Válasz Dr. Kertész János „A Function-Structure Approach to Complex Networks” című, Gulyás András által az MTA doktora cím elnyerése céljából benyújtott értekezésről adott bírálatára

Gulyás András

Bevezető

Először is szeretném megköszönni Dr. Kertész Jánosnak, hogy elolvasta a dolgozatomat és rámutatott annak hiányosságaira és erényeire. Külön köszönöm, hogy a dolgozat formai és tartalmi hiányosságai ellenére is értékesnek találta a dolgozatban leírt eredményeket annyira, hogy a fokozat odaítélését javasolta. A bírálatban van három visszatérő gondolat, amelyekre szeretnék itt összefoglalóan is reagálni amellett, hogy a bírálatra adott részletes válaszokban is kitérek rájuk.

- A bírálat több ponton is kifogásolja azt az álláspontot, miszerint a hálózatkutatókból álló közösség nagy része valamilyen formában elfogadja, hogy a hálózatokban megvalósuló útvonalak valamiféle legrövidebb útvonalat kiválasztó algoritmusból származnak. Itt nem arra gondolok, hogy minden cikk ezt az állítást explicit feltevésként (bár az ilyen is meglehetősen gyakori, pl. Potamias, Michalis, et al. "Fast shortest path distance estimation in large networks." Proceedings of the 18th ACM conference on Information and knowledge management. 2009., Van Den Heuvel, Martijn P., et al. "Efficiency of functional brain networks and intellectual performance." Journal of Neuroscience 29.23 (2009): 7619-7624., Domingues, Guilherme S., Cesar H. Comin, and Luciano da F. Costa. "Shortest Paths in Complex Networks: Structure and Optimization." arXiv preprint arXiv:2003.12180 (2020), Bassett, Danielle Smith, and E. D. Bullmore. "Small-world brain networks." The neuroscientist 12.6 (2006): 512-523., Kabbara, Aya, et al. "The dynamic functional core network of the human brain at rest." Scientific reports 7.1 (2017): 1-16., Yang, Yajun, et al. "Finding the shortest path with vertex constraint over large graphs." Complexity 2019 (2019).), vagy akár mérésekkel alátámasztva tényként elfogadná. Inkább arról van szó, hogy mivel az útvonalak szerkezetéről, illetve az útvonalakat kiválasztó háttér-algoritmus működésmódjáról, véleményem szerint elég keveset tudunk, legtöbbször jobb híján a legrövidebb utakkal számolunk legyen szó akár a hálózat átmérőjéről, centrális csomópontjairól, vagy például a hálózat terheltségi viszonyainak feltérképezéséről egy adott forgalmi mátrix mellett. Tehát nem explicite, de az olyan számolt tulajdonságokban és olyan előrejelzésekben ahol a bejárt útvonal szerkezete fontos tényező az általam olvasott irodalom jelentős része a legrövidebb útvonal használatával dolgozik. Részben ide sorolandók véleményem szerint a mohó algoritmuson és metrikus tereken alapuló navigációval kapcsolatos publikációk is, amelyek nem a valós útvonalak tulajdonságaihoz igazítják a modelleket, hanem olyan metrikus tereket használatára tesznek javaslatot, ahol a mohó navigáció a legrövidebb útvonalhoz minél hasonlóbb eredményt ad. Úgy gondolom, hogy a szakirodalom-e jelentősnek mondható része úgy foglalható össze, hogy a valós útvonalakban megtapasztalható nyúlást egy anomáliának, esetleg véletlen hibának, “bug”-nak tekintik. Természetesen nem minden cikk tartozik ebbe a kategóriába. Különösen az utóbbi pár évben, ahogy egyre több, útvonalszerkezetet tartalmazó adatbázis elérhetővé vált születtek olyan publikációk, melyek az útvonalak méréssel megfigyelt tulajdonságaiból kiindulva próbálnak következtetéseket levonni a háttérben dolgozó útválasztási stratégiákról, illetve olyan hálózati metrikákról, melyeket az útvonalak valós szerkezetéből vezetünk le. Ilyen cikk a dolgozatban hivatkozott 171-es cikk is, amely ki is mondja, hogy a megfigyelt útvonalak a legrövidebb utaktól nem triviális mértékben eltérnek. Viszont véleményem szerint az ezen az álláspontón levő cikkek súlya, melyek szerint a nyúlás nem “bug“, hanem valamiféle “feature”, tehát egy olyan

tulajdonsága a hálózatnak, ami az általa nyújtott funkcióra alapvető hatással van, jóval kisebb az irodalomban, mint az olyan tanulmányoknak, amelyek a legrövidebb utak szerkezetéből vonnak le valamilyen következtetést a hálózat tulajdonságaira nézve. A dolgozatban erre a nem kizárólagosságra véleményem szerint több helyen is utalás történik (pl. a 21. old "seems to dominate") kifejezése, de ezzel együtt a bírálat fényében vitathatatlan, hogy a polemikus hangvétel sajnálatos módon fennáll. Tisztább fogalmazással, visszafogottabb hangvétellel és sokkalta jobb angol írásbeli kommunikációs készséggel ez elkerülhető lett volna. Köszönettel tartozom a bírálónak, hogy a sajnálatosan polemikus hangvétel ellenére az eredmények és a dolgozat elfogadását javasolta. Nem szorosan a dolgozathoz kapcsolódik, de érdekes fejlemény az az új irányzat (Lambiotte, R., Rosvall, M. and Scholtes, I. From networks to optimal higher-order models of complex systems. Nat. Phys. 15, 313–320 (2019)), miszerint nemcsak a legrövidebb utak feltételezésével lehet gond, hanem bármilyen olyan útválasztási modellel, amely elfogadja a tranzitivitási relációt az élekre vonatkozóan. Az Internet útválasztási modelljéből is látszik, hogy az $a \to b$ és a $b \to c$ él megléte a hálózatban még nem feltétlenül jelenti azt, hogy az $a \to b \to c$ útvonal járható, hiszen ha mindkét él peer típusú, akkor ez az útvonal pl. nem völgymentes (valley-free). Ha ez igaz, akkor hasonlóan új megvilágításba kerülhetnek azon hálózattudományos ismeretek, melyeket például az adjacencia mátrix hatványozásával, sajátértékeket használó spektrális módszerekkel, egyéb mátrix szorzatokkal vagy éppen elsőrendű Markov modellekkel szereztünk.

- A bírálat többször megjegyzi, hogy a szakirodalom nincs kellően kifejtve és a dolgozat tudományos módon nincs megfelelően beágyazva a tudományterületbe. Ezek a megjegyzések a téziseket tartalmazó részek előtt levő bevezetők kapcsán fogalmazódnak meg. Hálával tartozom a bírálónak, hogy azt is megjegyzi, hogy az eredmények "referált, részben kiváló folyóiratokban, illetve konferencia kiadványokban lettek közzétéve, azokra a tudományos közösség pozitívan reagált. " Tehát itt a bírálóval egyetértve nem azzal van a gond, hogy az eredményeknek nincs megfelelő helye a szakirodalomban, hanem az, hogy a dolgozat ezt a helyet nem jelöli ki tudományos pontossággal. Ezzel az állítással nem lehet és nem is szeretnék vitatkozni. Azt tudom elmondani, hogy milyen jelleggel és milyen céllal írtam meg a tézisek köré az összekötő és bevezető részeket. A dolgozat megírásakor általános, egyszerű, könnyed, széles közönség számára követhető és talán élvezetes bevezető gondolatokat szerettem volna írni a tézisekhez. A célom az volt, hogy bárki számára rövid úton megközelíthetőek legyenek a dolgozatban szereplő eredmények és elismerem, hogy ez valóban sokszor a precizitás, vagy a nem teljes körű bemutatás rovására megy. A bírálat ismeretében ez a törekvésem valószínűleg hiba volt. A hiba következményeinek enyhítésére készítettem egy rövid összefoglalót, ahol az általam közölt eredmények helyét pontosabban megjelölöm. Úgy gondolom, hogy a hiba nem terjed ki viszont a tézisekre, amelyek előtt minden esetben van egy rövid rész, mely kijelöli a tézis helyét a szűkebb értelemben vett szakirodalomban. Pl. az Internetre vonatkozó állítások előtt a 6., illetve a navigálható hálózatokról szóló irodalom a 4. fejezetben.

- A bírálat több helyen rámutat elírásokra, formai, jelölésbeli illetve szerkesztésbeli hiányosságokra. Ezeket a megjegyzéseket maradéktalanul elfogadom és a dolgozat ebbéli hiányosságait elismerem.

Részletes válaszok

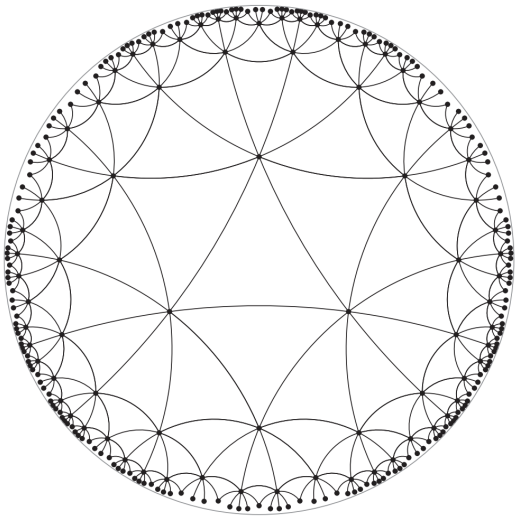
Gulyás András doktori dolgozata érdekes és időszerű tudományos problémával foglalkozik: hogyan lehet hatékony hálózati modelleket alkotni a csomópontok „igényeire" támaszkodva, és hogyan alakul a hálózati működés során megfigyelt utak statisztikája. A szerző eredményeit referált, részben kiváló folyóiratokban, illetve konferencia kiadványokban tette közzé, azokra a tudományos közösség pozitívan reagált. A dolgozat helyenként polemikus hangvétele az úgynevezett „hálózattudományi" megközelítéssel szemben nem indokolt. A bevezetőben szerző ezt írja: „In network science [134], the observable structure of a network forms the basis of the analysis over which dynamic processes such as navigation, search, or spreading as functions hosted by the network are investigated. In this case, the structural properties of networks are modeled in a function-agnostic manner since the function is only considered after the structure is well-identified." Ez azonban a hálózattudományi modellek egy részére igaz csupán. Nagy irodalma van a hálózattudományon belül a funkció által meghatározott szerkezet vizsgálatának – elegendő itt a hálózati optimalizációra utalni. Az alkalmazott megközelítés

említett előnye, hogy mindenütt jelenlévő („omnipresent”) struktúrákat és kapcsolódási valószínűségeket szolgáltat, megtalálható más megközelítésekben, pl. olyan generatív hálózatmodellekben, mint a sztochasztikus blokkmodell. Nem vall elmélyedésre, ha a szerző az egész kérdéskört azzal intézi el, hogy „a funkciónak az analízishez szükséges elemi ismerete nem áll rendelkezésre" a legtöbb területen, miközben gyakran minden információnk a hálózatról a funkcióból származik. A szerző ugyan helyesen jegyzi meg, hogy a globális információt igénylő preferenciális csatlakozás („preferential attachment”) nem tekinthető a tényleges növekedési elvnek, de megfeledkezik arról, hogy számos hálózat vizsgálata bizonyította, hogy effektív módon ez a mechanizmus széles körben jelen van. Mindezzel nem a dolgozatban bemutatott megközelítés fölösleges vagy hibás voltára kívánok rámutatni, – erről szó sincs – csak a munkának a hálózattudományba való beágyazásával kapcsolatos elégedetlenségemnek adok hangot.

Véleményem szerint egy hálózat legelemibb funkciója, hogy a csomópontok között a kommunikációt/információcsere lehetőségét megoldja. Természetesen emellett az elemi funkció mellett lehetnek egyéb mellék funkciók is, amik pl. az információcserét gyorsabbá, megbízhatóbbá stb. teszik. Ilyen értelemben én a hálózat fő funkciójának a megjelenő útvonalakat, vagy azt az algoritmust gondolnám, ami ezeket az útvonalakat előállítja. Miközben teljesen egyetértek azzal, hogy szinte minden információnk a hálózatról valamilyen értelemben a funkcióján keresztül jut el hozzánk, mégis úgy látom, hogy erről a funkcióról, erről az útválasztó algoritmusról nagyon keveset tudunk. Véleményem szerint ennek az az oka, hogy amíg a hálózat szerkezete általában publikus természetű, könnyebben megszerezhető adat, egy adott “csomag” útvonala viszont sokkal nehezebben hozzáférhető, alapvetően érzékeny adat. Erre jó példa a légiközlekedési hálózat, ahol a hálózat szerkezetét a publikusan meghirdetett járatokból könnyen elő lehet állítani, de egy adott utas útvonalát már sokkal nehezebb kinyerni. Ennek megfelelően úgy látom az irodalomban, hogy nagyon kevés az olyan elérhető adatbázis, ami valós hálózatokban megvalósult útvonalakat tartalmaz és így a háttérben működő útválasztási algoritmusról információt szolgáltat. Az utóbbi években összegyűjtött ilyen útvonal adatbázisok vizsgálata arra enged következtetni, hogy a valós hálózatokban megfigyelhető útvonalak tulajdonságai alapvetően módosíthatják azokat az ismereteinket, amelyeket például a hálózatok centrális csomópontjaival kapcsolatban szereztünk (Lambiotte, R., Rosvall, M. and Scholtes, I. From networks to optimal higher-order models of complex systems. Nat. Phys. 15, 313–320 (2019)).

Érdemes megjegyezni, hogy a bevezetőben keltett várakozástól eltérően, a dolgozat későbbi részeiben, elsősorban az 5. fejezetben kiderül, hogy a bemutatott játékelméleti modell nem is annyira alternatív hálózatmodell, inkább a hálózati navigálhatóság vizsgálatának eszköze kíván lenni, hiszen a kiválasztott megoldások a minimális élszámhoz tartozó maximálisan navigálható hálózatokat jelenítik meg. Innen ered a modell és a valódi hálózatok élszáma közötti jelentős különbség, ami egyúttal arra is rávilágít, hogy a navigálhatóságon túl további generáló elvek is fontos szerepet játszanak a hálózatok létrejöttében, ahogy erre az 5. fejezethez kapcsolódó diszkussziában történik is utalás. Ráadásul kiderül, hogy a megfelelő eredmények eléréséhez alkalmas metrikus beágyazásra és az egyensúlyi megoldások közül egy optimális kiválasztására is szükség van, ami igencsak túlmutat a csomóponti viselkedés kizárólagos rendező elvén.

