Biralat Muzsnay Zoltán "Applications of Differential Systems in Geometry" cimu disszertaciojarol*

1 Az ertekezes leirasa

Az ertekezes 4 fejezetbol all, melyekben a szerzo 2005 ota, idonkent tarsszerzokkel irt cikkeinek az eredmenyeit ismerteti. Az elso ket fejezet rokon temat dolgoz fel. Egy kelloen sokszor differencialhato $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fuggveny a $C^1([a,b] \to \mathbb{R}^n)$ teren meghataroz egy valos erteku $\mathcal{E}$ funkcionalt,

$$\mathcal{E}(x) = \int_a^b E\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt, \qquad x \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^n\big);$$

tehat itt x egy folytonosan differencialhato $\mathbb{R}^n$ erteku fuggveny az $[a,b]$ szakaszon. Euler es Lagrange szerint a funkcional kritikus pontjai (vagy extremalisai) egy masodrendu kozonseges differencialegyenletet elegitenek ki. Ha E_1, E_2–vel jeloljuk az E fuggveny elso ill. masodik n valtozoja szerinti parcialis derivaltjainak a vektorat, akkor az Euler–Lagrange egyenlet(rendszer) igy nez ki:

$$\partial_t E_2\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = E_1\big(x(t), \dot{x}(t)\big).$$

A variacioszamitas inverz problemaja egy altalanos $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ masodrendu kozonseges differencialegyenletrendszerbol indul ki, es azt vizsgalja, eloall–e valamilyen E "Lagrange fuggveny" Euler–Lagrange egyenletekent (pontosabban: ekvivalens–e az Euler–Lagrange egyenlettel). A problema termeszetes felvetese ennel kicsit altalanosabb, F egy M sima sokasagba kepzo $x : [a,b] \to M$ lekepezesre vonatkozo masodrendu differencialegyenlet es E a sokasag TM erintonyalabjan (vagy annak egy nyilt reszen) ertelmezett fuggveny.

A disszertacio a kerdest Helmholtz 1887–es cikketol szarmaztatja. Ugyan a cikket nem tudtam elerni, el tudom kepzelni, hogy ilyen altalanossagban a problemat elsokent Helmholtz

*Elnezest kerek az ekezetek hianyaert.

vetette fel. A tema azonban joval korabban kezdodott, egyik elso eredmenyet Fermat fogalmazta meg, amennyiben egy valtozo optikai tulajdonsagu kozegben halado fenysugar trajektoriajat egy variacios elvbol vezette le. Fermat elvet aztan Maupertuis es masok vittek at mechanikai rendszerekre, a "legkisebb hatas elve"–kent. Ugy tudom, hogy vegul Lagrange mutatta meg a XVIII. sz. masodik feleben, hogy altalanos mechanikai rendszerek kozervativ erok hatasa alatti mozgasat leiro Newton egyenletek mind Lagrange fuggvenybol szarmaztathatoak (es ezzel megteremtette a Lagrange mechanikat).

Az ertekezes elso elso fejezete ezzel az inverz problemaval foglalkozik, azzal az extra feltetellel, hogy a keresett E Lagrange fuggvenynek az erintonyalab rostjain vett Hess matrixa nem fajulhat el sehol. Az el nem fajulasi feltetel a temaban termeszetes feltevesnek szamit, es az ertekezesben kesobb is elojon. Theorem 1.3.5 szukseges felteteleket talal arra, hogy egy $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ differencialegyenlet egy E Lagrange fuggvenybol szarmazzon. A fejezet ket tovabbi kerdessel foglalkozik. Egyfelol, hogy mennyi szabadsagunk van E megvalasztasaban, mar ha legalabb egy alkalmas Lagrange fuggveny letezik. Masfelol, tetszoleges M Lie–csoport kanonikusan meghataroz egy $x : [a, b] \to M$ fuggvenyekre vonatkozo masodrendu differencialegyenletet; a kerdes most az, hogy ez a differencialegyenlet szarmaztathato–e Lagrange fuggvenybol, ami raadasul bal–eltolasokra invarians. Itt a jelolt egy meglepo jelenseget fedezett fel: bizonyos Lie–csoportokon a differencialegyenlet Lagrange fuggvenybol szarmaztathato, de invarians Lagrange fuggvenybol nem.

