Szegedy Balázs "Limits of structures" c. Tudományok Doktora disszertációjának opponensi birálata

Simonovits Miklós

April 26, 2022

Szegedy Balázs akadémiai doktori disszertációja a struktúrák limeszeinek elméletével foglalkozik, a matematika egy aránylag fiatal területével, melynek Szegedy Balázs egyik legelismertebb kutatója, amely mai arculatához Szegedy nagyon sokkal járult hozzá. Ahogyan Szegedy is elmondja, a dolgozata lényegében 4 cikkére épül. Normálisan azt mondanám, hogy a disszertáció foglalkozik

(a) sűrű és (b) ritka gráfok limesz-elméletével,

de emellett itt még három dolgot emelnék ki, melyek közül kettő azzal kapcsolatos, hogy a disszertáció az egészekre, illetve átalánosabban fogalmazva, Abel csoportokon megfogalmazható problémákkal is foglalkozik. Ezeket kombinatorikus számelméleti problémáknak neveznénk, egyik gyökerük a számtani sorokra vonatkozó Erdős-Turán sejtést bizonyító Szemerédi tétellel kapcsolatos.[1]

A dolgozat foglalkozik tehát még

(c) az Abel csoportok és a limesz elmélet kapcsolatával,

illetve, ami ezzel szorosan kapcsolatos,

(d) a magasabbrendű Fourier Analízissel.

(e) Az utóbbi években kutatások célpontjává vált a közepes sűrűségű gráfok limesz-vizsgálata is és Szegedy Balázsnak és társszerzőinek ebben is központi szerepe van, de a dolgozatban ezek nem szerepelnek.

– · –

[1] A módszerek kiépítése után kiderült, hogy azok az Abel csoportnál általánosabb esetekben isz alkalmazhatók.

Amint már említettem, Szegedy azt írja, hogy a dolgozat 4 cikkre épül, ennek megfelelően egy bevezető után, – amelyben a legfőbb fogalmak egy részét is definiálja, utána jön az óriási áttörést jelentő, bár eléggé rövid Lovász-Szegedy cikk,

> [65] L. Lovász, and B. Szegedy: Szemerédi's lemma for the analyst. Geom. Funct . Anal. vol. 17 (2007), no. 1, 252–270.

de valójában itt ennél több cikkéről van szó, pl. a fentihez elég szorosan kapcsolódnak a további Lovász-Szegedy cikkek, pl. [63], [64], [66].

– · –

A disszertáció 5 fejezetből áll.

Az alábbiakban rövid leírást adok erről, de elötte megjegyzem, hogy a sűrű gráfok limesz-elméletében nagyon fontos szerepet játszó Szemerédi Regularitási lemma azt mondja ki, hogy tetszőleges gráfok ε-közelíthetőek korlátos osztályszámú általánosított véletlen gráfokkal, óriási kombinatorikai fontossága mára már evidens. (A Szemerédi Regularitási Lemma idetartozását mutatja az is, hogy a Lovász-Szegedy cikkben is centrális a szerepe, és Szegedy a disszertációjában is több verzióját fogalmazza meg, lásd pl. 2.1. fejezet.)

A dolgozat részei:

1. Ez egy bevezető jellegű fejezet.

2. Ebben a 2. fejezetben, a 2.4. alfejezetben jelenik meg először a topológia és a Regularitási lemma kapcsolata, egyebek között az, hogy a regularitási lemma felfogható úgy is, hogy egy megfelelő topológiai tér kompakt.

   Az idevonatkozó 2.1. Tétel a különböző erősségű regularitási lemmákat helyettesiti egy metrikus tér kompaktságával. Ezen kívűl a sűrű gráfok limesz elméletét is megalapozza.

   Az itt szereplő alap-tételről először nehéz elképzelni, hogy kombinatorikai következményei lennének, de pl. a 2.4. fejezetben Szegedy már azt mutatja be, hogy valamilyen értelemben ez alkalmazható az osztályszám alsó becslésére a Regularitási lemma alkalmazásaiban.