A dolgozatban bemutatott modellek elsődleges célja nem a valós hálózatok szerkezetének minél pontosabb reprodukálása. Erre vonatkozóan a létező nagyon hatékony generatív modellekkel nehéz lenne versenyezni. A dolgozatban tárgyalt modellek az útválasztás mint funkció hálózati szerkezetre gyakorolt hatását szeretnék feltárni. Önmagában az, hogy egy egyszerű útválasztási algoritmus bizonyos feltételek mellett képes a valós hálózatok szerkezeti tulajdonságainak egy nem triviális részét magyarázni véleményem szerint fontos eredmény és az, hogy a hálózat teljes szerkezete nem következhet csak ebből az egy funkcióból az eredmények hitelességét valamelyest növeli. Habár a dolgozatban valóban kiválasztásra kerül egy valamilyen szempont szerint optimális egyensúlyi állapot, ez a lépés elsősorban egy egyedi megoldás kiválasztására irányul és az eredmények reprodukálhatóságát igyekszik elősegíteni, hiszen rengeteg különböző egyensúlyi állapot is kijöhet a modellből. A modell elemzésénél kifejtett analitikus eredményeink alapján viszont látható, hogy egy tetszőleges egyensúlyi állapot statisztikus tulajdonságai megegyeznek a kiválasztott optimuméval. Szeretném még megjegyezni, hogy bár a



1. ábra. Hiperbolikuis tér parkettázása

skálafüggetlen fokszámeloszlás megjelenése természetesen összefüggésben áll a hiperbolikus metrikus beágyazással, nem kizárólag annak következménye. Ha például játékot a hiperbolikus sík egy parkettázásának (1. ábra) pontleszórása felett játszuk, akkor a skálafüggetlen fokszámeloszlás egyáltalán nem jelenik meg, annak ellenére, hogy az egyensúly hálózat nem csak navigálható, de az átmérője is O(logN).

A bevezetés utáni fejezet célja a komplex hálózatok áttekintése. Ez a rész egyenetlen és gyakran felületes. Hosszasan tárgyalja pl. a königsbergi hidak problémáját, de nem ad precíz definíciót a dolgozatban központi szerepet játszó (legrövidebb) út fogalmára. Az ilyen kijelentés „Numerous measurements [5, 57, 134] confirm that the diameter and the average path length of real networks are proportional to the logarithm of the number of nodes N" társalgási szinten elfogadható, de egyrészt nem pontos, másrészt nem közli, hogyan lehet a méretfüggést valódi hálózatokon értelmezni, hiszen azok adott méretűek. A 2.3 jobboldali ábra csak tovább növeli a zavart, hiszen itt teljesen különböző hálózatok vannak összehasonlítva a fenti szempontból. A 2.1 táblázatra a szerző úgy hivatkozik, hogy abból a különböző hálózatok klaszterezési együtthatóinak meglepő hasonlósága olvasható le. A számok (0.22, 0.15, 0.28, 0.32, 0.59, 0.437, 0.066) ezt egyáltalán nem támasztják alá – és nincs is a hálózattudománynak ilyen megállapítása. Az a szokásos megfogalmazás, hogy a valódi hálózatok klaszterezése gyakran nagy, a véletlen referenciamodellekhez (pl. a konfigurációs modellhez) viszonyítva értendő, és nem a különböző hálózatok klaszterezési együtthatóinak egymáshoz képesti kvantitatív hasonlóságát jelenti. Az Erdős-Rényi hálózat tárgyalása pontatlan. A (2.6) formulában hiányzik egy 2-es faktor. Az átmérővel kapcsolatos bemutatott gondolatmenet nem igazán a véletlent használja ki a kisvilág jelleg magyarázatára, hanem a fokszámeloszlás élességén túl a hálózat fa-jellegét, ami csak a p paraméter (pontosabban az átlagos fokszám) bizonyos tartományában érvényes. A Watts-Strogatz-féle kisvilág modell tárgyalásánál a szerző hivatkozik a 2.5 ábrára, mint annak illusztrációjára, hogy a modell p = 1-re „közel" (?) az ER modellt adja vissza, de az ábra a p = 1 esetet nem mutatja. A Barabási-Albert-modellnél tévesen szerepel, hogy „ismeretes, hogy az átlagos úthossz logaritmikusan növekszik a mérettel", ugyanis az átlagos úthossz a logaritmikusnál gyengébben, log N/ log log N szerint változik (ultra-kisvilág). A hálózatelméleti modellekről szóló, meglehetősen felületes összefoglaló a kb. 20 évvel ezelőtti állapot tükrözi. Hiányolok egy alapos áttekintést a hálózatkialakító játékok elméletéről, ugyanis ez a rész is elnagyolt; a definiálatlan fogalmak és az eredmények csupán felsorolásszerű említése nem segíti a mű megértését. A fejezet végén általánosként sugallt megoldás, nevezetesen, hogy a költségfüggvényeket a hálózat felhasználásához kell illeszteni, nem igazán értelmezhető hálózatoknak egy széles körén.

A dolgozat megírásakor általános, egyszerű, könnyed, széles közönség számára követhető és talán élvezetes bevezető gondolatokat szerettem volna írni a tézisekhez. A célom az volt, hogy bárki számára rövid úton megközelíthetőek legyenek a dolgozatban szereplő eredmények és ez valóban sokszor a precizitás, vagy a nem teljeskörű bemutatás

rovására megy. Erre vonatkozóan a fejezetben többször is igyekeztem utalásokat tenni. Például a 20 évvel ezelőtti modellek bemutatásának célja nem az volt, hogy képet adjon a komplex hálózatok modelljeiről, hanem az hogy hozzon három közismertebb és talán könnyebben érthető példát a generatív hálózatmodellek működésmódjával és hálózatok paramétereivel kapcsolatban.

A dolgozat harmadik fejezete az útválasztás problémáját tárgyalja a szerző cikkei alapján. (Megjegyzem, hogy nem tudom általánosan értelmezni a szerző által „legrövidebb út feltételezésnek" nevezett és ismét polemikusan tárgyalt fogalmat.) Az empirikusan választott utak jellemzésére a szerző bevezeti a megnyúlás („stretch") fogalmát, és azt találja, hogy annak értéke gyakran különbözik 0-tól. Ezt az eredményt a szerző meglepőnek nevezi, noha világos, hogy akár zaj, akár élsúlyok bevezetése természetesen vezet ilyen eredményre. A navigabilitás diszkussziója pontatlan. Azt írja, hogy ha a kapzsi (greedy) navigáció egy metrikus térre támaszkodhat a keresés közben, a navigabilitás reménye nagy valószínűséggel valósággá válik. Példának hozza fel Jon Kleinberg híres cikkét a navigabilitásról, azonban az a cikk éppen az ellenkezőjét állítja: A navigabilitás kivételes tulajdonságként jelentkezik egyes, euklideszi rácsokra támaszkodó problémák speciális paraméterértékénél.

A legrövidebb út feltételezésnek azt a sokszor nem explicit módon kimondott feltételezést nevezem, hogy a hálózat két pontja közötti valós kommunikációban megvalósuló útvonal a hálózat gráfjában számolható legrövidebb útvonal. Ez a feltételezés véleményem szerint a kapcsolódó irodalom nagy részében nem direkt módon fellelhető. Például ha valaki egy hálózat átmérőjét a gráf két legtávolabbi pontja közötti legrövidebb útként meghatározza, abban már részben benne van ez a feltételezés még ha az átmérőt definíció szerint így is kell kiszámolni. Ugyanez a helyzet a legrövidebb utakra építő centralitás metrikákkal is. Úgy gondolom, hogy innen nézve lehet meglepő az az eredmény, hogy a megvalósult útvonal gyakran távol esik a legrövidebb úttól, hiszen ez a megfigyelés például az alapvető centralitás metrikák jelenlegi definícióit és használati lehetőségeit új megvilágításba helyezi. Itt talán nem is annyira az állítás érdekes, hanem az, hogy a dolgozatban rendelkezésre áll mérési eredmény ami ezt az állítást alátámasztja és alapot ad arra, hogy megvizsgáljuk mi okozza az eltérést. Természetesen egyetértek, hogy akár élsúlyok, akár zaj is okozhatnak ilyen hatást, bár a dolgozat további része arra vonatkozóan vonultat fel eredményeket (pl az internet esetében egyértelműen), hogy valóban az útválasztás módja az, ami ezt az eltérést okozza. A navigáció sikere alatt a legtöbb publikációban azt értik, hogy a mohó algoritmus talál útvonalat a forrástól a célig. Ebben az értelemben Jon Kleinberg cikkében a navigálhatóság a teljes paramétertartományban jelen van, hiszen az euklideszi rács navigálható. A hivatkozás magának a mohó navigációnak és a metrikus terek navigációban való használatának alátámasztására került be a dolgozatba, mint az egyik legismertebb példa. Természetesen ha a navigálhatóság arra vonatkozik, hogy rövid utat talál meg a mohó algoritmus, akkor igaz, hogy ez egy kivételes tulajdonság.

A következő fejezet mutatja be azt a játékelméleti modellt, ami később a hálózatok előállításának eszköze lesz. Az a tény, hogy a csomópontok egy hiperbolikus geometriának megfelelően vannak eloszlatva, közvetlenül az egyébként polemikusan tárgyalt generatív modellek egy vonását hozza be, hiszen azért van erre a lépésre szükség, hogy a fokszámeloszlás megfelelő legyen. Sajnos ebben a fejezetben is vannak hiányosságok. A társadalmi optimum, az éllokalitás fogalma nincs definiálva. Miután a kapcsolati mátrix o_ij elemekkel lett jelölve, felbukkan egy a_ij mátrix, magyarázat nélkül (36. oldal). A metrikus térre nem a játékelméleti modell, hanem a mohó útválasztási algoritmus működésmódja miatt van szükség. Ez a tér nem feltétlenül hiperbolikus, a mohó algoritmus egyéb metrikus tér felett is tud működni, a dolgozatban például az 5.3-as részben analitikus és szimulációs eredmények is szerepelnek ahol a euklideszi, illetve gömbi teret használunk. Természetesen a tér szerkezete nagy hatással van a mohó algoritmus által használható maximálisan navigálható hálózatra és a hiperbolikus geometriában működő algoritmus skálafüggetlen fokszámeloszlású hálózatot hoz létre. A második fejezetben szerepel, hogy a dolgozat irányítatlan, súlyozatlan hálózatokra szorítkozik („Through this dissertation, we consider undirected and unweighted networks") – de ez nem igaz. Valójában a dolgozat elsősorban irányított hálózatokkal foglalkozik.

Sajnos valóban félreérthető módon került be dolgozatba az általános értelemben vett irányítatlan megfogalmazás. Ez a félmondat közvetlenül a legrövidebb útvonal számításának módját vezeti be. Valóban pontatlan a megfogalmazás, de talán a dolgozat további részeiből is kiderül, hogy az irányítatlanság csak az útvonalak számítására vonat-

kozik, hogy a linkek irányítását az útvonalak számítása esetén nem vesszük figyelembe. Természetesen az NNG gráf irányított, a modell-ben is "arc" szerepel, "edge" helyett, illetve k_{out}-ot számolunk, így az analízisből talán egyértelmű, hogy irányított gráfon dolgozunk. Ez egy sajnálatos kavarodás a dolgozatban. Bár a skálafüggetlen fokszámeloszlás megjelenése természetesen összefüggésben áll a hiperbolikus metrikus beágyazással, nem kizárólag annak következménye (1. ábra).

Első kérdésem, K1: Ha irányítatlan a hálózat akkor hogyan lehet az egyes csomópontokat függetlenül kezelni, hiszen egy létesített élt mindkét végéről fel lehet használni utak kialakítására.

Általában véve ha a hálózat irányítatlan akkor nem lehet a csomópontokat függetlenül kezelni.

A hivatkozásokkal nagyvonalúan bánik a szerző. Az exponenciális véletlen gráfok definiáló egyenleteinél nincs utalás az eredeti művekre vagy tankönyvre. A bemutatott példák sem eredeti eredmények – nem mintha a szerzőnek szándékában állt volna ilyen benyomást kelteni, de a tudományos szövegírás szabályai szerint jelezni kell, honnan veszünk át tartalmat. Az ötödik fejezet tárgyalja a dolgozat egyik fő eredményét jelentő modellt. Úgy vélem, hogy a 38. oldalon szereplő állítás túl általános: „létezik egy olyan, jól definiált Gframe kerettopológia skálamentes kifok-eloszlással, ami jelen van minden Nash-egyensúlynál", mert ez nem lehet független a háttérben lévő metrikus tértől. Tekintettel arra, hogy a hiperbolikus beágyazásról még a statisztikus fizikai áttekintés előtt értekezett a szerző, az egzaktnak szánt kijelentésnél a feltételeket illett volna felsorolni. A modell lehetővé teszi a távolságfüggő csatlakozási valószínűség alsó és felső becslését, illetve egy ezeken alapuló közelítő formulát. A levezetésből az átlagos fokszámra korlátok adódnak. Az egyenletes ponteloszlással meghatározott NNG nem elég rugalmas, hogy a komplex hálózatok változatosságát visszaadja, hiszen egy meghatározott átlagos fokszámot és a fokszám-eloszlás egy adott exponensét határozza meg. A nem egyenletes ponteloszlással kapcsolatos (5.61) eredménynek az (5.9) ábrával történő igazolása nem meggyőző, ehhez alaposabb numerikus munkát kellett volna végezni. A modellből a valóságban meg nem figyelt kapcsolat adódik a gamma exponens és a klaszterezési együttható között. Az 5.2 ábrából kitűnik, hogy a modell az átlagos fokszám vonatkozásában jelentősen eltér a megfigyelt adatoktól, miközben ez a hálózatok egyik legfontosabb, széles skálán változó jellemzője. Itt kiderül, hogy valójában az eljárás nem is a hálózat modelljéhez, hanem inkább egy minimális élszámhoz tartozó maximálisan navigálható hálózat modelljéhez vezet.

Az 5.9-es ábra inkább csak vizualizálni, nem alátámasztani igyekszik, az 5.61-es analitikus eredményt. Teljesen egyetértek, hogy ha igazolni szeretnénk az 5.61-et numerikusan, akkor sokkal nagyobb hálózatra, sokkal több numerikus futtatására és statisztikai analízisre lenne szükség. A dolgozatban bemutatott modellek elsődleges célja nem a valós hálózatok szerkezetének minél pontosabb reprodukálása. Erre vonatkozóan a létező nagyon hatékony generatív modellekkel nehéz lenne versenyezni. A dolgozatban tárgyalt modellek az útválasztás mint funkció hálózati szerkezetre gyakorolt hatását szeretnék feltárni.

K2: Milyen átlagos fokszámok adódnak az α paraméter függvényében? Hogyan lehet ezt értelmezni?

Az 5.10-es ábra (a) része a γ paraméter függvényében (tehát közvetetten az α paraméter függvényében) mutatja az összes él számát a hálózatban, miközben a csomópontok száma változatlan. Miközben a γ paraméter 3-ról kettőre csökken, az átlagos fokszám kb. 2.27-ről 2.1-re csökken. Ez azt jelenti hogy $\gamma \approx 2$ környékén a minimális élszám ami a maximális navigációhoz szükséges kevesebb. Mivel a nem homogén leszórás miatt nagyobb eséllyel kerül pont a korong középső részére, ezek a belső pontok a hálózat egyre nagyobb részét (akár a teljes hálózatot) le tudják fedni a hálózat szélén levő pontok számára.