A masodik fejezet alapproblemaja az elsoenek egy specialis esete: adott differencialegyenlet szarmaztathato–e olyan E Lagrange–fuggvenybol, ami egy Finsler metrikat ir le. Ez utobbi azt jelenti, hogy $F = \sqrt{2E} : TM \to [0, \infty)$ konvex es pozitivan homogen TM rostjain; tovabba csak a nulla szelesen tunik el. Ebben az esetben az Euler–Lagrange egyenletek a metrika geodetikusait adjak meg. A fo kerdes tehat, hogy egy adott differencialegyenlet eloall–e, mint alkalmas Finsler metrika geodetikus egyenlete. Ilyenkor a differencialegyenletet *metrizalhato*nak mondjuk. Tovabbi kerdesek, hogy a Finsler metrika valaszthato–e bizonyos specialis tulajdonsagokkal; illetoleg, hogy ha az adott differencialegyenlet nem is, egy termeszetes, ugynevezett "projektiv" perturbacioja metrizalhato–e. Az ertekezes ezekre a kerdesekre tobb, kulonbozo melysegu valaszt is ad.

A harmadik fejezet Finsler metrikak holonomiajat vizsgalja. Ahogy egy M sokasagon ertelmezett Riemann metrika meghataroz a TM erintonyalabon egy konnexiot (Levi–Civita konnexio), es igy M–ben futo $c : [\alpha, \beta] \to M$ gorbek menten egy $T_{c(\alpha)}M \to T_{c(\beta)}M$ parhuzamos eltolast, hasonlo modon egy Finsler metrika is meghataroz egy parhuzamos eltolast. A Finsler esetben a parhuzamos eltolas altalaban nemlinearis transzformacio, mindenesetre megorzi erintovektorok Finsler hosszat, es igy invariansan hagyja az egysegvektorok $\mathcal{I} \subset TM$ reszsokasagat, az indikatrixot. Rogzitve egy $x \in M$ pontot, az osszes $T_xM \to T_xM$ parhuzamos eltolas egy ugynevezett holonomiacsoportot alkot. Ez a $\mathrm{Hol}_x(M)$ csoport az x–beli $\mathcal{I}_x \subset T_xM$ indikatrix difffeomorfizmus–csoportjanak egy reszcsoportjaval azonosithato. Riemann esetben a holonomiacsoport jelentosege sokszorosan is bizonyitott; a Finsler esetben, ugy tunik, tobb alapveto kerdest komolyan eloszor a jelolt vizsgalt Nagy Peterrel kozos munkaiban. A fejezet fobb eredmenyei alulrol becsulik meg a holonomiacsoportok meretet, ha a metrikanak specialis gorbuleti tulajdonsagai vannak. Theorem 3.6.5 szerint ha a metrika nem Riemann, gorbulete allando de $\neq 0$ es $\dim M = n \geq 3$, akkor a holonomiacsoport nem lehet kompakt. Metrikak egy ennel szukebb csaladjarol tobb is mondhato, a holonomiacsoport dimenzioja vegtelen; 2 dimenzios Finsler metrikak egy csaladjarol pedig azt bizonyitja a disszertacio, hogy a holonomiacsoport maximalis abban az ertelemben, hogy lezartja megegyezik az indikatrix iranyitastarto diffeomorfizmusainak csoportjaval. Ezek az eredmenyek csattanos valaszt adnak a nagy Chern es Z. Shen egy korabbi, a fenti eredmenyek (es kulonosen egy, az ertekezesbe be nem vett friss Hubicska–Matveev–Muzsnay cikk) tukreben naivnak tuno kerdesere.

A negyedik fejezet (sikbeli 3–)szovetekkel foglalkozik. Apro egyszerusitessel a fogalom igy hatarozhato meg. A sik egy trivialis foliazasa nem mas, mint a sik egy fix egyenesevel parhuzamos osszes egyenes csaladja; egy altalanos foliazas pedig sikgorbek olyan csaladja, ami egy diffeomorfizmus segitsegevel trivialis foliazassa transzformalhato. A fejezetben vizsgalt szovet harom olyan foliazas egyuttese, amikben elofordulo gorbek paronkent transzverzalisan metszik egymast. A jelolt szukseges es elegseges feltetelt ad annak eldontesere, hogy a szovet linearizalhato–e, azaz egy alkalmas diffeomorfizmussal lokalisan attranszformalhato–e olyanna, aminek gorbei egyenes szakaszok. Hasonlo modon definialhatok sikbeli k–szovetek. A linearizacios problema $k = 1, 2$ eseten trivialis, $k \geq 4$ eseten nem trivialis, de mar korabban megoldott.

