Bírálat

Muzsnay Zoltán: "Differenciálrendszerek geometriai alkalmazásai" című akadémiai doktori értekezéséről

Muzsnay Zoltán disszertációjában sokaságok differenciálgeometriájának néhány területével foglalkozik, jelentős részben Finsler-sokaságokon. A bemutatott munkát olyan kérdések köré építi fel, melyek megoldásában központi szerepet játszanak a problémára jellemző differenciálegyenletek és -rendszerek.

A négy fejezetből az első kettő a variációszámítás inverz problémájához kapcsolódik, vázlatosan szólva tehát ahhoz, hogy egy differenciálegyenlet-rendszer mikor származtatható variációs elvből, azaz Lagrange-függvényből. Itt előbb az általánosabb, majd a metrizálható esettel foglalkozik. A másik két fejezetben részletes vizsgálatokat végez Finsler-sokaságok holonómiájáról, illetve síkbeli fóliázások linearizálhatóságára tér ki.

Amint a szerző bemutatja, a vizsgált kérdések jelentős múltra visszatekintő klasszikus problémák, melyek azonban ma is intenzív kutatások tárgyai, mivel a kérdések teljeskörű megoldásától egyelőre messzebb vagyunk. A dolgozat többek között Hilbert negyedik problémájával kapcsolatban is új eredményeket ad. Megemlítendő, hogy a vizsgált témakörök matematikai szépségük mellett részben fizikai modellekhez is kötődnek: a variációs elv és energiafüggvények jól ismert klasszikus mechanikai vonatkozásaik mellett megjelennek a relativitáselméletbeli geodetikusoknál is, a disszertáció fontos alkotórészét jelentő holonómia fogalma pedig a kvantummechanikában, sőt kvantumszámítások vizsgálatában is érdemi szereppel bír. A dolgozatban központi szerepet játszó Finsler-metrikák egyik szemléletes motivációja Zermelo navigációs problémája, ahol a szél hatása vezet a távolságok aszimmetriájához.

Az eredmények első csoportja a variációszámítás inverz problémájához kapcsolódik sokaságokon. Az alapkérdés az, hogy egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer mikor származtatható variációs problémából, azaz mikor áll elő alkalmas Lagrange-függvényhez tartozó Euler–Lagrange-egyenletként. Bár a kérdésfeltevés és a kétdimenziós eset karakterizációja is klasszikus, magasabb dimenzióban a problémakör jóval szerteágazóbb és számos későbbi eredmény született, azonban csak részleges esetekre. Ezek ugyanis a variációs multiplikátorra alapulnak, mely a keresett Lagrange-függvény második deriváltjaiból képezhető és teljesítenie kell az ún. Helmholtz-egyenletrendszert, utóbbi viszont a dimenzió növelésével nagyon elbonyolódik.

Muzsnay Zoltán vizsgálataiban először szintén a variációs multiplikátor, utána viszont közvetlenül a Lagrange-függvény vizsgálatával ad új eredményeket, melyek tárgya a szóban forgó differenciálegyenlet-rendszer koordinátamentes megadásához tartozó spray, amely a sokaságon értelmezett alkalmas vektormező. Először tetszőleges dimenzióban szükséges feltételeket ad a spray variációs elvből való származtathatóságára. A fő feltétel a variációs multiplikátorra előírt algebrai egyenletrendszer, melynek együtthatói a sprayhez rendelt alkalmas gradált Lie-algebra elemeiből származnak. Ebből következményként több, közvetlenül ellenőrizhető dimenziófeltételt is megad. A következő vizsgálat tárgya az ún. variációs szabadságfok: ha létezik Lagrange-függvény, akkor lényegében hány ilyen van, azaz a Lagrange-függvények halmaza lokálisan hány függvénnyel generálható, ez az érték ugyanis nem mindig 1. Ezen belül az eredmények a Riemann/Finsler-geometriák szempontjából releváns 2-homogén Lagrange-függvényekre vonatkoznak. A szerző megmutatja, hogy a sprayhez tartozó holonomiadisztribúció kodimenziója adja meg a keresett variációs szabadságfokot. Bár a disszertációban nem említi, az alapul szolgáló cikkben több példát is mutat a fenti érték explicit meghatározására. Megemlítjük, hogy a holonomiadisztribúció fogalma a dolgozatban később is hasznosnak bizonyul a metrizálhatósági fejezetben. Végül a variációs elv speciális eseteként Lie-csoportokon vizsgálja az invariáns esetet, azaz hogy a kanonikus balinvariáns geodetikus struktúrához mikor található szintén balinvariáns Lagrange-függvény. A fizikai szemlélet számára ez azt jelenti, amikor mozgásegyenletek adott szimmetriái a Lagrange-függvénye is érvényesek. A szerző szükséges és elégséges algebrai feltételt ad ennek fennállására, majd több következményt mutat az eredmény alkalmazására, ezen belül jellemzi a legfeljebb 4-dimenziós Lie-csoportokat aszerint, hogy melyek kanonikus spray-jéhez létezik variációs elv, és ezen belül ez mikor invariáns is.

