Bírálat
Tengely Szabolcs
SEQUENCES IN DIOPHANTINE NUMBER THEORY
című doktori értekézéséről

Győri Kálmán iskolateremtő tevékenységének következményeként Debrecenben a diofantikus számelméletnek prosperáló műhelye jött létre. Ennek a közösségnek tagja Tengely Szabolcs, aki doktori munkájában a diofantikus egyenletek területén elért kiemelkedő eredményeit mutatja be. A témakör a matematika legrégibb, legszebb, de egyik legnehezebb fejezetei közé tartozik, és nagy hatással volt a matematika egészére, különösen a modern számelmélet, algebra, és algebrai geometria fejlődésére. A XX. század során, a külső szemlélő számára esetleg elszigetelt egyedi problémáknak tűnő terület, néhány egyszerűen kimondható, de mégis mély alapelv mentén, átlátható szerkezetbe szerveződött. A modern elmélet széles körben használható, általános módszerekhez vezetett, melyek közül a jelen tézis is számosat tartalmaz, ahogy az az alábbiakból is kitűnik majd.

A diofantikus egyenletek fő kérdései a megoldások létezése, létezés esetén azok valamilyen formában való leírása körül forognak. Például kétváltozós egyenletek esetén Siegel egy tétele garantálja, hogy jól leírható kivételes eseteket leszámítva csak véges sok egész megoldásuk lehet. A kivételes eseteket az egyenlethez tartozó görbe génusza, a komplex számok feletti megoldások halmazának topologikus tulajdonsága írja le. Ha a génusz 1 vagy nagyobb, a megoldáshalmaz véges. Faltings egy híres tétele pedig a racionális megoldásokra is hasonló végességet garantál, ha a génusz 2 vagy annál nagyobb. Mindkét eredmény igaz marad ha a racionális számok helyett annak egy véges bővítését vesszük.

Ezek a végességi tételek a legmélyebb eredmények közé tartoznak, de sajnálatos módon nem effektívek, sem elméleti, sem gyakorlati szempontból. A megoldások számára csillagászati felső becslések ugyan adhatók, de a megoldások méretére már nem. Ennek a problémának a kezelésére megannyi áttörés született, melyek közül talán Baker Fields-medállal jutalmazott módszere a legismertebb.

A doktori mű is ezt az effektivitási problémát járja körül. A legtöbb esetben konkrét egyenletek családjaira határozza meg az összes lehetséges megoldást, vagy mutatja meg, hogy végtelen sok megoldás létezik. Maga a benyújtott mű a tételek megfogalmazásában elemi. Ez mindenképp dicséretes, bár a bizonyítások mindig komoly elméleti háttérre támaszkodnak, aminek alkalmanként talán lehetett volna nagyobb hangsúlyt adni, akár a tézisfüzetben is.

Tengely 17 ilyen jellegű tételt emel ki munkásságából, melyek fontos előrelépést jelentenek a diofantikus egyenletek elméletében. Ezek közül csak néhány ismertetésére térek ki.

A 2. fejezet fő tétele Pethő egy problémájára ad kielégítő feleletet. A bizonyítás a számítógépes kommutatív algebra elméleti sarokkövére, a Gröbner bázisokra támaszkodik.

A 3. fejezet a Huff-féle elliptikus görbék családját vizsgálja. Ezek a görbék egy a síkon fekvő racionális távolságú pontokkal kapcsolatos probléma során merültek fel először. A 3.1 tétel explicit listát ad ezen görbék megoldásaira. A 3.2 ezt messzemenően kiterjeszti, explicit korlátokat ad egy 4 paramétertől függő görbesereg megoldásaira. A 3.3 tétel pedig a korábbiakra támaszkodva végtelen sok a, b, c, d számnégyes létezését bizonyítja a paraméterek közül, melyekre a megoldások között van 9 hosszú számtani sorozat.

A fejezet elején Siegel tételének rövid összefoglalója található, kiemelve az ineffektivitás kérdését. A technikailag legbonyolultabb eszköz egyes görbék Mordell-Weil csoportjának meghatározása; a Birch-Swinnerton-Dyer sejtés bizonyításának hiányában itt általában magának a rangnak a meghatározása is egy rendkívül nehéz algoritmikus probléma.

A 4. fejezet motivációját a diofantikus approximációban fontos szerepet játszó Markov-féle számhármasok adják. Tengely ismét csak egy lényegesen általánosabb osztályt kezel, amit először Rosenberg vizsgált. A 4.1 tételben a végesség bizonyítása ismét egy konkrét negyedfokú 1 génuszú görbe egész megoldásainak explicit meghatározását igényli.

Az 5. fejezet Erdős-Graham típusú tételekkel foglakozik. Ilyen például az 5.1 tétel ami egy paramétertől függő 3 génuszú hiper-elliptikus görbe család megoldásaira ad explicit felső korlátot paraméter függvényében. A megoldás Runge egy módszerén alapszik, amit Tengely társszerzőivel együtt modernizált, és lényegesen továbbfejlesztett. A fejezet további eredményeiben a szerző a Baker módszert, illetve a Coleman-Chabauty-féle izgalmas p-adikus geometriai megközelítést is felhasználja. Ez a fejezet további nagyon érdekes kérdéseket boncol ezeket a felületeket vizsgálva. Itt egy nagyon érdekes nyitott probléma a racionális függvénytestben vett megoldások leírása. Erre példák a fejezet 3., 4. és 6. tételei ahol ezen kérdésen túlmenően végtelen sok egész együtthatós polinom megoldás létezését bizonyítja a jelölt. Az 5.5 tételben végtelen sok olyan megoldást talál amik nem fekszenek megadott egyeneseken. Ezen és a fejezetben szereplő további tételek mindegyike nagyszerű eredménynek számít ebben az izgalmas témakörben.

Végezetül a 6. fejezetben a rekurzív sorozatok polinomiális ábrázolásával foglalkozik. Az eredmények bősége miatt inkább ismét csak kiemelném, hogy a szerző a Baker-féle módszer mellett a Mordell-Weil szität használja. Ez, a korábban felsoroltakhoz hasonlóan a legmodernebb eszközök közé tartozik a diofantikus egyenletek vizsgálatában.

Az eredmények magyarosítása a tézisfüzetben alkalmanként az én ízlésemnek túl modern, pl. a hagyományos Jacobi-varietás helyett a szerző az angol-szász Jakobien kifejezést használja. (Ebben az átvételben valószínűleg a kiejtés szerinti átírást kéne alkalmazni, ami nem túl szerencsés.) Mindezt leszámítva a tézisfüzet szép összefoglalóját adja a szerző munkásságának, azt is megmutatva, hogy az miképpen illeszkedik a jelenleg folyó nemzetközi kutatásokba. Mind a doktori mű, mind a tézisfüzet rendkívül esztétikus megjelenésű, amiért a szerzőt külön dicséret illeti.

Összefoglalva, Tengely Szabolcsnak a disszertációban összegyűjtött, a diofantoszi egyenletek modern elméletének terén elért eredményei számosak, kiemelkedőek és a terület legtekintélyesebb folyóirataiban jelentek meg. A doktori értekezés vitára bocsátását és a doktori fokozat megítélését a legnagyobb mértékben támogatom.

Budapest, 2022. augusztus 12.

Tóth Árpád

Kérdés. A disszertáció eredményei, különösen tekintettel a 3., 5. és 6. fejezetre, mennyiben illeszkednek a magasabb dimenziós problémákkal kapcsolatban Lang és Vojta által megfogalmazott általános sejtések körébe?