A bírálóbizottság értékelése

Muzsnay Zoltán doktori értekezésében a sokaságok differenciálgeometriájának olyan problémáival foglalkozik, amelyek tárgyalásában központi szerepet játszanak a problémákra jellemző differenciálegyenlet-rendszerek. Ezen kutatási területek közé tartozik a variációszámítás inverz problémája, a Finsler-geometria és a holonómia elmélet, melyeknek fizikai háttérük is van. Az vizsgált problémákban elért eredményei alapján a jelölt hat tézist fogalmazott meg a tézisfüzetben. A bizottság álláspontja a tézisek elfogadásával kapcsolatosan az értékelés második részében szerepel.

Az értekezés négy fejezetből áll, melyek közül az első kettő a variációszámítás inverz problémájához kapcsolódik. A sokaságok esetében a probléma tárgyalásához az érintőnyalábokon vett spray mezőket alkalmazzák, mivel ezek geodetikus görbéit lokális térképezésben egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet megoldásaként nyerjük. A témában a jelölt egyik alapvető eredménye az 1.3.5. Tétel, amelyben a vektorértékű differenciálformák Lie-algebráját alkalmazva szükséges feltételeket ad meg a variációs spray mezőre, illetve a keresett Lagrange-függvényt meghatározó variációs multiplikátorra. Vizsgálatainak további tárgya, hogy amennyiben egy spray mező variációs, akkor a neki megfelelő Lagrange-függvények halmaza lokálisan hány függvénnyel generálható. Ennek kapcsán bevezeti a variációs szabadságfok fogalmát. A jelölt 1.4.3. Tétele azt mondja ki, hogy metrizálható spray mező esetén a 2-homogén Lagrange-függvények variációs szabadságfoka megegyezik a holonómia disztribúció kodimenziójával.

A Lie-csoportok esetében a kanonikus balinvariáns spray mezőkre is vizsgálható az inverz variációs probléma. A jelölt az 1.5.3. Tételben egy szükséges és elégséges feltételt ad meg a baloldali csoporthatással szemben invariáns Lagrange-függvény létezésére.

A disszertáció második fejezete azt a problémát vizsgálja, hogy egy spray mező geodetikus görbéi mikor esnek egybe egy a sokaságon vett Finsler-metrika geodetikus görbéivel, illetve mikor igaz az, hogy ezek a geodetikusok irányítástartóan átparaméterezhetőek egymásba. Az ilyen tulajdonsággal bíró spray mezőket nevezik metrizálhatónak, illetve projektív metrizálhatónak. A jelölt egyik eredménye a 2.3.3. Tétel, amely egy szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy a spray mező lokálisan metrizálható legyen. A szerző kiterjeszti vizsgálatait a Landsberg-metrizálhatóság kérdésére és a 2.3.5. Tételben erre a speciális esetre is ad egy kritériumot. A spray mező projektív metrizálhatóságára pedig a 2.5.1. Tételben mond ki egy szükséges és elégséges feltételt.

Az értekezés a metrizálhatóság kérdését bizonyos görbületi követelmények estében is tárgyalja. A 2.4.3. Tételben a jelölt megadja annak egy kritériumát, hogy egy spray mező mikor metrizálható nem zérus skalár görbületű Finsler-metrikával. Ezen tétel bizonyítása egyben egy algoritmust is ad, melynek segítségével a spray mezőhöz tartozó skalár görbületű Finsler-metrika megkonstruálható. A módszerek alkalmasak olyan Finsler-metrikák keresésére, amelyek megfelelnek a Hilbert negyedik problémájában szereplő követelménynek. Muzsnay Zoltán lényegi eredményt ért el azon kérdés vizsgálatában is, hogy amennyiben a Finsler-metrikából nyert geodetikus spray mezőn projektív transzformációt hajtunk végre, akkor az így nyert spray mező metrizálható lesz-e. Az értekezés 2.6.2. Tétele szerint a geodetikus spray mező merev, mivel a transzformációval nyert spray mezők általában nem metrizálhatóak.

A harmadik fejezet a Finsler-sokaságok holonómia csoportjára vonatkozó eredményeket mutatja be. A jelölt az általa bevezetett új fogalmakat és eszközöket alkalmazza vizsgálataihoz. Az egyik fontos eredmény a 2-nél nagyobb dimenziójú esetre vonatkozó 3.6.5.

