

Tézisfüzet MTA doktori dolgozathoz

Exact methods for the dynamics
of integrable models

Pozsgay Balázs

MTA-ELTE „Lendület” Integrálható Kvantumdinamika
Kutatócsoport

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Fizikai Intézet, Elméleti Fizikai Tanszék

2020, Budapest

1. Előzmények

A megoldható kvantummechanikai elméletek vizsgálatának nagy hagyománya van. A kölcsönható rendszerek esetében az első fontos eredmény Hans Bethe nevéhez fűződik, aki 1931-ben, a kvantummechanika hőskorában megadta a Heisenberg spinlánc egzakt megoldását. Az ezt követő évtizedekben a Bethe Ansatz-nak elnevezett módszert számos más modellben is alkalmazták, s kiderült, hogy ilyen típusú megoldható elméletek csak egy térbeli dimenzióban léteznek. A terület igazi fellendülését azonban az egzakt megoldásokat lehetővé tevő algebrai struktúrák felfedezése hozta el. 1980 körül a leningrádi, L. Faddeev által vezetett csoport kutatásai során kristályosodott ki, hogy a legkülönbébb integrálható modellek hátterét az ún. Yang-Baxter egyenlet adja meg, melyet első felfedezői alapján C. N. Yang és R. Baxter tiszteletére neveztek el. A leningrádi csoport által kidolgozott algebrai módszer jelentős részben a klasszikus integrálhatóságon alapul, s ma „Quantum Inverse Scattering method” (QISM) illetve „Algebraic Bethe Ansatz” (ABA) néven ismert. A közös algebrai nyelv felfedezése igazi forradalmat indított el a területen, a kutatók több évtizeden át dolgoztak a modellek megoldásán, az algebrai struktúrák fejlesztésén, továbbá a mérhető mennyiségek (a termodinamikai állapotjelzők, illetve a korrelációs függvények) kiszámításán.

A szakterület az elmúlt 10-15 évben nem várt irányokból kapott új inspirációt.

Egyrészt az AdS/CFT megfeleltetés felfedezése után kiderült, hogy a CFT oldalon az elmélet dilatációs spektrumát az ún. planáris limeszben integrálható spinláncok írják le. A fagráf szintű számolás olyan klasszikus spinláncokra vezet, mint a Heisenberg modell vagy ennek magasabb szimmetriájú általánosításai. A CFT magasabb hurokrendű számolásai pedig hosszútávú kölcsönhatásokat is tartalmazó, de integrálható spinláncokra vezetnek. Ez a felfedezés teljesen új lökést adott az integrálható modellek vizsgálatának. Bár a dilatációs spektrumot időközben már meghatározták, számos további fizikai mennyiség kiszámítása és a húrelmélettel való összevetése még várat magára. Így például a 3-pont függvények illetve a peremes elméletek 1-pont függvényei még nincsenek egzakt módon meghatározva.

A második nem várt motiváció a kísérletek területéről érkezett. Már korábban is ismert volt, hogy az integrálható modellek jó közelítéssel leírják bizonyos konkrét kristályok mágneses tulajdonságait. Ezek az ún. kvázi-egydimenziós kristályok, melyekben a spinek kölcsönhatása jó közelítéssel egy térbeli irányra korlátozódik. Az ezekkel végzett kísérletek adták az egyensúlyi korrelációs függvények vizsgálatának kísérleti motivációját. Az elmúlt

másfél évtizedben azonban a különböző hideg atomos kísérletekkel lehetővé vált az egydimenziós integrálható modellek mesterséges megvalósítása is. A fő motiváció itt az erősen kölcsönható kvantummechanikai anyag tanulmányozásának a vágya: ismeretes, hogy egydimenziós kölcsönhatások esetén nagyobb a kvantumkorrelációk hatása, és ez adta a kísérletek fontosságát.

Ezek a kísérletek gyakran nem az alapállapot, vagy valamilyen véges hőmérsékletű állapot megvalósítására fókuszáltak, hanem egy nem-egyensúlyi helyzetet idéztek elő. Talán a leghíresebb példa erre az ún. „Quantum Newton’s Cradle” kísérlet 2006-ban, melyet a dolgozatban is tárgyalok. A nem-egyensúlyi dinamika megfigyelése és kvantitatív mérése motiválta az elméleti kutatókat arra, hogy erre a területre fókuszáljanak.