2 Ertekeles

Ebben a paragrafusban csak rovid ertekelest adok. Reszletesebb kritikamat es kerdeseimet a csatolt fuggelek tartalmazza. Az ertekeles foleg—de nem kizarolag—az elso, harmadik es negyedik fejezeten alapul, ezeket tanulmanyoztam a legalaposabban.

Az ertekezes tobb orszagban—Europaban, Amerikaban, Azsiaban—is kutatott tudomanyteruleteken kinal megoldasokat vagy legalabb reszmegoldasokat alapveto problemakra. Amennyire meg tudom allapitani, az eredmenyek ujak, bar az elso fejezet egyik foeredmenyenek (Theorem 1.3.5) es Sarlet & al. 1982–as es 1998–as cikkeinek [78, Theorem 6], [79] a kapcsolatat nem latom at. Az ertekezes szinvonala altalaban, az eredmenyek jelentosege es a bizonyitasok megbizhatosaga nem egyenletes.

A legmeggyozobbnek a harmadik fejezetet talalom. Ez egy Chern–Shen jol ismert monografiajaban felvetett kerdest valaszol meg igen alaposan, eszreveve, hogy konstans gorbulet es esetleges projektiv lapossag eseten egy Finsler metrika holonomiacsoportjai jol behatarolhatoak. Az elso fejezet ujdonsaga, hogy invariansan, tehat lokalis koordinataktol fuggetlenul definialt fogalmakkal dolgozik, a Frölicher–Nijenhuis es Grifone bevezette formalizmust felhasznalva. (Mas, de lokalis koordinataktol szinten joreszt fuggetlen targyalas mar [79]–ben is talalhato.) Ez esztetikailag ketsegkivul elorelepes. Mivel azonban a fejezet eredmenyei lokalisak, nem vilagos, mennyivel hatekonyabb az invarians fogalmak hasznalata a koordinatakkal definialt fogalmaknal. (A fuggelekben mutatok egy peldat arra, hogy az invarians targyalas a 92. oldalon hogyan bonyolithat el egy bizonyitast.)

A negyedik fejezetben termeszetesen imponalo, hogy az orosz iskola szovet–tanászaival folytatott versenyben Muzsnay es munkatarsai kerultek ki gyoztesen, az altaluk talalt szukseges es elegseges feltetel szovetek linearizaciojara a vitatott szovetre helyes eredmenyt adott, mig az ellenfeleke szemmel lathatolag hibasat. Ezzel egyutt a fejezet komplikalt foeredmenyenek (Theorem 4.3.5) a jelentosege nem vilagos. A vitatott szovet linearizalhatosagat Dufour trivialisnak nem mondhato modon de: ket sorban direkten is bebizonyitotta (Remark 4.4.1). Amikor Theorem 4.3.5–ot a jelolt szovetek altalanosabb vizsgalatara akarja alkalmazni, a bizonyitasok hianyosak maradnak, ld. a fuggelekben a 87. oldalhoz fuzott masodik megjegyzesem es a Theorem 4.3.6–hoz fuzott megjegyzesem.

Sajnos a magyar matematikai elettel valo kapcsolatom egy ideje nagyon szorvanyos, es igy nem latom at pontosan, mik az elvarasok egy doktori disszertacional. Nekem ugy tunik, hogy Muzsnay disszertacioja helyenkent eleri a doktori szintet, de helyenkent nem is kozeliti meg. Mindent osszeveve javaslom, hogy a Doktori Tanacs a vedest tuzze ki, es amennyiben a jelolt a kifogasolt pontokat—vagy legalabb jelentos reszuket—sikeresen megvedi, a felvetett kerdeseket kielegitoen megvalaszolja, a doktori cimet itelje oda a jeloltnek.

Lempert László

Fuggelek Muzsnay Zoltán doktori disszertaciojanak biralatahoz

Ez a fuggelek tartalmazza a disszertacio egyes pontjaival kapcsolatos fobb eszreveteleimet, kifogasaimat es kerdeseimet.