A szerző a konkrét problémához illesztve hol euklideszi, hol hiperbolikus beágyazást tart célszerűnek. *K3:* Az internet kis skáláktól eltekintve domináns, huzalos része kvázi-kétdimenziós euklideszi térbe van beágyazva. Milyen eredményt szolgáltatna a navigációs játékmodell az internet router szintű hálózatára kétdimenziós térben eloszlatott pontokkal? Mi történik, ha a geográfiát és az internet-lefedettséget is figyelembe vesszük?

A dolgozat tartalmaz eredményt egy két dimenziós euklideszi tér feletti valós ponthalmaz esetére, amely a magyarországi településeket adja meg elhelyezkedés szerint, valamint egy rövid analitikus érvelést a fokszámeloszlásra homogén euklideszi pontleszórás esetén (5.3). Ebből az látszik, hogy a fokszámeloszlás gyors lecsengésű tehát nem

hatványfüggvény jellegű, klaszterezettsége továbbra is magas a hasonló paraméterezésű véletlen gráfhoz viszonyítva. Ha hasonlóan egyenletesen szórunk el routereket, akkor a modell hasonló eredményt fog adni. Analitikus úton belátható, hogy a két dimenziós euklideszi síkon az egyensúlyi hálózat maximális ki-fokszáma nem lehet nagyobb, mint 6., pontleszórástól függetlenül.

A dolgozatban súlyozatlan hálózatokról van szó. Ahogy a szerző utal rá, a hálózatgeneráló játékoknál figyelembe lehet élsúlyokat venni, és megítélésem szerint ez nem ütközne nehézségbe az itt ismertetett játék esetében sem. Pl. biokémiai hálózatok esetében a motívumstatisztikát lényegesen befolyásolja, hogy súlyozott vagy bináris hálózatot tekintünk.

K4: Hogyan változtatja meg a generált hálózatok topológiáját az élsúlyok figyelembevétele a játékot definiáló alapegyenletben?

Tetszőleges élsúlyozás mellett sem lehet kevesebb egy pont ki-fokszáma, mint az alapjáték egyensúlyi helyzetében, hiszen a súlyozás a lefedő ponthalmazokat nem változtatja meg. Vagyis élsúlyozás figyelembevétele nem triviális módon növelni fogja a behúzott élek számát. Egy-egy nagyobb élsúly hozzárendelése például megakadályozhatja, hogy egy pont egy olyan másik ponthoz húzzon be élet, ami a hálózat egy elég nagy részét képes számára lefedni. Extrém súlyozás esetén véleményem szerint akár egy belső (hub) csomópont éleinek nagy részét ki lehet venni így a fokszámeloszlás torzítható, és a metrikus térszerkezet meghatározó szerepe csökkenthető.

Az 5. fejezet diszkussziójában helyesen szerepel, hogy a navigálhatóságon kívül más szervező elvek is lehetségesek. Valójában ezek ellentmondhatnak a navigálhatóságnak.

A metrikus tér alapú navigáció csak egy lehetséges, a szakirodalomban viszonylag gyakran használt modell a hálózatokban megvalósuló útválasztás leírására. Arra vonatkozó bizonyítékról, hogy a valós hálózatokban megvalósuló útvonalak ténylegesen mohó navigációból származnának nincs tudomásom, de a modell elterjedtsége miatt a mohó útválasztás hálózatra gyakorolt hatását véleményem szerint nem volt értelmetlen megvizsgálni a dolgozatban. Természetesen ezzel a modellel sok kényelmetlen feltételezés (például a mögöttes metrikus tér és annak jellegzetességei) jár együtt, ezt a dolgozat is kimondja. A dolgozatban számos mérési eredményt bemutatok, ami a valós hálózatokban alkalmazott valószínűleg a különféle hálózatokban hasonló elven működő útválasztási algoritmus egy-egy lehetséges aspektusára mutat rá (például hierarchiakövetés, segédgráfok). Mivel véleményem szerint a hálózat elsődleges funkciója az alkotó pontok közötti információáramlás biztosítása, ennek alapvetően ellentmondó hálózat-szerveződési elv sikerét nem tudom elképzelni. Azt, hogy a mohó navigálhatóságnak ellentmondó szempontok létezhetnek egyáltalán nem vitatom, viszont ez azt a törekvést véleményem szerint nem invalidálja, hogy a hálózatban alkalmazott útválasztás mechanizmusát minél mélyebben megértsük és az ebből fakadó szerkezeti következményeket feltérképezzük.

A 6. fejezet az útválasztás hierarchikus vonatkozásaival foglalkozik. A fejezet címe („Hierarchikus struktúrák”) kissé félrevezető. A dolgozat teljesen figyelmen kívül hagyja a hálózatok hierarchikus tulajdonságaira vonatkozó, érdekes és tanulságos irodalmat, amire pedig szükség lenne, hiszen hivatkozik a hálózatok topológikus hierarchiájára. Egy jól megírt doktori dolgozat elengedhetetlen része az elkülönülő és a megértést segítő irodalmi összefoglaló – sajnos ez itt elmaradt. Ebben a fejezetben is számos homályos megfogalmazással, definiálatlan fogalommal találkozunk. „This informally means that higher-level nodes do not prefer the exchange of information through their subordinates, even if there are short paths through them.” A magasabb szintű csomópont, illetve az alá- és fölérendelés fogalma nem tisztázott, ezeket az összefüggésekből kell kihámozni. A DAG nemcsak, hogy nincs definiálva, de a rövidítés sincs feloldva.

Hasonlóan az általános bevezetőhöz itt is az a törekvés vezetett, hogy bárki számára egyszerűen érthető legyen, hogy itt most az útvonalak szerkezetre gyakorolt hatását vizsgálni képes modell olyan rendszeren lesz alkalmazva, ami alapvetően hierarchikus természetű és emiatt az útválasztási algoritmusra vonatkozó előfeltételek is eltérő jellegűek. Ebben a bevezető részben az egyszerűség ismét a precizitás rovására ment, viszont ahol például az alá- és fölérendeltségnek a megfogalmazott tézisek szempontjából jelentősége van (az Internet vásárló-szolgáltató hierarchiája), ott úgy gondolom definiálásra kerülnek.

A fejezet az Internet szerkezetének néhány érdekes sajátosságát tárja fel és modellezi. *K5:* Lát-e

a jelölt arra lehetőséget, hogy az általa használt játékelméleti módszer az Új Internet kialakításának eszközévé váljon? Milyen költségfüggvényt kellene alkalmazni a nem egyszerű útfüggő sajátosságok, mint például a redundancia követelményének figyelembevételéhez? A komplex hálózatok széleskörűen megfigyelt sajátossága a modularitás, és ez alól az Internet sem kivétel. Milyen költségfüggvényt kellene ahhoz definiálni, hogy a modellezett hálózat moduláris legyen?

A dolgozatban szereplő modellek elsődleges célja volt, hogy az útvonalak kiválasztását elvégző algoritmust valós mérésekkel leírja, illetve hogy a lehetséges útválasztó algoritmusok tulajdonságaiból adódó hálózati szerkezeteket vizsgálja, tehát alapvetően nem a jelenlegi hálózatok struktúrájának minél pontosabb reprodukálása, vagy új hálózatok tervezési metodológiájának kifejlesztése volt a cél. A jelenlegi költségfüggvény két fajta költséget definiál egy élkialakítási költséget, illetve egy kommunikációs költséget. A dolgozatban vizsgált költségfüggvények vagy valós megfigyelésből, a hálózatokban ténylegesen meglévő útvonalválasztási preferenciákból vagy pedig népszerűnek mondható útválasztási modellekből lettek kialakítva úgy, hogy lehetőleg egyszerű, analitikus formában is kezelhető rendszert kapjunk. A költségfüggvények nem triviális módosításai a dolgozatban igazolt egyensúlyi állapotoktól nagy mértékben eltérő eredményekre is vezethetnek, és egyszerűbb módosítások is ellehetetleníthetik az analitikus vizsgálatot. A Új Internet esetében, hasonlóan a mostanihoz, nem gondolom hogy azt valamiféle módon a mérnöki világ kialakítja. A jelenlegi Internet sikerében véleményem szerint döntő jelentése volt annak, hogy a mérnöki megfontolások illetve fundamentumok kellő lehetőséget hagytak annak, hogy az Internet a maga módján önszerveződően fejlődjön. Ebben az értelemben azt az álláspontot képviselem, hogy az Internetet nem kialakítottuk egy elgondolásnak megfelelően, hanem kialakult valahogy bizonyos minimális technológiai kényszerfeltételek mellett. Ebben a megfontolásban véleményem szerint nem triviális, hogy az Új Internetet bármilyen módon kialakíthatjuk-e. A dolgozatban szereplő Internetre vonatkozó jelenlegi eredmények, habár jóval kevesebbet tudnak megragadni a hálózat tulajdonságáról, mint a generatív jellegű modellek, mindaddig érvényben maradnak, amíg az Internet alapja a vásárló-szolgáltató hierarchia marad a hozzá csatlakozó útválasztási ökoszisztémával. Amennyiben merőben új útválasztási módszertant dolgozunk ki (akár pl. a (Voitalov, Ivan, et al. "Geohyperbolic routing and addressing schemes." ACM SIGCOMM Computer Communication Review 47.3 (2017): 11-18.) cikkben javasolt geohyperbolikus, akár mást pl. a kompakt útválasztási módszerek sorából), akkor annak valószínűleg szerkezeti következményei is lesznek. Tehát én amellett érvelek, hogy a dolgozatban tárgyalt algoritmusok nem az Új Internet struktúrájának kialakításában segíthetnek, hanem az Új Internet technológiai alapját jelentő új útválasztási ökoszisztéma strukturális lábnyomát segíthetnek feltárni. A redundancia kérdésében számomra nem egyértelmű, hogy az nem értelmezhető valamilyen módon útválasztási problémaként. Amennyiben a redundanciát úgy értelmezzük, hogy az útválasztási algoritmus két pont között képes legyen több, akár éldiszjunkt útvonalat is megadni, akkor ezt véleményem szerint beemelhetjük a költségfüggvénybe. Tehetjük ezt például olyan egyszerű módon, hogy a kommunikációs költséget a lehetséges útvonalak száma szerint csökkentjük (ha csak egy út van akkor a kommunikációs költség magasabb, mint ha több is), de komplexebb esetben a konkrét útvonalak egymáshoz vett viszonya (mennyiben éldiszjunkt utak ezek) is figyelembe vehető. Persze minél komolyabb feltételeket szabunk annál kisebb az esély az analitikus vizsgálatra, illetve az élkialakítás lokalitása is sérülhet. A redundancia vizsgálatának nem csak a hibatűrés, hanem az egyre népszerűbbé váló többutas megoldások térnyerése is értelmet adhat. A modularitást úgy gondolom nagyon elemi formában már most is képes visszaadni az Internet útválasztási sajátosságaira szabott modell. Az Internet tetején levő Tier-1 gerincszolgáltatókból álló modul létezését (6.1.3-as rész) és valamelyest a méretét is megadja az amúgy igen leegyszerűsített modell (6.1.4). Ezen felül az alacsonyabb rendű szolgáltatók esetében is kialakulnak modulok, hiszen a 6.1.4-ben látható, hogy az útvonalválasztási algoritmus következményeként peer élek jelennek meg a nagyobb méretű felhasználói bázissal rendelkező szolgáltatók között. Természetesen ez a modularitás sokkal egyszerűbb, mint amit a valós hálózatokban tapasztalhatunk, de ismét megjegyezném, hogy nem a valós tulajdonságok reprodukálása, hanem az útválasztó algoritmus szerkezetre gyakorolt hatásának megértése a cél. Úgy gondolom, hogy komplexebb mo-

dulstruktúra is előállhat a modellből, ha például a hálózat csomópontjait térbe helyezzük és az élkialakítási költséget a távolságuk függvényében növeljük. Ekkor a közelben lévő csomópontok természetesebb módon szerveződhetnek modulokba.

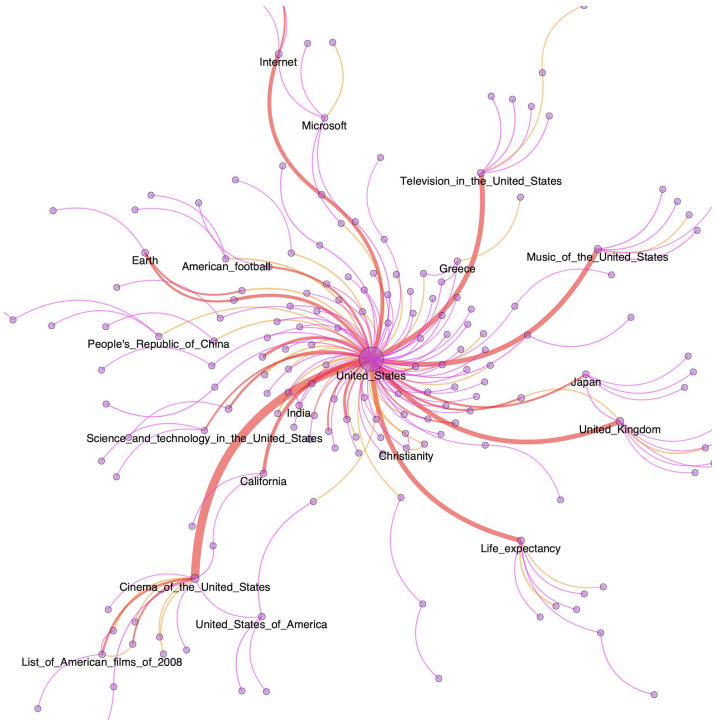
A fejezet második része egy a szavak terében történő navigációról szól. Itt ismét erősen polemikussá válik a dolgozat. A 79. oldalon azt állítja, hogy a hálózattudósok úgy érvelnek, hogy a legrövidebb út a valódi utak hasznos közelítése. Ezzel szemben, pl. a [71] cikkben a következő állítás szerepel: „Úgy találjuk, hogy az emberi útkeresés, miközben általában igen hatékony, jellegzetesen különbözik a legrövidebb utak azonosításától."

K6: Kérem a jelöltet, fejtse ki, miért mutatja be az általa idézett irodalmat szelektíven. Részletesebb összehasonlítás a [71] cikkel azért is indokolt lett volna, mert az ott a talált effektusok jól összevethetők a szerző által leírtakkal és az adatok mennyisége is meggyőző, ugyanakkor a modellezés nagyon eltérő megközelítésű.