Tétel, miszerint ha a konstans (de nem 0) görbületű Finsler-sokaság holonómia csoportja megegyezik egy kompakt Lie-csoporttal, akkor az egy Riemann-sokaság. Ily módon a jelölt megválaszolja két neves matematikus, S. S. Chern és Z. Shen, 2005-ből származó problémáját, hogy van-e olyan Finsler-sokaság, amelynek holonómia csoportja nem egyezik meg egyik Riemann-sokaság holonómia csoportjával sem. A jelöltnek a témában elért másik fontos eredménye a konstans görbületű és lokálisan síkprojektív Finsler-sokaságokra vonatkozó 3.7.9. Tétel, miszerint a holonómia csoport akkor és csak akkor véges dimenziós, ha a metrika Riemann-féle vagy a görbület 0. A 3.8.3. és 3.8.4. Tételek speciális Finsler-felületekre vonatkoznak és azt mondják ki, hogy azok holonómia csoportjának lezártja izomorf az egységkör irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával. A 3.8.6. Tétel ezt az eredményt terjeszti ki a nem Riemann-féle, konstans (de nem 0) görbületű és síkprojektív Randers-felületek holonómia csoportjára.

Az értekezés negyedik fejezete a síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságának problémáját tárgyalja, vagyis azt a kérdést, hogy egy síkbeli tartományon vett transzverzális fóliázás mikor vihető át diffeomorfizmussal egy egyenesek által alkotott 3-szövetbe. A probléma egy parciális differenciálegyenlet-rendszer vizsgálatára vezethető vissza az ún. Chern-konnexió segítségével. A jelölt a 4.3.5. Tételben egy szükséges és elégséges feltételt mond ki a nem parallelizálható 3-szövetek linearizálhatóságára. Ezt követően egy felső becslést határoz meg a linearizáló transzformációk számára a 4.3.6. Tételben.

A jelölt alább felsorolt tézisei közül három a disszertáció harmadik fejezetében szereplő eredményekhez kötődik, a további tézisek külön fejezetek eredményeihez kapcsolódnak.
1. Tézis. Megadjuk a variációs multiplikátorra vonatkozó algebrai feltételek széles rendszerét és meghatározzuk homogén sprayk 2-homogén variációs szabadságfokát, karakterizáljuk Lie-csoportok kanonikus struktúrájának variációs tulajdonságát.
2. Tézis. Megadjuk a Finsler- és Landsberg-metrizálhatóság feltételét, karakterizáljuk a konstans és a skalár görbületű Finsler-metrizálhatóságot, valamint Lie-csoportok, illetve geodetikus orbit struktúrák invariáns metrizálhatóságát és projektív metrizálhatóságát.
3. Tézis. A diffeomorfizmus-csoport részcsoportjaihoz tartozó érintő Lie-algebra bevezetésével új módszert adunk a diffeomorfizmus-csoport részcsoportjainak vizsgálatára, melyet sikeresen alkalmazunk Finsler-sokaságok holonómia csoportjának vizsgálatában.
4. Tézis. Megmutatjuk, hogy a Riemann- és Finsler-sokaságok holonómia struktúrája nagyon eltérhet egymástól azonosítva olyan Finsler-felületeket, melyek holonómia csoportja maximális, azaz lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportjával.
5. Tézis. Karakterizáljuk a véges illetve végtelen dimenziós holonómia csoportú konstans görbületű, síkprojektív Finsler-sokaságokat és megadjuk a konstans görbületű, síkprojektív Randers-felületek holonómia csoportjait.
6. Tézis. Megadjuk a síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságának feltételét és megmutatjuk, hogy egy nem parallelizálható 3-szövet esetén legfeljebb 15 különböző linearizáció létezhet.

A bírálóbizottság elfogadja a jelölt első öt tézisét és részben a hatodik tézisét.
A 6. Tézisnek csak a második részét fogadja el, miszerint „megmutatjuk, hogy egy nem parallelizálható 3-szövet esetén legfeljebb 15 különböző linearizáció létezhet."

A bizottság álláspontja, hogy a jelölt lényegi eredményeket ért el a spray mezők Finsler-metrizálhatóságának és a geodetikus struktúrák merevségének kérdésében, továbbá a Finsler-sokaságok holonómia csoportjának vizsgálata terén. A Finsler-sokaságok holonómia csoportjaira vonatkozó tételeinek súlyát nagyban növeli, hogy ezen a területen korábban igen kevés eredmény született és a jelölt új, effektív módszereket vezetett be a vizsgálatokhoz. Ezáltal konkrét Finsler-felületek esetére tudta igazolni, hogy a holonómia csoportjuk végtelen dimenziós. A hatodik tézis részleges elfogadásának oka az, hogy a 4.3.5. Tétel bizonyításával kapcsolatban feltett egyik kérdés nem lett kielégítően megválaszolva.