2. Célkitűzések

Az integrálható modellek nem-egyensúlyi viselkedésének vizsgálata lényegében csak a 2010-es években kezdődött meg. Ennek megfelelően a célkitűzések nagy része az évek során a kutatás előrehaladásával született csak meg, és viszonylag kevés előre lefektetett cél volt.

Az előre ismert célok közül a legfontosabb az Általánosított Gibbs Sokaság (GGE) fogalmának és érvényességi körének tisztázása volt. A fő cél a környezettől izolált kvantum sokrészeskerendszerek egyensúlyra törekvésének, és a kialakuló állapotok fizika jellegének megértése. Míg egy általános rendszerben legtöbbször a termalizáció valósul meg, addig egy integrálható modellben a GGE megjelenését várták. A GGE olyan statisztikai fizikai sokaság, mely figyelembe veszi a modellben jelen levő nagy számú extra megmaradó töltést is. A kutatások célja annak meghatározása volt, hogy vajon tényleg helyes-e a GGE alapötlete, vajon valóban helyes leírást ad-e a kölcsönható integrálható modellekben, illetve ezen felül hogy hogyan lehet pontos jóslatokat adni a dinamikai mennyiségek időbeli változására.

Ehhez kapcsolódó cél volt az ún. kvantum kvencsekben az egyes kezdeti állapotoknak az egzakt sajátállapotokkal való átfedésének vizsgálata. Ezek a mennyiségek közvetlenül nem megfigyelhetők, az elméleti számolások közbülső lépéseinél töltenek be fontos szerepet. 2012 előtt szó szerint semmilyen eredmény nem volt ismeretes a kölcsönható modellek átfedéseire vonatkozóan.

A kutatás előrehaladásával új cél lett az átfedések struktúrájának mélyebb megértése, a bonyolultabb esetek kiszámítására használható módszerek fejlesztése. Előre nem várt kapcsolat született az AdS/CFT megfeleltetéssel:

kiderült, hogy a CFT oldalon bizonyos egypontfüggvényeket a spinláncok átfedései írják le. Ez motiválta az ún. integrálható kezdeti állapotok elméletének további fejlesztését.

Mellékszálként induló kutatási irány volt a gerjesztett állapotok korrelációs függvényeinek kiszámítása. Az eredeti motivációt az adta, hogy a GGE megértése során lehessen konkrét jóslatokat adni a mérhető fizikai mennyiségekre. Ez a problémakör aztán szoros kapcsolatba került a korrelációs függvények mélyebb algebrai elméletével.

Utolsó fő célkitűzésként pedig az Általánosított Hidrodinamika (GHD) elméletében az áramoperátorok várható értékének kiszámítását említem. A GHD egy 2016-ban született elmélet, melynek egy fő központi állítását az integrálható spinláncok esetében korábban senkinek nem sikerült bizonyítani. A cél olyan bizonyítások megtalálása volt, melyek kapcsolatot tudnak teremteni mind a GHD-val, mind az integrálható modellek általános algebrai megfogalmazásával.

3. Új eredmények

1. Az XXZ spinlánc esetében megadtam egy algebrai konstrukciót a szigorúan lokális töltéseket tartalmazó GGE-re [1]. Ez volt az egyik első cikk, amely konkrét jóslatot tudott adni a nem-egyensúlyi folyamatok végállapotaira. Bár maga a konkrét cikk azóta meghaladottá vált (ugyanis a lokális töltések nem elegendőek, lásd lentebb), a konstrukciót később más kutató általánosította a ma elfogadott alakra (lásd a dolgozatban).
2. A [2] cikkben megmutattuk, hogy a kölcsönható XXZ spinláncon a szigorúan lokális töltéseket tartalmazó GGE nem ad helyes jóslatot az időfejlődés végállapotára. Ez akkor egy meglepő és fontos eredmény volt, a cikkben első szerző vagyok. Saját hozzájárulásom a javaslat, hogy a dimer kezdőállapotra fókuszáljunk, illetve ebben az esetben az overlapok kiszámítása, illetve a korrelációs függvények számolására vonatkozó módszer általánosítása (lásd lentebb). A számolásunkat egy hosszabb cikkben alaposabban részleteztük: [3]. A [2] cikkel párhuzamosan jelent meg az amsterdami csoport hasonló eredményeket tartalmazó munkája, a GGE problémájának megoldását pedig később a kvázilokális töltések felfedezése és alkalmazása adta meg.
3. A [4] cikkben megmutattuk, hogy az XXZ spinláncon a véges sok töltést