3. A 3. fejezet a ritka gráfok limeszeiről szól, ahol a ritka azt jelenti, hogy a pontok fokai korlátosak. A ritka és pozitív sűrűségű gráfok limesz-elmélete

között vannak hasonlóságok, de igen nagy különbségek is, és a közepes sűrűségű gráfokról (talán) nincs kielégítő elmélet.

A gráflimesz elméletekben centrális szerepet játszik az, hogy egy Cauchy szorozat limeszét milyen objektummal reprezentáljuk. A sűrű gráfok esetében erre a graphonokat használjuk, amelyek lényegében az egységnégyzeten megadott mérhető függvények ekvivalencia-osztályai.

A ritka gráfoknál az ún. graphingüokat használjuk erre. A 3.3. Tétel elött szükségünk van a graphing-ok definiciójára, a lokális-globális konvergencia definíciójára, és ez a tétel, a fejezet legfontosabb állítása, azt mondja ki, hogy a lokális-globális gráfsorozatok határértéke reprezentálható a graphing-okkal.

(Ez adja meg a korlátos fokú gráfok local-global limeszének a graphing reprezentációját. Míg a sűrű gráfok limeszét graphon-okkal reprezentáltuk, itt a graphing-ok jönnek be, és látható a köztük levő nagy különbég is.)

4. Ez a fejezet az élszínezésekről és a reflection-positivity-ról szól, és részben a statisztikai fizikával motivált.

5. Az utolsó fejezet a csoportokon megadott függvények limeszelméletével foglalkozik. Itt jelenik meg két az átlagos kombinatorikus számára nagyon szokatlan eszköz alkalmazása és diszkutálása:

   (a) A nemsztandard analizis, illetve az ultra-szorzat használata az itten megcélzott limesz-elméletben. Ennek kidolgozása elsősorban Elek Gábor és Szegedi Balázs munkáiban találhatóak, pl. [33];

   (b) másrészt a magasabbrendű analízis felhasználása (elsősorban) Abel -csoportokon megfogalmazott additív problémák megoldásában. Itt megjegyzem, hogy Tim Gowers az utóbbi témáról egy 44 oldalas survey cikket írt, amelyik sok itt tárgyalt kérdéshez jól kapcsolódik. (T. Tao is írt erről egy könyvet, [89].)

A dolgozat egy 93 itemet felsoroló referencia-gyűjteménnyel zárul, melyben 19 cikkben Szegedy Balázs is szerző, és melyek között nagyon sok fontos cikk szerepel. Itt ezek közül most csak a Lovásszal közös nagyhatású cikkeket és az Elek Gáborral új módszert bevezető közös cikkeket emelném ki (ha pedig nem csak Szegedyre figyelünk, akkor persze kiemelem a Borgs-Chayes-Lovász-Sós cikkeket is, illetve még néhány olyan itemet, melyek kiemelkedő szerzők művei az itt tárgyalt témában.

– · –

A folytonos gráfok használata már sokkal korábban megjelent, pl. Katona Gyula valószínűségi egyenlőtlenségeiben, illetve Sidorenko cikkeiben (melyek Katona hatását tükrözik, és arról szólnak, hogyan kell gráfelméleti egyenlőtlenségekből valószínűségszámítási integrálok közötti egyenlőtlenségeket levezetni) de egy sokkal magasabb szinten jelentek meg az idevonatkozó eredmények, amikor részben Lovász László és Sós Vera kutatásainak hatására, részben az áttörést jelentő Lovász-Szegedy cikk hatására a Microsoftban többen elkezdtek a témával szisztematikusan foglalkozni, egyebek között Borgs, Chayes, Lovász, Sós, és Vesztergombi, (de megemlíteném Lex Schrijvert és Mike Freedmant is).

