Válasz Tóth Árpád bírálatára

Nagyon köszönöm Tóth Árpádnak a doktori mű elolvasására fordított időt és fáradságot, valamint a vitára bocsátás támogatását. A bírálatban a következő kérdés lett megfogalmazva:

> A disszertáció eredményei, különösen tekintettel a 3., 5. és 6. fejezetre, mennyiben illeszkednek a magasabb dimenziós problémákkal kapcsolatban Lang és Vojta által megfogalmazott általános sejtések körébe?

Válasz: A diofantikus geometria klasszikus kérdéskörébe tartozik az algebrai görbéken és magasabb dimenziós Abel-varietásokon az egész- illetve racionális pontok lehetséges struktúráinak karakterizációja. Görbék esetében olyan ismert diofantikus approximációs tételeket igazoltak, mint Liouville tétele 1844-ből, Thue tétele 1909-ból, Siegel tétele 1921-ből, Dyson tétele 1947-ből és végül Roth tétele 1955-ből. Az egész- illetve racionális pontok végességével kapcsolatos állítások közül kiemelném Siegel eredményét és Faltings bizonyítását a Mordell-sejtéssel kapcsolatban. Lang [2] és Vojta [5] ezen eredmények magasabb dimenziós verzióival kapcsolatban fogalmaztak meg sejtéseket.

A dolgozat 3. fejezetében elliptikus görbék speciális modelljeivel foglalkozunk. A $H_{a,b}^{c,d}$ család esetében megmutattuk, hogy végtelen sok $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ esetén tudunk a görbe egész pontjai között 9-et találni úgy, hogy az x-koordináták számtani sorozatot alkotnak. Az eredmény igazolásához arra volt szükségünk, hogy bizonyos elliptikus görbék Mordell-Weil csoportjának a rangja pozitív. Ebben az irányban a Lang-Vojta sejtésekből következik az elliptikus görbékre vonatkozó Honda sejtés [1], azaz egy k algebrai számtest felett értelmezett E elliptikus görbéhez tartozó bizonyos végtelen család esetében létezik univerzális felső korlát a fellépő Mordell-Weil csoportok rangjára [4]. Amennyiben az E rövid Weierstrass alakja $y^2 = x^3 + ax + b$, akkor a bizonyos család az $E_d : dy^2 = x^3 + ax + b$, angol szakirodalomban ez az úgynevezett "quadratic twist", erre nem tudok bevett magyar elnevezést.

Az 5. fejezetben Erdős-Graham típusú diofantikus problémákkal foglalkozunk, amelyek hiperelliptikus görbék egész pontjainak meghatározására vezetnek. Végességet az ilyen görbék racionális pontjai esetében Faltings tétele szállítja adott számtest felett. A Lang-Vojta sejtések alapján itt több is várható (megfelelő feltételek teljesülése mellett), adott C algebrai görbe esetén

$$\bigcup_{[K:k]\leq d} C(K)$$

is véges, itt Levin egy eredményét említeném meg [3], amelyben a zárójelben említett megfelelő feltételek megfogalmazásának kérdése kerül elő.

A 6. fejezetben $P(x) = R_n$ alakú diofantikus egyenletekkel foglalkozunk, ahol P adott polinom, R_n pedig másodrendű rekurzív sorozat. Ebben az esetben szintén hiperelliptikus görbékre lehet visszavezetni a kérdést hasonlóan, mint az 5. fejezetben.

Összefoglalva a fentieket, a disszertáció eredményei szoros kapcsolatban vannak a Lang és Vojta által megfogalmazott magasabb dimenziós problémákra vonatkozó sejtésekkel, a dolgozatban véleményem szerint a 2. fejezetben szereplő Pethő problémával kapcsolatos rész áll közel. Ebben a részben a (2.1) formulában megadott $F(a,b,c)$ vizsgálatánál a cél olyan speciális alacsonyabb dimenziós objektum meghatározása, amelynél végtelen sok megoldás létezése már garantált.

Debrecen, 2022. szeptember 22. Tengely Szabolcs (Debreceni Egyetem)

Hivatkozások

[1] T. Honda. Isogenies, rational points and section points of group varieties. *Jpn. J. Math.*, 30:84–101, 1960.

[2] S. Lang. *Fundamentals of Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] A. Levin. Vojta's inequality and rational and integral points of bounded degree on curves. *Compos. Math.*, 143(1):73–81, 2007.

[4] H. Pasten. Bounded ranks and Diophantine error terms. *Math. Res. Lett.*, 26(5):1559–1570, 2019.

[5] P. Vojta. *Diophantine approximations and value distribution theory*, volume 1239 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.