tartalmazó ún. csonkolt GGE az egzakt eredményhez vezet, ha a figyelembe vett töltések számát minden határon túl növeljük, úgy, hogy a kvázi-lokális töltéseket is figyelembe vesszük. Ezzel megalapoztuk azt, hogy a kölcsönható GGE-re valódi statisztikai fizikai sokaságként lehessen gondolni, amely véges sok jóldefiniált töltésből indul ki. Az én hozzájárulásom itt a cikk ötlete, illetve a fő bizonyításhoz használt matematikai lépések kidolgozása volt.

4. A [5] cikkben megmutattuk, hogy az $SU(3)$ -szimmetriával bíró fundamentális modellben helyes eredményt ad a kvázilokális töltéseket tartalmazó GGE. Saját hozzájárulásom itt a probléma kitűzése, illetve az alkalmazott módszerek kiválasztása volt, a konkrét számolásokat Fehér György végezte el.
5. Két külföldi együttműködő partneremmel (Lorenzo Piroli és Eric Vernier) egy cikksorozatban kidolgoztuk az ún. integrálható kezdeti állapotok elméletét. Ezek olyan kezdeti állapotok, melyekben bizonyos fizikai mennyiségek egzakt módon, közelítések nélkül számolhatók, és melyek szoros kapcsolatban állnak az integrálható peremfeltételekkel.

A témában az első cikk az egyszerezős [6], ahol az XXZ spinláncon adott kezdeti állapotok esetén kiszámítottam az ún. Loschmidt echot, pontosabban annak termodinamikai limeszét. Ez a cikk már tartalmazza a kezdeti állapot és az integrálható peremfeltételek közötti megfeleltetést.

Ezt a kapcsolatot később a [7] cikkben formalizáltuk: megalkottuk az integrálható kezdeti állapot definícióját, és megmutattuk, hogy ez teljesül, ha az állapot kapcsolatba hozható egy integrálható peremfeltétellel (ún. K -mátrixszal).

A Loschmidt echo-ra vonatkozó további eredményeket tartalmaz a [8], melyben részben új analitikus számolási módszert fejlesztettünk ki.

A [9] cikkben pedig megmutattuk, hogy a módszerünkkel az ún. dinamikai fázisátalakulások is követhetők (ezek töréspontok a dinamikai szabadenergiában, a Loschmidt echo termodinamikai limeszében).

A [10, 11] cikkekben ezeket az eredményeket általánosítottuk az ún. „nested Bethe Ansatz”-cal megoldható, magasabb szimmetriájú láncokra.

6. Külön tézispontban említem az integrálható Matrix Szorzat Állapotok (MPS) elméletének kifejlesztését, melyet szintén a fenti két külföldi

kutatóval közösen valósítottunk meg [12]; ebben a cikkben első szerző vagyok. Az MPS-ek esetén számos lényeges újdonságot dolgoztunk ki, ezek közé tartozik az általam felfedezett ún. „square root relation”, amely a peremes Yang-Baxter egyenlethez hasonló, de annál jelentősen egyszerűbb reláció, mely az adott MPS-hez tartozó integrálható peremfeltétel megkonstruálására használható. Fontos lépés volt továbbá az absztrakt algebrai ún. „twisted Yangian”-nal való kapcsolat megtalálása, kiépítése.

