak meg a Lagrange-függvényre. Ennek alkalmazásaként, a jelölt bemutatott eredményei közül az 1.3.9. Tétel azt mondja ki, hogy amennyiben egy bizonyos lineáris algebrai rendszer rangja legalább $\frac{n(n+1)}{2}$, akkor a spray nem lehet variációs, amely általánosítása Douglas egy tételének.

Amennyiben egy spray variációs, a megfelelő E reguláris Lagrange-függvény általában nem egyértelmű; ezen függvények terének dimenzióját *variációs szabadságfoknak* nevezzük. A variációs szabadságfoknak vizsgálható a k-homogén változata is, amely a k-homogén Lagrange-függvények terének dimenziója. Az 1.4.3. Tétel metrizálható sprayk esetén meghatározza a 2-homogén variációs szabadságfokot egy bizonyos ún. holonómia-disztribúció kodimenziója segítségével.

Amennyiben $M = G$ egy Lie-csoport, akkor van rajta egy kanonikus balinvariáns spray. Ekkor felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan balinvariáns Lagrange-függvény, amelyhez rendelt spray megegyezik a kanonikussal. Az 1.5.3. Tételben a jelölt a G Lie-algebrájának struktúra-állandóit felhasználva megad egy lineáris algebrai szükséges és elégséges feltételét ilyen értelemben vett balinvariáns variációs elv létezésének. Ennek alkalmazásaként a jelölt megállapítja az összes legfeljebb 4-dimenziós Lie-csoport esetén, hogy létezik-e hozzájuk balinvariáns variációs elv.

1.2 Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

A 2.3 szakasz eleje kissé nehezen értelmezhető, mert a 4. sorában hivatkozott (1.2) egyenlet az állítottal szemben nem a másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer, továbbá a 7. sorának (2.1) egyenletében az $f^j(x,y)$ függvény nincs bevezetve, ráadásul az $\mathcal{S}$ sprayt meghatározó G^i mennyiségeket az egyenlet nem tartalmazza. Úgy tűnik az olvasónak, mintha az f^j és G^i mennyiségek között kellene lenni valamilyen kapcsolatnak, ám ez a szövegből nem derül ki.

Ebben a szakaszban az első eredmény (2.3.1. Tétel) a (2.1) másodfokú parciális differenciálegyenlet-rendszer redukciója egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszerre. A második eredmény (2.3.3. Tétel) pedig meghatározza egy szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy spray egy (nemnulla) érintővektor körüli lokálisan Finsler-metrizálható legyen.

A jelölt a fenti eredményeinek analóg állításait is bizonyítja a Landsberg-metrizálhatóság esetére is. A kérdés itt olyan speciális Finsler-metrika keresése, amelyhez tartozó párhuzamos eltolás megőrzi a metrikát. Ez további harmadrendű egyenletekkel bővíti az egyenletrendszert. A 2.3.4. Tétel értelmében az így nyert rendszer is elsőrendűvé redukálható, a 2.3.5. Tétel pedig megadja a lokális Landsberg-metrizálhatóság egy szükséges és elégséges feltételét. A 2.3.6. Állítás a variációs szabadságfokhoz hasonlóan értelmezett metrizálhatósági szabadságfokot határozza meg a holonómia-disztribúció kodimenziójaként.

A következő tárgyalt kérdéskör a metrizálhatóság bizonyos görbületi követelményeknek eleget tevő metrikával. Az első ezzel kapcsolatos eredmény a 2.4.1. Tétel, amely az állandó (nemnulla) görbületű esetre határoz meg szükséges és elegendő feltételt a spray Jacobi-endomorfizmusa által. A második kapcsolódó eredmény (2.4.2. Tétel) egy reguláris, nemnulla Ricci-görbületű spray esetén több feltétel ekvivalenciáját mondja ki. Ebből kiderül többek között, hogy bármely Finsler-metrizálható sprayhez található olyan nemnulla állandó görbületű Finsler-metrika is, amelynek kanonikus spraye megegyezik vele. Az itt tárgyalt eredmények alkalmazhatók Hilbert negyedik kérdésének vizsgálatára: adott $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmazon határozzuk meg azon Finsler-metrikákat, amelyek geodetikusai az euklideszi egyenesek.

A Finsler-metrizálhatóság további vizsgált változata az ún. projektív eset, amelyben a spray geodetikusairól csak egy irányítástartó átparaméterezés erejéig követeljük meg, hogy megegyezzenek egy Finsler-metrika kanonikus sprayével. E verzió vizsgálatában alapvető módszer az ún. Rapcsák-rendszer. Ezt további, magasabb rendű kompatibilitási feltételekkel is szükséges kibővíteni. Utóbbiak a vizsgálatot nehézzé teszik, ezért az elért eredmények természete is különbözik a Finsler-metrizálhatóságra vonatkozóaktól. A 2.5.4. Tétel szerint e kibővített Rapcsák-rendszer formális integrálhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a spray izotróp görbületű legyen. A magasabb rendű kompatibilitási feltételekkel kibővített rendszer vizsgálata általánosságban rendkívül bonyolulttá válik, ráadásul a Cartan–Kähler-tétel sem alkalmazható, tehát a harmadrendű megoldássá való felemelhetőségből nem következik az integrálhatóság; helyette a Spencer–Goldschmidt-elméletet célszerű alkalmazni.

