Műholdas gravimetriai mérések feldolgozása

MTA Doktori értekezés tézisei

Földváry Lóránt

Budapest, 2021

dc_1919_21

I. Bevezetés

A Föld belső felépítésére vonatkozóan leginkább a szeizmológiai mérésekből, a rengéshullámok terjedéséből következtethetünk, amelyhez további adalékot szolgáltatnak a Föld mágneses terének és nehézségi erőterének mérései. Műholdas mérési technikákkal csak korlátozottan szerezhetünk információt, elsősorban a Föld mágneses terének és nehézségi erőterének mérésével. Ezért is alapvető jelentőségűek a 2000-es évektől megvalósuló műholdas gravimetriai projektek, melyek műholdjai az első, dedikáltan a földi nehézségi erőtér meghatározása, részleteinek feltérképezése céljából pályára állított műholdaknak számítanak. A dedikált gravimetriai műholdas kísérletek a CHAMP 2000-es, majd a GRACE műholdpár 2002-es, végül a GOCE műhold 2009-es pályára állításával valósultak meg [Balmino et al., 2001].

Ezen küldetések mindegyike néhány 100 km-es LEO (Low Earth Orbit) pályamagasságon zajlott, amely pályák kiváló felbontású globális nehézségi erőtér modellek levezetését tették lehetővé. A LEO magasságon egy műhold pályája – a légkör számottevő fékező hatásának következtében – meglehetősen szabálytalannak (perturbáltnak) mondható. Ezen pályák gravimetriai célú alkalmazását két technikai fejlesztés tett lehetővé: egyrészt a légköri fékeződés méréséhez megfelelő pontosságú gyorsulásmérők, másrészt a pálya folyamatos követésének lehetőségét biztosító GNSS műholdrendszerek. Míg korábban pálya-meghatározás alatt néhány földi követő állomásról végzett távolságmérésből meghatározott pozícióra illesztett pályaívet, ún. dinamikus pályát értettek, addig mára a műhold pályája alatt pár másodpercenként GPS-szel mért helyvektorokat, ún. kinematikus pályát értünk, ahol az egyes pozíciók meghatározása egymástól függetlennek tekinthető. Ez azt is jelenti, hogy a dedikált gravimetriai műholdak következtében látványosan megváltozott a nehézségi erőtér meghatározásának helyzete, és rövid időn belül korábban nem látott mennyiségű mérési adat állt a szakemberek rendelkezésére. Másrészről fontos említenünk, hogy a korábbi, meglehetősen kisszámú mérések jórészt inhomogén eloszlásban álltak rendelkezésre, így a Föld nehézségi erőterének globális modellezése nem volt megoldható feltevésmentesen. Összességében mind az óriási adathalmaz, mind a korábbi gyakorlat számára ismeretlen kinematikus pálya új kihívásnak számított, számos alapkutatási feladatot generálva.

II. Gravimetriai műholdak méréseinek feldolgozása

A CHAMP műhold méréseinek feldolgozása szempontjából kulcsfontosságúak a folyamatos, 30 másodpercenként rögzített pályaadatok. A (gyorsulásmérővel mért) nem gravitációs eredetű gyorsulásokra, továbbá egyéb tömegek tömegvonzására korrigálva a pályát, eredményül egy olyan fiktív pálya vezethető le, amely csak a földi tömegvonzás hatását tükrözi. A pálya ismeretében következtetni lehet az azt kialakító erőtérre, tehát a földi tömegvonzásra. Ez utóbbi feladat nem egyértelmű, egyrészt a mérések elhelyezkedése miatt (hiszen pusztán pályamenti

mérésekből szeretnénk következtetni az egész erőtérre), másrészt az időbeli egyenetlensége miatt (a mérések időtartama alatt az erőtér is változik).
A GRACE kísérletben két teljesen megegyező kialakítású, azonos pályájú műhold követi egymást mintegy 220 km-es eltéréssel. A pálya-meghatározás mindkét műhold esetében (a CHAMP-pel megegyező módon) GPS-műholdak alapján történik. A GRACE műholdak különlegessége, hogy a két műhold között a K-Band Ranging System (KBR) elnevezésű műszerrel folyamatosan nagy pontosságú távolságváltozás-mérés zajlik, ennek megbízhatósága *1 $\mu m/s$* alatti érték. A nagypontossággal végzett távolságváltozás-mérés (KBR-mérés) nélkül két CHAMP-műhold jellegű megoldással rendelkeznénk, ez a mérés azonban lehetővé teszi, hogy a nehézségi erőteret jóval finomabb felbontásban érzékeljük. Az ilyen műhold-elrendezést alacsony-alacsony műhold-műhold követésnek (Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking, Low-Low SST) nevezik, utalva arra, hogy két LEO műhold között követés, folyamatos távolságváltozás-mérés történik.

