

# Opponensi vélemény

Pozsgay Balázs

„Exact methods for the dynamics of integrable models”

c. akadémiai doktori értekezéséről

2022. január 12.

Az integrálható kvantumos modellekben számos fizikailag érdekes mennyiséget nem-perturbatív módon (perturbáció számítás nélkül) és analitikusan (nagy skálájú numerikus szimulációk nélkül) meg lehet határozni. Bár az integrálható kvantumos modellek kutatásának története a múlt század 30-s éveiben kezdődött, amikor H. Bethe megadta az egy dimenziós Heisenberg spinlánc egzakt megoldását, e modellek kutatása a 70-80-s években, elsősorban a leningrádi iskola tevékenysége eredményeként érte el teljesen kifejezett, ma ismert formáját: ekkor mutattak rá az integrálhatóság mögött mélyebb okként megtalálható algebrai struktúra, a Yang-Baxter egyenlet szerepére és vezették be a modellek megoldására szolgáló módszereket (algebrai Bethe Ansatz (ABA), transzfer mátrix (TM) formalizmus, inverz szórási módszer). Ezután széleskörű kutatómunka indult el az integrálható kvantumos modellek mindkét osztályában: egyrészt a statisztikus fizikában jelentős szerepet játszó nem-relativisztikus spinláncokban, másrészt a folytonos téridőben definiált relativisztikus modellekkel foglalkozó QFT-ben.

Az elmúlt 15-20 évben két helyről kaptak újabb motivációt az ilyen kutatások: egyrészt elméletileg, hiszen az AdS/CFT megfeleltetés felfedezése után kiderült, hogy a CFT oldalon, az u.n. planáris határesetben az elmélet spektrumát nagyon érdekes típusú, de integrálható spinláncok írják le, másrészt kísérletileg, hiszen kiderült, hogy alkalmas hideg atom kísérletekben lehetőség van bizonyos integrálható modellek mesterséges megvalósítására, és így az elméleti jóslatok ellenőrzésére is.

Pozsgay Balázs értekezése az elmúlt kb. 10 évben elsődlegesen integrálható spinláncokon (kisebb részben AdS/CFT-ben) végzett kutatásainak eredményeit foglalja össze. Kutatásainak fókuszában az integrálható spin modellek nem egyensúlyi viselkedésének leírása, e folyamatok fizikailag releváns tulajdonságainak meghatározása áll. Elmondható tehát, hogy témaválasztása nagyon aktuális, a nemzetközi kutatási trendek élvonalába tartozik.

Az értekezés nagyon jó szakmai nyelven, angolul íródott, teljes terjedelme 124 oldal, ebből 99 oldal a szöveges rész, a többi a 330 hivatkozás foglalja el. Hat fejezetet tartalmaz, az integrálható kvantumos modellek elméletébe történő átfogó bevezetés után egy-egy fejezetben tárgyalja a szerző az általánosított Gibbs sokasággal (GGE) (2. fejezet), az integrálható kezdeti állapotokkal (3. fejezet), az egzakt átfedésekkel (4. fejezet), a korrelációs függvényekkel (5. fejezet) valamint az áramoperátorokkal és az általánosított hidrodinamikával (GHD) (6. fejezet) kapcsolatban elért eredményeit. A 2-6 fejezetek hasonló szerkezetűek: a szűkebb kérdéskörbe történő – részletes irodalmi áttekintésen alapuló – bevezetés után következik a saját eredmények leírása, esetleges aktualizálása, elhelyezése a szakirodalomban, majd a fejezetet egy, a nyitott kérdéseket is megfogalmazó összefoglalás zárja.

Az értekezés egészén gondos szerkesztő munka érződik (pl. az egységes jelölés használatán), sajnos ennek ellenére végigvonul rajta egy, az olvasást nehezítő hiba: az első (az integrálható modelleket összefoglaló) fejezetben szereplő egyenletekre történő későbbi hivatkozások helytelenek: ha a későbbi szöveg (1.x)-es egyenletet említ, akkor – a szöveggörnyezetből kikövetkeztethető módon – általában az (1.x+2)-es egyenletet kell érteni alatta (legalábbis egy küszöb x feletti x-kre).