Azt hiszem itt egy elírás lehet a bírálatban, mert 71-es cikkben nem található ilyen állítás. Viszont abban van olyan állítás, amely az internetes eredményeket mérésekkel is alátámasztja, tehát amellett érvel, hogy az internet esetében a legrövidebb útválasztástól való eltérés nem "bug", vagy anomália, hanem a rendszer funkciójából adódó tulajdonság. Az idézett állítás a 171-es cikkben található. Már a bevezető gondolatokban említettem, hogy semmi esetre sem szerettem volna azt állítani, hogy minden cikk kivétel nélkül valamilyen formában a legrövidebb úttól való eltérés egy "bug" nézetet elfogadja. Való igaz, hogy ezt a konkrét cikket nem emeltem ki, mint olyat ami ellenkező álláspontot fogalmaz meg, de pl. 6.2-es rész diszkussziójában több cikket is említek, amelyek jelentős eltérésekre hívják fel a figyelmet a legrövidebb utaktól: "Gao et al. showed that the paths of packets going through the internet are also detoured to a non-negligible extent [69], and they showed that the hierarchical policies of internet packet routing may be responsible for a major proportion of inflation. Detours have been identified in road networks by Zhu et al. [177] and in cattle pen systems by Grandin [73], while similar phenomena were also reported in airport [49, 150] and brain networks [8, 49]." A 171-es hivatkozásban szereplő WikiSpeedia útvonal adatbázis a kollektív ember navigációról képes képet formálni. Azért van ez így mert az adatbázisban levő adatok gyűjtésében részt vevő rendszer nem teszi lehetővé a felhasználók egymástól való megkülönböztetését. Ilyen értelemben a publikáció nem egy konkrét útválasztási stratégiát tud körvonalazni, hanem ilyen egyedi stratégiák statisztikus összegét képes vizsgálni. Ez a megközelítés rendkívül hasznos például Internetes tartalmak cach-elésének optimalizálásakor, hiszen remekül előrejelezhető, hogy egy adott wikipédia oldal megnyitása után a nagy populáció kb. milyen más tartalmakra fog rövid időn belül navigálni. A szóhálós vizsgálatunk célja alapvetően más volt. Mi szerettünk volna egy-egy adott ember útvonasztási stratégiájáról, hálózatban vett tájékozódási módszeréről teljesebb képet kapni. Alapvető különbség tehát, hogy a mi rendszerünkben képesek vagyunk egymástól megkülönböztetni a felhasználókat és ténylegesen körvonalazni egy-egy egyéni útválasztási módszert. Ha összeöntjük az adatokat, akkor valószínűleg hasonló eredményeket kapunk, mint a 171-es cikkben (előrejelzi ezt a nyúlás hasonló volta), bár az általunk vizsgált rendszer sokkal kevesebb csomópontot tartalmaz. Bár a dolgozatban nem szerepel, de szeretném megjegyezni, hogy a wikipédia játéknak létezik olyan verziója, ahol a felhasználók megkülönböztethetők. Most épp egy ilyen adatbázissal dolgozunk és nagy mintán (10M útvonal) is látszik az általunk a szóhálóban megfigyelt, emberi navigációt segítő és azt nagy mértékben leegyszerűsítő segédgráfok (scaffold-ok) jelenléte (2.ábra).

A hetedik fejezet egy rövid összegzés, a nyolcadik fejezet pedig a téziseket tartalmazza. Az utóbbiakkal kapcsolatban a következő megjegyzéseim vannak: - Az 1.1 tézisből javaslom „a tématerületen uralkodó feltevéssel ellentétben" rész törlését. - Az 1.2 tézispont akkor fogadható el jelen formájában, ha a szerző megmutatja, hogyan lehet irányítatlan hálózatokon függetlenül kezelni a csomópontokat. Ellenkező esetben jelezni kell, hogy a modell irányított hálózatokra vonatkozik. - A 2.1-2 tézisek eredményei a $d_G(s)(u, v)$ költség speciális megválasztásának esetére vonatkoznak. Ezt jelezni kell. - A 3.2 tézispontnál meg kell említeni, hogy az emberi tájékozódás az (angol, hárombetűs) szavak terében történt.

A megjegyzéseket kivétel nélkül elfogadom. Ennek megfelelően a módosított tézis megfogalmazások a következők:



2. ábra. Emberi navigációs segédgráf a WikiGame játékban.

Thesis 1.1: By the analysis of measurements regarding paths in networks from various areas of life (Internet, biology, air transportation, words), I have shown that the computation of routes in networks is not due to the shortest path method.

Thesis 1.2: I have developed a game-theoretic model capable of handling the possible navigation schemes flexibly and unfolding their effects on the structure of the network, as follows.

The possible strategies of node $u \in \mathcal{P}$ is to create a set of undirected edges or arcs: $S_u = 2^{\mathcal{P}\setminus\{u\}}$. The strategy vector $s = (s_0, s_1 \dots s_{N-1}) \in (S_0, S_1 \dots S_{N-1})$ of all the nodes defines the $G(s)$ graph as: $G(s) = \bigcup_{i=0}^{N-1}(i \times s_i)$. The cost function of node u is:

$$c_u = \sum_{\forall u \neq v} d_{G(s)}(u, v) + k(s_u), \quad u, v \in \mathcal{P} \tag{1}$$

where $d_{G(s)}(u, v)$ is the communication cost from u to v over $G(s)$, and $k(s_u)$ is the cost of implementing the arcs in s_u.

Thesis 2.1: I have shown analytically that the network navigation game (NNG), that is a special case of the model in Thesis 1.1 with a given $d_G(s)(u, v)$ communication cost function, contains a so-called greedy frame, which is present in all possible equilibrium states. Using analytical methods, I have given the connection probabilities between all possible node pairs in the greedy frame, which is a lower bound on the connection probability in the equilibrium state. I have given an upper bound on the connection probability analytically. Using the lower and upper bounds, I have given a general formula for the connection probability in the equilibrium state.

Thesis 2.2: I have shown analytically, that the equilibrium network of the network navigation game (NNG), that is a special case of the model in Thesis 1.1 with a given $d_G(s)(u, v)$ communication cost function, is sparse (average out-degree < 4), which is in good agreement with the observations in real complex networks. I have proven analytically, that the out-degree distribution of the equilibrium network is a power-law ($\gamma = 3$) in case of the homogeneous sprinkling of the nodes. I have shown analytically that a non-homogeneous sprinkling of the nodes can adjust the exponent of the power-law. I have shown via simulations that the ($\gamma \approx 2$) case gives the lowest cost while the network is maximally navigable. I have shown with analytic approximations, that the clustering coefficient of the network is high ($\bar{c} \sim 0.45$).

Thesis 3.2: I have shown by the analysis of time series recorded from human subjects, that there

is an underlying hierarchy guiding human navigation in the word-morph network. I have shown, that humans tend to simplify the navigation process by using a tree-like hierarchical subgraph (a scaffold) instead of the whole network.

A dolgozat alapjául szolgáló tudományos eredmények jelentős mennyiségű tudományos munkát tartalmaznak és olykor kifejezetten érdekesek. A fenti megjegyzések figyelembevételével önálló eredménynek ismerem el a téziseket.

Köszönöm szépen!

Sajnos a dolgozat összecsapott, alacsony színvonalú – erre a korábbiakban már utaltam. A fogalmazás nem éri el a tudományos szövegektől megkövetelt szabatosságot, és helyenként az angol nyelv használata is kívánni valókat hagy maga után. Az irodalmi áttekintés nem válik el kellőképpen a saját eredményektől. Számos fölösleges ismétlés található a dolgozatban. A szimbólumok listája nem teljes. Ugyanaz a szimbólum szerepel különböző mennyiségekre, ugyanazt a mennyiséget több szimbólum jelöli. Pl. klaszterezés c_i ill $cl(r_u)$, vagy a korong területe (A és T). A hivatkozásjegyzékben egy tucat hivatkozás kétszer szerepel különböző hivatkozási szabályt követve.

Nem a dolgozat, hanem a tudományos eredmények alapján a nyilvános védés kitűzését és sikeres védés esetén az MTA doktora cím odaítélését javaslom.

Köszönöm szépen!

Alcsútdoboz, 2021. november 4.

Gulyás András

Áttekintés

A hálózattudomány két évtized alatt hihetetlen mennyiségű irodalmat állított elő, melyet valódi kihívás egészében összefoglalni, illetve átlátni. A cikkek számát körülbelül 20 ezerre becsülik [1], de a téma interdiszciplinaritása miatt a cikkek számát megbecsülni sem triviális feladat. A hálózattudomány egyik központi megfigyelése volt, hogy a különféle területekről származó hálózatok szerkezete hasonló. Ennek megfelelően a kezdeti publikációk zöme a valós hálózatok szerkezetére vonatkozó adatok összegyűjtéséről, feldolgozásáról és elemzéséről készült [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 15, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Fontos megfigyelés volt, hogy a legtöbb valós hálózat ritka, átmérőjük kicsi, fokszámeloszlásuk jellegzetes hatványfüggvény, szerkezetükben gyakran modularitás figyelhető meg. Az alap tulajdonságok mellett renkívül nagy számú hálózati tulajdonságot definiáltak és figyeltek meg valós hálózatokban [40].

A mérésekből nyilvánvaló szerkezeti hasonlóságok hatalmas löketet adtak a hálózatmodellek kutatásának, melyek célja, hogy a mérési eredményeket magyarázza, a hálózatok kialakulásának alapvető mechanizmusait feltárja, illetve szerkezetüket reprodukálja. A hálózatmodellek sokszor alapvetően eltérő szemszögből és ennek megfelelően eltérő eszközökkel közelítik meg a valós hálózatok szerkezetét. A hálózatmodellek egy része tulajdonképpen egy algoritmus. Egy olyan algoritmus, amelyet úgy tervezünk meg, hogy egy adott hálózat, vagy egy hálózatcsoport bizonyos megfigyelhető tulajdonságait minél pontosabban reprodukálja. Az algoritmus bemenete az üres, vagy valamilyen egyéb speciális kindulási gráf és az algoritmus élek és csomópontok létrehozásával, törlésével, esetleg élek átrendezésével outputként egy másik hálózatot állít elő. Ezen algoritmikus módszerekre úgy gondolom illik a generatív jelző, ami arra mutat rá, hogy a hálózat szerkezetét az algoritmus generálja. A generatív modellek családjába tartozak a hálózatkutatás történelmét alapvetően meghatározó véletlen gráfok, [41, 42, 43], a kisvilág modell és változatai [44, 5, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 4, 53], a Barabási-Albert modell és annak verziói [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67], de általánosában ide tartoznak az általánosított véletlen gráfok [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77], sztochasztikus blokk-modellek [78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91] illetve egyéb változatos szerkezeti tulajdonságot felhasználó modellek [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 52, 109, 53, 110].

Egy másik tipusú filozófia a hálózatoptimalizálás, amikor egy hálózat egy jól megfogalmazott optimalizálási feladat eredményeként jön létre. A hálózatoptimalizálás általában a hálózatokkal kapcsolatos rendkívül színes optimalizálási problémákkal foglalkozik, például a legrövideb út keresése csomópontok között, információáramlás maximalizálása, információáramlás költségének minimalizálása, szinkronizáció vagy különféle információfolyamok együttes optimalizálása megoldásával foglalkozik

[111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123]. A hálózatoptimalizálás fogalmazhat meg olyan optimalitási feltételt, amely vonatkozhat a hálózat közvetlen szerkezeti tulajdonságaira, illetve olyan optimalizálási problémát, ahol az optimalizálni kívánt változók a hálózat élei. Nagy méretű valós hálózatok esetében is fogalmazhatók meg olyan optimalizálási feladatok, melyek eredményeképp a valóságban megfigyelt szerkezetekhez hasonló hálózat jön létre [124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140]. Ritkán származnak azonban ezek olyan mérésekből vagy modellekből, melyek a hálózat útválasztási funkcióját figyelembe veszik.

Egy harmadik megközelítés, amikor nem algoritmusból, és nem is egy optimalizációs feladat megoldásából származtatjuk a hálózat szerkezetét, hanem arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen ösztönző erők vezethetnek ahhoz, hogy egy egy csomópont egy adott élbehúzási struktúrát kialakítson. Ebben a kérdésfelvetésben tehát nem csak az a központi kérdés, hogy hogyan húzzuk be a hálózat éleit, hanem arra is választ keresünk, hogy miért. Az alapvetően önző entitások interakciójából kialakult egyensúlyi állapotok leírására leggyakrabban használt módszertan a játékelmélet [141, 142, 143, 144, 145]. A valós hálózatok iránt kialakult érdeklődés következtében a játékelméleten belül külön részterület jött létre a hálózatok játékelméleti vizsgálatához. Ezekben a játékokban a játékosok stratégiája általában egy adott élhalmaz (irányított, vagy irányítatlan) behúzása, a játékosok költsége pedig az élhalmaz költségéből plussz valamilyen extra költségből áll, melyek általában a hálózat struktúrájával, vagy feltételezett funkciójával lehetnek kapcsolatban. A hálózatformációs játékokat először Fabrikant és munkatársai javasolták [146], melyben a költségek között az élkiépítési költség mellett a csomópontpárok közötti kommunikációs költség a legrövidebb út hosszával arányos. Egyszerűsége miatt a szakirodalom nagy része az alap hálózatformációs játékok tanulmányozásával és annak egyszerű változatainak vizsgálatával foglalkozik [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166]. A hálózatformációs játék egy módosult változata a hálózattervezési játék, ahol a játékosok közösen viselik azon élek kiépítési költségeit, melyek a számukra fontos terminál csomópontokat a legrövidebb utak mentén összekötik [167, 168, 169, 170]. A játékok közös jellemzője, hogy a kommunikációs költséget a legrövidebb utak alapján számolják. Jóval kisebb részt szakítanak ki a szakirodalomból az eredeti játék olyan módosításai, melyeknél a kommunikációs költség nem a legrövidebb útvonal tulajdonságai alapján számolódik, mint például a kapcsolódási játék [171, 172, 173, 174]. A hálózatformációs játékok esetében bár rendkívül sok analitikus és numerikus eredményt ismerünk, nagyon kevés olyan tanulmány elérhető, amely a valós hálózatok megfigyelt tulajdonságait képes hálózatformációs játékokból származtatni [175, 176]. Olyan játékról, amely a kommunikációs költségben a valós hálózatokban megjelenő útválasztási sajátosságokat tartalmazza nincs tudomásom, ebben a vonatkozásban a dolgozat újdonságot hoz.

