Bírálói vélemény
Tengely Szabolcs
Sequences in Diophantine Number Theory
című értekezéséről

BEVEZETŐ

A diofantikus számelmélet a matematika egyik legősibb, ugyanakkor mind a mai napig egyik legintenzívebben kutatott ága, röviden szólva számelméletből származó (például egész együtthatós) egyenletek számelméletileg releváns (például egész) megoldásaival foglalkozik.

A terület XX. századi történetének mérföldkövei a végességi tételek (Siegel, Faltings, sokan mások), melyek bizonyos egyenletek esetében azt garantálják, hogy a megoldások száma véges. Ezek a tételek azonban csak keveset vagy egyáltalán nem mondanak a megoldásokról, ezért továbbra is sokat vizsgált kérdés, hogy bizonyos egyenletek esetében hogyan tudjuk a megoldásokat kiszámítani.

Magyarországon Győry Kálmán iskolateremtő tevékenysége nyomán aktív és nagy lélekszámú csoport foglalkozik a terület ilyen kérdéseivel. Ezen közösség eredményeit gyarapítja Tengely Szabolcs és munkássága.

Az értekezésben Tengely Szabolcs a diofantikus egyenletek terén az utóbbi másfél évtizedben elért eredményei közül foglal össze néhányat. Ez a tézisfüzet felépítésében 16 tételt jelent, melyek *mindegyikét elfogadom új tudományos eredmény*ként. Ez a 16 tétel 9 publikációban jelent meg, a megjelentető folyóiratok között találjuk az Acta Arithmeticát és a Journal of Number Theory-t.

Megjegyzendő, hogy Tengely Szabolcs munkássága ennél lényegesen nagyobb, például az eddigi legnagyobb hatást kiváltó eredménye (mely az Algebra and Number Theory-ban, a számelmélet egyik vezető folyóiratában jelent meg) nem tartozik a doktori mű fő szövegéhez (noha eszközként felhasználásra kerül a 6. fejezetben).

AZ ÉRTEKEZÉS RÖVID ÁTTEKINTÉSE

A doktori mű 1. fejezete egy rövid bevezető. A 2–6. fejezetek az alább kiemelteknél több eredményt tartalmaznak, nem tekintek át mindent. A 2–4. fejezetekben inkább csak a technikaibb jellegű eredmények elemzését hagyom ki, az 5–6. fejezetekből, melyek több, az alább említettekhez hasonló eredményt ismertetnek, csak néhány példát mutatok be, illusztrációs jelleggel.

2. fejezet. A 2. fejezet egy Pethőtől származó problémából indul ki. A kérdés a következő: létezik-e végtelen sok olyan negyedfokú algebrai egész, melyre

$$\frac{4\alpha^4-1}{\alpha^4-1}-\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

másodfokú algebrai szám? A problémát norma forma egyenletek motiválták, melyeknek speciális alakú megoldásait keresték. Tengely Szabolcs egy Ulas-szal közös cikkében pozitívan válaszolja meg Pethő eredeti kérdésének egy gyengített változatát, nevezetesen azt bizonyítja be, hogy végtelen sok, a fenti tulajdonsággal rendelkező α negyedfokú algebrai szám van (ez Theorem 2.1 a doktori mű felépítésében). (A Corollary 2.1 szerint még az is elérhető, hogy α végtelen sokszor S-egész legyen, ahol S a racionális számok helyeinek egy halmaza. Ha $S \subseteq \{\infty\}$, akkor ez maga után vonná

a pozitív választ Pethő eredeti kérdésére. A bizonyításból azonban úgy tűnik, hogy $S \not\subseteq \{\infty\}$ kellene, hiszen a $(0,2)$ intervallumból van szükségünk végtelen sok S-egészre. Itt vagy van egy elírás, vagy félreértek valamit.)

