Válasz Lempert László bírálatára

Köszönöm Lempert Lászlónak a disszertációm igen alapos áttanulmányozására fordított idejét, fáradozását és részletes bírálatát. A bírálatban megfogalmazott kérdéseit, megjegyzéseit és kritikai észrevételeit igyekszem maradéktalanul megválaszolni. Annak érdekében, hogy a bírálat egyes kérdései, észrevételei minél pontosabban és a szövegösszefüggéseivel együtt jelenjenek meg, ezeket keretezett formában emelem át az eredeti bírálat szövegéből. A válaszokban szereplő számozott hivatkozások a disszertáció irodalomjegyzékére, míg a betűvel jelzett hivatkozások a válasz végén található irodalomjegyzékre utalnak.

Válaszok a bírálat „Értékelés" részében megfolgalmazott kérdéseire és észrevételeire

1.

> Az ertekezes tobb orszagban—Europaban, Amerikaban, Azsiaban—is kutatott tudomanyteruleteken kinal megoldasokat vagy legalabb reszmegoldasokat alapveto problemakra. Amennyire meg tudom allapitani, az eredmenyek ujak, bar az elso fejezet egyik foeredmenyenek (Theorem 1.3.5) es Sarlet & al. 1982–as es 1998–as cikkeinek [78, Theorem 6], [79] a kapcsolatat nem latom at. Az ertekezes szinvonala altalaban, az eredmenyek jelentosege es a bizonyitasok megbizhatosaga nem egyenletes.

Az 1.3.5 tételben megfogalmazott eredmény teljesebb és mélyebb, mint a Sarlet és társszerzőinek az eredményei. Teljesebb, mert az algebrai feltételek egy jóval szélesebb rendszerét szolgáltatják, és mélyebb, mert felfedik a variációs multiplikátorra vonatkozó algebrai feltételek gradált Lie-algebra struktúráját. Konkrétan a [78, Theorem 6] cikkben a disszertáció (1.29) formulájában bevezetett $\mathcal{A}_S$ gradált Lie-algebra legelső (azaz $\mathcal{A}_S^1$) szintjén szereplő feltételei, míg [79]-ben az előző feltételek mellett a második $\mathcal{A}_S^2$ szint egy része – a görbületi tenzorok és ezek deriváltjai – jelennek meg. A [79] dolgozat ugyan (tévesen) azt állítja, hogy a kapott feltételek az algebrai feltételek teljes rendszerét szolgáltatja, de ezt az állítást későbbi publikációiban Sarlet és társszerzői bizonyos értelemben maguk is korrigálják. A függelékben szereplő kérdésekre adott 7.) válaszában ezt részletesebben is kifejtem.

2.

> hatoak. Az elso fejezet ujdonsaga, hogy invariansan, tehat lokalis koordinataktol fuggetlenul definialt fogalmakkal dolgozik, a Frölicher–Nijenhuis es Grifone bevezette formalizmust felhasznalva. (Mas, de lokalis koordinataktol szinten joreszt fuggetlen targyalas mar [79]–ben is talalhato.) Ez esztetikailag ketsegkivul elorelepes. Mivel azonban a fejezet eredmenyei lokalisak, nem vilagos, mennyivel hatekonyabb az invarians fogalmak hasznalata a koordinatakkal definialt fogalmaknal. (A fuggelekben mutatok egy peldat arra, hogy az invarians targyalas a 92. oldalon hogyan bonyolithat el egy bizonyitast.)

Az invariáns és koordinátamentes tárgyalás nagyban segíti a belső kapcsolatok, összefüggések, geometriai tulajdonságok felismerését. Különösen igaz ez az első fejezetben tárgyalt variációszámítás inverz problémájára, hiszen a probléma a magasabb dimenziós esetekben egy erősen túldeterminált másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldhatóságára vezethető vissza: már a kezdeti lépésben az ismeretlen Lagrange-függvényre vonatkozó $n(=\dim M)$ egyenletből álló rendszert kell vizsgálnunk, az első kompatibilitási feltételek számításakor további $\frac{n(n-1)}{2}$, majd újabb $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ feltételt kapunk. Az invariáns tárgyalás segítségével fel lehet ismerni a geometriai tartalmat (megjelenik az asszociált konnexió horizontális struktúrája, a görbülete, stb), illetve a kompatibilitási feltételek belső összefüggéseit (1.3.5 tétel).

3.

> A negyedik fejezetben termeszetesen imponalo, hogy az orosz iskola szovet–tanászaival folytatott versenyben Muzsnay es munkatarsai kerultek ki gyoztesen, az altaluk talalt szukseges es elegseges feltetel szovetek linearizaciojara a vitatott szovetre helyes eredmenyt adott, mig az ellenfeleke szemmel lathatolag hibasat. Ezzel egyutt a fejezet komplikalt foeredmenyenek (Theorem 4.3.5) a jelentosege nem vilagos. A vitatott szovet linearizalhatosagat Dufour trivialisnak nem mondhato modon de: ket sorban direkten is bebizonyitotta (Remark 4.4.1). Amikor Theorem 4.3.5–ot a jelolt szovetek altalanosabb vizsgalatara akarja alkalmazni, a bizonyitasok hianyosak maradnak, ld. a fuggelekben a 87. oldalhoz fuzott masodik megjegyzesem es a Theorem 4.3.6–hoz fuzott megjegyzesem.

V.V. Goldberget valóban lehet szövet-tanászként jellemezni, hiszen több nemzetközi kiadónál megjelent, részben vagy egészben szövetgeometriai témájú könyvnek [Gol88, AG93, AG96, AG00] és számos szövetgeometria témájú cikknek a szerzője, de az általam mind emberileg, mind szakmailag nagyra becsült V.V. Lychaginról ez nem mondható el: ő a parciális differenciálegyenletek nemzetközi hírű szakértője, 1996 óta az Orosz Tudományos Akadémia tagja.

A síkbeli 3-szövetek linearizációja egy több mint 100 éve vizsgált probléma. A parallelizálható 3-szövetek szép geometriai és analitikus jellemzése ellenére sokáig nyitott kérdés volt, hogy hogyan lehet karakterizálni a linearizálható 3-szöveteket. A 4.3.5 tétel jelentősége abban áll, hogy a linearizálhatóságot meghatározó PDE rendszer vizsgálatával elsőként sikerült a linearizálhatóságot leíró egyenletek teljes rendszerét meghatározni, és ezzel belátni, hogy – projektív transzformációktól eltekintve – legfeljebb 15 különböző linearizációja lehet egy nem parallelizálható 3-szövetnek.

A vitatott konkrét szövet eredetileg a cikkünkben egy pár soros megjegyzésként jelenik meg mint egy nem triviális példa linearizálható, de nem parallelizálható szövetre [GMS01, p.2653]. Jelentősége akkor nőtt meg, amikor az orosz szerzőpáros több cikket is publikált ebben a témában, és bár a vizsgálati módszerük és az eredményeik hasonlóak voltak, mégsem egyeztek a mi korábbi eredményeinkkel. Ennek bizonyítására a szerzők az általunk adott példát hozták fel, mely – ellentétben a mi állításunkkal – az általuk kidolgozott elmélet szerint nem linearizálható. A szövetet linearizáló diffeomorfizmus konkrét ismerete nélkül a linearizálhatóság bizonyítása nem könnyű, hiszen a diffeomorfizmus létezését kell belátni [Muz08]. Szerencsés véletlen, hogy a kérdéses szövetet linearizáló diffeomorfizmust J.-P. Dufour ismerte, és ezzel utólag megerősítette eredményeinket. A fent említett kétsoros bizonyítás nem más, mint annak leellenőrzése, hogy az általa ismert konkrét diffeomorfizmus valóban linearizálja a konkrét szövetet.