A hálózatmodelleken túl a hálózatkutatással kapcsolatos irodalom szignifikáns részét képezik olyan tanulmányok, melyek a hálózat szerkezetéből következő tulajdonságokkal, pl. a hálózatok robusztusságával, hibákkal és támadásokkal elleni ellenállóképességével [177, 178, 179, 180, 181, 182, 183], a hálózatban megjelenő, a hálózat méretéhez képest kisebb, de jellegzetes szerkezeti motívumokkal [184, 185, 186, 187, 188, 189, 190], fokszám-korrelációval [191, 192, 193, 194, 195, 196], a hálózaton belüli csoportosodással és modularitással [197, 198, 199, 200, 194, 201, 202], a hálózatok és fizikai rendszerek közötti kapcsolatokkal [203, 204, 56, 205, 206, 207], vizualizációval [208, 209, 210, 211, 212, 213], a hálózat struktúráját kihasználó keresési algoritmusokkal [214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221], metrikus terekkel kapcsolatos beágyazottságukkal foglalkoznak [92, 222, 223, 224, 93, 225, 226, 227, 228]. A dolgozat szempontjából kiemelkedő ide sorolható rész-terület a hálózat hierarchikus szerkezetének vizsgálata. Hierarchikus szerkezet alatt azt értjük, hogy a hálózat csomópontjaihoz valamiféle számot rendelhetünk, amely az adott csomópont hálózatban betöltött szerepét jelképezi. Ez a szám egy rendezést definiál a csomópontok felett, amelynek megfelelően értelmezhetővé válik két összekapcsolt csomópont relatív szerepe a hálózat működésében, illetve az összekapcsoltságuk jellege, ennek megfelelően alá- és fölérendeltségi, vagy éppen mellérendeltségi viszonyt állapíthatunk meg. Egy-egy valós hálózat hierarchikus volta gyakran triviálisan következik a hálózat szerveződéséből. Az Internet például alapvetően olyan élekből áll, melyek két Internet szolgáltató közötti vásárló-szolgáltató hierarchikus viszonyt írja le annak megfelelően, hogy a hálózat mely részében végzik tevékenységüket [229, 230]. Hasonló természetesnek mondható hierarchiák adódnak bizonyos szervezetek [231, 232], táplálékláncok esetében [233, 234]. Más hálózatokban a hierarchia jelenléte nem ennyire egyértelmű, olykor vitatott. A hierarchikus hálózatokkal kapcsolatos irodalom egy része magának a hierarchikus viszonyoknak alapjául szolgáló számoknak a definíciójával (milyen szerkezeti, vagy egyéb tulajdonságból származtassuk a hierarchikus viszonyt) [235, 236, 237, 238, 239, 240, 241], illetve azok alapján hálózat éleinek hie-

rarchikus besorolásával foglalkozik. A szakirodalom, ennek megfelelően számos algoritmust dolgozott ki, amelyek egy hálózat csomópontjait és éleit adott szempontok szerint hierarchiába tudja rendezni [242, 243, 244, 245, 246, 247]. A hálózatmodellek egy csoportja a hierarchiák központi szerepét hangsúlyozza és olyan algoritmus definiál, amely hierarchikus szerkezetet generál, miközben a hálózat egyéb megfigyelt tulajdonságait megtartja [102, 103, 248, 249, 250]. Külön alterület foglalkozik a hierarchikus viszonyok kialakulásának problémakörével is [251, 252, 253, 254, 255, 256, 239, 257, 258, 259, 260]. A hierarchiák szerepét számos tanulmány vizsgálja a hálózatban alkalmazható keresési, útvonalválasztási problémák kapcsán [214, 219, 261, 262, 108, 263]. Számomra nem ismeretes viszont olyan tanulmány, amely egy konkrét hierarchikus útvonalválasztási stratégia, amelyről tudjuk, hogy a hálózatban alkalmazásra kerül [264, 265], milyen hatást gyakorol a hálózat szerkezetére.

A hálózattudomány igen korai szakaszában megjelent már a hálózaton lezajlódó jelenségek vizsgálata. Az egyik talán legtöbbet vizsgált kérdés a hálózatok feletti terjedési jelenségek vizsgálata (például járványterjedés [266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275], információ terjedés [276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285]). Ezen jelenségek fontos vonása az alapvetően szórás (broadcast) jellegű információáramlás, amikor is egy csomópont minden lehetséges szomszédjának képes lehet (például valamekkora valószínűséggel) továbbítani az információt. A járványterjedési modellek vizsgálata hatalmas fejlődésen ment keresztül a hálózattudomány következtében és olyan fontos járványok esetében szolgáltatott előrejelzéseket, mint a H1N1 [286, 287] vagy a COVID-19 [268]. Az információ áramlásának egy másik módja, amikor a hálózatot nem elárasztja az adott információ, hanem a hálózat egy adott pontjából egy másikba szervezetten jut el. Ehhez az információtovábbítási módhoz szükséges egy útválasztási, vagy ún. "routing" algoritmus, amely a két csomópont közötti hálózati útvonal kialakítását valahogy megoldja. A útválasztási algoritmus statisztikus tulajdonságairól már a klasszikus értelemben vett hálózatkutatás előttről is származott információ. Milgram [288] híres levélküldési kísérlete megmutatta, hogy a hálózatok nem csak a kisvilág tulajdonsággal rendelkeznek önmagában, hanem tartozik hozzájuk egy olyan algoritmus is, ami a kisvilág tulajdonságából adódó rövid útvonalakat képes megtalálni. Habár Milgram kísérletét más formában is megismételték [217], a forrás-cél párok közötti útvonalakat előállító útvonalválasztási algoritmus működési mechanizmusába sokáig nem lehetett mélyebben belelátni, véleményem szerint elsősorban az adatok elégtelensége miatt. Úgy gondolom, hogy az adatok hiányát a valós útvonalakkal kapcsolatos megfigyelési nehézségek okozzák. Azt hogy két csomópont között van-e él egy hálózatban nagyon sokféle mérés, vagy megfigyelés igazolhatja. Sok hálózat esetében az élek meghatározása magának a hálózatnak a definíciója szerint publikus információ. A hollywood-i színészek hálózata, a kollaborációs hálózatok vagy például a transzport hálózatok publikusan elérhető adatbázisok (térképek, filmes nyilvántartás, publikációs adatbázisok) viszonylag egyszerű feldolgozásával akár egy egyetemi laborgyakorlat keretei között előállíthatók. Végezhetünk célzott mérést is két pontra vonatkozóan és megnézhetjük, hogy az egyik viselkedésének módosítása közvetlen hatással van-e a másikra. Bizonyos esetekben két hálózati entitás kapcsolatát fizikai, vagy logikai törvényekből is kikövetkeztethetjük (pl. fehérje interakciós hálózatok, Rubik kocka állapottere, szóhálózatok). Véleményem szerint alapvetően más a helyzet az útvonalakkal kapcsolatban. Úgy gondolom az útvonalak természete alapvetően privát. Az, hogy egy parkban merre sétált valaki, vagy milyen repülőgépekkel utazott, vagy hogy milyen megoldást adott be egy hálózati útvonalválasztásra visszavezethető feladatra (például térbeli navigáció, szójátékok, Wikipédia játékok) alapvetően nem publikus természetű, ezért sokkal nehezebben gyűjthető és felhasználható adat. Valószínűleg ezért az elérhető és felhasználható valós hálózatokban valós útvonalakat nagy mennyiségben tartalmazó adatbázisok száma nagyon csekély. Pedig ha a hálózatok szerkezete alapvetően hasonló, akkor van rá esély, hogy maga az útvonalválasztó algoritmus is hasonló ezekben a rendszerekben. Egy érdekes kivétel talán az Internet több szempontból is. Az egyik, hogy az Internetes csomagok útvonalát habár nem triviális módon és nem közvetlenül, de mégis nagy számban lehet becsülni [289]. Ennek megfelelően az Internet esetében a valós útvonalak legrövidebb utaktól való szembeötlő eltérése az Internet mérnökeinek már igen korán feltűnt [290, 291, 292]. A másik fontos szempont, hogy az Internet esetében magáról az útválasztási algoritmusról is lehet előzetesen tudni valamit a jól definiált vásárlószolgáltató architektúra és az ebből gazdasági okok mentén következő egyszerű megkötések formájában az útvonalakra vonatkozóan[264, 265]. Számomra nem ismeretes olyan tanulmány, amely azt vizsgálta volna, hogy az Interneten tapasztalható útvonal anomáliák jelen lennének egyéb rendszerekben. Csak az utóbbi pár év fejleménye az a vélekedés, hogy az útvonalak természete az eddigi hálózatkutatásos eredményeket egy kicsit más megvilágításba helyezheti[293].

Az igen nagy számú és rendkívüli pontosságra képes hálózatmodellek kidolgozása után a hálózatku-

tatás hangsúlya hálózatmodellekről áttevődött a hálózatok irányítása[294, 295, 296, 297, 298], illetve speciális hálózatok (időfüggő hálózatok [299, 300, 188, 301, 302], közösségi hálózatok [303, 304], neurális hálózatok [305, 306]) részletesebb vizsgálata felé. Érdekes irány az útvonalakkal kapcsolatos terület, melyhez a dolgozatom is kapcsolódik.

Hivatkozások

[1] Roland Molontay and Marcell Nagy. Twenty years of network science: A bibliographic and co-authorship network analysis. In *Big data and social media analytics*, pages 1–24. Springer, 2021.

[2] J-P Onnela, Jari Saramäki, Jorkki Hyvönen, György Szabó, David Lazer, Kimmo Kaski, János Kertész, and A-L Barabási. Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, 104(18):7332–7336, 2007.

[3] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos, and Christos Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 195–206. Princeton University Press, 2011.

[4] Parongama Sen and Bikas K Chakrabarti. Small-world phenomena and the statistics of linear polymers. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(38):7749, 2001.

[5] Duncan J Watts. Networks, dynamics, and the small-world phenomenon. *American Journal of sociology*, 105(2):493–527, 1999.

[6] Jacob Levy Moreno. *Who shall survive?: A new approach to the problem of human interrelations.* Nervous and mental disease publishing co, 1934.

[7] Peter Mariolis. Interlocking directorates and control of corporations: The theory of bank control. *Social Science Quarterly*, pages 425–439, 1975.

[8] David Bunting. Origins of the american corporate network. *Social Science History*, 7(2):129–142, 1983.

[9] Linton C Freeman. Some antecedents of social network analysis. *Connections*, 19(1):39–42, 1996.

[10] Joseph Galaskiewicz and Peter V Marsden. Interorganizational resource networks: Formal patterns of overlap. *Social science research*, 7(2):89–107, 1978.

[11] Peter S Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American journal of sociology*, 110(1):44–91, 2004.

[12] James Holland Jones and Mark S Handcock. An assessment of preferential attachment as a mechanism for human sexual network formation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 270(1520):1123–1128, 2003.

[13] Fredrik Liljeros, Christofer R Edling, Luis A Nunes Amaral, H Eugene Stanley, and Yvonne Åberg. The web of human sexual contacts. *Nature*, 411(6840):907–908, 2001.

[14] Lada A Adamic, Bernardo A Huberman, AL Barabási, R Albert, H Jeong, and G Bianconi. Power-law distribution of the world wide web. *science*, 287(5461):2115–2115, 2000.

[15] LAN Amara, Antonio Scala, Marc Barthelemy, and H Eugene Stanley. Classes of small-world networks. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 207–210. Princeton University Press, 2011.

[16] Howard D White, Barry Wellman, and Nancy Nazer. Does citation reflect social structure?: Longitudinal evidence from the "globenet" interdisciplinary research group. *Journal of the American Society for information Science and Technology*, 55(2):111–126, 2004.

[17] Sidney Redner. How popular is your paper? an empirical study of the citation distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 4(2):131–134, 1998.

[18] Bernardo A Huberman. *The laws of the Web: Patterns in the ecology of information.* mit Press, 2003.

[19] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, 281(1-4):69–77, 2000.

[20] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Diameter of the world-wide web. *nature*, 401(6749):130–131, 1999.

[21] Jon M Kleinberg, Ravi Kumar, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, and Andrew S Tomkins. The web as a graph: Measurements, models, and methods. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 1–17. Springer, 1999.

[22] Andrei Broder, Ravi Kumar, Farzin Maghoul, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Raymie Stata, Andrew Tomkins, and Janet Wiener. Graph structure in the web. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 183–194. Princeton University Press, 2011.

[23] Adam B Jaffe and Manuel Trajtenberg. *Patents, citations, and innovations: A window on the knowledge economy.* MIT press, 2002.

[24] Sergey N Dorogovtsev and José Fernando F Mendes. Language as an evolving word web. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 268(1485):2603–2606, 2001.

[25] Ramon Ferrer I Cancho and Richard V Solé. The small world of human language. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 268(1482):2261–2265, 2001.

[26] Mariano Sigman and Guillermo A Cecchi. Global organization of the wordnet lexicon. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(3):1742–1747, 2002.

[27] Mark Steyvers and Joshua B Tenenbaum. The large-scale structure of semantic networks: Statistical analyses and a model of semantic growth. *Cognitive science*, 29(1):41–78, 2005.

[28] Vito Latora and Massimo Marchiori. Is the boston subway a small-world network? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 314(1-4):109–113, 2002.

[29] Andre Broido et al. Internet topology: Connectivity of ip graphs. In *Scalability and Traffic Control in IP Networks*, volume 4526, pages 172–187. International Society for Optics and Photonics, 2001.

[30] Qian Chen, Hyunseok Chang, Ramesh Govindan, and Sugih Jamin. The origin of power laws in internet topologies revisited. In *Proceedings. twenty-first annual joint conference of the ieee computer and communications societies*, volume 2, pages 608–617. IEEE, 2002.

[31] Hawoong Jeong, Bálint Tombor, Réka Albert, Zoltan N Oltvai, and A-L Barabási. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804):651–654, 2000.

[32] János Podani, Zoltán N Oltvai, Hawoong Jeong, Bálint Tombor, A-L Barabási, and E Szathmary. Comparable system-level organization of archaea and eukaryotes. *Nature genetics*, 29(1):54–56, 2001.

[33] David A Fell and Andreas Wagner. The small world of metabolism. *Nature biotechnology*, 18(11):1121–1122, 2000.

[34] Andreas Wagner and David A Fell. The small world inside large metabolic networks. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 268(1478):1803–1810, 2001.

[35] Jörg Stelling, Steffen Klamt, Katja Bettenbrock, Stefan Schuster, and Ernst Dieter Gilles. Metabolic network structure determines key aspects of functionality and regulation. *Nature*, 420(6912):190–193, 2002.

[36] Takashi Ito, Tomoko Chiba, Ritsuko Ozawa, Mikio Yoshida, Masahira Hattori, and Yoshiyuki Sakaki. A comprehensive two-hybrid analysis to explore the yeast protein interactome. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 98(8):4569–4574, 2001.

[37] Hawoong Jeong, Sean P Mason, A-L Barabási, and Zoltan N Oltvai. Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, 411(6833):41–42, 2001.

[38] Sergei Maslov and Kim Sneppen. Specificity and stability in topology of protein networks. *Science*, 296(5569):910–913, 2002.

