Bírálói vélemény Szegedy Balázs
Limits of structures
című MTA doktori disszertációjáról

A strukturális limesz-elméletek véges struktúrákból képzett sorozatok konvergenciájának a fogalmát igyekeznek megragadni, és konvergens sorozat esetén olyan folytonos objektumot konstruálni, amely a sorozat limeszének tekinthető. Mivel a gráfok a legegyszerűbben definiálható, ugyanakkor nemtriviális viselkedésű és nagyon sok alkalmazással bíró véges struktúrafajták közé tartoznak, a gráflimesz-elméletek váltak a strukturális limesz-elméletek prototípusaivá. Különféle gráflimesz-elméleteket különböztetünk meg aszerint, hogy milyen gráfosztályra szorítkozunk, és az oda tartozó gráfok mely jellemzőire alapozzuk a konvergencia definícióját.

Szegedy Balázsnak kulcsszerepe volt mind a sűrű gráfok limeszelméletének, mind pedig a korlátos fokú gráfok lokális-globális limeszelméletének (és további, a dolgozatban nem részletezett gráflimesz-elméleteknek) a kidolgozásában. Bár mindkét elmélet kifejlődésében többen is szerepet játszottak, mégis kijelenthető, hogy ezek Lovász és Szegedy 2006-os, illetve Hatami, Lovász és Szegedy 2014-es cikkével váltak igazán jól kidolgozott, hatékonyan alkalmazható, kerek elméletté.

Az első említett cikk a sűrű gráfok limesz-elméletének sarokköve. A szerzők Fulkerson-díjat kaptak érte; a MathSciNet 326 hivatkozást ad rá. A cikkben megmutatják, hogy ha egy (G_n) gráfsorozat mentén bármely rögzített F gráf G_n-be menő homomorfizmusainak normalizált száma, a

$$t(F, G_n) = \hom(F, G_n)/|V(G_n)|^{|V(F)|}$$

homomorfizmussűrűség konvergál, akkor a (G_n) sorozatnak létezik „természetes” limeszobjektuma: egy szimmetrikus, mérhető, a $[0, 1]$ intervallumba képező W függvény az egységnégyzeten (ún. grafon), amelynek természetes módon definiálhatók a $t(F, W)$ homomorfizmussűrűségei, és ezek megegyeznek a $t(F, G_n)$ homomorfizmussűrűségek limeszével. Ez a disszertációbeli 2.2. következmény. A bizonyítás gráfelméleti, analízisbeli és valószínűségszámítási módszereket ötvöz, és elvezet a Szemerédi-féle regularitási lemma jelentőségének új, mélyebb megértéséhez, kapcsolatba hozva ezt a grafonok

(ekvivalenciaosztályai) terének kompaktságával, ami a disszertáció 2.12. tétele. Fontos építőköve a bizonyításnak a szerzők által felfedezett „számláló-lemma” (Counting Lemma), azaz a disszertáció 2.16. lemmája, amely két grafon homomorfizmussűrűségeinek eltérésére az ún. „vágás-távolság” (cut distance) segítségével ad becslést. Ez a Szemerédi-partíciók elméletéből ismert számláló-lemmának nagyon hasznos általánosítása.

Bár a disszertációba nem került be, Lovász és Szegedy azt is belátják, hogy minden grafon előáll egy alkalmas (G_n) gráfsorozat fenti értelemben vett limeszeként. Ennek a bizonyítása egy új, önmagában is érdekes véletlengráf-modell bevezetésén és vizsgálatán alapul: adott grafonból természetes módon generált végtelen gráfsorozat homomorfizmussűrűségei erősen koncentrálódnak; ezt az Azuma-egyenlőtlenség segítségével bizonyítják. „Mellesleg” azt is megmutatják, hogy minden véletlengráf-modell, amely bizonyos természetes feltételeknek eleget tesz, megkapható egy alkalmas grafonból ilyen módon.

Tárgyalja viszont a disszertáció a Szemerédi-lemma különféle alakjait, ezek bizonyítását, egymással való kapcsolatát, a két szerző egy másik közös cikke alapján, amely 2007-ben jelent meg a Geometric Functional Analysis című folyóiratban.

A dolgozat 3. fejezete a korlátos fokú gráfok lokális-globális konvergenciájáról szól. Alapja a már említett Hatami–Lovász–Szegedy-cikk, amely 2014-ben jelent meg a Geometric Functional Analysis című folyóiratban.