Míg a CHAMP és a GRACE műholdak közvetett mérések alapján teszik lehetővé a nehézségi erőtér meghatározását, addig a GOCE fedélzetén a nehézségi erőtér gradienseinek közvetlen mérése folyik. Ilyen szempontból a GOCE által végzett gradiens-mérések, a Satellite Gravity Gradiometry (SGG) mérések közvetlen lineáris függvénykapcsolatba hozhatók az ismeretlen gömbfüggvény együtthatókkal, a gyakorlatban azonban az SGG-mérések sávkorlátosak, így elkerülhetetlen ezek előfeldolgozása.

II.1. Mérések feldolgozása az energia integrál alkalmazásával

A műholdpályából a nehézségi erőtérre következtetni olyan fizikai összefüggések alapján lehet, amelyek tartalmazzák mind a helyet (pálya), mind a nehézségi gyorsulást. Ilyen az energiamegmaradás törvénye, illetve a nem zárt rendszer esetén felírható energia integrál.

Az energia integrál alapján levezetett módszer gyakorlati alkalmazhatóságát a felhasználásával CHAMP-mérésekből meghatározott TUM-1S [Gerlach et al, 2003], TUM-2Sp [Földváry et al, 2004] és TUM-2S [Wermuth et al, 2004b] nehézségi erőtér modellek mutatják. Összességében az eredmények azt mutatják, hogy az egye modellek pár dm-es pontosságot szolgáltatnak, azonban abszolút értelemben pontossági mérőszámot (a garantált referencia hiányában) nem lehet szolgáltatni.

A GRACE műholdakra is felírható az energia integrál. Ezen egyenletbe (megfelelő matematikai átalakítások felhasználásával) a két műhold között folyamatosan végzett nagypontosságú távolságváltozás-mérést bevonva megkapjuk a gyakorlat számára hasznosítható formulát. Az ebből számolt nehézségi erőtér modellt [Paizs és Földváry, 2007] 12 foki és rendig a szintén GRACE mérések alapján számolt EIGEN-GRACE01S [Reigber et al, 2005] modellel összehasonlítva ±4,4 cm-es középhibát mutat. Az eredmény egyértelműen alátámasztja a kidolgozott módszer elvi helyességét. (Az energia integrál alkalmazására vonatkozó eredményeket összegzi az **1. tézis**).

II.2. Mérések feldolgozása a newtoni mozgásegyenletek alkalmazásával

Az energia integrál mellett egyéb elvek alapján is történhet a feldolgozás, így például a műholdra felírt Newtoni mozgásegyenlet is hasznosítható. Valamennyi műholdat érő erőhatást figyelembe véve levezethető egy a gyakorlat számára hasznosítható módszer [Földváry és Bokor, 2010], amely alapján a Legkisebb Négyzetek Módszerével a műholdpályából a nehézségi erőtér közvetlenül modellezhető. A levezetett összefüggés gyakorlati alkalmazhatóságának validációja megtörtént, az így számolt geoid modell ±52,9 cm középhibát mutat, mely alapján elmondható, hogy a megoldás elfogadható, de nem kiemelkedő, illetve hogy a CHAMP műhold esetén nem éri el az energia integrállal elérhető pontosságot. (A Newtoni mozgásegyenlet alkalmazását foglalja össze a **2. tézis**).

II.3. Sebességek és gyorsulások származtatása numerikus differenciálással

Az energia integrál használatának egy fontos tényezője, hogy a feldolgozás során a műhold pozíciója mellett annak sebességét is használja bemeneti adatként. Hasonlóan, a Newtoni mozgásegyenlet alkalmazása esetén a műhold pályája mellett annak sebességét és gyorsulását is felhasználjuk.