A 4.3.5 tétel bizonyítására vonatkozó konkrét megjegyzések a függelékben szerepelnek, így ezeket ott részletesen megválaszolom.

Válaszok a bírálat „Függelék" részében megfolgalmazott kérdéseire és észrevételeire

4.

> 5. oldal. A szerzo itt bevezeti a fél–spray es a spray fogalmat, ez utobbinak egy extra homogenitasi tulajdonsaga van. A tovabbiakban azonban kizarolag spray–krol beszel. Ez rendben is van, amikor az utolso bekezdesben az indukalt konnexiot definialja, a definicio spray–kre megegyezik a hivatkozott Grifone cikkben [46] talalhatoval. Ha jol ertem, fel–spray eseteben a konnexio maskeppen definialando. Azonban a 7. oldal azt allitja, hogy (1.17), (1.18) szerint egy Lagrange fuggveny meghataroz egy spray–t. Mivel itt a Lagrange fuggvenyrol homogenitas nincs felteve, a formulak spray-t nem, csak fel–spray–t definialhatnak.
>
> Namost az irodalomban a "spray"–rol neha nincs feltetelezve a homogenitas, peldaul a jelolt cikkeben [113]. Gondolom, ez okozza a kavarodast az ertekezesben. A kerdesem az, hogy az ertekezes 1.3 alfejezeteben most mit is jelent a spray? Ha az eredmenyeket valojaban fel–spray–re kellene kimondani, nem kell–e modositani az indukalt konnexiora vonatkozo formulat, es ha kell, hogyan befolyasolja ez a tovabbiakat?

A szakirodalomban valóban nem egységes a terminológia, a spray fogalom a homogén és a nem homogén esetre egyaránt használatos attól függően, hogy milyen témára fókuszál a szerző, és ez tetten érhető a cikkeimben is. Sajnos a disszertáció elkészítéskor erre nem figyeltem, és több helyen megmaradt az eredeti elnevezés és így az értelemzavaró pontatlanság. Így például a teljes 1.3 alfejezetben spray helyett fél-sprayt kellene használni. Az indukált konnexió definíciója mind a spray, mind a fél-spray esetén azonos $\Gamma = [J, S]$, ahol J a vertikális endomorfizmus, S a spray, vagy fél-spray [Gri72, Proposition 1.41]. A formulák helyesen szerepelnek a disszertációban.

5.

> Definition 1.2.1. A definicio itt globalisan definialt Lagrange fuggvenyrol beszel. Mivel a vizsgalatok itt es kesobb (de az altalam olvasott irodalomban) is szinte kizarolagosan lokalisak, jobb lenne itt is es masutt is a disszertacioban ezt vilagossa tenni, es peldaul csak lokalisan definialt Lagrange fuggvenyt megkovetelni. A legmegfelelobbnek a "fuggveny-csirak" nyelvezete tunik.

A variációs elvet általában globálisan definiált Lagrange függvényből szokás származtatni, ezért az inverz probléma esetén is természetes ennek feltevése. A szakirodalomban ez az általánosan használt terminológia. Viszont az is igaz, hogy – különösen a variációs elv létezésére vonatkozó – eredmények sok esetben lokálisak, melyre fel kell hívni az olvasó figyelmét (pl. a disszertáció 1.5.3 tétele, [GM00, Thm 6.1], [GM00, Thm 7.2]).

6.

> (1.23) Jol latom, hogy az elso egyenletben a dg_{ij}/dt tag elhagyando?

A formulában szereplő $\frac{d}{dt}g_{ij}$ szimbólum a variációs multiplikátornak a fél-spray által meghatározott görbesereg $x(t)$ görbéi mentén vett totális deriváltját jelöli. Ennek megfelelően a formulából még idő-független Lagrange-függvények esetén sem hagyható el $\left(\frac{d}{dt}g_{ij} = \sum_k \dot{x}^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \sum_k \ddot{x}^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right)$.

7.

> Theorem 1.3.5. Ez a tetel szukseges feltetelt ad arra, hogy egy (fel?–)spray variacios legyen (azaz Lagrange fuggvenybol szarmazzon). Hogy viszonyul ez a tetel Sarlet & al. [78,79]–beli eredmenyeihez? [78, Theorem 6] szukseges es elegseges feltetelt ad az ugynevezett multiplikator letezesere. Ugyan Theorem 1.3.5 nem hasznalja a multiplikator fogalmat, ennek letezese ekvivalensnek tunik azzal, hogy a tekintett fel–spray variacios. Hasonloan, [79, Theorem 1] szerint "The complete set of integrability and passivity conditions associated with the Helmholtz equations... are...." Az eltero szohasznalat ellenere ez megint, ugy tunik, azt a kerdest valaszolja meg, amit Theorem 1.3.5, azzal a kulonbseggel, hogy [79] a feltetelek szukseges es elegseges voltat is allitja.

A fél-sprayhez tartozó variációs multiplikátor létezése ekvivalens a fél-spray variációs tulajdonságával, így [78, 79] cikkek témája és eredményei az általunk is (más eszközökkel és más oldalról) vizsgált problémára vonatkoznak. [79]-ben W. Sarlet és szerzőtársai valóban azt állítják, hogy az általuk talált feltételek (a Jacobi tenzor és deriváltjai, illetve a görbületi tenzor és deriváltjai) a variációs multiplikátorra vonatkozó összes algebrai feltételt tartalmazzák. Ez ellentmondásban van az 1.3.5 tételünkkel. A W. Sarlettel folytatott beszélgetéseken többször felmerült ez az állításuk, különösen a Transactions of AMS-ben megjelent [STP02] cikke után, ahol eredményeiket részben erre alapozva kapták. Az igazság az, hogy [79]-ben a szerzők tévesen állítják az általuk kapott feltételek teljességét. Később ezt ők maguk is belátják, hiszen [79]-beli állításukat az „*Addendum to: „The integrability conditions in the inverse problem of the calculus of variations for second-order ordinary differential equations*" című [SC00] cikkükben már árnyalják: a 223. oldalon azt találjuk, hogy „*The completeness of the scheme only applies when the ordering which is selected is proper and no degeneracy occurs in the second-order passivity conditions*". W. Sarlet és szertőtársai [APST06]-ben az általa [79]-ben még teljesnek vélt algebrai feltételeken túl további algebrai feltételeket talál (Proposition 4.2). Ezeket az algebrai feltételeket tartalmazza az 1.3.5 tételünk, és erre Sarlet cikkében találunk is utalást [APST06, 12. oldal 8-9 sor].

8. Corollary 1.3.6. A $\geq$ egyenlotlenseg $>$–re valtoztatando, ezt adja a bizonyitas, es igy is szerepel az eredmeny a jelolt [113] cikkeben[1].

Valóban " $>$ " kell, hogy szerepeljen az állításban.

9. Corollary 1.3.7. Az egyenlotlensegnek a [113]–ban adott bizonyitas szerint itt is szigorunak kell lennie. Ezzel kapcsolatosan az a kerdesem, hogy az uj egyenlotlensegek valoban tovabbi megszoritast adnak a spray–re ahhoz, hogy lokalisan variacios legyen? Konkretan, van–e olyan spray (vagy fel–spray?) amire a Corollary 1.3.6–ban szereplo rang $\leq n(n+1)/2$ nemcsak x–ben, de egy kornyezeteben is, es ezert Corollary 1.3.6 szerint meg variacios is lehetne; de a Corollary 1.3.7 eredmenye ezt megis kizarja?