1. fejezet

5. oldal. A szerzo itt bevezeti a fél–spray es a spray fogalmat, ez utobbinak egy extra homogenitasi tulajdonsaga van. A tovabbiakban azonban kizarolag spray–krol beszel. Ez rendben is van, amikor az utolso bekezdesben az indukalt konnexiot definialja, a definicio spray–kre megegyezik a hivatkozott Grifone cikkben [46] talalhatoval. Ha jol ertem, fel–spray eseteben a konnexio maskeppen definialando. Azonban a 7. oldal azt allitja, hogy (1.17), (1.18) szerint egy Lagrange fuggveny meghataroz egy spray–t. Mivel itt a Lagrange fuggvenyrol homogenitas nincs felteve, a formulak spray-t nem, csak fel–spray–t definialhatnak.

Namost az irodalomban a "spray"–rol neha nincs feltetelezve a homogenitas, peldaul a jelolt cikkeben [113]. Gondolom, ez okozza a kavarodast az ertekezesben. A kerdesem az, hogy az ertekezes 1.3 alfejezeteben most mit is jelent a spray? Ha az eredmenyeket valojaban fel–spray–re kellene kimondani, nem kell–e modositani az indukalt konnexiora vonatkozo formulat, es ha kell, hogyan befolyasolja ez a tovabbiakat?

Definition 1.2.1. A definicio itt globalisan definialt Lagrange fuggvenyrol beszel. Mivel a vizsgalatok itt es kesobb (de az altalam olvasott irodalomban) is szinte kizarolagosan lokalisak, jobb lenne itt is es masutt is a disszertacioban ezt vilagossa tenni, es peldaul csak lokalisan definialt Lagrange fuggvenyt megkovetelni. A legmegfelelobbnek a "fuggvenycsirak" nyelvezete tunik.

(1.23) Jol latom, hogy az elso egyenletben a dg_{ij}/dt tag elhagyando?

Theorem 1.3.5. Ez a tetel szukseges feltetelt ad arra, hogy egy (fel?–)spray variacios legyen (azaz Lagrange fuggvenybol szarmazzon). Hogy viszonyul ez a tetel Sarlet & al. [78,79]–beli eredmenyeihez? [78, Theorem 6] szukseges es elegseges feltetelt ad az ugynevezett multiplikator letezesere. Ugyan Theorem 1.3.5 nem hasznalja a multiplikator fogalmat, ennek letezese ekvivalensnek tunik azzal, hogy a tekintett fel–spray variacios. Hasonloan, [79, Theorem 1] szerint "The complete set of integrability and passivity conditions associated with the Helmholtz equations... are...." Az eltero szohasznalat ellenere ez megint, ugy tunik, azt a kerdest valaszolja meg, amit Theorem 1.3.5, azzal a kulonbseggel, hogy [79] a feltetelek szukseges es elegseges voltat is allitja.

Corollary 1.3.6. A $\geq$ egyenlotlenseg $>$–re valtoztatando, ezt adja a bizonyitas, es igy is szerepel az eredmeny a jelolt [113] cikkeben[1].

Corollary 1.3.7. Az egyenlotlensegnek a [113]–ban adott bizonyitas szerint itt is szigorunak kell lennie. Ezzel kapcsolatosan az a kerdesem, hogy az uj egyenlotlensegek valoban tovabbi megszoritast adnak a spray–re ahhoz, hogy lokalisan variacios legyen? Konkretan, van–e olyan spray (vagy fel–spray?) amire a Corollary 1.3.6–ban szereplo rang $\leq n(n+1)/2$ nemcsak x–ben, de egy kornyezeteben is, es ezert Corollary 1.3.6 szerint meg variacios is lehetne; de a Corollary 1.3.7 eredmenye ezt megis kizarja?

13. oldal. Az utolso bekezdes hivatott a variacios szabadsag fogalmat bevezetni, mint bizonyos $\mathcal{E}_S \subset C^\infty(TM)$ fuggvenyhalmaz rangjat. Ez utobbi ugy van definialva, mint az a ν szam, amivel "for every $v_0 \in TM$ there exists a neighborhood $U \subset TM$ and functionally independent $E_1, \ldots, E_\nu \in \mathcal{E}_S$ on U such that any $E \in \mathcal{E}_S$ can be expressed as $E(v) = \varphi\big(E_1(v), \ldots, E_\nu(v)\big)$ for all $v \in U$, with some function $\varphi : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$." A definiciot tobb oknal fogva nem talalom kielegitonek.