A lokális-globális konvergencia a Benjamini–Schramm-féle lokális konvergencia finomítása. Egy (G_n) korlátos fokú gráfsorozat lokálisan konvergens, ha a

$$t^*(F, G_n) = \hom(F, G_n)/|V(G_n)|$$

homomorfizmus-gyakoriság konvergál bármely rögzített, összefüggő F gráf esetén. Ez a konvergenciafogalom pszeudo-metrizálható — két nem-izomorf gráf távolsága lehet nulla. A lokális konvergencia nem feltétlenül tesz különbséget két gráf között akkor sem, ha sok csúcsuk van, és globális tulajdonságaik alapján egymástól távolinak érezzük őket a csúcsszámmal való skálázás után is. (Például, egy gráf két izomorf példányának diszjunkt uniója nulla távolságra van az eredeti gráftól.) Ezért van szükség a finomításra.

A lokális konvergencia, illetve a neki megfelelő pszeudo-metrika, kézenfekvő módon általánosítható olyan gráfokra, amelyek csúcsai ki vannak színezve

k színnel. A (G_n) korlátos fokú gráfsorozat lokális-globális értelemben konvergens, ha minden k-ra igaz, hogy a G_n gráfból a csúcsok k-színezéseival kapható színezett gráfok halmaza a fenti pszeudo-metrikából származtatott Hausdorff-metrikában konvergens.

A 3. fejezet fő eredménye a 3.3. tétel: minden lokális-globális értelemben konvergens gráfsorozat lokális-globális limesze reprezentálható egy bizonyos fajta mérhető gráffal, úgynevezett graphinggal. A lokális konvergenciára vonatkozó analóg tétel már ismeretes volt.

A 3. fejezet további értékes eredményeket is tartalmaz, ezek elsősorban hipervéges gráfsorozatokra vonatkoznak. Egy (G_n) (korlátos fokú) gráfsorozat hipervéges, ha minden pozitív ϵ számhoz van olyan q, hogy végtelen sok n-re G_n szétvágható q-nál kisebb méretű részekre $\epsilon|V(G_n)|$-nél kevesebb csúcs elhagyásával. A 3.26. tétel kimondja, hogy ha egy (végtelenhez tartó csúcsszámú) hipervéges gráfsorozat lokálisan konvergens, akkor lokális-globális értelemben is konvergens, és a lokális-globális limesz ún. Bernoulli-graphinggal reprezentálható. Megjegyzendő, hogy ezt a tételt, az említett szerzőhármastól függetlenül, Elek Gábor is bebizonyította.

A 4. fejezet a szerző egyszerzős, a Journal of the AMS-ben 2007-ben megjelent publikációján alapul, és a gráfelméleten kívül a statisztikus fizikához is kapcsolódik. Két közvetlen előzménye: a tükrözés-pozitivitás (egyfajta pozitív szemidefinitség) fogalma segítségével Freedman, Lovász és Schrijver karakterizálták azon $t(F)$ gráfparamétereket, amelyek előállnak $t(F) = t(F, G)$ alakban alkalmas G valós súlyokkal ellátott gráffal (azaz előállnak egy ún. csúcsszínezési modell partíciófüggvényeként); Lovász és Szegedy pedig azon $t(F)$ gráfparamétereket, amelyek előállnak $t(F) = t(F, W)$ alakban alkalmas W grafonnal. Ezek az eredmények a valószínűségi változók momentumsorozatai pozitív szemidefinitséggel való, jól ismert karakterizációja „kétváltozós" analogonjainak tekinthetők.

A tükrözés-pozitivitás Szegedy Balázs 4. fejezetben tárgyalt eredményében is központi szerepet játszik. Freedman, Lovász és Schrijver sejtését bebizonyítva, karakterizálja az ún. élszínezési modellek partíciófüggvényeit. A bizonyítás valós algebrai geometriát (Positivstellensatz) és az ortogonális csoport invariánselméletét használja. Ezeknek a mélyebb, klasszikus algebrai eszközöknek a mozgósításával Szegedy új lendületet adott az Erdős, Lovász és Spencer által elindított kutatási területnek, amelyben különféle típusú

(általánosított) gráfok homomorfizmus-profiljaként előálló gráfparaméterek karakterizációja a cél.