Konkrét példát nem ismerek, de elképzelhető, hogy lehet ilyet konstruálni az alábbi alapján [GTM04]: tekintsünk egy olyan ∇ lineáris konnexió autoparallel görbeseregét, melynek $R \neq 0$ görbületére $\nabla R = 0$. Ekkor a sprayből származó tagok közül egy jelenik meg az első szinten ($\Phi \in \mathcal{A}^1_S$), és kettő jelenik meg a második szinten ($R, [\Phi, \Phi] \in \mathcal{A}^2_S$). Ennek mintájára olyan esetben, ahol a görbületnek valamilyen magasabb rendű szimmetriája van elképzelhető, hogy az első szinten megjelenő $\{\Phi^1, \ldots, \Phi^k\}$ esetén ezek rangja még a kritikus érték alatt, de a kommutátorokat tartalmazó $\mathcal{A}^2_S$ rangja már a kritikus érték felett lesz. Nem a konkrét kérdésre ad példát, de mégis érdemes itt megjegyezni, hogy lehet olyan példát adni, ahol az $\mathcal{A}^1_S$ szintjén megjelenő algebrai feltételek nem zárják ki a variációs elv létezését, de a $\mathcal{A}^2_S$ algebrai feltételei igen ([GTM04, 12. oldal], [APST06, 18. oldal]).

10. 13. oldal. Az utolso bekezdes hivatott a variacios szabadsag fogalmat bevezetni, mint bizonyos $\mathcal{E}_S \subset C^\infty(TM)$ fuggvenyhalmaz rangjat. Ez utobbi ugy van definialva, mint az a ν szam, amivel "for every $v_0 \in TM$ there exists a neighborhood $U \subset TM$ and functionally independent $E_1, \ldots, E_\nu \in \mathcal{E}_S$ on U such that any $E \in \mathcal{E}_S$ can be expressed as $E(v) = \varphi\big(E_1(v), \ldots, E_\nu(v)\big)$ for all $v \in U$, with some function $\varphi : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$." A definiciot tobb oknal fogva nem talalom kielegitonek.

Mar maganak $\mathcal{E}_S$–nek a maghatarozasa sem egyertelmu, hogy tudniillik az ot alkoto E fuggvenyekrol kikotjuk–e a regularitast. (1.33) ezt nem koveteli meg, de az elozo bekezdes ezzel az $\mathcal{E}_S$ halmazzal es a segitsegevel definialt ν szammal tervezi merni, hogy "how many different regular Lagrange functions exist for a given spray". Proposition 1.4.2 csak ugy helyes, ha (1.33–1.34)–et szo szerint ertjuk es a regularitast nem koveteljuk meg. Ha viszont elejtjuk a regularitasi megszoritast, akkor ν mit fog elarulni a regularis Lagrange fuggvenyek halmazanak a mereterol? (Az se vilagos, hogy $\mathcal{E}_S$ definicioja globalis vagy lokalis. (1.33) egyertelmuen globalis, es $\mathcal{E}_S$–t a $C^\infty(TM)$ vektorter egy reszhalmazakent definialja; az oldal utolso bekezdeseben irtak mintha azt sugallnak, hogy $\mathcal{E}_S$–re mint egy kevere vagy elokevere kell gondolnunk.)

Jól ismert jelenség, hogy vannak olyan másodrendű differenciálegyenlet-rendszerek, melyekhez nemcsak egy, hanem akár több variációs elv is tartozik. Természetes módon merül fel tehát a kérdés, hogy ez milyen geometrai tulajdonságokon múlik, és hogyan lehet ezt geometriai eszközökkel meghatározni. Erre a problémára vonatkozó eredményeket a szakirodalomban nem találtam, ez motiválta a variációs, illetve metrizációs szabadságfok fogalmának bevezetését és vizsgálatát.
Ahogy az a definícióban szerepel, az $\mathcal{E}_S$ elemei globálisan (a TM-en) értelmezett Lagrange-függvények, melyekre nincs előírva regularitási feltétel. Ennek megfelelően természetesen nem igaz, hogy ennek a halmaznak egy tetszőleges eleme egy variációs elvet származtatna a fél-spray számára. Még az sem igaz, hogy ha $\mathcal{E}_S$ nem üres halmaz, akkor lenne $\mathcal{S}$-hez variációs elv. Viszont igaz a bírálatban is említett vektortér struktúra és igaz, hogy amennyiben van megoldás, akkor az ennek egy eleme. A ν abban az értelemben ad információt a reguláris Lagrange függvények halmazának a méretéről, hogy amennyiben a fél-spray variációs – azaz van egy E reguláris eleme $\mathcal{E}_S$ halmaznak – akkor megmondja, hogy hány független variációs elv létezik. (Az E-t az $\mathcal{E}_S$ elemeivel lehet mintegy „deformálni" és a megfelelő feltételek mellett új, független variációs elvet kapni.)

11.

> Visszaterve ν definiciojara, nincs elmagyarazva, mit is jelent itt a funkcionalis fuggetlenseg, ill. fuggoseg. A kovetkezo definiciot tudom elkepzelni. Egy X differencialhato sokasagon ertelmezett $f_1, \ldots, f_k$ fuggvenyek *egy $x \in X$ pontban* funkcionalisan osszefuggenek, ha a $(f_1(x), \ldots f_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ pont valamely kornyezeteben letezik egy Φ valos erteku (sima??) fuggveny, hogy egyfelol $\Phi(f_1, \ldots, f_k) = 0$, masfelol $\Phi(y_j) \neq 0$ valamely $y_j \to (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ sorozat menten. Ez az a fogalom, amivel a jelolt dolgozik?

A kérdésben használt jelölést követve a Φ sima függvényre a $d\Phi \neq 0$ feltételt szokás előírni. Az $f_1, \ldots, f_k$ függvények függvény függetlensége ekvivalens azzal, hogy a parciális deriváltjaikból álló mátrix rangja k ([Fik65, 209.o], [Arn92, 127.o]). Differenciálegyenletek és mechanikai rendszerek vizsgálatában ez egy viszonylag gyakran felmerülő fogalom [Pon62, Arn78].

12.

> Ha a ν definiciojaban szereplo fogalmakat tisztaztuk, felmerul a kerdes, miert is letezik az oldal utolso bekezdeseben leirt tulajdonsagokkal rendelkezo ν szam. Nincs kizarva, hogy azokra a specialis $\mathcal{E}_S$ fuggvenyhalmazokra, amikre a problema vezet, a kivant tulajdonsagu ν letezik, bar errol az ertekezes nem szol. Egy altalanos $\mathcal{E}_S \subset C^\infty(TM)$ alter eseten azonban nem latom, meg egy rogzitett v_0 eseten se, hogy mi garantalja ν letezeset. Az pedig egeszen vilagos (ebben az altalanos esetben), hogy ν erteke valtozhat, ha v_0 valtozik.