[39] Peter Uetz, Loic Giot, Gerard Cagney, Traci A Mansfield, Richard S Judson, James R Knight, Daniel Lockshon, Vaibhav Narayan, Maithreyan Srinivasan, Pascale Pochart, et al. A comprehensive analysis of protein–protein interactions in saccharomyces cerevisiae. *Nature*, 403(6770):623–627, 2000.

[40] L da F Costa, Francisco A Rodrigues, Gonzalo Travieso, and Paulino Ribeiro Villas Boas. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in physics*, 56(1):167–242, 2007.

[41] Paul Erdos, Alfréd Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1):17–60, 1960.

[42] Béla Bollobás and Bollobás Béla. *Random graphs*. Number 73. Cambridge university press, 2001.

[43] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, 12(1):261–267, 1961.

[44] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of 'small-world'networks. *nature*, 393(6684):440–442, 1998.

[45] Duncan J Watts. *Small worlds*. Princeton university press, 2018.

[46] M Argollo de Menezes, Cristian F Moukarzel, and TJP Penna. First-order transition in small-world networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 50(5):574, 2000.

[47] Cristian F Moukarzel. Spreading and shortest paths in systems with sparse long-range connections. *Physical Review E*, 60(6):R6263, 1999.

[48] Mark EJ Newman and Duncan J Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Physics Letters A*, 263(4-6):341–346, 1999.

[49] Mark EJ Newman, DJ Walls, Mark Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 310–320. Princeton University Press, 2011.

[50] S Jespersen and Alexander Blumen. Small-world networks: Links with long-tailed distributions. *Physical Review E*, 62(5):6270, 2000.

[51] Cristian F Moukarzel and M Argollo de Menezes. Shortest paths on systems with power-law distributed long-range connections. *Physical Review E*, 65(5):056709, 2002.

[52] Alejandro F Rozenfeld, Reuven Cohen, Daniel Ben-Avraham, and Shlomo Havlin. Scale-free networks on lattices. *Physical Review Letters*, 89(21):218701, 2002.

[53] Christopher P Warren, Leonard M Sander, and Igor M Sokolov. Geography in a scale-free network model. *Physical Review E*, 66(5):056105, 2002.

[54] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439):509–512, 1999.

[55] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 272(1-2):173–187, 1999.

[56] Ginestra Bianconi and Albert-László Barabási. Bose-einstein condensation in complex networks. *Physical review letters*, 86(24):5632, 2001.

[57] Ginestra Bianconi and A-L Barabási. Competition and multiscaling m evolving networks. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 361–367. Princeton University Press, 2011.

[58] Sergey N Dorogovtsev, José Fernando F Mendes, and Alexander N Samukhin. Structure of growing networks with preferential linking. *Physical review letters*, 85(21):4633, 2000.

[59] Paul L Krapivsky and Sidney Redner. Organization of growing random networks. *Physical Review E*, 63(6):066123, 2001.

[60] Paul L Krapivsky, Sidney Redner, and Francois Leyvraz. Connectivity of growing random networks. *Physical review letters*, 85(21):4629, 2000.

[61] Sergey N Dorogovtsev and José Fernando F Mendes. Effect of the accelerating growth of communications networks on their structure. *Physical Review E*, 63(2):025101, 2001.

[62] Stefan Bornholdt and Heinz Georg Schuster. Handbook of graphs and networks. *From Genome to the Internet, Willey-VCH (2003 Weinheim)*, 2001.

[63] Sergey N Dorogovtsev and José Fernando F Mendes. Scaling behaviour of developing and decaying networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 52(1):33, 2000.

[64] Réka Albert and Albert-László Barabási. Topology of evolving networks: local events and universality. *Physical review letters*, 85(24):5234, 2000.

[65] Bosiljka Tadić. Dynamics of directed graphs: the world-wide web. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 293(1-2):273–284, 2001.

[66] Bosiljka Tadić. Temporal fractal structures: Origin of power laws in the world-wide web. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 314(1-4):278–283, 2002.

[67] Güler Ergün and Geoff J Rodgers. Growing random networks with fitness. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 303(1-2):261–272, 2002.

[68] Edward A Bender and E Rodney Canfield. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 24(3):296–307, 1978.

[69] Béla Bollobás. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European Journal of Combinatorics*, 1(4):311–316, 1980.

[70] Fan Chung and Linyuan Lu. The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(25):15879–15882, 2002.

[71] Fan Chung and Linyuan Lu. Connected components in random graphs with given expected degree sequences. *Annals of combinatorics*, 6(2):125–145, 2002.

[72] Tomasz Luczak. Sparse random graphs with a given degree sequence. In *Proceedings of the Symposium on Random Graphs, Poznan*, pages 165–182, 1989.

[73] Michael Molloy, Bruce Reed, Mark Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J Watts. A critical point for random graphs with a given degree sequence. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 240–258. Princeton University Press, 2011.

[74] Michael Molloy and Bruce Reed. The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence. *Combinatorics, probability and computing*, 7(3):295–305, 1998.

[75] Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical review E*, 64(2):026118, 2001.

[76] Nicholas C Wormald. The asymptotic connectivity of labelled regular graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):156–167, 1981.

[77] Stanley Wasserman and Philippa Pattison. Logit models and logistic regressions for social networks: I. an introduction to markov graphs andp. *Psychometrika*, 61(3):401–425, 1996.

[78] Paul W Holland, Kathryn Blackmond Laskey, and Samuel Leinhardt. Stochastic blockmodels: First steps. *Social networks*, 5(2):109–137, 1983.

[79] Brian Karrer and Mark EJ Newman. Stochastic blockmodels and community structure in networks. *Physical review E*, 83(1):016107, 2011.

[80] Edoardo Maria Airoldi, David M Blei, Stephen E Fienberg, and Eric P Xing. Mixed membership stochastic blockmodels. *Journal of machine learning research*, 2008.

[81] Laurent Massoulié. Community detection thresholds and the weak ramanujan property. In *Proceedings of the forty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 694–703, 2014.

[82] Emmanuel Abbe and Colin Sandon. Community detection in general stochastic block models: Fundamental limits and efficient algorithms for recovery. In *2015 IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 670–688. IEEE, 2015.

[83] Stephen E Fienberg, Michael M Meyer, and Stanley S Wasserman. Statistical analysis of multiple sociometric relations. *Journal of the american Statistical association*, 80(389):51–67, 1985.

[84] Yuchung J Wang and George Y Wong. Stochastic blockmodels for directed graphs. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397):8–19, 1987.

[85] Peter J Bickel and Aiyou Chen. A nonparametric view of network models and newman–girvan and other modularities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(50):21068–21073, 2009.

[86] Arash A Amini and Elizaveta Levina. On semidefinite relaxations for the block model. *The Annals of Statistics*, 46(1):149–179, 2018.

[87] Elchanan Mossel, Joe Neeman, and Allan Sly. A proof of the block model threshold conjecture. *Combinatorica*, 38(3):665–708, 2018.

[88] Emmanuel Abbe, Afonso S Bandeira, and Georgina Hall. Exact recovery in the stochastic block model. *IEEE Transactions on information theory*, 62(1):471–487, 2015.

[89] Aurelien Decelle, Florent Krzakala, Cristopher Moore, and Lenka Zdeborová. Asymptotic analysis of the stochastic block model for modular networks and its algorithmic applications. *Physical Review E*, 84(6):066106, 2011.

[90] Elchanan Mossel, Joe Neeman, and Allan Sly. Belief propagation, robust reconstruction and optimal recovery of block models. In *Conference on Learning Theory*, pages 356–370. PMLR, 2014.

[91] Elchanan Mossel, Joe Neeman, and Allan Sly. Consistency thresholds for binary symmetric block models. *arXiv preprint arXiv:1407.1591*, 3(5), 2014.

[92] Dmitri Krioukov, Fragkiskos Papadopoulos, Maksim Kitsak, Amin Vahdat, and Marián Boguná. Hyperbolic geometry of complex networks. *Physical Review E*, 82(3):036106, 2010.

[93] Dmitri Krioukov, Fragkiskos Papadopoulos, Amin Vahdat, and Marián Boguná. Curvature and temperature of complex networks. *Physical Review E*, 80(3):035101, 2009.

[94] Fragkiskos Papadopoulos, Maksim Kitsak, M Ángeles Serrano, Marián Boguná, and Dmitri Krioukov. Popularity versus similarity in growing networks. *Nature*, 489(7417):537–540, 2012.

[95] Chaoming Song, Shlomo Havlin, and Hernan A Makse. Self-similarity of complex networks. *Nature*, 433(7024):392–395, 2005.

[96] Júlia Komjáthy and Károly Simon. Generating hierarchial scale-free graphs from fractals. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(8):651–666, 2011.

[97] Petter Holme, Josh Karlin, and Stephanie Forrest. An integrated model of traffic, geography and economy in the internet. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 38(3):5–16, 2008.

[98] Aemen Lodhi, Amogh Dhamdhere, and Constantine Dovrolis. Genesis: An agent-based model of interdomain network formation, traffic flow and economics. In *2012 Proceedings IEEE INFOCOM*, pages 1197–1205. IEEE, 2012.

[99] Lifeng Xi, Lihong Wang, Songjing Wang, Zhouyu Yu, and Qin Wang. Fractality and scale-free effect of a class of self-similar networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 478:31–40, 2017.

[100] Jin Chen, Meifeng Dai, Zhixiong Wen, and Lifeng Xi. A class of scale-free networks with fractal structure based on subshift of finite type. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 24(4):043133, 2014.

[101] José S Andrade Jr, Hans J Herrmann, Roberto FS Andrade, and Luciano R Da Silva. Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, euclidean, space filling, and with matching graphs. *Physical review letters*, 94(1):018702, 2005.

[102] Erzsébet Ravasz and Albert-László Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Physical review E*, 67(2):026112, 2003.

[103] Albert-László Barabási, Erzsébet Ravasz, and Tamas Vicsek. Deterministic scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(3-4):559–564, 2001.

[104] Yohsuke Murase, János Török, Hang-Hyun Jo, Kimmo Kaski, and János Kertész. Multilayer weighted social network model. *Physical Review E*, 90(5):052810, 2014.

[105] Jesper Dall and Michael Christensen. Random geometric graphs. *Physical review E*, 66(1):016121, 2002.

[106] Carl Herrmann, Marc Barthélemy, and Paolo Provero. Connectivity distribution of spatial networks. *Physical Review E*, 68(2):026128, 2003.

[107] G Nemeth and G Vattay. Giant clusters in random ad hoc networks. *Physical Review E*, 67(3):036110, 2003.

[108] M Angeles Serrano, Dmitri Krioukov, and Marián Boguná. Self-similarity of complex networks and hidden metric spaces. *Physical review letters*, 100(7):078701, 2008.

[109] Soon-Hyung Yook, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Modeling the internet's large-scale topology. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(21):13382–13386, 2002.

[110] Jürgen Jost and Maliackal Poulo Joy. Evolving networks with distance preferences. *Physical Review E*, 66(3):036126, 2002.

[111] Dimitri Bertsekas. *Network optimization: continuous and discrete models*. Athena Scientific, 1998.

[112] Bernard M Waxman. Routing of multipoint connections. *IEEE journal on selected areas in communications*, 6(9):1617–1622, 1988.

[113] Frank K Hwang and Dana S Richards. Steiner tree problems. *Networks*, 22(1):55–89, 1992.

[114] Alexander Schrijver. On the history of the transportation and maximum flow problems. *Mathematical programming*, 91(3):437–445, 2002.

[115] John Glen Wardrop. Road paper. some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the institution of civil engineers*, 1(3):325–362, 1952.

[116] Douglas J Ashton, Timothy C Jarrett, and Neil F Johnson. Effect of congestion costs on shortest paths through complex networks. *Physical review letters*, 94(5):058701, 2005.

[117] Timothy C Jarrett, Douglas J Ashton, Mark Fricker, and Neil F Johnson. Interplay between function and structure in complex networks. *Physical Review E*, 74(2):026116, 2006.

[118] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics reports*, 469(3):93–153, 2008.

[119] Luca Donetti, Pablo I Hurtado, and Miguel A Munoz. Entangled networks, synchronization, and optimal network topology. *Physical Review Letters*, 95(18):188701, 2005.

[120] Markus Brede. Optimal synchronization in space. *Physical Review E*, 81(2):025202, 2010.

[121] My T Thai and Panos M Pardalos. *Handbook of optimization in complex networks: theory and applications*, volume 57. Springer, 2012.

[122] Petter Holme. Congestion and centrality in traffic flow on complex networks. *Advances in Complex Systems*, 6(02):163–176, 2003.

[123] Ning Jing, Yun-Wu Huang, and Elke A Rundensteiner. Hierarchical optimization of optimal path finding for transportation applications. In *Proceedings of the Fifth international Conference on information and Knowledge Management*, pages 261–268, 1996.

[124] Alex Fabrikant, Elias Koutsoupias, and Christos H Papadimitriou. Heuristically optimized tradeoffs: A new paradigm for power laws in the internet. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 110–122. Springer, 2002.

[125] Michael T Gastner and Mark EJ Newman. Shape and efficiency in spatial distribution networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2006(01):P01015, 2006.

[126] A Bejan and GA Ledezma. Streets tree networks and urban growth: optimal geometry for quickest access between a finite-size volume and one point. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 255(1-2):211–217, 1998.

[127] Thomas Courtat, Catherine Gloaguen, and Stephane Douady. Mathematics and morphogenesis of cities: A geometrical approach. *Physical Review E*, 83(3):036106, 2011.

[128] Dieter Jungnickel and D Jungnickel. *Graphs, networks and algorithms*. Springer, 2005.

[129] Ramon Ferrer Cancho and Ricard Solé Vicente. Optimization in complex networks. *Lecture notes in physics. Monographs*, 625:114–126, 2003.

[130] Romualdo Pastor-Satorras, Miguel Rubi, and Albert Diaz-Guilera. *Statistical mechanics of complex networks*, volume 625. Springer Science & Business Media, 2003.

[131] David J Aldous. Spatial transportation networks with transfer costs: asymptotic optimality of hub-and-spoke models. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 145, pages 471–487. Cambridge University Press, 2008.

[132] Diego Garlaschelli, Guido Caldarelli, and Luciano Pietronero. Universal scaling relations in food webs. *Nature*, 423(6936):165–168, 2003.

[133] Geoffrey B West, James H Brown, and Brian J Enquist. A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. *Science*, 276(5309):122–126, 1997.

[134] Amos Maritan, Francesca Colaiori, Alessandro Flammini, Marek Cieplak, and Jayanth R Banavar. Universality classes of optimal channel networks. *Science*, 272(5264):984–986, 1996.

[135] Nisha Mathias and Venkatesh Gopal. Small worlds: how and why. *Physical Review E*, 63(2):021117, 2001.

[136] Johannes Berg and Michael Lässig. Correlated random networks. *Physical review letters*, 89(22):228701, 2002.