Mar maganak $\mathcal{E}_S$–nek a maghatarozasa sem egyertelmu, hogy tudniillik az ot alkoto E fuggvenyekrol kikotjuk–e a regularitast. (1.33) ezt nem koveteli meg, de az elozo bekezdes ezzel az $\mathcal{E}_S$ halmazzal es a segitsegevel definialt ν szammal tervezi merni, hogy "how many different regular Lagrange functions exist for a given spray". Proposition 1.4.2 csak ugy helyes, ha (1.33–1.34)–et szo szerint ertjuk es a regularitast nem koveteljuk meg. Ha viszont elejtjuk a regularitasi megszoritast, akkor ν mit fog elarulni a regularis Lagrange fuggvenyek halmazanak a mereterol? (Az se vilagos, hogy $\mathcal{E}_S$ definicioja globalis vagy lokalis. (1.33) egyertelmuen globalis, es $\mathcal{E}_S$–t a $C^\infty(TM)$ vektorter egy reszhalmazakent definialja; az oldal utolso bekezdeseben irtak mintha azt sugallnak, hogy $\mathcal{E}_S$–re mint egy kevere vagy elokevere kell gondolnunk.)

Visszaterve ν definiciojara, nincs elmagyarazva, mit is jelent itt a funkcionalis fuggetlenseg, ill. fuggoseg. A kovetkezo definiciot tudom elkepzelni. Egy X differencialhato sokasagon ertelmezett $f_1, \ldots, f_k$ fuggvenyek *egy $x \in X$ pontban* funkcionalisan osszefuggenek, ha a $(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ pont valamely kornyezeteben letezik egy Φ valos erteku (sima??) fuggveny, hogy egyfelol $\Phi(f_1, \ldots, f_k) = 0$, masfelol $\Phi(y_j) \neq 0$ valamely $y_j \to (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ sorozat menten. Ez az a fogalom, amivel a jelolt dolgozik?

[1] Ezt a cikket csak arxiv valtozataban tudtam elerni

Ha a ν definiciojaban szereplo fogalmakat tisztaztuk, felmerul a kerdes, miert is letezik az oldal utolso bekezdeseben leirt tulajdonsagokkal rendelkezo ν szam. Nincs kizarva, hogy azokra a specialis $\mathcal{E}_S$ fuggvenyhalmazokra, amikre a problema vezet, a kivant tulajdonsagu ν letezik, bar errol az ertekezes nem szol. Egy altalanos $\mathcal{E}_S \subset C^\infty(TM)$ alter eseten azonban nem latom, meg egy rogzitett v_0 eseten se, hogy mi garantalja ν letezeset. Az pedig egeszen vilagos (ebben az altalanos esetben), hogy ν erteke valtozhat, ha v_0 valtozik.

2. fejezet

26. oldal. Az utolso elotti bekezdes vege fele van definialva a Finsler metrizalhatosag fogalma. Az azonban nem vilagos, hogy itt F letezeset hol tetelezzuk fel? Az egesz TM erintonyalabon, annak egy alkalmas nyilt $U \subset M$ feletti reszen vagy pedig TM egy alkalmas nyilt reszhalmazan? Peldaul Theorem 2.5.1, ugy tunik, csak $\mathcal{T}M$-en lokalisan all (ellentetben az ertekezesbeli megfogalmazassal).

27. oldal. A differencialoperatorok formalis integralhatosaganak elmeletet itt linearis operatorokra irja le a jelolt; de a 4. fejezetben nemlinearis operatorokra hasznalja. Kerdesem, hogy milyen valtoztatasokra van szukseg ahhoz, hogy a leirtak valoban hasznalhatoak legyenek a kesobbiekben.

Theorem 2.4.2. Ennek kimondasa ertelmezhetetlen. Spray-k egy osztalyara tekint bizonyos tulajdonsagokat, nevezzuk egyuttesuket (P)–nek (isotropy, condition A and $d_J\alpha = 0$). A tetel szerint (P) akkor es csak akkor all, ha bizonyos (i)... (v) feltetelek ekvivalensek. Namost az, hogy (P) all–e, egy konkret spray–re vonatkozik; azt, hogy (i)... (v) ekvivalensek–e, spray–k egy bizonyos osztalyan lehet lemerni. Az akkor es csak akkor allitas egyik oldala tehat egy spray–re, a masik oldala spray–k egy csaladjara vonatkozik, ezek koze "akkor es csak akkor"–t nem lehet tenni—kiveve, ha a tekintett csalad egyetlenegy spray–bol all. De nem errol van szo, mint az itt elhagyott, de [99]–ben megtalalhato bizonyitasbol kiderul. Az azt mutatja, hogy a (P) tulajdonsaggal rendelkezo spray–k csaladjara (i)... (v) ekvivalensek; es valamennyire megforditva, ha egy spray–re (iv) teljesul, akkor (P) is.