Valóban előfordulhat, hogy a kívánt tulajdonságú (globálisan definiált) ν nem létezik. Eredményünk egyik érdekessége éppen az, hogy rávilágít arra, mi az a geometriai struktúra, aminek segítségével a ν (akár lokálisan, akár globálisan) meghatározható. Ez pedig nem más, mint a sprayhez asszociált konnexió görbületi tenzorának képterét is tartalmazó $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ holonómia disztribúció, melyet az (1.35) formula definiál. A 2-homogén függvények esetén ugyanis az Euler–Lagrange-tulajdonság megegyezik a holonómia-invariáns tulajdonsággal (1.4.1. állítás), és a holonómia-invariáns függvényeket jellemezni lehet azzal, hogy a $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ elemei ezek infinitezimális szimmetriái. Így a $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ segítségével lokálisan is vizsgálhatjuk a ν értékét, és a $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ disztribúcióra megfogalmazott globális feltételek mellett garantálni tudjuk a metrizálható (általánosabban a variációs) sprayk esetén a ν globális létezését.

13.

> 26. oldal. Az utolso elotti bekezdes vege fele van definialva a Finsler metrizalhatosag fogalma. Az azonban nem vilagos, hogy itt F letezeset hol tetelezzuk fel? Az egesz TM erintonyalabon, annak egy alkalmas nyilt $U \subset M$ feletti reszen vagy pedig TM egy alkalmas nyilt reszhalmazan? Peldaul Theorem 2.5.1, ugy tunik, csak $\mathcal{T}M$–en lokalisan all (ellentetben az ertekezesbeli megfogalmazassal).

A Finsler-metrika definíciójában globálisan definiált Finsler-függvény szerepel, így az inverz probléma esetén is általában a globális metrika létezését szokás szerepeltetni. Az viszont igaz, hogy az eredmények általában lokálisak. A 2.5.1 tételben a $\mathcal{T}M = TM \setminus \{0\}$ megjelenésére az a magyarázat, hogy Finsler-függvények esetén a TM zérus metszésén – azért, hogy ne redukálódjon Riemann esetre – csak gyengébb ($\mathcal{C}^1$) differenciálhatósági feltételt lehet előírni. Ezért a számításainkat a $\mathcal{T}M$-en tudjuk elvégezni, és a lokális eredményeket a nemzérus vektorok környezeteire kapjuk.

14.

> 27. oldal. A differencialoperatorok formalis integralhatosaganak elmeletet itt linearis operatorokra irja le a jelolt; de a 4. fejezetben nemlinearis operatorokra hasznalja. Kerdesem, hogy milyen valtoztatasokra van szukseg ahhoz, hogy a leirtak valoban hasznalhatoak legyenek a kesobbiekben.

Abban az esetben, ha a parciális differenciálegyenlet-rendszer kvázilineáris, akkor a szimbólum linearitását felhasználva a lineáris esethez hasonlóan lehet a kompatibilitási feltételt számítani. A kvázilineáris esetben szintén használható (a lineáris szimbólum magjának segítségével bevezetett) involutivitás, illetve 2-aciklikusság, mely arról ad információt, hogy van-e magasabb rendű kompatibilitási feltétel vagy nincs, azaz teljesül-e, hogy a prolongált rendszer kompatibilitási feltétele megegyezik a kompatibilitási feltétel prolongáltjával. A 4. fejezetben a P_2 egyenletrendszere nem involutív, ezért magasabb szinten a prolongált rendszernek új kompatibilitási feltétele jelenik meg (a (4.12) egyenlet), míg a P_3 rendszer már involutív. Ezek alapján meg lehet mutatni, hogy abban az esetben, ha a szövet Chern-konnexiójának görbülete zérus, akkor P_3 formálisan integrálható. Meg kell jegyezni, hogy itt a rendszer meglehetősen egyszerű, így direkt számolással is megmutatható, hogy tetszőleges k-ad ($k \geq 3$) rendű megoldás felemelhető egy $k+1$-ed rendű megoldássá, azaz a P_3 formálisan integrálható.

15.

> Theorem 2.4.2. Ennek kimondasa ertelmezhetetlen. Spray-k egy osztalyara tekint bizonyos tulajdonsagokat, nevezzuk egyuttesuket (P)–nek (isotropy, condition A and $d_J\alpha = 0$). A tetel szerint (P) akkor es csak akkor all, ha bizonyos (i)...(v) feltetelek ekvivalensek. Namost az, hogy (P) all–e, egy konkret spray–re vonatkozik; azt, hogy (i)...(v) ekvivalensek–e, spray–k egy bizonyos osztalyan lehet lemerni. Az akkor es csak akkor allitas egyik oldala tehat egy spray–re, a masik oldala spray–k egy csaladjara vonatkozik, ezek koze "akkor es csak akkor"–t nem lehet tenni—kiveve, ha a tekintett csalad egyetlenegy spray–bol all. De nem errol van szo, mint az itt elhagyott, de [99]–ben megtalalhato bizonyitasbol kiderul. Az azt mutatja, hogy a (P) tulajdonsaggal rendelkezo spray–k csaladjara (i)...(v) ekvivalensek; es valamennyire megforditva, ha egy spray–re (iv) teljesul, akkor (P) is.

A 2.4.2. tétel valóban tulajdonságok két csoportjának ekvivalenciájáról szól, de a bírálatban megfogalmazott értelmezéssel ellentétben mindkét tulajdonságcsoport egy adott $\mathcal{S}$ sprayre vonatkozik. A kérdésben használt jelölést követve a (P) tulajdonság az $\mathcal{S}$ spray görbületére mond ki feltételeket, az (i) ...(v) tulajdonságok pedig az $\mathcal{S}$-hez tartozó metrizálhatósági tulajdonságokat sorolja fel. Azért, hogy ez utóbbi egyértelmű legyen, minden egyes (i) ...(v) tulajdonságnál explicite fel lett tüntetve az $\mathcal{S}$ spray. A tétel tehát azt mondja ki, hogy amennyiben az $\mathcal{S}$ spray rendelkezik a (P) tulajdonsággal, akkor rendelkezik az (i) ...(v) tulajdonságokkal is, és fordítva: ha az $\mathcal{S}$ rendelkezik az (i) ...(v) tulajdonságokkal, akkor rendelkezik a (P)-vel is.
A 2.4.2. tétel következményeként görbületi feltétellel tudunk jellemezni sprayk olyan osztályát, melyek egyszerre rendelkeznek bizonyos speciális metrizálhatósági tulajdonságokkal.

16.

> Theorem 2.7.5 bizonyitasa. A Szabo tetelebol kapott Riemann metrika miert lesz balinvarians?

A Szabó Zoltán tételében szereplő Riemann-metrika meghatározható a Berwald-metrika indikátrixon vett integrálja segítségével [Vin05, Theorem 1.]. Ennek következtében amennyiben a Berwald-metrika baleltolással szemben invariáns, akkor az eredményül kapott Riemann-metrika is baleltolással szemben invariáns.

17.

> Theorem 3.6.5. Ugy tunik nekem, hogy a tetelhez csak arra van szukseg, hogy a holonomiacsoport (lezartja) kompakt legyen, nem szukseges feltetelezni, hogy Lie–csoport. Viszont felmerul a kerdes, hogy ha a kompaktsag feltetelet hagyjuk el, de megkoveteljuk, hogy a holonomiacsoport vagy lezartja Lie–csoport legyen, kovetkezik–e, hogy F Riemann metrika.