7. Különböző módszereket fejlesztettem ki az egzakt átfedések (overlaps) kiszámítására. Első ilyen témájú cikkem [13] úttörő volt, az első egzakt eredményeket tartalmazó munka kölcsönható rendszerekben. Itt egy off-shell formulát adtam meg, melyet az amsterdami kutatócsoport (egy másik, korábbi cikkem felhasználásával) továbbfejlesztett a mai ismert, on-shell alakra.
8. Egy új módszert fejlesztettem ki a [14] cikkben, ahol meghatároztam az XXZ modell átfedéseit tetszőleges kétrácsponos kezdeti állapot esetében. Az itt használt módszer a már korábban létező Termodinamikai Bethe Ansatz (TBA) és az ún. peremes kvantum transzfer mátrix (QTM) módszerek kombinálására épül.
Ezt a módszert használtuk a fent említett [11] cikkben is, ahol meghatároztuk az $SU(3)$ lánc átfedéseit a szimmetrikus kétrácsponos állapotok esetében.
9. A fentiekől független módszert dolgoztam ki Yunfeng Jiang-gal az egzakt overlap formulák levezetésére és bizonyítására [15]. Ez az új módszer a koordinátás Bethe Ansatz-on alapul. A [15] cikkben új eredményt nem vezettünk le, csak korábbi sejtéseket sikerült matematikai szigorral bebizonyítani.
10. A [16] cikkben egy nemzetközi együttműködés keretében kiszámoltunk olyan overlap formulákat, melyek relevánsak az AdS/CFT megfeleltetés szempontjából. Fő eredményünk egy olyan $(SO(6), SO(5))$ osztályú overlap formula kiszámítása, melyet a nemzetközi partnereink korábban a mi módszereink nélkül nem tudtak megtalálni. Saját hozzájárulásom itt a fent említett TBA módszer alkalmazása volt. A végső eredményhez szükséges algebrai illetve reprezentációelméleti számolásokat Gombor Tamás tette hozzá.

11. Két egymásra épülő cikkben [17, 18] megadtam egy módszert gerjesztett állapotú korrelációs függvények számolására. A munkám az ún. faktorizált korrelációs függvények (illetve ún. Hidden Grassmannian Structure) elméletén alapul, az én hozzájárulásom az ún. fizika rész kiszámítása gerjesztett állapotokra, mind véges, mind végtelen térfogatban. Az első cikkben Mestyán Márton diplomamunkáimmal dolgoztam együtt, az én hozzájárulásom a fő eredmények megtalálása volt, Márton az eredmények ellenőrzésében működött közre. A második cikk egyedüli szerzős.
12. Az általánosított hidrodinamika (GHD) elméletének egyik központi állítása az áramok várható értékére vonatkozó, szemiklasszikusan is értelmezhető képlet. Ennek megadtam 3 különféle bizonyítását kölcsönható spinláncokra, mely bizonyítások közül kettő matematikai szempontból szigorúnak tekinthető. Az első cikkben [19] két diplomamunkáimmal (Borsi Márton és Pristyák Levente) adtuk meg először az irodalomban korábban nem szereplő, bizonyítani kívánt véges térfogatú képletet, majd ezt az Algebrai Bethe Ansatz segítségével bizonyítottuk. Az én hozzájárulásom a bizonyítandó képlet maga, illetve a bizonyításhoz használandó módszerek kiválasztása. Levente végezte az algebrai bizonyítás legnagyobb részét. Márton pedig a szemiklasszikus kép kidolgozását végezte (ebből TDK dolgozatot is írt, az adott évben az OTDK-n második helyezést ért el).

A második bizonyítást a hosszú távú deformációk segítségével a [20] egyszerezős cikkben adtam meg. Ez nem tekinthető teljesen szigorú bizonyításnak (lásd a dolgozatban), azonban könnyedén alkalmazható számos modellben, így például a bonyolultabb „nested” esetekben is.

Végül a harmadik bizonyítást a szintén egyszerezős [21] tartalmazza. Itt megadtam egy új konstrukciót az áramoperátorokra. Ezzel sikerült az áramokat is elhelyezni a QISM elméleti keretében. A munkám ezáltal közvetlen kapcsolódik az L. Fadeev által vezetett leningrádi csoport 80-as évek elején elért klasszikus eredményeihez. A várható értékekre vonatkozó bizonyítás matematikai szempontból szigorú, és számos modellben alkalmazható.