A projektív merevségi kérdések arra vonatkoznak, hogy egy rögzített spray projektív transzformációi között milyen tulajdonságú sprayk találhatók. Ezzel kapcsolatos a 2.6.2. Tétel, amely szerint minden $\mathcal{S}$ sprayre és minden holonómia-invariáns $\mathcal{P}$ 1-homogén függvényre igaz, hogy majdnem minden λ valós számra $\mathcal{S}$-nek a $\lambda\mathcal{P}$-vel vett transzformációja nem metrizálható. A 2.6.7. Következményben pedig abban a speciális esetben, amikor $\mathcal{S}$ egy Finsler-sokaság kanonikus spraye, a kivételes (0-mértékű) λ értékek konkrétan meghatározásra kerülnek a metrika főgörbületei által.

Ezután a jelölt Lie-csoportok kanonikus sprayének invariáns metrizálhatóságát vizsgálja. A 2.7.5. Tételben megmutatja, hogy ebben az esetben a különböző metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági feltételek ekvivalensek egymással, a 2.7.6. Következményben pedig ezeknek egy, a Lie-algebrán értelmezett, bizonyos tulajdonságú belső szorzat létezésével egyszerűen kifejezhető szükséges és elégséges feltételét is meghatározza. A 2.7.10. Tétel homogén terek esetére mondja ki a különböző metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági feltételek ekvivalenciáját, kvadratikus geodetikus orbit struktúrákra.

1.3 Finsler-sokaságok holonómiája

A jelölt kezdetnek néhány, egy sokaság diffeomorfizmus-csoportjának részcsoportjaival, valamint egy ilyen részcsoporthoz tartozó Lie-algebrával kapcsolatos alapvető fogalom értelmezésével és rájuk vonatkozó eredménnyel foglalkozik. Ezután értelmezi egy Finsler-sokaság holonómia-algebráját, fibrált holonómia-algebráját, infinitezimális holonómia-algebráját, valamint görbületi algebráját, és belát közöttük tartalmazási relációkat (3.5.1. Tétel, 3.5.5. és 3.5.7. Állítások).

Ekkor jelölt rátér az állandó (nemnulla) görbületű 2-nél magasabb dimenziós Finsler-sokaságok holonómia-csoportjának tárgyalására. Kiderül (3.6.5. Tétel), hogy egy ilyen csoport akkor és csak akkor véges-dimenziós kompakt Lie-csoport, ha a metrika Riemann-féle. Ez megválaszolja többek között Chern és Shen egy 2005-ből származó nyílt problémáját. Egyszeresen összefüggő, állandó görbületű lokálisan síkprojektív Finsler-sokaságokra pedig erősebb állítás is igaz: a holonómia-csoport akkor és csak akkor véges-dimenziós, ha a görbület 0 vagy a metrika Riemann-féle (3.7.9. Tétel).

A 3.8.3. és 3.8.4. Tételekben a jelölt konkrétan meghatározza bizonyos egyszeresen összefüggő, állandó nemnulla görbületű síkprojektív Finsler-felületek (a standard Funk-metrika és a Bryant–Shen-féle gömbi metrika) holonómia-csoportjának lezártját: ezekben a konkrét esetekben a csoport maximális, azaz lezártja a kör teljes diffeomorfizmus-csoportja. A 3.8.6. Tételben ezt a maximalitási állítást kiterjeszti minden nem-Riemann-féle egyszeresen összefüggő, állandó nemnulla görbületű síkprojektív Randers-felületre.

1.4 Síkbeli 3-szövetek linearizálhatósága

Egy 3-szövet egy valós vagy komplex reguláris felületen három, egymásra transzverzális fóliázás. Kitüntetett szerepet játszanak a lineáris és párhuzamos 3-szövetek, illetve azok, amelyek egy diffeomorfizmus által átvihetők lineáris és párhuzamos 3-szövetbe; utóbbiakat linearizálható ill. parallelizálható 3-szövetnek nevezzük. Egy szövethez hozzárendelhető egy, bizonyos tulajdonságokkal rendelkező lineáris konnexió, amelyet a Chern-konnexiójának nevezünk. A 4.3.5. Tétel megadja egy nem-parallelizálható 3-szövet linearizálhatóságának szükséges és elégséges feltételét a szövet Chern-konnexiója és annak legfeljebb 6-odrendű deriváltjai bizonyos polinomjainak közös gyökei segítségével.

A síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságával más módszerrel szintén foglalkozott V. V. Goldberg és V. V. Lychagin, akik egy cikkükben kétségbe vonták a jelölt korábbi eredményeit. Egy konkrét példát hoztak fel állítólagos ellenpéldaként, amelyik a jelölt eredményei szerint linearizálható, Goldberg és Lychagin eredményei szerint ellenben nem az. Erre válaszul írt két cikkben a jelölt megmutatta, hogy a vitatott példa valóban linearizálható: először egy bizonyos tenzormező létezésén keresztül indirekten, majd egy konkrét linearizációt mutatva.

2 Az eredmények értékelése

A Finsler-sokaságok elmélete a modern differenciál-geometria egy ma is nemzetközileg aktívan kutatott területe, amelynek megalapozásában részt vettek mások mellett Fields-érmes matematikusok (J. Douglas, S.-S. Chern) is. A téma kutatásának hazánkban Debrecenben van régóta hagyománya. A jelölt az 1990-es évek vége óta foglalkozik ezzel a területtel, és munkája nemzetközileg elismert. Ezt jól mutatja, hogy a bemutatott eredmények olyan rangos lektorált nemzetközi folyóiratokban jelentek meg társszerzős vagy önálló közleményként, mint pl. a Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (CRAS), a Differential Geometry and its Applications, a Canadian Mathematical Bulletin, az Annales de l'Insitut Fourier (Grenoble), a Journal of Mathematical Physics, a Journal of the Australian Mathematical Society, a Houston Journal of Mathematics, az International Journal of Mathematics, a Forum Mathematicum, s. í. t.

A disszertáció struktúrája jól követhető, ám a téma speciális volta miatt a részletek csak a szűk szakterület szakértői számára érthetők. A használt módszerek felölelik a klasszikus differenciál-geometria főbb eszközeit, úgymint Euler–Lagrange egyenletek, altér-disztribúciók és Frobenius integrálhatósági tétele, holonómia-leképezések és -csoport, a görbületi tenzor Finsler-sokaságokra vonatkozó speciális változata. E klasszikus eszköztáron túlmenően használja továbbá a 20. századi matematika számos vívmányát, mint például a differenciál-rendszerek elmélete, a Frölicher–Nijenhuis formalizmus, a Spencer–Goldschmidt-elmélet, s. í. t. A jelölt kellőképpen ismeri és hivatkozza a terület szakirodalmát.

A tézisfüzetben megfogalmazott 6 tézis mindegyikét elfogadom új eredménynek, ám minthogy a 3., 4. és 5. tézisek szervesen összefüggenek, ezért véleményem szerint nem feltétlenül tekintendők külön téziseknek. Ezen tézisek mindegyike a disszertációban részletesen kifejtésre kerül, és jelentősen előremozdítják a terület megértését. A pályázó bebizonyította többek között (2.6.2. Tétel) a geodetikus struktúra projektív merevségét, azaz hogy egy Finlser-metrizálható spray rögzített projektív tényezővel vett deformáltjainak legfeljebb 0-mértékű halmaza Finsler-metrizálható. Az irodalomban elsőként határozott meg konkrétan végtelen-dimenziós Finsler holonómia-csoportot (ld. 3.8.4. Tétel), továbbá megválaszolta Chern és Shen egy nyílt kérdését. Megadott egy felső korlátot a nem-parallelizálható síkbeli 3-szövetek linearizációinak projektív ekvivalencia erejéig vett számára (4.3.6. Tétel), javítva ezzel G. Bolnak a Gronwall-sejtés irányába mutató 1930-ból származó becslésén. Külön kiemelésre érdemes, hogy a pályázó 2006 és 2018 között egy tudományos vitában szembekerült a téma elismert orosz kutatóival, amely vitában végül az ő álláspontja bizonyult helyesnek (4.4. szakasz).

Mindezen szempontokat figyelembe véve, a benyújtott mű eleget tesz a Magyar Tudományos Akadémia Doktora cím elnyerésére támasztott feltételeknek, így javaslom nyilvános vitára bocsájtását.

3 Kérdések

1. A Riemann-geometriai kutatások egy fontos iránya a Ricci-görbületre vonatkozó egyenlőtlenségek és a sokaság algebrai topológiai tulajdonságainak kapcsolatát vizsgálja, ld. pl. a Myers-tételt és a Bochner-formula következményeit. Az értekezés 2.4. szakasza Finsler-metrizálhatóságot vizsgál speciális Ricci-görbületi feltételek mellett. Felhasználhatók-e az értekezés eredményei a Finsler-metrika Ricci-görbületére vonatkozó egyenlőtlenségek és a sokaság algebrai topológiája közötti összefüggések bizonyítására?

2. Található-e olyan magasabb-dimenziós Finsler-sokaság, amelynek holonómiacsoportja valamilyen értelemben bővebb a kör diffeomorfizmus-csoportjánál?

3. Konkrét példák esetén meg lehet-e határozni a 4.3.6. Tétel bizonyításában szereplő $Q_1, \ldots, Q_7$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és ezáltal a megfelelő síkbeli 3-szövet linearizációinak számát?

Szabó Zoltán