A Riemann esettel szemben a konstans görbületű Finsler-terek igen nagy változatosságot mutatnak. Ez még akkor is igaz, ha a konstans értékét $\mathbf{K} = 1$, $\mathbf{K} = 0$, illetve $\mathbf{K} = -1$-ben rögzítjük [She02], illetve további geometriai megszorításokat teszünk. Z. Shen például megmutatta, hogy végtelen sok, egymással nem lokálisan izometrikus, konstans görbületű, síkprojektív Finsler-metrika létezik [She03]. Ezért a konstans görbületű Finsler-terek holonómia-tulajdonságainak általános vizsgálata egy igen nehéz probléma. Ugyanakkor vannak már eredményeink, melyek segítségével a kompaktság feltételezése nélkül, a holonómiacsoport lezártjának Lie-csoport tulajdonságával tudjuk jellemezni a konstans görbületű síkprojektív esetet. A disszertáció 3.7.5 tétele alapján ugyanis igaz, hogy egy nemzérus konstans görbületű, síkprojektív Finsler-metrika holonómiacsoportja pontosan akkor (véges dimenziós) Lie-csoport, ha a metrika Riemann típusú. Megjegyezzük, hogy ilyen karakterizációra az általános esetben nem lehet számítani, hiszen vannak olyan nem Riemann típusú Finsler-metrikák (például a Berwald- és Landsberg-metrikák), melyeknek a holonómiacsoportja Lie-csoport [Koz00].

18.

> 76. oldal. A (3.53) utani harmadik sor Remark 3.7.1–re hivatkozik. Ez nem helyes, a kerdeses megjegyzes az itt szukseges implikacionak a forditottjat tamasztja ala. A helyes hivatkozas Muzsnay–Nagy [122]–es cikkebol Remark 2.1.

Valóban, a 3.7.1. megjegyzés első mondatában a projektív faktor linearitására vonatkozó „akkor és csak akkor" észrevétel után következő mondat már csak az egyik irányra vonatkozó állítást fogalmaz meg, pedig a projektív faktor és a Finsler-függvényre vonatkozó [CS05, Lemma 8.2.1] alapján itt is „akkor és csak akkor" típusú kapcsolat van a projektív faktor linearitása és a Finsler-metrika energiafüggvényének kvadratikussága (és így a metrika Riemann-tulajdonsága) között. Ha ez így szerepelt volna a megjegyzésben, akkor lett volna korrekt a (3.53) formula utáni hivatkozás.

19.

> Theorems 3.7.5, 3.7.9. Itt nyugodtan elhagyhato az egyszeres osszefoggoseg feltetele, hiszen minden M sokasag lefedheto egyszeresen osszefuggo nyilt halmazokkal, es az azokra allo eredmenybol kovetkezik az M–re vonatkozo is.

Valóban elhagyható az egyszeres összefüggőség feltétele, és így általánosabb tételt kapunk. Köszönöm a tétel kiterjesztésére vonatkozó észrevételt.

20.

> Proposition 3.8.2. Az egyszeres osszefuggoseg helyett elegendo feltenni, hogy M iranyithato. Ha M nem iranyithato, akkor viszont az adott feltetel mellett a holonomiacsoport lezartja az $\mathcal{I}_x$ indikatrix teljes diffeomorfizmus–csoportja lesz.
>
> De az allitas megfogalmazasa hagy kivannivalot maga utan. (3.64)–nek ellentmondva, a holonomiacsoport es lezartja nem a korvonal, hanem az indikatrix diffeomorfizmus–csoportjanak resze. Az igaz, hogy ez a ket diffeomorfizmus–csoport izomorf, de nem kanonikusan, es ugyanez all a Lie–algebrajukra. Ha ez valoban igy van, akkor mit ertsunk azon, hogy a korvonal Fourier–algebraja resze az indikatrix holononomia–algebrajanak?

A 3.8.2 állítás arra a speciális esetre vonatkozik, amikor az x pontban az indikatrix ténylegesen egy euklideszi norma által meghatározott egységkör, és az infinitezimális holonómia-algebra tartalmazza a Fourier algebrát. Ez az állítás szükséges ugyanis ahhoz, hogy a 3.8.3 tételt bizonyítsuk: a tételben megköveteljük egy speciális x_0 pont létezését, amiről kiderül, hogy a feltételek miatt x_0-ban az indikatrix egy euklideszi normára vonatkozó egységkör, és az infinitezimális holonómia-algebra tartalmazza a Fourier-algebrát. Azonban általánosabb keretek között is meg lehet fogalmazni a tétel állítását: amennyiben egy irányítható Finsler felület egy x pontja környezetében van olyan koordinátarendszer (diffeomorfizmus az $\mathbb{R}^2$ egy nyílt tartományára), melyre igaz, hogy az indukált érintőleképezésnél az $\mathcal{I}_x$ indikatrix képe az $\mathbb{S}^1$ és az infinitezimális holonómia-algebra képe tartalmazza a Fourier-algebrával izomorf részalgebrát, akkor a holonómiacsoport lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával.

21.

> Theorem 3.8.3. Itt megint szuksegtelen feltenni, hogy M egyszeresen osszefuggo. A bizonyitas ketsegkivul ugyes szamolas, de felmerul a kerdes, hogy lehet–e a tetel eredmenyet nagyobb altalanossagban is bizonyitani, amikor explicit formulak nem allnak a rendelkezesre. Peldaul igaz–e, hogy egy generikus Finsler metrikara a holonomia nemcsak hogy vegtelen dimenzios, mint Hubicska–Matveev–Muzsnay cikkeben, hanem a lezartja egyenesen megegyezik az indikatrix (iranyitastarto) diffeomorfizmus–csoportjaval. Ezzel kapcsolatos kerdes, hogy ez a megegyezes stabil tulajdonsag–e, a metrika kis perturbaciojaval meg lehet–e szuntetni.

A végtelen dimenziós holonómia stabilitásával kapcsolatban egyenlőre annyit tudtunk bizonyítani, hogy minden $\mathcal{C}^m$ ($m \geq 8$) topológiára nézve van a végtelen dimenziós holonómiacsoporttal rendelkező Finsler-metrikáknak egy olyan mindenütt sűrű $\mathcal{F}$ részhalmaza, ami nyílt [HMM20, Theorem 1.1]. Magának a végtelen dimenziós holonómiacsoporttal rendelkező Finsler-metrikák halmazának a nyíltságát még nem sikerült belátnunk. Az [HMM20, Theorem 1.1] eredményei ugyanakkor azt mutatják, hogy az $\mathcal{F}$ halmazban lévő metrikák holonómiacsoportját érintő holonómia algebra, mint az indikatrix vektormezőinek egy részalgebrája meglehetősen generikus: az indikatrix vektormezőinek egy tetszőleges k-ad rendű jet-je esetén van olyan eleme, amely az adott k-ad rendű jet-et realizálja. Ez alapján megalapozottnak tűnik a sejtés, miszerint generikus esetben az irányítható Finsler-sokaság holonómiacsoportjának a lezártja megegyezik az indikatrix irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával.

22. 84. oldal. Az utolso bekezdes Shennek tulajdonitott eredmenye, ahogy itt van megfogalmazva, nem helyes. A leirt tulajdonsagu Randers sokasagok nem feltetlen izometrikusak az egyseggombon ertelmezett (3.66) metrikaval. Lehetnek izometrikusak az itt megadott Finsler sokasag egy nyilt reszhalmazaval, vagy akar annak egy fixpont mentes veges izometriacsoport szerinti faktoraval; es talan meg massal is. Shen nem is igy fogalmazza meg az eredmenyet [86]–ban. Helyette azt a homalyos fordulatot hasznalja, hogy "F can be expressed in the following form". Bar Shen bizonyitasat nem olvastam el, gondolom, a valodi tenyallas az, hogy a vizsgalt terek lokalisan izometrikusak a gomb egy, a (3.66)–beli metrikaval ellatott nyilt reszhalmazaval.