4. Az elért eredmények hatása

A legnagyobb érdeklődést kiváltó eredményem kétségkívül a szigorúan lokális GGE-t megcáfoló [2] cikkünk, mely már 200 fölötti független hivatkozást gyűjtött össze. Ennek a munkának a jelentőségét az adja, hogy a vizsgált kérdés viszonylag általános, ugyanis a termalizációval, illetve a kvantummechanika és a statisztikus fizika kapcsolatával foglalkozik. Így a hivatkozások jelentős része nem is az integrálhatóság szűkebb területével foglalkozó kutatóktól érkezik.

Fontos megemlítenem, hogy az átfedésekkel foglalkozó korai cikkem [13], illetve egy ezt megelőző másik cikk volt a később felfedezett faktorizált overlap formulák kiindulópontja (a pontos történeti ismertetésért lásd a dolgozatot). Ezeket a faktorizált overlap-eket használtuk fel (az amsterdami csoporttal egyidőben) a [2] cikkben is, illetve ezekre épültek az AdS/CFT-vel foglalkozó nemzetközi kutatók jóval bonyolultabb overlap formulái is.

Ezekon kívül még jelentős érdeklődést kiváltó eredményem az áramokra vonatkozó formulák bizonyítása a GHD-ben. Ezek a cikkek a doktori dolgozat benyújtásakor még kevesebb, mint 1 évesek, tehát a hivatkozottságuk még nem igazán releváns adat. Ugyanakkor szerintem fontos, hogy sikerült csak magyar szerzőkkel publikálni a Phys. Rev. X-be, illetve megjelenhetett egyszemélyes munkám a Phys. Rev. Lett.-ben. Magát az eredményt egy 2019 májusában rendezett konferencián jelentettem be, ahol azt nagy érdeklődés övezte.

Említhetem még az overlap formulák bizonyítására kifejlesztett eszközöket, melyeket felhasználtak tőlünk független nemzetközi szerzők. Azonban ez a kutatóknak egy jóval kisebb köre, nagy részükkel közös a [16] cikk.

Végül pedig a korrelációs függvények általános elméletével kapcsolatban megemlítem, hogy az áramoperátorokra vonatkozó eredményem az elméletnek egy hiányzó elemét adja meg: mik azok az operátorok, amelyek várható értékei lineárisak a központi szerepet játszó ω -függvényben, és így mi ennek a függvénynek a jelentése (lásd a dolgozatot)? Ezek nagyon technikai állítások, melyeket a szakértőknek is csak az a része ért, akik konkrétan ezzel a témával foglalkoznak (5-6 ember összesen). Ugyanakkor ezen szakértők között olyan kiemelkedő kutatók szerepelnek, mint M. Jimbo vagy F. Smirnov. Emiatt kifejezetten örültem, hogy sikerült hozzátennem ehhez az elmülethez.

Hivatkozások

- [1] B. Pozsgay, „The generalized Gibbs ensemble for Heisenberg spin chains,” *J. Stat. Mech.* **2013** (2013) no. 07, 3, [arXiv:1304.5374](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [2] B. Pozsgay, M. Mestyán, M. A. Werner, M. Kormos, G. Zaránd, and G. Takács, „Correlations after Quantum Quenches in the XXZ Spin Chain: Failure of the Generalized Gibbs Ensemble,” *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) no. 11, 117203, [arXiv:1405.2843](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [3] M. Mestyán, B. Pozsgay, G. Takács, and M. A. Werner, „Quenching the XXZ spin chain: quench action approach versus generalized Gibbs ensemble,” *J. Stat. Mech.* **4** (2015) 1, [arXiv:1412.4787](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [4] B. Pozsgay, E. Vernier, and M. Werner, „On Generalized Gibbs Ensembles with an infinite set of conserved charges,” *J. Stat. Mech.* **9** (2017) 093103, [arXiv:1703.09516](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [5] G. Z. Fehér and B. Pozsgay, „Generalized Gibbs Ensemble and string-charge relations in nested Bethe Ansatz,” *SciPost Phys.* **8** (2020) 34, [arXiv:1909.04470](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [6] B. Pozsgay, „Dynamical free energy and the Loschmidt-echo for a class of quantum quenches in the Heisenberg spin chain,” *J. Stat. Mech.* **2013** (2013) no. 10, P10028, [arXiv:1308.3087](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [7] L. Piroli, B. Pozsgay, and E. Vernier, „What is an integrable quench?,” *Nucl. Phys. B* **925** (2017) no. Supplement C, 362 – 402, [arXiv:1709.04796](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [8] L. Piroli, B. Pozsgay, and E. Vernier, „From the Quantum Transfer Matrix to the Quench Action: The Loschmidt echo in *XXZ* Heisenberg spin chains,” *J. Stat. Mech.* **2017** (2017) no. 2, 023106, [arXiv:1611.06126](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].
- [9] L. Piroli, B. Pozsgay, and E. Vernier, „Non-analytic behavior of the Loschmidt echo in *XXZ* spin chains: exact results,” *Nucl. Phys. B* **933** (2018) 454–481, [arXiv:1803.04380](#) [[cond-mat.stat-mech](#)].