(Természetesen amikor ilyesmiről, a Katona illetve Sidorenko eredményeiről beszélünk, meg kell említeni Turán Pál, majd később Erdős-Meir-Sós-Turán idevonatkozó cikksorozatát is, ezek a diszkrét extremális elmélet alkalmazásairól szólnak, de persze limeszelméletekről ezekben nincs szó.)

Ugyancsak megjegyezhető itt, (az 5. fejezet bevezetőjéhez) hogy a differenciálszámítás módszereit alkalmazták már a gráflimesz elött is, talán először Motzkin és Straus, de alkalmazták sokan mások is, pl. Sós és Straus,. . . .

– · –

Matematikailag a témakörben meglepetést okozott a Lovásszal közös [65] cikke, illetve az ehhez tartozó további cikkei, [64], illetve [66]. Magának az itt tárgyalt elméletnek több különböző forrása volt, de erre nem dolgom kitérni.

(Ugyanitt megemlíthetem még a "property-testing" kapcsolatot vizsgáló [67]-es cikket.) Talán a másik nagyon fontos része a dolgozatnak a Higher Order Fourier Analysis-es rész, amely először igazából Tim Gowers munkáiban tűnt fel, de valamilyen értelemben ott volt már K. F. Roth hires, a számtani sorokra vonatkozó cikkeiben is, (l. [73]).

A 4. fejezet címe "Edge-coloring models and Reflection positivity", ahol a gráfsorozatok limeszelméletében elsősorban azért van szükség az élek, illetve a csúcsok szinezésére, mert a ritka gráfoknál a Benjamini-Schramm módszer nem tudja megkülönböztetni azt, ha veszünk egy gráfsorozatot, illetve, ha ennek tagjaiból két csúcsfüggetlen példányból álló gráfsorozatot: a módszer nem elég erős, de a szinezett gráfokra áttérve kiküszöbölhetjük ezt a problémát. Az elméletben a Reflection Positivity is centrális szerepet játszik, és ez a fejezet oldja meg Freedman, Lovász, és Schrijver egyik nehéz problémáját, amelyiket a fenti három szerző bizonyított a csúcs-reflection-positivity-re, azt sejtve, hogy hasonló

eredmény igaz az él-reflection-positivity-re is. Szegedy ezt teszi meg ebben a fejezetben.

Itt kiemelném a 4.2. Tételt is. (Ez karakterizálja az élszínezési modelleket amelyek a tenzor hálozatokhoz kapcsolodnak) Maga a fejezet statisztikus fizikai jelenségekkel van motiválva. Kiemelném azt is, hogy az nem véletlen, hogy Lovászéknak nem sikerült sejtésüket bebizonyítaniuk, ugyanis az élszinezési és a pontszinezési eset egymástól élesen eltérnek, az élszinezési sejtés bizonyításához egészen új módszerekre volt szükség.

Az 5-ik fejezetből megemlíteném az 5.13-as tételt ami egy additív limesz elméletet csinál a lineáris komplexitási osztályban.

– · –

Nincs értelme, hogy itt sajtóhibákat soroljak fel, (ha Balázs elvégzett volna a végén egy spell-check-et, akkor az elírások kétharmada kiírtódott volna). A tézisek és a dolgozat jól olvasható, (ha nem egy könnyen olvasható mű, az elsősorban a mélységéből adódik, és abból, hogy egy nagyon széles területet fog át, és emellett nagyon sok definiciót használ. Néhol jó lett volna egy kicsit kevésbé tömör fogalmazás, nekem az is szimpatikus lett volna, ha a referenciáknál többször írja ki a neveket.

Talán a téma megérdemelt volna egy kicsit hosszabb (magyar nyelvű) téziseket.

– · –

Mindezek alapján, pontosabban Szegedy Balázs disszertációja és egyéb matematikai eredményei alapján világos, hogy Balázs kiemelkedő matematikus és teljesítménye messze meghaladja azt, aminek alapján a Tudományok Doktora címre javasolható, nagyon erősen javaslom.

Budapest April 26, 2022

Simonovits Miklós
akadémikus