Az 5. fejezet additív kombinatorikáról szól, és a jelöltnek egy egyszerzős cikkén alapul, amely 2018-ban jelent meg a Transactions of the American Mathematical Society című folyóiratban. Az additív kombinatorika egyik központi témája, hogy lineáris konfigurációk (pl. háromtagú számtani sorozatok) sűrűségét vizsgáljuk kompakt Abel-csoportok részhalmazaiban. Mivel egy részhalmaz helyett tekinthetjük az indikátorfüggvényét, érdemes korlátos mérhető függvényben is definiálni egy lineáris konfiguráció sűrűségét, a grafonok homomorfizmus-sűrűségeinek analógiájára. Messze nem nyilvánvaló azonban, hogy mi feleljen meg ebben a kontextusban a grafonok vágástávolságának. Szegedy Balázs először két, egy-egy diszkrét csoporton értelmezett, négyzetesen összegezhető függvény távolságát vezeti be, majd két, egy-egy kompakt Abel-csoporton értelmezett, Borel-mérhető, négyzetesen integrálható függvény távolságát a Fourier-transzformáltjuk távolságaként definiálja. Így metrikát kap a függvények izomorfia-osztályain (ha egy függvény konstans egy zárt részcsoport szerinti mellékosztályokon, akkor izomorfnak tekintjük őt a faktorcsoporton értelmezett, neki természetes módon megfelelő függvénnyel).

Az 5.9. tétel kimondja, hogy azon függvények izomorfia-osztályai, amelyek értékeiket a komplex számsík egy rögzített, konvex, kompakt részhalmazában veszik fel, ezzel a metrikával kompakt halmazt alkotnak (a grafonok ekvivalencia-osztályai terének kompaktságával analóg módon). Az 5.13. tétel szerint pedig — a grafonokra vonatkozó számláló-lemma analógiájára — a legfeljebb 1 valódi komplexitású lineáris konfigurációk sűrűségei folytonosak a fenti metrikában (e tétel pontos feltételeit itt nem reprodukálom). A valódi komplexitást Gowers és Wolf definiálták a Gowers-féle uniformitási normák segítségével, amelyeket Gowers a számtani sorozatokról szóló Szemerédi-tétel mélyebb megértéséhez, új bizonyításához, a magasabbrendű Fourier-analízis bevezetéséhez használt.

Az 5. fejezet (egyben a disszertáció) legvégén a szerző bemutatja, hogyan használható a fejezetben kiépített elmélet Roth háromtagú számtani sorozatokról szóló tételének bizonyítására. Valójában az egész 5. fejezet csak bevezető a szerzőnek a magasabbrendű Fourier-analízisre vonatkozó, a disszertáció kereteit meghaladó munkásságához (valahogy úgy, ahogy a Roth-tétel

bevezető a Szemerédi-tételhez).

Az 5. fejezetbeli bizonyítások nagymértékben támaszkodnak ultraszorzatos technikákra, amelyeket Elek Gábor és Szegedy Balázs vezetett be a (hiper)gráfelméletbe. Az ultraszorzatok a disszertáció 3. fejezetében is felbukkannak, de ott csak érintőlegesen.

A dolgozatban ismertetett eredmények váratlan, mély kapcsolatokat tárnak fel a matematika látszólag távoli ágai között. A jelölt tudása, bizonyítóereje, fogalmi innovációra és elméletalkotásra való képessége lenyűgöző. Az eredmények közvetlen és közvetett hatása a gráflimesz-elméletre és az ezzel rokon tudományterületekre (aszimptotikus extremális kombinatorika, hálózatelmélet, statisztikus fizika, additív kombinatorika) igen nagy jelentőségű. A disszertáció messze túlszárnyalja az MTA doktori dolgozatoktól általában elvárt szintet, miközben korántsem fedi le a jelöltnek a PhD fokozat megszerzése óta elért jelentős matematikai eredményeit, például nem szól az extremális gráfelméletben fontos Sidorenko-sejtésről, amelyre vonatkozó legerősebb eredmények szintén Szegedy Balázstól származnak, és még sok minden másról.

Szegedy Balázs nemzedékének egyik legkiválóbb magyar matematikusa. A nyilvános vita kitűzését és az MTA doktori fokozat odaítélését a leghatározottabban támogatom.

Frenkel Péter

Budapest, 2023. február 9. Frenkel Péter