Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Vélemény **Tengely Szabolcs**

Sequences in Diophantine Number Theory

című doktori értekezéséről

Tengely Szabolcs egy mai modern számelméleti témakörben, nevezetesen a diofantikus egyenletek tudományterületén nyújtott be doktori értekezést.

Siegel, Mordell, Chabauty, Faltings és Wiles munkásságát folytatva tanulmányozott algebrai görbék egész pontjaira vonatkozó eredményeket. Itt mindjárt lenne is kérdésem a jelölthöz: algebrai görbék egész pontjaihoz ($\mathbb{Q}$ felett) hogyan kapcsolódnak a lehetséges kriptográfiai alkalmazások? Érdekes lett volna lehetséges alkalmazásokról olvasni a doktori munkában, de talán a jelölt munkája inkább a klasszikus számelmélethez kapcsolódik jobban, így például többváltozós egyenletek egész megoldásait már Diofantosz is vizsgálta. Ezen a területen az egyik leghíresebb eredmény a nagy-Fermat tétel, melyet Wiles több évnyi kutatómunkával bizonyított be, több száz oldalon.

A doktori munkában sok modern kutatásról szó esik, így algebrai görbék pontjai mikor alkotnak számtani sorozatot, vagy például Huff által vizsgált, egy geometriai problémához kapcsolódó egyenletcsalád $ax(y^2-1) = by(x^2-1)$ egész megoldásairól, és az ehhez kapcsolódó elliptikus görbékről (pl. Edwards görbék, Montgomery görbék, Weierstarss görbék) is. Tengely Szabolcs doktori értekezésében paraméteresen megadja $ax(y^2-1) = by(x^2-1)$ egyenlet család összes megoldását, amely eredmény különösen elegáns.

A doktori értekezésben szó esik Markoff eredményeiről, aki az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

diofantikus egyenlet megoldásait kereste. Itt szeretném megkérdezni a jelöltet, hogy mi tudható egy hasonló alakú egyenletről, nevezetesen:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz\text{-ről?}$$

Ez utóbbi egyenlet átrendezve az szorzattá bomlik:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz),$$

így talán a megoldások keresése egyszerűbb pl. a Gauss egészek körében. Esetleg tud erről a jelölt valamit mondani?

Markoff eredményét Rossenberg általánosította az

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$$

alakra. Tengely Szabolcs fontos speciális esetekben vizsgálta, hogy a fenti egyenletnek mikor létezik Fibonacci számokból álló megoldása.

A doktori értekezésben szó esik lineáris rekurzív sorozatokban található négyzetek, köbök, teljes hatványok létezéséről. Ilyenkor a sorozat bizonyos elemeit összeszorozva szintén teljes hatványt kapunk. Így adódott például a jelölt által vizsgált:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+m)(x+m+1)(x+m+2)(x+m+3) = y^2$$

egyenlet is. Tengely Szabolcs ekkor m függvényében nagyon erős felső becslést x-re, nevezetesen $1 \leq x \leq 1.08m$. Amennyiben pedig $1 \leq m \leq 10^6$, bebizonyította, hogy egyetlen megoldás létezik.

A doktori munkában sok más érdekes diofantikus egyenlet is szerepel, ezek összefoglalása megtalálható a jól megírt doktori értekezés tézis füzetében. A disszertáció több mint 10 cikk eredményeiből mutat be tételeket. Itt megjegyezném, hogy kicsit meglepő, ami a tézis füzet első oldalán található, hogy Euler 1770-ben Lagrange-nak írt levelében megadott egy 4×4-es négyzetszámokból álló bűvös négyzetet, majd több mint 100 évvel később Lucas megfogalmaz egy kérdést 3×3-es négyzetszámokból álló bűvös négyzet létezéséről. Első olvasásra megdöbbentő, hogy ez a kérdés sokkal nehezebb mint a 4×4-es eset.

A doktori értekezés kitűnő angolsággal íródott, jól olvasható munka. A jelölt a tételeknél minden esetben pontosan feltüntette a szerzőket a tételek után, azok a tételek, ahol a saját nevét írta minden esetben újak, és jelentősen hozzájárulnak a tudományterület fejlődéséhez. A numerikus eredmények az összefoglaló táblázatoknak köszönhetően könnyen áttekinthetőek. Érdekes lett volna egy-két szót írni a programozás részleteiről, a dolgozatban viszonylag ritkán szerepelnek a használt programcsomag (MAGMA) kódjai.

A bizonyított tételek sokrétűek, nagy területét felölelik a diofantikus számelméletnek, a bizonyítások elegánsak.

Mindezek alapján megállapítható, hogy Tengely Szabolcs aktívan részt vesz a tudományos életben. A doktori értekezés jól megírt, gondos munka, amely több mint 10 cikkből merít eredményeket. A doktori értekezés eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez és javaslom a nyilvános védés kitűzését.

Budapest, 2022. április 29.

Dr. Gyarmati Katalin
(egyetemi docens)