Z. Shen eredménye valóban lokális izometria létezését garantálja. A pontatlan hivatkozás ellenére ezt a tényt használjuk fel a 3.8.5 állítás bizonyítása során. A bizonyítás ugyanis a pontbeli infinitezimális holonómia-algebra segítségével történik, ami egy lokális objektum abban az értelemben, hogy a pont egy tetszőlegesen kis környezetére leszűkített Finsler struktúra már meghatározza.

23. 87. oldal. A masodik bekezdesbeli "reduced algebraic curve" valojaban "irreducible"–t jelent?

A szövegben helyesen szerepel a „reduced algebraic curve" kifejezés. Egy ilyen görbe több irreducibilis komponensből is állhat, de ezen irreducibilis komponensek multiplicitása 1. (Az algebrai szövetek konstrukciójáról: [Hé01, 16.o], [PP15, 5.o].)

24. 87. oldal, utolso sor es folytatasa, miszerint $\mathcal{A} \subset S^2T^* \otimes T$ algebrai reszsokasag. Mi ennek az ertelme, es kulonosen mi a bizonyitasa? Ugyan sehol se talaltam a T nyalab definiciojat, ugy gondolom, hogy az az alapsokasag erintonyalabja. Akkor a fentebbi tenzornyalab differencialhato sokasag, de nincs algebrai strukturaja, es ezert nem lehet algebrai reszsokasagairol beszelni. Azt lehetne mondani, hogy mivel az alapsokasag maga $\mathbb{R}^2$, T–nek (ha az tenyleg az erintonyalab) es a tenzornyalabnak is megadhato egy kanonikus trivializacioja, vagyis a totalis ternek azonositasa valamilyen Euklideszi terrel; akkor mar van algebrai struktura, es meg lehet kerdezni, egy reszhalmaza algebrai–e.

De meg ezzel az ertelmezessel is hianyzik annak a bizonyitasa, hogy $\mathcal{A}$ algebrai reszsokasag. A 96. oldalon alulrol 16-14. sor szerint "we arrive at the conclusion that... in the algebraic manifold $\mathcal{A}$...". $\mathcal{A}$ -t valoban a $Q_i = 0$ egyenletek hatarozzak meg, $i = 1, \dots, 7$; a Q_i fuggvenyek valoban polinomok az egyik valtozojukban, s–ben; de nem a tobbiben. Erre alapozva nem allithatjuk, hogy kozos nullahelyuk algebrai varietas. Szintugy azt se, hogy reszsokasag, hiszen ehhez valami regularitast kellene ellenorizni, talan a Q_i fuggvenyek Jacobi matrixanak a rangjanak vizsgalataval. Tekintettel azonban arra, hogy a Q_i–k alakja gyakorlatilag felfoghatatlan, ld. [107, Appendix], ez remenytelen vallalkozasnak tunik, es az ertekezes meg se kiserli.

A T nyaláb valóban az alapsokaság érintőnyalábját jelöli és ennek általános esetben valóban nincs algebrai struktúrája, de a jelen esetben a szövet geometriai struktúrája kijelöli T egy természetes felbontását horizontális és vertikális alterekre, mely a tenzorok természetes paraméterezését eredményezi a megfelelő adaptált koordináták segítségével. Erre a természetes struktúrára illetve koordinátákra nézve (akárcsak az $\mathbb{R}^2$ esetén) beszélhetünk algebrai struktúráról.

Az algebrai sokaság kifejezést olyan értelemben használjuk, hogy minden rögzített pontban a fibrumkoordináta eleget kell, hogy tegyen a felírt algebrai feltételeknek. Hasonló terminológiával találkozunk a [GL05, 172.o 13.sor] és [GL06, 70.o 2. sor] cikkekben, ahol a szerzők a megoldhatóság leírásánál algebrai egyenletekről és algebrai rendszerekről írnak. Természetesen ez itt is csak azt jelenti, hogy a projektív invariáns fibrumkoordinátákra vonatkozóan algebrai a feltétel. A névhasználat viszont valóban nem szerencsés, hiszen például az algebrai geometriában ez a terminológia mást jelent.

25. 88. oldal, utolso bekezdes. A szovet itt megadott definiciojabol a jelolt hibasan kovetkeztet arra, hogy az alapsokasag dimenzioja paros kell, hogy legyen. Pl. $\mathbb{R}^3$–on harom altalanos helyzetu sikkal parhuzamos sikok csaladja kielegiti a megadott definiciot. Ennek a nyelvbotlasnak ugyan nem lesz szerepe a tovabbiakban, de kiabrandito.

Talán félreérthető a megfogalmazás, de az alfejezet első mondatában nem a 3-szövet definíciója szerepel, csak fölteszi, hogy adott egy három szövet, melyben az egyes fóliázásokat (amelyek transzverzálisak) rendre $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ jelöli. A 3-szövet definíciója megtalálható például az ennek a témának szentelt „Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs” című könyvben [AS92b, 1.2 fejezet]. A disszertációban a 3-szövetek egy ekvivalens, számunkra célszerűbb jellemzése szerepel a h, v, j tenzormezők segítségével (88. oldal vége és 89 lap teteje) [Nag01]. A 3-szövetekben szereplő fóliázásokhoz tartozó disztribúciók alterei páronként direkt komplementumok, amiből következik, hogy a 3-szövettel rendelkező sokaság dimenziója páros, és az egyes fóliázások dimenziója a sokaság dimenziójának a fele.

26. 90. oldal, elso teljes bekezdes. E csak kesobb lesz bevezetve a 91. oldalon, mint "the bundle of the prelinearizations". Ez kisse pontatlan es felrevezeto megfogalmazas, hiszen az elo–linearizaciok a 89. oldalon tenzormezokent voltak definialva, azok semmifele nyalabot nem alkotnak. Gondolom, a szandek szerint $E \subset \mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ az a resznyalab, aminek szelesei az elo–linearizaciok. Ezzel viszont inkompatibilis az inkriminalt bekezdes $L \in E$ formulaja. Ugy latom, hogy a legegyszerubb az lenne, ha elo–linearizacion nem egy tenzormezot ertenenk, hanem valamely pontbeli tenzort.

Valóban érdemesebb az E-t a $\mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ résznyalábjaként bevezetni. Viszont az elő-linearizáció tenzormezőként való bevezetése azért előnyös, mert így könnyebben meg lehet fogalmazni az elő-linearizáció és a linearizáció közötti kapcsolatot: a linearizáció olyan elő-linearizáció, mely teljesíti a 4.2.1. állítás 4) pontjában szereplő parciális differenciálegyenlet-rendszert.

27. 90. oldal, masodik bekezdes eleje. Eszerint a fentebb diszkutalt—de az ertekezesben hivatalosan meg mindig be nem vezetett—E ter egy M feletti 3 dimenzios vektornyalab. En ugy latom, hogy meg ha a fentiekben javasolt modon is definialjuk E–t, mint egy absztrakt halmazt, akkor se allithatjuk, hogy vektornyalab; ahhoz elobb el kellene latni valami strukturaval. Namost E, mint a $\mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ vektornyalab egy reszhalmaza, ketsegkivul orokol ez utobbitol valami strukturat. De ez a struktura nem resz–vektornyalab struktura, inkabb egy affin resznyalab struktura; ket elo–linearizacionak, mint tenzoroknak, az osszege nem lesz elo–linearizacio.