[137] Sergi Valverde, R Ferrer Cancho, and Richard V Sole. Scale-free networks from optimal design. *EPL (Europhysics Letters)*, 60(4):512, 2002.

[138] Vittoria Colizza, Jayanth R Banavar, Amos Maritan, and Andrea Rinaldo. Network structures from selection principles. *Physical review letters*, 92(19):198701, 2004.

[139] Adam Meyerson and Brian Tagiku. Minimizing average shortest path distances via shortcut edge addition. In *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, pages 272–285. Springer, 2009.

[140] Erik D Demaine and Morteza Zadimoghaddam. Minimizing the diameter of a network using shortcut edges. In *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, pages 420–431. Springer, 2010.

[141] Roger B Myerson. *Game theory*. Harvard university press, 2013.

[142] Tim Roughgarden. Algorithmic game theory. *Communications of the ACM*, 53(7):78–86, 2010.

[143] Robert Gibbons et al. A primer in game theory. 1992.

[144] Jörgen W Weibull. *Evolutionary game theory*. MIT press, 1997.

[145] John Von Neumann. 1. on the theory of games of strategy. In *Contributions to the Theory of Games (AM-40), Volume IV*, pages 13–42. Princeton University Press, 2016.

[146] Alex Fabrikant, Ankur Luthra, Elitza Maneva, Christos H Papadimitriou, and Scott Shenker. On a network creation game. In *Proceedings of the twenty-second annual symposium on Principles of distributed computing*, pages 347–351, 2003.

[147] Erik D Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, Hamid Mahini, and Morteza Zadimoghaddam. The price of anarchy in network creation games. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 8(2):1–13, 2012.

[148] Susanne Albers, Stefan Eilts, Eyal Even-Dar, Yishay Mansour, and Liam Roditty. On nash equilibria for a network creation game. *ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC)*, 2(1):1–27, 2014.

[149] Matúš Mihalák and Jan Christoph Schlegel. The price of anarchy in network creation games is (mostly) constant. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 276–287. Springer, 2010.

[150] Akaki Mamageishvili, Matúš Mihalák, and Dominik Müller. Tree nash equilibria in the network creation game. *Internet Mathematics*, 11(4-5):472–486, 2015.

[151] Davide Bilò and Pascal Lenzner. On the tree conjecture for the network creation game. *Theory of Computing Systems*, 64(3):422–443, 2020.

[152] Matúš Mihalák and Jan Christoph Schlegel. Asymmetric swap-equilibrium: A unifying equilibrium concept for network creation games. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 693–704. Springer, 2012.

[153] Davide Bilò, Luciano Gualà, Stefano Leucci, and Guido Proietti. Network creation games with traceroute-based strategies. In *International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 210–223. Springer, 2014.

[154] Andreas Cord-Landwehr and Pascal Lenzner. Network creation games: think global–act local. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 248–260. Springer, 2015.

[155] Davide Bilò, Luciano Gualà, Stefano Leucci, and Guido Proietti. Locality-based network creation games. *ACM Transactions on Parallel Computing (TOPC)*, 3(1):1–26, 2016.

[156] Ankit Chauhan, Pascal Lenzner, Anna Melnichenko, and Martin Münn. On selfish creation of robust networks. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 141–152. Springer, 2016.

[157] Ankit Chauhan, Pascal Lenzner, Anna Melnichenko, and Louise Molitor. Selfish network creation with non-uniform edge cost. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 160–172. Springer, 2017.

[158] Venkatesh Bala and Sanjeev Goyal. A noncooperative model of network formation. *Econometrica*, 68(5):1181–1229, 2000.

[159] Noga Alon, Erik D Demaine, Mohammad T Hajiaghayi, and Tom Leighton. Basic network creation games. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(2):656–668, 2013.

[160] Pascal Lenzner. Greedy selfish network creation. In *International Workshop on Internet and Network Economics*, pages 142–155. Springer, 2012.

[161] Tobias Friedrich, Sven Ihde, Christoph Keßler, Pascal Lenzner, Stefan Neubert, and David Schumann. Efficient best response computation for strategic network formation under attack. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 199–211. Springer, 2017.

[162] Erik D Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, Hamid Mahini, and Morteza Zadimoghaddam. The price of anarchy in cooperative network creation games. *ACM SIGecom Exchanges*, 8(2):1–20, 2009.

[163] Davide Bilò, Luciano Gualà, Stefano Leucci, and Guido Proietti. The max-distance network creation game on general host graphs. *Theoretical Computer Science*, 573:43–53, 2015.

[164] Eli A Meirom, Shie Mannor, and Ariel Orda. Network formation games with heterogeneous players and the internet structure. In *Proceedings of the fifteenth ACM conference on Economics and computation*, pages 735–752, 2014.

[165] Eli A Meirom, Shie Mannor, and Ariel Orda. Formation games of reliable networks. In *2015 IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, pages 1760–1768. IEEE, 2015.

[166] Davide Bilò, Tobias Friedrich, Pascal Lenzner, and Anna Melnichenko. Geometric network creation games. In *The 31st ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures*, pages 323–332, 2019.

[167] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Éva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, 38(4):1602–1623, 2008.

[168] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Eva Tardos, and Tom Wexler. Near-optimal network design with selfish agents. In *Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 511–520, 2003.

[169] Dov Monderer and Lloyd S Shapley. Potential games. *Games and economic behavior*, 14(1):124–143, 1996.

[170] Martin Hoefer and Piotr Krysta. Geometric network design with selfish agents. In *International Computing and Combinatorics Conference*, pages 167–178. Springer, 2005.

[171] Sanjeev Goyal, Shahin Jabbari, Michael Kearns, Sanjeev Khanna, and Jamie Morgenstern. Strategic network formation with attack and immunization. In *International Conference on Web and Internet Economics*, pages 429–443. Springer, 2016.

[172] Lasse Kliemann. The price of anarchy for network formation in an adversary model. *Games*, 2(3):302–332, 2011.

[173] Stephan Eidenbenz, VS Anil Kumar, and Sibylle Zust. Equilibria in topology control games for ad hoc networks. *Mobile Networks and Applications*, 11(2):143–159, 2006.

[174] Thomas Moscibroda, Stefan Schmid, and Rogert Wattenhofer. On the topologies formed by selfish peers. In *Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, pages 133–142, 2006.

[175] Davide Bilò, Tobias Friedrich, Pascal Lenzner, Stefanie Lowski, and Anna Melnichenko. Selfish creation of social networks. *arXiv preprint arXiv:2012.06203*, 2020.

[176] Georgios Kouroupas, Evangelos Markakis, Christos Papadimitriou, Vasileios Rigas, and Martha Sideri. The web graph as an equilibrium. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 203–215. Springer, 2015.

[177] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *nature*, 406(6794):378–382, 2000.

[178] Paolo Crucitti, Vito Latora, Massimo Marchiori, and Andrea Rapisarda. Efficiency of scale-free networks: error and attack tolerance. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 320:622–642, 2003.

[179] Duncan S Callaway, Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Physical review letters*, 85(25):5468, 2000.

[180] Dan Hendrycks and Thomas Dietterich. Benchmarking neural network robustness to common corruptions and perturbations. *arXiv preprint arXiv:1903.12261*, 2019.

[181] Anthony H Dekker and Bernard D Colbert. Network robustness and graph topology. In *Proceedings of the 27th Australasian conference on Computer science-Volume 26*, pages 359–368, 2004.

[182] Byungjoon Min, Su Do Yi, Kyu-Min Lee, and K-I Goh. Network robustness of multiplex networks with interlayer degree correlations. *Physical Review E*, 89(4):042811, 2014.

[183] Jan Øystein Haavig Bakke, Alex Hansen, and János Kertész. Failures and avalanches in complex networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 76(4):717, 2006.

[184] Shmoolik Mangan and Uri Alon. Structure and function of the feed-forward loop network motif. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 100(21):11980–11985, 2003.

[185] Sebastian Wernicke and Florian Rasche. Fanmod: a tool for fast network motif detection. *Bioinformatics*, 22(9):1152–1153, 2006.

[186] Joshua A Grochow and Manolis Kellis. Network motif discovery using subgraph enumeration and symmetry-breaking. In *Annual International Conference on Research in Computational Molecular Biology*, pages 92–106. Springer, 2007.

[187] Jukka-Pekka Onnela, Jari Saramäki, János Kertész, and Kimmo Kaski. Intensity and coherence of motifs in weighted complex networks. *Physical Review E*, 71(6):065103, 2005.

[188] Lauri Kovanen, Márton Karsai, Kimmo Kaski, János Kertész, and Jari Saramäki. Temporal motifs in time-dependent networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(11):P11005, 2011.

[189] Saeed Omidi, Falk Schreiber, and Ali Masoudi-Nejad. Moda: an efficient algorithm for network motif discovery in biological networks. *Genes & genetic systems*, 84(5):385–395, 2009.

[190] Lauri Kovanen, Kimmo Kaski, János Kertész, and Jari Saramäki. Temporal motifs reveal homophily, gender-specific patterns, and group talk in call sequences. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(45):18070–18075, 2013.

[191] Mark EJ Newman. Assortative mixing in networks. *Physical review letters*, 89(20):208701, 2002.

[192] Marián Boguná, Romualdo Pastor-Satorras, and Alessandro Vespignani. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations. *Physical review letters*, 90(2):028701, 2003.

[193] Sara Nadiv Soffer and Alexei Vazquez. Network clustering coefficient without degree-correlation biases. *Physical Review E*, 71(5):057101, 2005.

[194] Hang-Hyun Jo, Yohsuke Murase, János Török, János Kertész, and Kimmo Kaski. Stylized facts in social networks: Community-based static modeling. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 500:23–39, 2018.

[195] Ramon Xulvi-Brunet and Igor M Sokolov. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Physical Review E*, 70(6):066102, 2004.

[196] Johan Bollen, Bruno Gonçalves, Guangchen Ruan, and Huina Mao. Happiness is assortative in online social networks. *Artificial life*, 17(3):237–251, 2011.

[197] Michelle Girvan and Mark EJ Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the national academy of sciences*, 99(12):7821–7826, 2002.

[198] Mark EJ Newman and Michelle Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical review E*, 69(2):026113, 2004.

[199] Gergely Palla, Imre Derényi, Illés Farkas, and Tamás Vicsek. Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *nature*, 435(7043):814–818, 2005.

[200] Jordi Duch and Alex Arenas. Community detection in complex networks using extremal optimization. *Physical review E*, 72(2):027104, 2005.

[201] Martin Rosvall and Carl T Bergstrom. Maps of random walks on complex networks reveal community structure. *Proceedings of the national academy of sciences*, 105(4):1118–1123, 2008.

[202] Jussi M Kumpula, Jukka-Pekka Onnela, Jari Saramäki, Kimmo Kaski, and János Kertész. Emergence of communities in weighted networks. *Physical review letters*, 99(22):228701, 2007.

[203] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002.

[204] Dmitri Krioukov, Maksim Kitsak, Robert S Sinkovits, David Rideout, David Meyer, and Marián Boguñá. Network cosmology. *Scientific reports*, 2(1):1–6, 2012.

[205] Heiko Hoffmann and David W Payton. Optimization by self-organized criticality. *Scientific reports*, 8(1):1–9, 2018.

[206] Jean M Carlson and John Doyle. Highly optimized tolerance: A mechanism for power laws in designed systems. *Physical Review E*, 60(2):1412, 1999.

[207] L De Arcangelis and HJ Herrmann. Self-organized criticality on small world networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 308(1-4):545–549, 2002.

[208] Mingrui Xia, Jinhui Wang, and Yong He. Brainnet viewer: a network visualization tool for human brain connectomics. *PloS one*, 8(7):e68910, 2013.

[209] Bobby-Joe Breitkreutz, Chris Stark, and Mike Tyers. Osprey: a network visualization system. *Genome biology*, 4(3):1–4, 2003.

[210] Md Abdul Motaleb Faysal and Shaikh Arifuzzaman. A comparative analysis of large-scale network visualization tools. In *2018 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)*, pages 4837–4843. IEEE, 2018.

[211] Michael Baitaluk, Mayya Sedova, Animesh Ray, and Amarnath Gupta. Biologicalnetworks: visualization and analysis tool for systems biology. *Nucleic acids research*, 34(suppl_2):W466–W471, 2006.

[212] Michael E Smoot, Keiichiro Ono, Johannes Ruscheinski, Peng-Liang Wang, and Trey Ideker. Cytoscape 2.8: new features for data integration and network visualization. *Bioinformatics*, 27(3):431–432, 2011.

[213] Vladimir Batagelj and Andrej Mrvar. Pajek—analysis and visualization of large networks. In *Graph drawing software*, pages 77–103. Springer, 2004.

[214] Duncan J Watts, Peter Sheridan Dodds, and Mark EJ Newman. Identity and search in social networks. *science*, 296(5571):1302–1305, 2002.

[215] Lada A Adamic, Rajan M Lukose, Amit R Puniyani, and Bernardo A Huberman. Search in power-law networks. *Physical review E*, 64(4):046135, 2001.

[216] Ozgur Simsek, David Jensen, et al. Decentralized search in networks using homophily and degree disparity. In *IJCAI*, pages 304–310, 2005.

[217] Peter Sheridan Dodds, Roby Muhamad, and Duncan J Watts. An experimental study of search in global social networks. *science*, 301(5634):827–829, 2003.

[218] Beverly Yang and Hector Garcia-Molina. Improving search in peer-to-peer networks. In *Proceedings 22nd International Conference on Distributed Computing Systems*, pages 5–14. IEEE, 2002.

[219] Jon Kleinberg. Complex networks and decentralized search algorithms. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM)*, volume 3, pages 1019–1044, 2006.

[220] Özgür Şimşek and David Jensen. Navigating networks by using homophily and degree. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(35):12758–12762, 2008.

[221] Zhong-Yuan Jiang and Man-Gui Liang. Incremental routing strategy on scale-free networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(8):1894–1901, 2013.

[222] Ginestra Bianconi and Christoph Rahmede. Emergent hyperbolic network geometry. *Scientific reports*, 7(1):1–9, 2017.

[223] Elisabetta Candellero and Nikolaos Fountoulakis. Clustering and the hyperbolic geometry of complex networks. In *International Workshop on Algorithms and Models for the Web-Graph*, pages 1–12. Springer, 2014.

[224] Gregorio Alanis-Lobato, Pablo Mier, and Miguel A Andrade-Navarro. Efficient embedding of complex networks to hyperbolic space via their laplacian. *Scientific reports*, 6(1):1–10, 2016.

[225] Balázs Lengyel, Attila Varga, Bence Ságvári, Ákos Jakobi, and János Kertész. Geographies of an online social network. *PloS one*, 10(9):e0137248, 2015.

[226] Seth Bullock, Lionel Barnett, and Ezequiel A Di Paolo. Spatial embedding and the structure of complex networks. *Complexity*, 16(2):20–28, 2010.