3. fejezet. A 3. fejezet az a,b 0-tól különböző racionális paraméterek mellett az

$$ax(y^2-1) = by(x^2-1)$$

egyenlettel definiált Huff-görbének (ez a görbe geometriai indíttatású, racionális pontjai sok racionális távolságot határoznak meg) tekinti két változatát nevezetesen a

$$H_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x(ay^2-1) = y(bx^2-1)\}$$

és a

$$H_{a,b}^{c,d} = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : ax(y^2-c) = by(x^2-d)\}$$

görbéket. Siegel klasszikus tétele értelmében a görbéken az egész pontok száma véges. Tengely Szabolcs a $H_{a,b}$ görbék esetében meghatározta az összes egész pontot (Theorem 3.1), valamint bebizonyította, hogy végtelen sok olyan a,b,c,d egész négyes létezik, melyekre a $H_{a,b}^{c,d}$ görbének van 9 olyan egész pontja, melyek x-koordinátái számtani sorozatot alkotnak (Theorem 3.3).

4. fejezet. A 4. fejezet az a,b,c,d egész paraméterű

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$$

Markov–Rosenberger-típusú egyenletek megoldásait keresi a Fibonacci-számok körében (vagyis ahol x,y,z mindegyike a Fibonacci-sorozat eleme). Tengely Szabolcs ezeket pontosan leírta néhány konkrét a,b,c,d megválasztása esetén (Theorem 4.1).

5. fejezet. Az 5. fejezetben Tengely Szabolcs az Erdős–Graham-típusú problémák területén elért eredményeit tekinti át. Ezeket most nem részletezem egyenként, illusztrációképp csak egyet mutatok be. Tekintsük, valamilyen $m \geqslant 4$ egész paraméter mellett az

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+m)(x+m+1)(x+m+2)(x+m+3) = y^2$$

egyenletet. Tengely Szabolcs bebizonyította, hogy minden m-re az egész megoldások kielégítik az $x \leqslant 1{,}08m$ egyenlőtlenséget (Theorem 5.1), valamint megoldotta az egyenletet abban az esetben, ha $m \leqslant 10^6$ (Theorem 5.2).

6. fejezet. A 6. fejezet olyan típusú kérdéseket vizsgál, hogy egy adott polinom mikor vesz fel értékeket egy előre adott másodrendű, homogén, lineáris rekurzióból adódó sorozatból, talán a legismertebb példa, hogy a Fibonacci-sorozatban mely négyzetszámok fordulnak elő. Tengely Szabolcs ismét számos eredményét bemutatja a témában, példaként kiemelem, hogy Ulas-szal közös munkájában meghatározta az

$$\binom{x}{2} + d = F_n$$

összes egész megoldását, ahol F_n a Fibonacci-sorozat n. tagja, d pedig befutja a $[-20,20]$ intervallumot.

ÉRTÉKELÉS

Tartalmi szempontok. Az értekezés konkrét egyenletekkel dolgozik, melyek motivációja változatos, bár – számomra, aki nem ezen a területen dolgozom – olykor nem teljesen világos. Szem előtt kell azonban tartani, hogy a diofantikus egyenletek megoldásának történetileg is ilyen volt a természete: a híres Fermat-egyenlet sem önmagában lényeges, hanem azzal a rengeteg elmélettel és módszerrel együtt, melyeket a megoldására kidolgoztak, és amelyek óriási mértékben fejlesztették a matematikát.

A Tengely Szabolcs által bemutatott tételek – amennyire meg tudom ítélni – szintén inkább a megoldási módszereken keresztül érdekesek. Ezek a módszerek változatosak, az elmúlt bő száz év diofantikus számelméletének több mély eredményét és fogalmát használják (Runge-módszer, Baker-korlát a logaritmusok lineáris formáira, Mordell–Weil-csoport), egyúttal a modern számítógépes lehetőségeket is kihasználják (sok esetben az egyenlet megoldása az elméleti korlátok felállítása után konkrét számításokra vezetődik vissza, melyek emberi léptékkel nagyon hosszadalmasak lennének).

A bemutatott eredmények és azok utóélete azt mutatják, hogy Tengely Szabolcs a téma aktív és elismert szakértőjének számít.

Formai szempontok. A doktori mű nagyon szép munka, láthatóan nagy gonddal kivitelezett. Talán a bevezető lehetett volna egy kicsit részletesebb azt illetően, hogy az egyes egyenlettípusokat mi motiválja, akár azon az áron is, hogy kevesebb egyenlet kerül bemutatásra a bevezetőben, de azoknak indíttatása világosabb.

Összegzés. Javaslom a nyilvános vita kitűzését és az MTA doktora cím odaítélését Tengely Szabolcs számára.

Budapest, 2022. május 9.

Maga Péter