Az elő-linearizációt karakterizáló egyenletekben, azaz a 4.2.1. Állítás 1), 2), 3) egyenleteiben szereplő h, v, j leképezések (1,1)-típusú tenzormezők, így ezek az egyenletek pontonként homogén lineáris egyenletrendszert adnak az elő-linearizáció komponenseire. Mivel a h, v, j tenzormezőkre tett megszorítások miatt az egyenletrenszerek rangja konstans, így ezek a $\mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ egy rész-vektornyalábját határozzák meg.

28. 91. oldal kozepe. Mi pontosan egy "Frobenius system" definicioja? Tovabba: azt ertem, hogy (4.9) fennallasa szukseges (4.8) megoldhatosagahoz. Ha jol ertem, az ertekezes ugy veszi, hogy elegseges is, abban az ertelemben, hogy ha az s szeles kielegiti (4.9)–et, akkor ezzel az s–sel (4.8)–nak is van z, t megoldasa. Kerdesem, hogy valoban errol van–e szo, es ha igen, az elegsegesseg tényére mi a referencia?

A Frobenius-rendszerek a parciális differenciálegyenlet-rendszereknek egy speciális osztálya, ahol a megoldás visszavezethető közönséges differenciálegyenlet-rendszerek megoldására [Spi99, 6.fejezet]. Ezért a Frobenius-tételben megfogalmazott kompatibilitási feltételek teljesülése nemcsak szükséges, hanem elegendő is a megoldás létezéséhez. Az egy meglepő eredmény, hogy a (4.8) egyenletrendszer kompatibilitási feltételei – némi algebrai átalakítás után – kifejezhetőek az s projektív invariáns segítségével ((4.9) egyenletek). Így ha s egy olyan 2-változós függvény, amelyik teljesíti ezeket az egyenleteket, akkor a (4.8) egyenletrendszernek egyértelműen létezik t és z megoldása.

29. 92. oldal, Proposition 4.3.1 bizonyitasa. Ez pelda arra, amikor az invarians absztrakt targyalas foloslegesen elbonyolitja a bizonyitast. Az ertekezesbeli bizonyitas homomorfizmusok es kommutativ diagrammok feallitasa mellett meg egy pontosabban meg nem hatarozott es nem kozolt homologikus algebrai ervelesre is hivatkozik. Minderre nincs szukseg. A kovetkezorol van szo. Jeloljuk a sikon a koordinatakat u, v–vel; legyen adott egy $Q(u, v)$ masodfoku polinom, ugy, hogy az $s = Q$ fuggveny kielegiti (4.9)–et az origoban. Proposition 4.3.1 azt allitja, hogy ekkor letezik egy H 3–rendben homogen polinom, hogy $s = Q + H$ az origoban masodrendben elegiti ki (4.9)–et (vagyis $O(u^2 + v^2)$ hibaval; ezt a tovabbiakban $O(2)$–vel jeloljuk). Ezt igy latjuk be:

Amikor (4.9)–ben $s = Q$–rol $s = Q + H$–ra terunk at, az s_{11}, s_{21}, s_{22} tagok egy linearis taggal valtoznak; a tobbi tag csak $O(2)$–vel. Ezert H-t ugy kell valasztanunk, hogy $H_{22} - 2H_{21}$ es $H_{11} - 2H_{21}$ adott linearis formak legyenek. Hogy pontosan mik, azt Q hatarozza meg. Ha $H(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$, akkor a feltetelekben vizsgalva u, v egyutthatoit, a kovetkezo egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$2c - 4b = \text{adott}, \quad 3d - 4c = \text{adott}, \quad 3a - 4b = \text{adott}, \quad 2b - 4c = \text{adott}.$$

De ez egyszeru: az elso es utolso egyenletbol meghatarozzuk b–t es c–t, a maradekbol pedig a–t es d–t.

Valóban nem egyszerűsíti ennél a lépésnél az állítás igazolását az invariáns absztrakt tárgyalás, de talán az egységes szemlélet miatt nem érdemes áttérni ennél a lépésnél egy másik tárgyalási módra.

30. 96. oldal, Theorem 4.3.5 elotti sorok. Ezek bizonyos Q_i polinomoknak a fokat adjak meg. Kerdes, hogy a megadott szamok valoban a megfelelo polinomok fokaval egyeznek–e meg, vagy annak csak felso becsleset adjak. A [107] fuggelekeben megadott kifejezesekbol nem konnyu leolvasni, hogy e polinomok foegyutthatoja minden esetben valoban kulonbozik–e 0–tol, es se az ertekezes, se az alapul szolgalo [107] nem foglalkozik ezzel a kerdessel.

Ezeknek a polinomoknak az együtthatói általában igen bonyolult kifejezések (a 3-szövet görbülete és deriváltjai jelennek meg a függvényekben), melyekről nem tudjuk kijelenteni, hogy speciális esetekben nem lehetnek nullák, ezért valóban úgy kellett volna fogalmazni, hogy a polinomok fokszáma legfeljebb az adott érték.

31. Theorem 4.3.6. Ennek a tetelnek a 96. oldalon talalhato egysoros bizonyitasa azon mulik, hogy a linearizacios problema megoldasaban szereplo Q_2 polinom foka 15, ezert legfeljebb 15 gyoke van. Valojaban azonban nem lett bebizonyitva, hogy ez a fok 15, de meg az se lett kizarva, hogy Q_2 azonosan eltunjon; igy a tetel bizonyitasa hianyosnak tunik.

A bizonyításban játszott kardinális szerepe miatt a Q_2 polinomot alaposan megvizsgáltuk. A polinom formulája a disszertáció 96. oldalán található, ahol a formulában szereplő A_i, B_i, C_i, D_i együtthatók a 3-szövet görbületi tenzorából és deriváltjaiból számítható függvények. A formulából adódik, hogy az s-ben polinomiális kifejezésnek konstans tagja zérus, az elsőrendű tag együtthatója pedig $\mathcal{R}D^2$. A görbületre tett feltétel miatt sem az $\mathcal{R}$, sem a D nem lehet azonosan zérus. Ezek alapján a Q_2 polinom egy legfeljebb 15-öd fokú nem azonosan zérus polinom, és a 4.3.6 tétel bizonyítása teljes.

32.

> Az ertekezes harom fejezeteben kozos, hogy termeszetesen felvetodo geometriai kerdesekre a valasz az, hogy ilyen vagy olyan problema megoldhatosagahoz az adatoknak valamilyen parcialis differencialegyenlet–rendszert kell kielegiteniuk. Ugyan ezeket a differencialegyenleteket roviden meg lehet fogalmazni, tartalmuk gyakran nagyon bonyolult, es nem vilagos, mennyire alkalmazhatoak a geometriai objektumok vizsgalatara. Gyakran a feltetelek elegsegessege csak az analitikus kategoriaban varhato. A problemakhoz valo ilyen hozzaallas, ugy latom, a temaban elegge altalanos, ha nem kizarolagos. Ennek ellenere felmerul az a gondolat, hogy a felvetett kerdesekre a valaszt mas terminusokban is kereshetnenk.
>
> Hogy pontosan milyenekben, arra nincs megalapozott javaslatom. De peldaul a sikbeli szovetek linearizaciojanak problemajaban talan ertelmes a kovetkezo “Dirichlet problema”, vagy ha nem ertelmes, hat valami modositasa. Legyen adott egy korvonal menten egy szovet. Lehet–e ezt linearizalhato szovetkent egyertelmuen kiterjeszteni a hatarolt korlapra?
>
> A kerdesem az, hogy ismer–e a jelolt a temaban ilyen iranyu probalkozasokat, vagy pedig olyan eredmenyeket, amik azt mutatjak, hogy a felvetett irany zsakutcaba vezet.