Theorem 2.7.5 bizonyitasa. A Szabo tetelebol kapott Riemann metrika miert lesz balinvarians?

3. fejezet

Theorem 3.6.5. Ugy tunik nekem, hogy a tetelhez csak arra van szukseg, hogy a holonomiacsoport (lezartja) kompakt legyen, nem szukseges feltetelezni, hogy Lie–csoport. Viszont felmerul a kerdes, hogy ha a kompaktsag feltetelet hagyjuk el, de megkoveteljuk, hogy a holonomiacsoport vagy lezartja Lie–csoport legyen, kovetkezik–e, hogy F Riemann metrika.

76. oldal. A (3.53) utani harmadik sor Remark 3.7.1–re hivatkozik. Ez nem helyes, a kerdeses megjegyzes az itt szukseges implikacionak a forditottjat tamasztja ala. A helyes hivatkozas Muzsnay–Nagy [122]–es cikkebol Remark 2.1.

Theorems 3.7.5, 3.7.9. Itt nyugodtan elhagyhato az egyszeres osszefoggoseg feltetele, hiszen minden M sokasag lefedheto egyszeresen osszefuggo nyilt halmazokkal, es az azokra allo eredmenybol kovetkezik az M–re vonatkozo is.

Proposition 3.8.2. Az egyszeres osszefuggoseg helyett elegendo feltenni, hogy M iranyithato. Ha M nem iranyithato, akkor viszont az adott feltetel mellett a holonomiacsoport lezartja az $\mathcal{I}_x$ indikatrix teljes diffeomorfizmus–csoportja lesz.

De az allitas megfogalmazasa hagy kivannivalot maga utan. (3.64)–nek ellentmondva, a holonomiacsoport es lezartja nem a korvonal, hanem az indikatrix diffeomorfizmus–csoportjanak resze. Az igaz, hogy ez a ket diffeomorfizmus–csoport izomorf, de nem kanonikusan, es ugyanez all a Lie–algebrajukra. Ha ez valoban igy van, akkor mit ertsunk azon, hogy a korvonal Fourier–algebraja resze az indikatrix holononomia–algebrajanak?

Theorem 3.8.3. Itt megint szuksegtelen feltenni, hogy M egyszeresen osszefuggo. A bizonyitas ketsegkivul ugyes szamolas, de felmerul a kerdes, hogy lehet–e a tetel eredmenyet nagyobb altalanossagban is bizonyitani, amikor explicit formulak nem allnak a rendelkezesre. Peldaul igaz–e, hogy egy generikus Finsler metrikara a holonomia nemcsak hogy vegtelen dimenzios, mint Hubicska–Matveev–Muzsnay cikkeben, hanem a lezartja egyenesen megegyezik az indikatrix (iranyitastarto) diffeomorfizmus–csoportjaval. Ezzel kapcsolatos kerdes, hogy ez a megegyezes stabil tulajdonsag–e, a metrika kis perturbaciojaval meg lehet–e szuntetni.

84. oldal. Az utolso bekezdes Shennek tulajdonitott eredmenye, ahogy itt van megfogalmazva, nem helyes. A leirt tulajdonsagu Randers sokasagok nem feltetlen izometrikusak az egyseggombon ertelmezett (3.66) metrikaval. Lehetnek izometrikusak az itt megadott Finsler sokasag egy nyilt reszhalmazaval, vagy akar annak egy fixpont mentes veges izometriacsoport szerinti faktoraval; es talan meg massal is. Shen nem is igy fogalmazza meg az eredmenyet [86]–ban. Helyette azt a homalyos fordulatot hasznalja, hogy "F can be expressed in the following form". Bar Shen bizonyitasat nem olvastam el, gondolom, a valodi tenyallas az, hogy a vizsgalt terek lokalisan izometrikusak a gomb egy, a (3.66)–beli metrikaval ellatott nyilt reszhalmazaval.

87. oldal. A masodik bekezdesbeli "reduced algebraic curve" valojaban "irreducible"-t jelent?