A műholdpálya ismeretéből a sebesség és a gyorsulás numerikus differenciálással, vagy valamilyen függvényillesztéssel és annak analitikus deriválásával határozható meg. A derivált számításának pontossága döntő szerepű a módszerek pontossága szempontjából.

A sebesség- és gyorsulás-meghatározás céljából empirikusan vizsgáltuk az idő szerinti deriválást, melyet elvégeztünk:

(a) numerikusan véges differenciahányadossal közelítve,
(b) a pályaívre egy magas fokszámú polinomot illesztve, majd ennek deriváltját analitikusan képezve,
(c) a Newton-Gregory interpoláció alapján analitikusan levezetett derivált összefüggéssel,
(d) a pályaívre köbös spline függvényt illesztve és azt deriválva analitikusan,
(e) magasabb fokszámú polinomos simítással,
(f) köbös spline simítással.

A vizsgálatokat elvégeztük valós CHAMP [Földváry, 2007a; Földváry, 2008; Svehla és Földváry, 2006] és szimulált GOCE [Földváry, 2007b] pályákra egyaránt. A gyorsulás meghatározására két megközelítést is vizsgáltunk: valamely módszerrel nyert interpolációs függvény második deriváltját analitikusan képezve, illetve az első deriváltat két egymást követő lépésben alkalmazva.

A vizsgálat összességében a Newton-Gregory interpolációt találta legcélravezetőbbnek, amely alkalmazásával a 60 másodperces mintavételezésű CHAMP pályákból (becsült középhiba ~2 cm) a sebességet 0,3 mm/s pontossággal sikerült előállítani [Svehla és Földváry, 2006]. A szimulált GOCE pályából mind a sebesség, mind a gyorsulás előállítására a Newton-Gregory interpoláció bizonyult a legjobbnak [Földváry, 2007b]. A vizsgálatok kimutatták továbbá, hogy előzetesen ismert nehézségi erőtér modell felhasználása pontos függvényillesztést alkalmazó módszerek esetén nem befolyásolja a megoldást, azonban simító eljárások esetén igen, mert a megoldást a felhasznált modellhez simíthatja [Földváry, 2007b; Földváry, 2008b]. A gyorsulásokra vonatkozóan kimutattuk, hogy az első derivált képzése két egymást követő lépésben jóval pontosabb eredményt szolgáltat, mint a második derivált meghatározása közvetlenül, egy lépésben [Földváry, 2007b]. (A sebesség- és gyorsulás-meghatározásra vonatkozó eredményeket a **3. tézis** tartalmazza).

II.4. Gradiometriai mérések feldolgozása

A GOCE SGG mérési mennyisége a 6 független V_{ij} gradiens. A gradiens-mérések esetén a gradiométer technikai kialakítása miatt rendkívüli pontosságot csak a mérési frekvenciatartományban, a 5-100 mHz tartományban lehet elérni. A mért gradienseket ezért valamelyik sávkorlátos szűrővel a mérési sávra szűrjük. Schuh et al [2010] véges impulzusválaszú (Finite Impulse Response; FIR) szűrőt javasolt és használt.

Ennek alternatívájaként végtelen impulzusválaszú (Infinite Impulse Response; IIR) szűrővel oldottuk meg a feladatot [Polgár et al, 2013; Földváry et al, 2014]. A FIR-szűrők előnye a lineáris fázisátmenet, ezáltal alakhű átvitel valósítható meg, hátránya azonban a szűrőparaméterek nagy száma. Az IIR szűrőkről elmondható, hogy kevés paraméterrel is összetett feladat megoldására képesek, a fázismenetük azonban nem lineáris. Az IIR szűrő kedvezőtlen, nemlineáris fázismenete kiküszöbölhető, ha a szűrőt „oda-vissza" alkalmazzuk, azaz a jelet meg kell szűrni a szokásos módon, majd a szűrés eredményeként kapott mintasorozatot „visszafelé", az időben utolsó mintával kezdve is meg kell szűrni. A „visszafelé" szűrés amplitúdómenete megegyezik a normál szűrés amplitúdómenetével, fázismenete viszont a normál szűrés mínusz egyszerese. A teljes szűrési folyamat amplitúdómenete a megtervezett IIR szűrő amplitúdómenetének négyzete, fázistolása pedig zérus, amely alakhű átvitelt biztosít.