A szerző kiterjedt vizsgálatokat végzett a variációs probléma azon speciális területén, amikor a vizsgált sprayhez tartozó görbék előállnak egy Riemann- vagy Finsler-metrika geodetikusaiként, vagy legalább irányítástartóan átparaméterezhetők ezekbe. Ez a metrizálhatóság ill. projektív metrizálhatóság problémája, melynek a disszertáció második fejezetét szenteli. Itt először feltételt ad a Finsler- és Landsberg-metrizálhatóságra, ahol utóbbi a metrika párhuzamos eltolással szembeni invarianciáját is előírja. A feltételek több konkrét esetben ellenőrizhetőek, de ezen alkalmazásokat most sem találjuk a disszertációban, csak az alapul szolgáló cikkben. A variációs szabadságfokra az előző fejezetben kapott eredményét itt kiterjeszti a metrizálható esetre is. A következő eredmény a Finsler-metrizálhatóság speciális eseteként a konstans, majd a skalár görbületű esetre ad szintén szükséges és elégséges feltételt, melynek alkalmazásaként Hilbert negyedik problémájának kritériumát teljesítő Finsler-metrikákat konstruál, azaz ahol a geodetikusok egyenesek. A Finsler-metrizálhatóság további speciális kérdéseként a projektív esetre olvasunk mély eredményeket, köztük a formális integrálhatóság elméletére támaszkodókat, melyek nem izotróp sprayk egy osztályára is kiterjednek. Ezután több esetben igazol projektív merevséget, azaz hogy a spray átparaméterezése során elvész a Finsler-metrizálhatóság. Végül ez a fejezet is Lie-csoportok kanonikus sprayjének invariáns metrizálhatóságával zárul, kiegészítve Lie-csoportokhoz tartozó homogén terek geodetikus orbit-struktúráinak vizsgálatával: a Riemann- és Finsler-féle, valamint a projektív és a (szigorú) metrizálhatóság kapcsolatrendszerét térképezi fel.

A harmadik fejezet a szerző Finsler-sokaságok holonómiacsoportjáról szóló eredményeit mutatja be. Riemann-sokaságok esetén a holonómiacsoportokat már kimerítően megvizsgálták. E fogalom jelentősége több szemponthoz köthető: a holonómiacsoport, melyet a zárt görbék mentén vett párhuzamos eltolások indukálnak, a sokaság görbületének egyfajta globális mértéke, mellyel fizikai (pl. kvantummechanikai) rendszerekben is jellemezhető, hogy az eredetitől mennyire különböző állapotokba térhetnek vissza. Finsler-sokaságok esetén kevesebb korábbi eredmény született, és Muzsnay munkái sok irányban tesznek előrelépést. A vizsgálat eszközeként bevezeti sokaságok diffeomorfizmus-csoportjában a részcsoportokhoz rendelt érintő Lie-algebra ill. görbületi és infinitezimális holonómia-algebrák fogalmát, és kidolgozza ezek tulajdonságait holonómiacsoportok esetén. Konstrukciókkal igazolja, hogy a holonómiacsoport lehet nemkompakt, ill. végtelen dimenziós. Ha egy Finsler-sokaság konstans görbületű és lokálisan síkprojektív, akkor jellemzést is ad a dimenzióra, mely nem 0 esetben pontosan akkor véges, ha a metrika Riemann-típusú. Az ilyen sokaságokon belül egy (állandó görbületű nevezetes példákat tartalmazó) speciális osztályra konkrétan meg is adja a holonómiacsoport lezártját, ez a kör irányítástartó diffeomorfizmusaiból áll, ill. hasonló eredményre jut kétdimenziós Randers-sokaságok esetén is.