87. oldal, utolso sor es folytatasa, miszerint $\mathcal{A} \subset S^2T^* \otimes T$ algebrai reszsokasag. Mi ennek az ertelme, es kulonosen mi a bizonyitasa? Ugyan sehol se talaltam a T nyalab definiciojat, ugy gondolom, hogy az az alapsokasag erintonyalabja. Akkor a fentebbi tenzornyalab differencialhato sokasag, de nincs algebrai strukturaja, es ezert nem lehet algebrai reszsokasagairol beszelni. Azt lehetne mondani, hogy mivel az alapsokasag maga $\mathbb{R}^2$, T–nek (ha az tenyleg az erintonyalab) es a tenzornyalabnak is megadhato egy kanonikus trivializacioja, vagyis a totalis ternek azonositasa valamilyen Euklideszi terrel; akkor mar van algebrai struktura, es meg lehet kerdezni, egy reszhalmaza algebrai–e.

De meg ezzel az ertelmezessel is hianyzik annak a bizonyitasa, hogy $\mathcal{A}$ algebrai reszsokasag. A 96. oldalon alulrol 16-14. sor szerint "we arrive at the conclusion that... in the algebraic manifold $\mathcal{A}$...". $\mathcal{A}$ -t valoban a $Q_i = 0$ egyenletek hatarozzak meg, $i = 1, \dots, 7$; a Q_i fuggvenyek valoban polinomok az egyik valtozojukban, s–ben; de nem a tobbiben. Erre alapozva nem allithatjuk, hogy kozos nullahelyuk algebrai varietas. Szintugy azt se, hogy reszsokasag, hiszen ehhez valami regularitast kellene ellenorizni, talan a Q_i fuggvenyek Jacobi matrixanak a rangjanak vizsgalataval. Tekintettel azonban arra, hogy a Q_i–k alakja gyakorlatilag felfoghatatlan, ld. [107, Appendix], ez remenytelen vallalkozasnak tunik, es az ertekezes meg se kiserli.

88. oldal, utolso bekezdes. A szovet itt megadott definiciojabol a jelolt hibasan kovetkeztet arra, hogy az alapsokasag dimenzioja paros kell, hogy legyen. Pl. $\mathbb{R}^3$–on harom altalanos helyzetu sikkal parhuzamos sikok csaladja kielegiti a megadott definiciot. Ennek a nyelvbotlasnak ugyan nem lesz szerepe a tovabbiakban, de kiabrandito.

90. oldal, elso teljes bekezdes. E csak kesobb lesz bevezetve a 91. oldalon, mint "the bundle of the prelinearizations". Ez kisse pontatlan es felrevezeto megfogalmazas, hiszen az elo–linearizaciok a 89. oldalon tenzormezokent voltak definialva, azok semmifele nyalabot nem alkotnak. Gondolom, a szandek szerint $E \subset \mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ az a resznyalab, aminek szelesei az elo–linearizaciok. Ezzel viszont inkompatibilis az inkriminalt bekezdes $L \in E$ formulaja. Ugy latom, hogy a legegyszerubb az lenne, ha elo–linearizacion nem egy tenzormezot ertenenk, hanem valamely pontbeli tenzort.

90. oldal, masodik bekezdes eleje. Eszerint a fentebb diszkutalt—de az ertekezesben hivatalosan meg mindig be nem vezetett—E ter egy M feletti 3 dimenzios vektornyalab. En ugy latom, hogy meg ha a fentiekben javasolt modon is definialjuk E–t, mint egy absztrakt halmazt, akkor se allithatjuk, hogy vektornyalab; ahhoz elobb el kellene latni valami struk-

turaval. Namost E, mint a $\mathrm{Hom}(T \otimes T, T)$ vektornyalab egy reszhalmaza, ketsegkivul orokol ez utobbitol valami strukturat. De ez a struktura nem resz–vektornyalab struktura, inkabb egy affin resznyalab struktura; ket elo–linearizacionak, mint tenzoroknak, az osszege nem lesz elo–linearizacio.

91. oldal kozepe. Mi pontosan egy "Frobenius system" definicioja? Tovabba: azt ertem, hogy (4.9) fennallasa szukseges (4.8) megoldhatosagahoz. Ha jol ertem, az ertekezes ugy veszi, hogy elegseges is, abban az ertelemben, hogy ha az s szeles kielegiti (4.9)–et, akkor ezzel az s–sel (4.8)–nak is van z, t megoldasa. Kerdesem, hogy valoban errol van–e szo, es ha igen, az elegsegesseg tényére mi a referencia?

