

Válasz Matolcsi Máté professzor úr opponensi véleményére

Először is szeretném megköszönni Matolcsi Máté professzor úrnak a részletes és pozitív hangvételi bírálatát. Ugyancsak köszönöm a tézispontok elfogadását, illetve az építő jellegű kérdést, amelyre a válasz az alábbiakban kerül ismertetésre.

Kérdés: A Schinzel-Schmidt problémában azt vizsgáljuk, hogy egy kompakt intervallumon értelmezett, nemnegatív, 1-re normált integrálú függvénynek az önmagával vett autokonvolúciója legalább milyen sup-normájú. Ez egy additív kombinatorikai kérdésnek egy folytonos változatának tekinthető. Nem világos, hogy létezik-e olyan függvény amely a kérdéses sup-normát minimalizálja (valószínűleg nem). Lehetséges-e a szerző által javasolt limesz elmélettel esetleg egy objektumot találni, ami egy minimalizáló függvény természetes általánosításának tekinthető?

Válasz: A Schinzel-Schmidt probléma leírható az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoportban a $[0, 0.5]$ intervallumon koncentrálódó függvényeken való optimalizációs problémaként is. Mivel a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoport kompakt ezért megpróbálhatjuk alkalmazni az ilyen függvények egy sorozatára a disszertációban leírt limesz elméletet. Pontosabban: legyen $\{f_i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}_{i=1}^\infty$ egy olyan mérhető függvény sorozat melyre $\int f_i = 1$ teljesül és az $f_i * f_i$ konvolúció sup normája a lehetséges legkisebb értékhez konvergál. Ekkor a limesz elmélet alkalmazása a következő pontokon akadhat el:

- 1) A disszertáció ezirányú legfőbb eredményéhez szükséges hogy a függvény sorozat L^∞ -ben egyenletesen korlátos legyen. Ez azonban nem világos hogy feltehető.
- 2) Kérdés az is hogy a sup normát mennyire örzi meg a limesz elmélet.

Mindazonáltal jó esélyt látok rá, hogy a módszerek jobban rászabhatóak erre a problémára. Úgy látom hogy az L^∞ -ben vett korlátosság feltételét el lehet hagyni és helyettesíthető a sokkal gyengébb "tightness" feltétellel amelyben az f_i -ket mint valószínűségi változókat tekintjük a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ valószínűségi mezőn.

A sup norma limeszben való tanulmányozása is egy kidolgozást igénylő kérdés. A limeszre való öröklődés attól is függ mennyire robosztusan veszik fel az $f_i * f_i$ sorozat elemei a szuprérumhoz közeli értékeket. Negatív példaként vegyünk egy olyan g_i függvény sorozatot melyek random $\{0, 1\}$ értékeket vesznek fel az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ csoport egyre finomodó intervallum felosztásán egy 0-ban szimmetrikus módon. Ezen függvények autokonvolúciói egy nagyon kis helyen $1/2$ -hez közeli értéket vesznek fel de túlnyomó részben $1/4$ -hez közeli értéket. Az autokonvolúciók limesze a konstans $1/4$ függvény amely elfelejti az eredeti szuprérumot.

A Matolcsi-Vinuesa cikkben található szimulációs eredmények alapján én optimista vagyok hogy a tightness feltétel teljesül és talán bizonyítható is. A szuprérum limeszben való folytonosságával kapcsolatban pedig az az érzésem hogy elég csak az alulról félig folytonosságot igazolni amely jó eséllyel teljesül itt és a gráfimesz elméletben már előjött. Természetesen ezen kérdések megválaszolása egy kutatási projekt tárgyát képezné és örömmel folytatnám ennek a kitérgyalását.

Budapest, 2023. május 10


Szegedy Balázs