Válasz Szabó Szilárd bírálatára

Mindenekelőtt szeretném köszönetemet kifejezni Szabó Szilárdnak, hogy alaposan áttanulmányozta és értékelte a disszertációmat. A bírálatában három kérdést fogalmazott meg.

Kérdés 1. *A Riemann-geometriai kutatások egy fontos iránya a Ricci-görbületre vonatkozó egyenlőtlenségek és a sokaság algebrai topológiai tulajdonságainak a kapcsolatát vizsgálja, ld. pl. a Myers-tételt és a Bochner-formula következményeit. Az értekezés 2.4. szakasza Finsler-metrizálhatóságot vizsgál speciális Ricci-görbületi feltételek mellett. Felhasználhatók-e az értekezés eredményei a Finsler-metrika Ricci-görbületére vonatkozó egyenlőtlenségek és a sokaság algebrai topológiája közötti összefüggések bizonyítására?*

Válasz. A 2.4 fejezet vizsgálatait a konstans, illetve skalár görbületű metrikák geodetikus struktúrájának jobb megértése és megismerése motiválta: fel lehet-e ismerni csupán a paraméterezett görbesereg ismeretében azt, hogy az egy konstans, vagy egy skalár görbületű Finsler- vagy Riemann-metrika geodetikusainak a görbeserege. A vizsgálatok és az eredmények lokális volta miatt sajnos ezeket globális tulajdonságok igazolására nem lehet alkalmazni.

Kérdés 2. *Található-e olyan magasabb-dimenziós Finsler-sokaság, amelynek holonómiacsoportja bővebb a kör diffeomorfizmus-csoportjánál?*

Válasz. Ha tekintjük az n-dimenziós gömb belsejében definiált Funk-metrikát [3, 12.o], akkor annak bármilyen origóra illeszkedő kétdimenziós síkmetszete a Funk-síkot származtatja. A disszertáció 3.8.4 tétele alapján a 2-dimenziós Funk sík holonómiacsoportjának lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportjával. Ez azt mutatja, hogy az n-dimenziós Funk-metrika holonómiacsoportjának lezártja bővebb, mint a kör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportja. A holonómiacsoportot érintő holonómia-algebra vizsgálata alapján a sejtésünk az, hogy az n-dimenziós gömb belsejében definiált Funk-metrika holonómiacsoportjának lezártja izomorf az $\mathbb{S}^{n-1}$ irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával. Ez a jelenség valószínűleg általánosabban is igaz. Az n-dimenziós esetre sikerült igazolnunk, hogy generikus esetben a Finsler-metrikák holonómiacsoportja végtelen dimenziós és minden $\mathcal{C}^m$ $(m \geq 8)$ topológiára nézve van olyan végtelen dimenziós holonómiacsoporttal rendelkező Finsler-metrikáknak egy mindenütt sűrű $\mathcal{F}$ halmaza, ami nyílt $\mathcal{C}^m$-ben [2, Theorem 1.1]. A bizonyításból kiderül, hogy az $\mathcal{F}$ metrikáihoz tartozó holonómia-algebrák minden k-ra $(k \geq 1)$ rendelkeznek az indikatrix vektormezőin az úgynevezett k-jet generáló tulajdonsággal, azaz tetszőleges pont és tetszőleges k-ad rendű jet esetén van olyan eleme a holonómia-algebrának, amely az adott k-jetet realizálja. Ez azt mutatja, hogy a holonómia-algebra bizonyos értelemben „közel van” az indikatrix vektormezőinek Lie-algebrájához, és így az várható, hogy a holonómia csoport is „közel van” az $n-1$-dimenziós indikatrix irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjához. A sejtésünk az, hogy generikus esetben egy irányítható Finsler-sokaság holonómiacsoportjának a lezártja megegyezik az indikatrix irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával.

Kérdés 3. *Konkrét példák esetén meg lehet-e határozni a 4.3.6. Tétel bizonyításában szereplő $Q_1, \ldots, Q_7$ polinomok legnagyobb közös osztóját, és ezáltal a megfelelő síkbeli 3-szövet linearizációinak számát?*

Válasz. A $Q_1, \ldots, Q_7$ függvények a projektív invariáns s paraméterre vonatkozólag ugyan polinomiális kifejezések, de az együtthatófüggvények a szövet görbületének és deriváltjainak meglehetősen bonyolult függvényei. Konkrét esetenként ezek mégis alkalmasak lehetnek, hogy adott szövetről eldöntsük, hogy linearizálható-e vagy sem [1, 2654 oldal, példa (1),(2)]. Olyan esetekre egyenlőre nincs példa, ahol a 3-szövet görbülete nemzérus, és a legnagyobb közös osztó fokszáma (és így az egymással nem projektív ekvivalens linearizációk száma) legalább kettő lenne. Ha ilyet sikerülne találni, az azt jelentené, hogy a Gronwall-sejtés – miszerint egy nem parallelizálható síkbeli 3-szövet (projektív transzformáció erejéig) legfeljebb egyféleképpen linearizálható – nem igaz. Érdemes lenne tehát ezeket a polinomokat tovább vizsgálni, mert segítségükkel közelebb juthatunk a mintegy 100 éves probléma megoldásához.

Debrecen, 2021. június 5.

Muzsnay Zoltán

Muzsnay Zoltán

Hivatkozások

[1] J. Grifone, Z. Muzsnay, and J. Saab. *On the linearizability of 3-webs.* In Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 4 (Catania, 2000), volume 47, page 2643–2654, 2001.

[2] B. Hubicska, V.S. Matveev, and Z. Muzsnay. *Almost all finsler metrics have infinite dimensional holonomy group.* The Journal of Geometric Analysis, Sept. 2020.

[3] S.-S. Chern and Z. Shen. *Riemann-Finsler geometry*, volume 6 of Nankai Tracts in Mathematics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.