A szűrőre vonatkozó specifikációkat Shuh et al [2010] alapján állítottuk fel. Ennek eredményeként a tervezett szűrő egy 5-ödrendű aluláteresztő és egy 9-edrendű felüláteresztő szűrő kaszkádjaként áll elő. Összességében olyan szűrőt kaptunk, amely az amplitúdómenet tekintetében kedvezőbbnek tűnik. Míg a FIR szűrő 2001 együtthatót, míg a két IIR szűrő kaszkádja mindössze 30 együtthatót használ. (Az IIR-szűrő alkalmazását írja le a **4. tézis**).

III. Időben változó nehézségi erőtér modellek alkalmazásai

A GRACE műholdpár pályáit úgy tervezték, hogy egy hónap alatt a mérések eloszlása a Föld felszínén homogén legyen, így egy hónapnyi mérés lehetővé teszi a nehézségi erőtér globális meghatározását. A hónapos nehézségi erőtér modellek alapján pedig a nehézségi erőtér (egyben a tömegeloszlás) időbeli változását lehet vizsgálni, ami különösen hasznos a napjainkban tapasztalható globális felmelegedés hatásának, például a sarki jégsapkák tömegátrendeződésének vizsgálata szempontjából. A feladatot nehezíti azonban, hogy a GRACE modellek által kimutatható tömegátrendeződések magasságilag összemosódnak, az egyes kiváltó okok nem különíthetők el egymástól vertikálisan [Kiss és Földváry, 2017]. Számos területen, így például az antarktiszi jégtakaró időbeli változásainak észleléseiből nem különíthető el a kontinens felúszási folyamatainak hatása (ún. Glacial Isostatic Adjustment, röviden GIA), amely egyrészt a litoszféra (a legutóbbi jégkorszak levonulása óta tartó) lassú, maradandó felúszási folyamatainak, másrészt a jelenkori olvadások következtében fellépő hirtelen jellegű felúszási folyamatainak összessége. A GIA felúszás mértéke közvetlen méréssel nem, csak földtörténeti áramlás-modellek alapján becsülhető. A gyakorlat azt mutatja, hogy a különböző GIA modellek (eltérő földtörténeti háttérből kiindulva, eltérő paraméterezést feltételezve, valamelyest eltérő módszertannal dolgozva) jelentős eltéréseket mutatnak [Földváry és Kiss, 2016]. Nincs adekvát mérőszáma valamely modell helyességének a többi felett, ennek folyománya pedig az, hogy az antarktiszi jégtakaró időbeli változásának meghatározása során használatos GIA modell kiválasztása egyfajta meggyőződésbeli kérdéssé vált.

A GIA modell megválasztásának önkényességét elkerülendő, a jégtakaró időbeli változásának meghatározására módszert dolgoztunk ki, amely a GIA modelltől független megoldást szolgáltat [Földváry, 2012; Földváry és Mészáros, 2009]. A módszer lényege, hogy a tömeganomália idősorára, annak szekuláris változásainak meghatározására nem egyetlen regressziós egyenest illesztünk, hanem részintervallumokra illesztünk regressziós egyeneseket, a részintervallumokat pedig egy-egy epochával a teljes időtartamon végigtolva, az ún. mozgóablak („moving window”) technikával, azok meredekségének változásából a tömeganomália-változás időbeli alakulását határozzuk meg és értelmezzük. A trendek a GIA hatásával terheltek, azonban a trendek idősorára trendet illesztve, az eredményül kapott trendváltozás értékéből a GIA már differenciálisan kiesik. A trendváltozás jelentése az éppen zajló tömegváltozási (csökkenő vagy gyarapodó) folyamat tendenciáját írja le: negatív előjel esetén a tömegcsökkenés felgyorsulását, vagy a tömeggyarapodás lelassulását jelenti, míg pozitív előjel estén a tömegcsökkenés lassulásának vagy a tömeggyarapodás gyorsulásának lehetünk tanúi. (A GIA modell alkalmazása nélküli differenciális módszert a **5. tézis** mutatja be).

IV. A mérések feldolgozásának elvi nehézségei

IV.1. A hónapos modellek simító hatásának rekonstrukciója

A GRACE hónapos nehézségi erőtér modellek földtudományi felhasználásának elsődleges célja az éves- és féléves periódusú tömeganomália változások meghatározása. A tömeganomália idősorokra az illesztés eredményeként kapott periodikus tag amplitúdója a Föld egyes tömegátrendezéssel járó folyamatainak (hidrológiai folyamatok, óceáni áramlatok) az adott periódusú változásban résztvevő tömegek nagyságát írja le.