- [10] L. Piroli, E. Vernier, P. Calabrese, and B. Pozsgay, „Integrable quenches in nested spin chains I: the exact steady states,” *J. Stat. Mech.* **6** (2019) no. 6, 063103, arXiv:1811.00432 [cond-mat.stat-mech].
- [11] L. Piroli, E. Vernier, P. Calabrese, and B. Pozsgay, „Integrable quenches in nested spin chains II: the Quantum Transfer Matrix approach,” *J. Stat. Mech.* **6** (2019) no. 6, 063104, arXiv:1812.05330 [cond-mat.stat-mech].
- [12] B. Pozsgay, L. Piroli, and E. Vernier, „Integrable Matrix Product States from boundary integrability,” *SciPost Phys.* **6** (2019) no. 5, 062, arXiv:1812.11094 [cond-mat.stat-mech].
- [13] B. Pozsgay, „Overlaps between eigenstates of the XXZ spin-1/2 chain and a class of simple product states,” *J. Stat. Mech.* **2014** (2014) no. 6, P06011, arXiv:1309.4593 [cond-mat.stat-mech].
- [14] B. Pozsgay, „Overlaps with arbitrary two-site states in the XXZ spin chain,” *J. Stat. Mech.* **2018** (2018) no. 5, 053103, arXiv:1801.03838 [cond-mat.stat-mech].
- [15] Y. Jiang and B. Pozsgay, „On exact overlaps in integrable spin chains,” *JHEP* **06** (2020) 022, arXiv:2002.12065 [cond-mat.stat-mech].
- [16] M. De Leeuw, T. Gombor, C. Kristjansen, G. Linardopoulos, and B. Pozsgay, „Spin Chain Overlaps and the Twisted Yangian,” *JHEP* **01** (2020) 176, arXiv:1912.09338 [hep-th].
- [17] M. Mestyán and B. Pozsgay, „Short distance correlators in the XXZ spin chain for arbitrary string distributions,” *J. Stat. Mech.* **9** (2014) 20, arXiv:1405.0232 [cond-mat.stat-mech].
- [18] B. Pozsgay, „Excited state correlations of the finite Heisenberg chain,” *J. Phys. A* **50** (2017) no. 7, 074006, arXiv:1605.09347 [cond-mat.stat-mech].
- [19] M. Borsi, B. Pozsgay, and L. Pristyák, „Current operators in Bethe Ansatz and Generalized Hydrodynamics: An exact quantum/classical correspondence,” *Phys. Rev. X* **10** (2020) 011054, arXiv:1908.07320 [cond-mat.stat-mech].

- [20] B. Pozsgay, „Current operators in integrable spin chains: lessons from long range deformations,” *SciPost Phys.* **8** (2020) 016, arXiv:1910.12833 [cond-mat.stat-mech].

- [21] B. Pozsgay, „Algebraic construction of current operators in integrable spin chains,” *Phys. Rev. Lett.* **125** (2020) no. 7, 070602, arXiv:2005.06242 [cond-mat.stat-mech].