Válasz Karátson János bírálatára

Mindenekelőtt szeretném megköszönni Karátson Jánosnak, hogy alaposan áttanulmányozta és értékelte a disszertációmat. Bírálatában két kérdést fogalmazott meg.

Kérdés 1. *A jellemzéseket szolgáltató több fő eredmény esetében is érdemi megszorító feltételt kell tenni a görbületre (konstans, ill. egyikben lehet skalár): 2.4.1., 2.4.3., 3.8.3. és 3.8.6. tételek. E megszorítások lényegesek-e, mennyire van esély ezek enyhítésére?*

Válasz. A disszertáció 2.4 és 3.8 fejezeteiben megjelenő görbületi feltételek oka lényegesen különböző. A variációszámítás inverz problémája, illetve ezen belül a metrizálhatósági probléma vizsgálata során ugyan gyakran kell feltételt tenni a fél-spray, illetve spray görbületére ahhoz, hogy ne csak szükséges, hanem elegendő feltételeket is adhassunk a megoldás (lokális vagy globális) létezésére, a 2.4 fejezet esetén azonban nem ez a speciális feltételek oka. Itt a vizsgálatokat a konstans, illetve skalár görbületű metrikák geometriai tulajdonságainak vizsgálata motiválta. Az ilyen típusú metrikák esetén a $\mathbf{K}(P,y)$ zászlógörbület (Riemann esetben a szekcionális görbület) speciális tulajdonságú: konstans görbületű esetben $\mathbf{K}(P,y)=c\in\mathbb{R}$, azaz független a ponttól, az iránytól és a síkállástól, skalár görbület esetén $\mathbf{K}(P,y)=\lambda(x,y)$ azaz független a síkállástól. A zászlógörbületet definiáló formula az $y\in T_xM$ irány és az y-t tartalmazó $P=\mathrm{span}\{y,u\}\subset T_xM$ sík esetén:

$$\mathbf{K}(P,y)=\frac{\mathbf{g}_y(u,\mathbf{R}_y(y,u))}{\mathbf{g}_y(y,y)\mathbf{g}_y(u,u)-\mathbf{g}_y(y,u)^2}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{g}$ a metrikát, $\mathbf{R}$ pedig a metrikából származó kanonikus konnexió görbületét jelöli. A formulából jól látható, hogy a konstans és skalár görbületi tulajdonság a *metrika tulajdonsága*. Nagyon érdekes kérdés az, hogy milyen megszorítást jelent ez a geodetikus struktúrára nézve, és fel lehet-e ismerni csupán a paraméterezett görbesereg, illetve annak egyenletrendszere ismeretében, hogy az egy konstans, vagy egy skalár görbületű Finsler- vagy Riemann-metrika geodetikusainak a görbeserege. A 2.4 fejezet ezekre a kérdésekre keresi a választ és ad szükséges és elégséges feltételt a 2.4.1. és 2.4.3. tételekben.

A 3.8 fejezetben a görbületre tett feltételek technikai jellegűek: ezekben az esetekben a geodetikus struktúra és a görbület is speciális alakú, aminek felhasználásával sikerült a végtelen dimenziós holonómiacsoportot meghatároznunk. Ugyanakkor a speciális görbületi feltételek mellett kapott eredményeket felhasználva sikerült a Finsler-terek holonómiájára vonatkozó általános eredményeket is kapnunk [B. Hubicska, V.S. Matveev, Z. Muzsnay: *Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group*. J. Geom. Anal, 2020.]. A további vizsgálatok során tervezzük a görbületi feltételek enyhítését.

Kérdés 2. *Az 1.4.3 tétel által le nem fedett esetekben is igaz-e, hogy egy variációs szabadságfok szükségképpen csak véges lehet?*

Válasz. A bevezetett terminológia alapján, amennyiben a variációs szabadságfok létezik, akkor annak az értéke véges: maximálisan az alapsokaság dimenziója lehet. Azonban előfordulhat, hogy a variációs szabadságfok (globálisan) nem létezik, mert lokálisan vizsgálva különböző pontok környezetében más és más ennek az értéke. Ezzel a jelenséggel találkozhatunk, ha a paraméterezett görbesereg, illetve a fél-spray geometriai struktúrája (a görbülete) változik. Az általunk vizsgált esetben azonban nem ez a helyzet: a variációs szabadságfok (globálisan) létezik, mivel feltételezzük a párhuzamos eltolás és a görbületből származtatható holonómia disztribúció regularitását.

Debrecen, 2021. június 5.

Muzsnay Zoltán

Muzsnay Zoltán