[227] Alessandro Muscoloni, Josephine Maria Thomas, Sara Ciucci, Ginestra Bianconi, and Carlo Vittorio Cannistraci. Machine learning meets complex networks via coalescent embedding in the hyperbolic space. *Nature communications*, 8(1):1–19, 2017.

[228] Tomaso Aste, Ruggero Gramatica, and Tiziana Di Matteo. Exploring complex networks via topological embedding on surfaces. *Physical Review E*, 86(3):036109, 2012.

[229] Lakshminarayanan Subramanian, Sharad Agarwal, Jennifer Rexford, and Randy H Katz. Characterizing the internet hierarchy from multiple vantage points. In *Proceedings. Twenty-First Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, volume 2, pages 618–627. IEEE, 2002.

[230] Kenneth L Calvert, Matthew B Doar, and Ellen W Zegura. Modeling internet topology. *IEEE Communications magazine*, 35(6):160–163, 1997.

[231] William G Olchi. The transmission of control through organizational hierarchy. *Academy of management Journal*, 21(2):173–192, 1978.

[232] Michael S Cole and Heike Bruch. Organizational identity strength, identification, and commitment and their relationships to turnover intention: Does organizational hierarchy matter? *Journal of Organizational Behavior: The International Journal of Industrial, Occupational and Organizational Psychology and Behavior*, 27(5):585–605, 2006.

[233] Robert T Paine. Food web complexity and species diversity. *The American Naturalist*, 100(910):65–75, 1966.

[234] Stuart L Pimm, John H Lawton, and Joel E Cohen. Food web patterns and their consequences. *Nature*, 350(6320):669–674, 1991.

[235] Aaron Clauset, Cristopher Moore, and Mark EJ Newman. Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks. *Nature*, 453(7191):98–101, 2008.

[236] Ala Trusina, Sergei Maslov, Petter Minnhagen, and Kim Sneppen. Hierarchy measures in complex networks. *Physical review letters*, 92(17):178702, 2004.

[237] David Krackhardt. Graph theoretical dimensions of informal organizations. In *Computational organization theory*, pages 107–130. Psychology Press, 2014.

[238] Enys Mones, Lilla Vicsek, and Tamás Vicsek. Hierarchy measure for complex networks. *PloS one*, 7(3):e33799, 2012.

[239] Ryan Rowe, German Creamer, Shlomo Hershkop, and Salvatore J Stolfo. Automated social hierarchy detection through email network analysis. In *Proceedings of the 9th WebKDD and 1st SNA-KDD 2007 workshop on Web mining and social network analysis*, pages 109–117, 2007.

[240] Jianxi Luo and Christopher L Magee. Detecting evolving patterns of self-organizing networks by flow hierarchy measurement. *Complexity*, 16(6):53–61, 2011.

[241] Dániel Czégel and Gergely Palla. Random walk hierarchy measure: What is more hierarchical, a chain, a tree or a star? *Scientific reports*, 5(1):1–14, 2015.

[242] Andrea Lancichinetti, Santo Fortunato, and János Kertész. Detecting the overlapping and hierarchical community structure in complex networks. *New journal of physics*, 11(3):033015, 2009.

[243] Stanley Wasserman, Katherine Faust, et al. Social network analysis: Methods and applications. 1994.

[244] John Scott. Social network analysis. *Sociology*, 22(1):109–127, 1988.

[245] Michael B Eisen, Paul T Spellman, Patrick O Brown, and David Botstein. Cluster analysis and display of genome-wide expression patterns. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95(25):14863–14868, 1998.

[246] Rosario N Mantegna. Hierarchical structure in financial markets. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 11(1):193–197, 1999.

[247] Mark EJ Newman. Communities, modules and large-scale structure in networks. *Nature physics*, 8(1):25–31, 2012.

[248] Mu Chen, Boming Yu, Peng Xu, and Jun Chen. A new deterministic complex network model with hierarchical structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 385(2):707–717, 2007.

[249] Yuying Gu and Jitao Sun. A tree-like complex network model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(1):171–178, 2010.

[250] Mo-Gei Wang, Xing-Yuan Wang, and Zhen-Zhen Liu. A new complex network model with hierarchical and modular structures. *Chinese Journal of Physics*, 48(6):805–813, 2010.

[251] Bernat Corominas-Murtra, Joaquín Goñi, Ricard V Solé, and Carlos Rodríguez-Caso. On the origins of hierarchy in complex networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(33):13316–13321, 2013.

[252] Chris Smaje. *Natural hierarchies: The historical sociology of race and caste.* NJ: Blackwell Publisher, 1919.

[253] Benoît Dubreuil. *Human evolution and the origins of hierarchies: the state of nature*. Cambridge University Press, 2010.

[254] Guy Theraulaz, Eric Bonabeau, and Jean-Louis Deneubourg. Self-organization of hierarchies in animal societies: the case of the primitively eusocial wasppolistes dominuluschrist. *Journal of theoretical Biology*, 174(3):313–323, 1995.

[255] Víctor M Eguíluz, Martín G Zimmermann, Camilo J Cela-Conde, and Maxi San Miguel. Cooperation and the emergence of role differentiation in the dynamics of social networks. *American journal of sociology*, 110(4):977–1008, 2005.

[256] Eric Bonabeau, Guy Theraulaz, and Jean-Louis Deneubourg. Dominance orders in animal societies: the self-organization hypothesis revisited. *Bulletin of mathematical biology*, 61(4):727–757, 1999.

[257] Nasrullah Memon, Henrik Legind Larsen, David L Hicks, and Nicholas Harkiolakis. Retracted: detecting hidden hierarchy in terrorist networks: some case studies. In *International Conference on Intelligence and Security Informatics*, pages 477–489. Springer, 2008.

[258] Xiaodan Song, Yun Chi, Koji Hino, and Belle Tseng. Identifying opinion leaders in the blogosphere. In *Proceedings of the sixteenth ACM conference on Conference on information and knowledge management*, pages 971–974, 2007.

[259] Vincent Mak. The emergence of opinion leaders in social networks. *Available at SSRN 1157285*, 2008.

[260] Henok Mengistu, Joost Huizinga, Jean-Baptiste Mouret, and Jeff Clune. The evolutionary origins of hierarchy. *PLoS computational biology*, 12(6):e1004829, 2016.

[261] Lada Adamic and Eytan Adar. How to search a social network. *Social networks*, 27(3):187–203, 2005.

[262] Marian Boguna, Dmitri Krioukov, and Kimberly C Claffy. Navigability of complex networks. *Nature Physics*, 5(1):74–80, 2009.

[263] Christoph Trattner, Philipp Singer, Denis Helic, and Markus Strohmaier. Exploring the differences and similarities between hierarchical decentralized search and human navigation in information networks. In *Proceedings of the 12th international conference on knowledge management and knowledge technologies*, pages 1–8, 2012.

[264] Lixin Gao and Jennifer Rexford. Stable internet routing without global coordination. *IEEE/ACM Transactions on networking*, 9(6):681–692, 2001.

[265] Phillipa Gill, Michael Schapira, and Sharon Goldberg. A survey of interdomain routing policies. *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, 44(1):28–34, 2013.

[266] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical review letters*, 86(14):3200, 2001.

[267] Romualdo Pastor-Satorras, Claudio Castellano, Piet Van Mieghem, and Alessandro Vespignani. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of modern physics*, 87(3):925, 2015.

[268] Matteo Chinazzi, Jessica T Davis, Marco Ajelli, Corrado Gioannini, Maria Litvinova, Stefano Merler, Ana Pastore y Piontti, Kunpeng Mu, Luca Rossi, Kaiyuan Sun, et al. The effect of travel restrictions on the spread of the 2019 novel coronavirus (covid-19) outbreak. *Science*, 368(6489):395–400, 2020.

[269] Moritz UG Kraemer, Chia-Hung Yang, Bernardo Gutierrez, Chieh-Hsi Wu, Brennan Klein, David M Pigott, Open COVID-19 Data Working Group†, Louis du Plessis, Nuno R Faria, Ruoran Li, et al. The effect of human mobility and control measures on the covid-19 epidemic in china. *Science*, 368(6490):493–497, 2020.

[270] Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani. Immunization of complex networks. *Physical review E*, 65(3):036104, 2002.

[271] Duygu Balcan, Vittoria Colizza, Bruno Gonçalves, Hao Hu, José J Ramasco, and Alessandro Vespignani. Multiscale mobility networks and the spatial spreading of infectious diseases. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(51):21484–21489, 2009.

[272] Yamir Moreno, Romualdo Pastor-Satorras, and Alessandro Vespignani. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 26(4):521–529, 2002.

[273] Wonjun Choi, Deokjae Lee, J Kertész, and Byungnam Kahng. Two golden times in two-step contagion models: A nonlinear map approach. *Physical Review E*, 98(1):012311, 2018.

[274] M Saeedian, N Azimi-Tafreshi, GR Jafari, and J Kertesz. Epidemic spreading on evolving signed networks. *Physical Review E*, 95(2):022314, 2017.

[275] Claudio Castellano and Romualdo Pastor-Satorras. Thresholds for epidemic spreading in networks. *Physical review letters*, 105(21):218701, 2010.

[276] Duncan J Watts. A simple model of global cascades on random networks. In *The Structure and Dynamics of Networks*, pages 497–502. Princeton University Press, 2011.

[277] Alain Barrat, Marc Barthelemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge university press, 2008.

[278] Márton Karsai, Gerardo Iñiguez, Riivo Kikas, Kimmo Kaski, and János Kertész. Local cascades induced global contagion: How heterogeneous thresholds, exogenous effects, and unconcerned behaviour govern online adoption spreading. *Scientific reports*, 6(1):1–10, 2016.

[279] Giovanna Miritello, Esteban Moro, and Rubén Lara. Dynamical strength of social ties in information spreading. *Physical Review E*, 83(4):045102, 2011.

[280] Duncan J Watts and Peter Sheridan Dodds. Influentials, networks, and public opinion formation. *Journal of consumer research*, 34(4):441–458, 2007.

[281] Zhongyuan Ruan, Gerardo Iniguez, Márton Karsai, and János Kertész. Kinetics of social contagion. *Physical review letters*, 115(21):218702, 2015.

[282] Thomas W Valente. Social network thresholds in the diffusion of innovations. *Social networks*, 18(1):69–89, 1996.

[283] Vicenç Gómez, Hilbert J Kappen, and Andreas Kaltenbrunner. Modeling the structure and evolution of discussion cascades. In *Proceedings of the 22nd ACM conference on Hypertext and hypermedia*, pages 181–190, 2011.

[284] Márton Karsai, Mikko Kivelä, Raj Kumar Pan, Kimmo Kaski, János Kertész, A-L Barabási, and Jari Saramäki. Small but slow world: How network topology and burstiness slow down spreading. *Physical Review E*, 83(2):025102, 2011.

[285] Panagiotis D Karampourniotis, Sameet Sreenivasan, Boleslaw K Szymanski, and Gyorgy Korniss. The impact of heterogeneous thresholds on social contagion with multiple initiators. *PloS one*, 10(11):e0143020, 2015.

[286] Paolo Bajardi, Chiara Poletto, Jose J Ramasco, Michele Tizzoni, Vittoria Colizza, and Alessandro Vespignani. Human mobility networks, travel restrictions, and the global spread of 2009 h1n1 pandemic. *PloS one*, 6(1):e16591, 2011.

[287] Duygu Balcan, Hao Hu, Bruno Goncalves, Paolo Bajardi, Chiara Poletto, Jose J Ramasco, Daniela Paolotti, Nicola Perra, Michele Tizzoni, Wouter Van den Broeck, et al. Seasonal transmission potential and activity peaks of the new influenza a (h1n1): a monte carlo likelihood analysis based on human mobility. *BMC medicine*, 7(1):1–12, 2009.

[288] Stanley Milgram. The small world problem. *Psychology today*, 2(1):60–67, 1967.

[289] Center for Applied Internet Data Analysis. Internet traceroute database. www.caida.org.

[290] Hongsuda Tangmunarunkit, Ramesh Govindan, and Scott Shenker. Internet path inflation due to policy routing. In *Scalability and Traffic Control in IP Networks*, volume 4526, pages 188–195. International Society for Optics and Photonics, 2001.

[291] Lixin Gao and Feng Wang. The extent of as path inflation by routing policies. In *Global Telecommunications Conference, 2002. GLOBECOM'02. IEEE*, volume 3, pages 2180–2184. IEEE, 2002.

[292] Neil Spring, Ratul Mahajan, and Thomas Anderson. The causes of path inflation. In *Proceedings of the 2003 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*, pages 113–124, 2003.

[293] Renaud Lambiotte, Martin Rosvall, and Ingo Scholtes. From networks to optimal higher-order models of complex systems. *Nature physics*, 15(4):313–320, 2019.

[294] Yang-Yu Liu, Jean-Jacques Slotine, and Albert-László Barabási. Controllability of complex networks. *nature*, 473(7346):167–173, 2011.

[295] Jianxi Gao, Yang-Yu Liu, Raissa M D'souza, and Albert-László Barabási. Target control of complex networks. *Nature communications*, 5(1):1–8, 2014.

[296] Jorge Gomez Tejeda Zañudo, Gang Yang, and Réka Albert. Structure-based control of complex networks with nonlinear dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(28):7234–7239, 2017.

[297] Fabio Pasqualetti, Sandro Zampieri, and Francesco Bullo. Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 1(1):40–52, 2014.

[298] Yang-Yu Liu and Albert-László Barabási. Control principles of complex systems. *Reviews of Modern Physics*, 88(3):035006, 2016.

[299] Petter Holme and Jari Saramäki. Temporal networks. *Physics reports*, 519(3):97–125, 2012.

[300] Aming Li, Sean P Cornelius, Y-Y Liu, Long Wang, and A-L Barabási. The fundamental advantages of temporal networks. *Science*, 358(6366):1042–1046, 2017.

[301] Ashwin Paranjape, Austin R Benson, and Jure Leskovec. Motifs in temporal networks. In *Proceedings of the tenth ACM international conference on web search and data mining*, pages 601–610, 2017.

[302] Raj Kumar Pan and Jari Saramäki. Path lengths, correlations, and centrality in temporal networks. *Physical Review E*, 84(1):016105, 2011.

[303] Stephen P Borgatti, Martin G Everett, and Jeffrey C Johnson. *Analyzing social networks*. Sage, 2018.

[304] David Knoke and Song Yang. *Social network analysis*. Sage Publications, 2019.

[305] Danielle S Bassett and Olaf Sporns. Network neuroscience. *Nature neuroscience*, 20(3):353–364, 2017.

[306] Jonathan D Power, Alexander L Cohen, Steven M Nelson, Gagan S Wig, Kelly Anne Barnes, Jessica A Church, Alecia C Vogel, Timothy O Laumann, Fran M Miezin, Bradley L Schlaggar, et al. Functional network organization of the human brain. *Neuron*, 72(4):665–678, 2011.