A GRACE műhold méréseiből levezetett nehézségi erőtér modellek, amelyek alapján a tömeganomália idősort számítjuk, nem egy időpillanatra, hanem egy egész hónapra vonatkoznak, egy teljes hónap méréseiből lettek meghatározva Levezettük, hogy a változás amplitúdóját hónapos átlagot adatokból következetesen alábecsüljük. Egy $\omega = 1/T$ frekvenciájú periodikus függvény esetén az alábecsült amplitúdót egy $\boldsymbol{F}(\omega)$ szorzótényezővel módosítva a megfelelő amplitúdó meghatárazható, ahol

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \frac{1}{sinc\frac{\Delta T}{T}} \quad (1),$$

tehát kizárólag a vizsgálat T periódusának és a mintavételezés ΔT hosszának arányától függ [Földváry, 2015a].

Az összefüggés (a mintavételezés következtében fellépő korlátokon belül) tetszőleges függvény átlagolt értékeinek módosítására általánosítható, mivel egy tetszőleges függvény a Fourier-spektrum előállításával periodikus függvények összegére alakítható.

További általánosítás az abszcisszára vonatkozóan is megadható: az idő szerinti abszcissza a tér valamely iránya is lehet, ami térbeli átlagolás visszaállítására ad lehetőséget (a felbontással megegyező vagy annál nagyobb hullámhosszú változások esetében). Levezettünk összefüggést derékszögű koordinátákkal adott 2D felületek esetére [Földváry, 2018]. Mivel a geodéziai gyakorlat a Föld közel gömb alakja miatt előszeretettel használja a gömbfüggvényeket valamely felületi változó (potenciál, geoidunduláció, nehézségi anomália, gravitációs gradiens, stb.) globális leírására, az összefüggést gömbfüggvény-sor esetére is meghatároztuk. (Az időben vagy térben átlagolt adatok szélsőérték-simító hatásának csökkentésére kidolgozott eljárást az **6. tézis** ismerteti).

IV.2. A Legendre-polinomok szinusz-soros alakja

A Földváry [2015b] tanulmány különböző rekurziós formulákat felhasználva teljes indukcióval bemutatja, hogy minden Legendre polinomnak létezik véges taggal megadható tiszta szinusz-soros alakja, majd egy iterációs eljárást ad meg ezek előállítására. Az említett szinusz-soros alak általánosan az alábbi formában írható le:

$$\mathrm{P}_{n,m}(\cos\vartheta) = \mathrm{A}_{n,m}\sin\left(n\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{A}_{n-2,m}\sin\left((n-2)\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + \cdots + bias \quad (2)$$

ahol $j = \begin{cases} 1, & \text{ha } m \text{ páros vagy nulla, kivéve } n = 0 \\ 0, & \text{ha } m \text{ páratlan vagy } n = 0 \end{cases}$

A (2) egyenletben $\vartheta = 90 - \varphi$ a sarkmagasság, n és m pedig a Legendre polinom foka és rendje (egyben a gömbfüggvény-sor foka és rendje is), $\mathrm{A}_{n,m}$ együtthatók pedig racionális számok. A *bias* értéke csak páros fok és páros rend esetén nem nulla.

A (2) szerinti alak létezése alacsony fokú és rendű tagokra belátható, tetszőleges magasabb fokú és rendű tag (2) egyenlethez hasonló alakja teljes indukcióval meghatározható. Földváry [2015b] levezetett formulát a fokszám növelésére ($\mathrm{P}_{n+1,m}(\cos\vartheta)$ meghatározására), továbbá a rend növelésére ($\mathrm{P}_{n,m+1}(\cos\vartheta)$ meghatározására) is. (A Legendre-függvények teljes szinusz-soros alakjának rekurziós összefüggéseire vonatkozó eredményeket a **7. tézis** összegzi).

IV.3. A mintavételezés hibahatása

Egy folytonos változó mintavételezése önmagában esetleges, a mintavételezett értékek alapján a jel becslése pedig hibával terhelt. A mintavételezés hibájának ismeretében a mintavételezés tervezése során annak felbontása optimalizálható. A célra analitikus formulát vezettünk le periodikus függvények mintavételezési hibahatásának becslésére [Földváry, 2021].