## Eredmények

A szerző legfontosabb új eredményei a következők:

- Munkatársaival együtt elsőként mutatott rá, hogy a GGE az eredeti, naiv formájában, amikor csak a végtelen sok *lokális* megmaradó töltést vesszük figyelembe, nem írja le helyesen az XXZ spinlánc Néel ill. dimér állapotból induló kvantum kvencs utáni aszimptotikus állapot tulajdonságait, azaz ebben a formában nem lehet általános érvényű. Ez a kutatómunka a szerző korábbi, a GGE megértéséről/ellenőrzéséről ill. az XXZ lánc korrelációs függvényeiről publikált eredményein alapul. Miután a szakirodalom tisztázta, hogy a GGE alkalmazásához bizonyos kvázilokális töltéseket is figyelembe kell venni, az így kialakuló képet – amely szerint a töltések kezdőállapotbeli várható értékei meghatározzák az aszimptotikus állapotban a Bethe gyökök sűrűségét – sikeresen kiterjesztette a sokkal bonyolultabb – az u.n. nested Bethe Ansatz tárgyalást igénylő – magasabb szimmetriájú spinláncok esetére is.
- Két külföldi társszerzőjével együtt bevezette az integrálható kezdő állapot fogalmát a kvantum kvencsek tanulmányozásába. A meglepően egyszerű feltétel, amely szerint az integrálható állapotokon a transzfer mátrix és a tértükrözött transzfer mátrix hatása megegyezik, rámutatott az addig használt Néel és dimér kezdőállapotok általánosításának lehetőségére. Megmutatta, hogy tetszőleges két-hely szorzat állapot integrálható, valamint a mátrixszorzat állapotok (MPS) esetén levezetett egy feltételt, az u.n. négyzetgyök feltételt (NGYF), amelynek megoldhatósága esetén a MPS integrálható; így az integrálható kezdő állapotok nagyon széles osztályát kapta. A NGYF megoldása kielégíti a peremes Yang-Baxter egyenletet, így használni lehetett a két soros transzfer mátrix megkonstruálásához. Ennek sajátértéke a T és Y rendszer egyenletein keresztül algebrai úton megkapható, ez pedig meghatározza a dinamikai szabad energiát (Loschmidt amplitudót) a kvencs hatásra és bármiféle statisztikus érvelésre történő hagyatkozás nélkül.
- Megmutatta, hogy faktorizálható átfedés csak integrálható kezdőállapot esetén lehet, és az XXZ lánc esetén, tetszőleges két-hely szorzat állapotban a normalizált átfedésre egy explicit kifejezést adott a K mátrix paramétereinek segítségével.
- Véges térfogatban zárt, algebrai kifejezést adott a Heisenberg lánc rövid távolságú korrelációit meghatározó univerzális függvényre.
- Spin láncok esetében zárt, algebrai formulát adott az áramok véges térfogatbeli várható értékeinek a töltések várható értékeitől való függésére, amely összefüggés centrális szerepet játszik a GHD-ben. Ez az összefüggés azért lényeges, mert a TM formalizmus csak a töltéseket határozza meg, és a nem-relativisztikus elméletben ezek nincsenek közvetlen kapcsolatban az áramokkal. Ezt az összefüggést három különböző módon látta be: először a formfaktorok segítségével, majd az AdS/CFT-ből ismert hosszú távú deformációk felhasználásával, végül egy tisztán algebrai módon, amely levezetés csak az integrálható modellek általános tulajdonságait használja fel. E legutóbbi bizonyítás általános érvényű és matematikai szempontból abszolút szigorú, míg az első kettő bizonyos feltételezéseken alapul.

Ezen eredmények vannak részletesen megfogalmazva a szerző téziseiben. **A téziseket a szerző új tudományos eredményeinek elfogadom.**