A dolgozat rövidebb záró fejezete érdekes kitérőt tesz az előzőektől némileg eltérő területre, az ún. szövetgeometriába, itt síkbeli 3-szövetekről van szó, azaz három görbesereg által alkotott fóliázásokról. A fő kérdéseket a szövetek linearizálhatósága ill. parallelizálhatósága jelenti. E témakör alkalmazható nemlineáris egyenletek grafikus megoldása vagy függvénykapcsolatok szintvonalas megadása során. A szerző az előző fejezetekben használt elméleti eszközöknek jó hasznát veszi e vizsgálatokban. A linearizálhatóság problémája egy parciális differenciálegyenlet-rendszer vizsgálatára vezethető vissza az ún. Chern-konnexió segítségével. Ennek megoldhatóságánál kompatibilitási feltételek merülnek fel, melyek a korábban említett formális integrálhatóság elméletével kezelhetők. A vizsgálatban fellépő algebrai részsokaságot alkalmasan bevezetett polinomok közös zérushelyei alapján jellemzi, és ezzel szükséges és elégséges feltételt ad 3-szövetek linearizálhatóságára a nem parallelizálható esetben. Következményként felső becslést is kap a linearizációk számára, a korábbiaknál közelebb kerülve a sejtett egyértelműséghez. A fejezetet záró érdekesség egy linearizálhatóságáról szóló vita ismertetése, amely a terület neves kutatóival merült fel: egy konkrét példa segítségével Muzsnay megmutatta, hogy a hiba a két másik kolléga eredményében van.

A disszertációból a szerzőnek a differenciálgeometriában való széles körű, igényes munkássága rajzolódik ki. Eredményeit, melyeket 31 cikke alapján foglal össze, a dolgozat fejezeteivel jelzett fő témakörök köré csoportosítva áttekinthető szerkezetben mutatja be, és világosan kiderülnek a súlypontok. Az eredmények jelentőségét az alábbi szempontok is alátámasztják. A vizsgált klasszikus és sok helyen nyitott problémakörökben érdemi előrelépéseket tesz, ezen belül számos kérdésre ad szükséges és elégséges feltételt. A megválaszolt kérdések több esetben explicit módon kapcsolódnak a terület kiemelt kutatóihoz: az említett Hilbert-problémán mint klasszikus témakörön túl ilyenek a sokaságok két szaktekintélyének, S.S. Chernnek és Z. Shennek a dolgozatban idézett kérdései projektív deformációkról ill. holonómiacsoportokról. A dolgozat az eredmények hátteréül szolgáló eszközökben való jártasságot mutat, itt említhető pl. a

Frölicher-Nijenhuis-formalizmus és a Spencer-Goldschmidt-féle formális integrálhatósági elmélet.

Összességében a disszertáció véleményem szerint szépen képviseli a témakör hosszú múlttal rendelkező debreceni iskoláját is.

A szerző 6 tézisben foglalja össze fő eredményeit, ezeket elfogadom megfelelő új tudományos eredményként, akárcsak a dolgozat további részeit is. Megjegyzem ugyanakkor, hogy számomra nem derül ki egyértelműen, hogy a tézisekben miért éppen a 3. fejezet végének bizonyos eredményeit emeli ki a többihez képest részletesebben, külön tézispontokat adva nekik.

Néhány kisebb kritikai észrevétel még az eredmények prezentálásáról. Több esetben, lásd 1.4.3. tétel ill. a 2.3 szakasz tételei, az (alapul szolgáló cikk tanúsága szerint meglévő) alkalmazásokat ill. példákat nem találjuk a disszertációban, pedig ezek alátámasztják az általános feltétel használhatóságának értékét. A 2.5 szakasz végén pedig pont a nem-izotróp eset nincs részletezve, ehelyett csak rövid vázlat szerepel, pedig a bevezetés és az alapul szolgáló cikk szerint is ez itt a fő újdonság.

Kérdések:

1. A jellemzéseket szolgáltató több fő eredmény esetében is érdemi megszorító feltételt kell tenni a görbületre (konstans, ill. egyikben lehet skalár): 2.4.1., 2.4.3., 3.8.3. és 3.8.6. tételek. E megszorítások lényegesek-e, mennyire van esély ezek enyhítésére?

2. Az 1.4.3 tétel által le nem fedett esetekben is igaz-e, hogy egy variációs szabadságfok szükségképpen csak véges lehet?

Összességében az eredményeket megfelelőnek tartom az MTA doktori cím eléréséhez, javaslom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és a cím odaítélését.

Budapest, 2021. április 7.

Karátson János
(ELTE, Matematikai Intézet)