92. oldal, Proposition 4.3.1 bizonyitasa. Ez pelda arra, amikor az invarians absztrakt targyalas foloslegesen elbonyolitja a bizonyitast. Az ertekezesbeli bizonyitas homomorfizmusok es kommutativ diagrammok feallitasa mellett meg egy pontosabban meg nem hatarozott es nem kozolt homologikus algebrai ervelesre is hivatkozik. Minderre nincs szukseg. A kovetkezorol van szo. Jeloljuk a sikon a koordinatakat u, v–vel; legyen adott egy $Q(u, v)$ masodfoku polinom, ugy, hogy az $s = Q$ fuggveny kielegiti (4.9)–et az origoban. Proposition 4.3.1 azt allitja, hogy ekkor letezik egy H 3–rendben homogen polinom, hogy $s = Q + H$ az origoban masodrendben elegiti ki (4.9)–et (vagyis $O(u^2 + v^2)$ hibaval; ezt a tovabbiakban $O(2)$–vel jeloljuk). Ezt igy latjuk be:

Amikor (4.9)–ben $s = Q$–rol $s = Q + H$–ra terunk at, az s_{11}, s_{21}, s_{22} tagok egy linearis taggal valtoznak; a tobbi tag csak $O(2)$–vel. Ezert H-t ugy kell valasztanunk, hogy $H_{22} - 2H_{21}$ es $H_{11} - 2H_{21}$ adott linearis formak legyenek. Hogy pontosan mik, azt Q hatarozza meg. Ha $H(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$, akkor a feltetelekben vizsgalva u, v egyutthatoit, a kovetkezo egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$2c - 4b = \text{adott}, \quad 3d - 4c = \text{adott}, \quad 3a - 4b = \text{adott}, \quad 2b - 4c = \text{adott}.$$

De ez egyszeru: az elso es utolso egyenletbol meghatarozzuk b–t es c–t, a maradekbol pedig a–t es d–t.

96. oldal, Theorem 4.3.5 elotti sorok. Ezek bizonyos Q_i polinomoknak a fokat adjak meg. Kerdes, hogy a megadott szamok valoban a megfelelo polinomok fokaval egyeznek–e meg, vagy annak csak felso becsleset adjak. A [107] fuggelekeben megadott kifejezesekbol nem konnyu leolvasni, hogy e polinomok foegyutthatoja minden esetben valoban kulonbozik–e 0–tol, es se az ertekezes, se az alapul szolgalo [107] nem foglalkozik ezzel a kerdessel.

Theorem 4.3.6. Ennek a tetelnek a 96. oldalon talalhato egysoros bizonyitasa azon mulik, hogy a linearizacios problema megoldasaban szereplo Q_2 polinom foka 15, ezert legfeljebb 15 gyoke van. Valojaban azonban nem lett bebizonyitva, hogy ez a fok 15, de meg az se lett kizarva, hogy Q_2 azonosan eltunjon; igy a tetel bizonyitasa hianyosnak tunik.

Egy vegso eszrevetel es kerdes

Az ertekezes harom fejezeteben kozos, hogy termeszetesen felvetodo geometriai kerdesekre a valasz az, hogy ilyen vagy olyan problema megoldhatosagahoz az adatoknak valamilyen parcialis differencialegyenlet–rendszert kell kielegiteniuk. Ugyan ezeket a differencialegyenleteket roviden meg lehet fogalmazni, tartalmuk gyakran nagyon bonyolult, es nem vilagos, mennyire alkalmazhatoak a geometriai objektumok vizsgalatara. Gyakran a feltetelek elegsegessege csak az analitikus kategoriaban varhato. A problemakhoz valo ilyen hozzaallas, ugy latom, a temaban elegge altalanos, ha nem kizarolagos. Ennek ellenere felmerul az a gondolat, hogy a felvetett kerdesekre a valaszt mas terminusokban is kereshetnenk.

Hogy pontosan milyenekben, arra nincs megalapozott javaslatom. De peldaul a sikbeli szovetek linearizaciojanak problemajaban talan ertelmes a kovetkezo "Dirichlet problema", vagy ha nem ertelmes, hat valami modositasa. Legyen adott egy korvonal menten egy szovet. Lehet–e ezt linearizalhato szovetkent egyertelmuen kiterjeszteni a hatarolt korlapra?

A kerdesem az, hogy ismer–e a jelolt a temaban ilyen iranyu probalkozasokat, vagy pedig olyan eredmenyeket, amik azt mutatjak, hogy a felvetett irany zsakutcaba vezet.