Érdekes néhány szót szólni az eredmények prezentációjáról. Először is mindig világosan különbséget tesz a precíz matematikai bizonyítás és a fizikai, „fizikusi” érvelés között, másrészt többszerzős eredmény esetén mindig pontosan rámutat saját hozzájárulására. További jellemző, hogy - főleg a korábbi eredményei esetén - a saját eredményeit aktualizálja, elhelyezi a pillanatnyi szakirodalomban. Példamutatónak tartom pl. ahogy a második fejezetben nemcsak azt magyarázza el, hogy mik azok a kvázilokális töltések, amelyek a GGE teljességéhez kellenek, hanem azt is, hogy a termodinamikai limeszben miért van szükség végtelen sok ilyen töltésre, annak ellenére, hogy a Hirota egyenletek az elsőtől az összes többit meghatározzák (45. oldal). Végül meg kell említeni, hogy eredményeit bevallottan a lehető legkevesebb technikai részlet megadásával mutatja be. Az integrálható modellek esetén a számolások, levezetések többsége meglehetősen technikás, így ezt a törekvést támogatni kell, amíg az érthetőség rovására nem megy. Én három esetben éreztem úgy, hogy egy kicsit több részlet könnyített volna a megértésen: a (3.17)-es NGYF pontos jelentését én a disszertációban nem, csak az alapul szolgáló cikkből értettem meg, szívesen láttam volna az 54. oldalon, a Heisenberg lánc esetén, a  $2 \times 2$ -s K-mátrix explicit alakját, végül a (6.31) definíció után segített volna az a PRL cikkben szereplő mondat, hogy ez egy térben homogén mennyiséget ad.

## Kérdések

A disszertáció egészéhez a következő kérdéseim vannak:

- Az XXZ lánc esetén milyen alakú a keresztezett csatornabeli  $H'$  Hamilton operátor?
- A 3.7 alfejezet végén megtudtuk, hogy integrálható kezdőállapotból indulva nemcsak a Loschmidt amplitudó, de maga a kvantum kvencs leírása is megkapható pusztán algebrai úton, a T és Y rendszer egyenleteinek megoldásán keresztül, anélkül, hogy akár a GGE-re, akár valamilyen statisztikus érvelésre hagyatkoznánk. Ezek után mi a GGE pillanatnyi helyzete? Másképpen fogalmazva mit lehet tudni a GGE-ről, ill. az általános sajátérték termalizációs hipotézis helyességéről nem integrálható kezdőállapot esetén?
- A 92. oldalon azt állítja, hogy az áramok várható értékeire az integrálható QFT-ben más szerzők által kapott eredmény bizonyos térelméleti korrekciós faktorok erejéig megegyezik a disszertáció (6.11)-es, spinláncok esetén kapott eredményével. Mik ezek a faktorok, és miért lépnek fel?


## Megjegyzések

(Itt az elírásokat, sajtóhibákat gyűjtöttem össze, ezekre nem várok választ).

- Az (1.26) és (1.55) egyenletekben  $e^{ip(\lambda_j)}$  helyett  $e^{ip(\lambda_j)L}$  kellene ahhoz, hogy a logaritmikus egyenletek (1.59) alakúak legyenek.
- A (2.59) egyenlet jobb oldalán az  $X_s^{(a)}$  töltések helyett valószínűleg a várható értékeknek kellene szerepelni.
- A 65.o. tetején szereplő számozatlan egyenlet bal oldalán  $k(u)$  szerepel, hol van az  $u$  függés a jobb oldalon?
- A (4.4) egyenlet jobb oldalán  $\lambda_j$  helyett  $\lambda$  kellene (3x).
- A (4.19) egyenletben  $v_0^{c,s}$  helyett  $v_\theta^{c,s}$  kellene.
- A 83. oldalon található 5. lábjegyzetben 4/27 helyett 4/108 kellene.
- Az (5.14) egyenlet jobb oldalán  $\tilde{\rho}_{n-1}(\lambda|\nu) \rightarrow \tilde{\rho}_{n-1}(\omega|\nu)$ , hasonlóan  $\tilde{\rho}_{n+1}$  első argumentuma is  $\omega$ .
- Végül egy furcsa szerkesztési hiba: a [168] és a [276] szám alatt ugyanarra a cikkre történik hivatkozás.

## Összefoglalás

Az értekezés meggyőzően mutatja, hogy Pozsgay Balázs az integrálható spinláncok nemegyensúlyi viselkedését kutató nemzetközi közösség aktív, elismert tagja. **Az értekezésben bemutatott eredményei maximálisan teljesítik az akadémia doktora cím eléréséhez elvárt feltételeket**, így a kérdéseimre adott válaszoktól függetlenül **javasolom a nyilvános vita lefolytatását, és számára a doktori cím megítélését.**

  
Palla László  
fiz. tud. dokt.