A szövetek linearizációjának Dirichlet-problémaként való megfogalmazásáról, illetve ilyen típusú eredményekről nincs tudomásom. Ugyanakkor ezt a problémát többen és többféle eszközzel próbálták már megközelíteni, illetve megoldani (például a külső differenciálrendszerek és differenciálformák elméletével [Gol89], infinitezimális szimmetriák segítségével [Aga20], Mayer-zárójel segítségével [KL02], Cartan-konnexió és projektív differenciálinvariánsok segítségével [Aga19]), de ezek nem adtak jobb eredményt az általunk elérteknél. Az eredményeink azt mutatják, hogy a probléma mélyén valamilyen – a bonyolultsága miatt még kevéssé átlátott – algebrai feltétel van. Ezért úgy gondolom, hogy a linearizálhatóság feltételének mélyebb megértéséhez nem feltétlenül a parciális differenciálegyenlet-rendszerek elméletén, hanem a szövethez kapcsolható egyéb, esetleg algebrai struktúrák vizsgálatán keresztül vezethet az út.
A linearizálhatóság problémájának első lépése – a linearizálhatósági feltételek meghatározása – lezárult. A feltételekben megjelenő függvények alkalmasak lehetnek arra, hogy speciális görbületű szövetosztályokat jelöljenek ki. Érdemes lenne ezen speciális görbületi tulajdonságokkal rendelkező szöveteket tovább vizsgálni (létezés, geometriai tulajdonságok, stb.). Ilyen típusú vizsgálatokban akár a probléma Dirichlet-típusú feladatként való interpretálása is eredményre vezethet.

Debrecen, 2021. június 5.

Muzsnay Zoltán

Muzsnay Zoltán

Hivatkozások

[Aga20] S.I. Agafonov: *Gronwall's conjecture for 3-webs with infinitesimal symmetries.* Comm. Anal. Geom., 28(3): 519–545, 2020.

[Aga19] S.I. Agafonov: *Projective invariants of linear 3-webs and gronwall's conjecture*, arXiv 1708.01996, 2017.

[AG93] M.A. Akivis and V.V. Goldberg: *Projective differential geometry of submanifolds*, volume 49. Amsterdam: North-Holland, 1993.

[AG96] M.A. Akivis and V.V. Goldberg: *Conformal differential geometry and its generalizations.* New York, NY: John Wiley & Sons, 1996.

[AG00] M.A. Akivis and V.V. Goldberg: *Differential geometry of webs.* In Handbook of differential geometry. Vol. I, pages 1–152. Amsterdam: North-Holland, 2000.

[AS92b] M.A. Akivis and A.M. Shelekhov: *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, volume 82 of Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. With an appendix by E.V. Ferapontov, Translated from the Russian by Vladislav V. Goldberg.

[APST06] J.E. Aldridge, G.E. Prince, W. Sarlet, and G. Thompson: *An EDS approach to the inverse problem in the calculus of variations.* J. Math. Phys., 47 (10):103508, 22, 2006.

[Arn78] V.I. Arnol'd: *Mathematical methods of classical mechanics.* volume 60. Springer, New York, NY, 1978.

[Arn92] V.I. Arnol'd: *Ordinary differential equations.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992.

[CS05] S.-S. Chern and Z. Shen: *Riemann-Finsler geometry*, volume 6 of Nankai Tracts in Mathematics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.

[Fik65] G.M. Fikhtengol'ts: *The fundamentals of mathematical analysis.* Vol. II. Translated by Ann Swinfen. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. Vol. 73). Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt: Pergamon Press, XXI, 518 p. (1965)., 1965.

[GL05] V.V. Goldberg and V.V. Lychagin: *On linearization of planar three-webs and Blaschke's conjecture.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 341(3):169–173, 2005.

[GL06] V.V. Goldberg and V.V. Lychagin: *On the Blaschke conjecture for 3-webs.* J. Geom. Anal., 16(1):69–115, 2006.

[GM00] J. Grifone and Z. Muzsnay: *Variational principles for second-order differential equations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000. Application of the Spencer theory to characterize variational sprays.

[GMS01] J. Grifone, Z. Muzsnay, and J. Saab: *On the linearizability of 3-webs.* In Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 4 (Catania, 2000), volume47, page 2643–2654, 2001.

[Gol88] V.V. Goldberg: *Theory of multicodimensional* $(n+1)$*-webs.* Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[Gol89] V.V. Goldberg: *On a linearizability condition for a three-web on a two-dimensional manifold.* In Differential geometry (Peñí scola, 1988), volume 1410 of Lecture Notes in Math., page 223–239. Springer, Berlin, 1989.

[Gri72] J. Grifone: *Structure presque-tangente et connexions.* I. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 22(1):287–334, 1972.

[GTM04] R.Ghanam, G.Thompson, and E.J. Miller: *Variationality of four-dimensional Lie group connections.* J. Lie Theory, 14(2):395–425, 2004.

[HMM20] B.Hubicska, V.S. Matveev, and Z.Muzsnay: *Almost all finsler metrics have infinite dimensional holonomy group.* The Journal of Geometric Analysis, September 2020.

[Hé01] A. Hénaut: *Analytic web geometry.* In Web theory and related topics (Toulouse, 1996), page 6–47. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[KL02] B. Kruglikov and V. Lychagin: *Mayer brackets and solvability of PDEs.* I. Differential Geom. Appl., 17(2-3):251–272, 2002. 8th International Conference on Differential Geometry and its Applications (Opava, 2001).

[Koz00] L.Kozma: *On holonomy groups of Landsberg manifolds.* Tensor (N.S.), 62(1):87–90, 2000.

[Muz08] Z. Muzsnay: *On the problem of linearizability of a 3-web.* Nonlinear Anal., 68(6):1595–1602, 2008.

[Nag01] P.T. Nagy: *Webs and curvature.* In Web theory and related topics (Toulouse, 1996), pages 48–91. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[Pon62] L.S. Pontryagin: *Ordinary differential equations. Translated from the Russian by L.Kacinskas and W.B.Counts.* Adiwes International Series in Mathematics. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley Publishing Company; London-Paris: Pergamon Press. VI, 298 p. (1962)., 1962.

[PP15] J.V. Pereira and L. Pirio: *An invitation to web geometry*, volume2 of IMPA Monographs. Springer, Cham, 2015.

[SC00] W.Sarlet and M.Crampin: Addendum to: „The integrability conditions in the inverse problem of the calculus of variations for second-order ordinary differential equations" [Acta. Appl. Math. **54** (1998), no. 3, 233–273; MR1671779 (99m:58072)] by Sarlet, Crampin and E. Martínez. Acta Appl. Math., 60(3):213–224, 2000.

[She02] Z. Shen: *Two-dimensional Finsler metrics with constant flag curvature.* Manuscripta Math., 109(3):349–366, 2002.

[She03] Z. Shen: *Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature.* Trans. Amer. Math. Soc., 355(4):1713–1728, 2003.

[Spi99] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Houston, TX: Publish or Perish, 3rd edition, 1999.

[STP02] W. Sarlet, G. Thompson, and G.E. Prince: *The inverse problem of the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas's analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., 354(7):2897–2919, 2002.

[Vin05] Cs. Vincze: *A new proof of Szabó's theorem on the Riemann-metrizability of Berwald manifolds.* Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), 21(2):199–204, 2005.