Egy szabályos T periódusú (tehát $\omega = 1/T$ frekvenciájú) jelet mintavételezzünk szabályos $\Delta T = 1/f_s$ lépésközzel, ahol f_s jelölje a mintavételezési frekvenciát. A jel és a mintavételezés relatív kapcsolatát (a jel jellegétől és mértékegységétől függetlenül) jellemzi, hogy egy periódus alatt hány mintavételezésre kerül sor, tehát a jel, ω és a mintavételezés, f_s frekvenciáinak az aránya:

$$N = \frac{\omega}{f_s} = \frac{\Delta T}{T} \qquad (3).$$

A mintavételezés L1-norma szerinti hibáját az alábbi módon kapjuk meg:

$$\sigma_{L1}([x_i, x_{i+1}]) = |C \cdot \cos(2\pi\omega x_i + \phi) + S \cdot \sin(2\pi\omega x_i + \phi)| \qquad (6),$$

ahol bevezetve a $n = 2\pi N = 2\pi\omega\Delta T$ jelölést az együtthatók az alábbi alakot öltik:

$$C = \frac{A}{n} - \frac{A}{2}\sin(n) - \frac{A}{n}\cos(n) \qquad (7)$$

és

$$S = -\frac{A}{2} + \frac{A}{n}\sin(n) - \frac{A}{2}\cos(n) \qquad (8).$$

Hasonlóan, a mintavételezés hibájának L2-normája is levezethető, ahol az L2-normát jelentő négyzetes középhibája

$$L2([x_i, x_{i+1}])^2 = C \cdot \cos(4\pi\omega x_i + 2\phi) + S \cdot \sin(4\pi\omega x_i + 2\phi) + B \qquad (9)$$

alakban adható meg, ahol

$$C = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\left\{n^2 - 6 + (n^2 - 6)\cos(2n) + (n^2 + 12)\cos(n) - \frac{9}{2}n\sin(2n)\right\} \qquad (10),$$

$$S = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\left\{\frac{9}{2}n - (n^2 - 6)\sin(2n) - (n^2 + 12)\sin(n) - \frac{9}{2}n\cos(2n)\right\} \qquad (11),$$

és

$$B = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\{12 - 5n^2 - (n^2 + 12)\cos(n)\} \qquad (12).$$

Fontos eredmény, hogy (7)-(8) és (10)-(12) egyenletek csak a mintavételezési lépésköz és a jel periódusa n arányától függenek.

Az L1-normára és az L2-normára levezetett összefüggések lehetővé teszik valamely mintavételezett periodikus jel mintavételezés okozta hibája mértékének és periodicitásának meghatározását. (A periodikus függvények mintavételezési hibahatásának L1- és L2-norma szerinti becslésére kidolgozott eljárást a **8. tézis** ismerteti).

V. Az új tudományos eredmények alapján megfogalmazott tézisek

1. tézis.
Kidolgoztam és a gyakorlatban elsők között alkalmaztam az energia integrál összefüggését a globális nehézségi erőtér meghatározása céljából (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Gerlach et al, 2003; Földváry et al, 2004; Wermuth et al, 2004a]).
1.1 altézis. Az energia integrál módszert kidolgoztam és alkalmaztam High-Low SST műholdakra (pl. CHAMP) [Földváry et al, 2004; Gerlach et al, 2003; Wermuth et al, 2004a; Wermuth et al, 2004b]
1.2 altézis. Az energia integrál módszert kidolgoztam és alkalmaztam Low-Low SST műholdakra (pl. GRACE) [Paizs és Földváry, 2006; Paizs és Földváry, 2007]

2. tézis.
Új eljárást dolgoztam ki a nehézségi erőtér meghatározására a Newtoni mozgásegyenletek alapján (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry és Bokor, 2010]).

3. tézis.
Mért diszkrét adatsor deriválására alkalmas technikák vizsgálata alapján optimális eszközt találtam LEO típusú műholdak sebességének és gyorsulásának meghatározására (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Svehla és Földváry, 2006; Földváry, 2007a, Földváry, 2007b; Földváry, 2008b]).
3.1 altézis. Kimutattam, hogy a 7 epochára Newton-Gregory interpolációval függvényt illesztve, azt

analitikusan deriválva a kapott függvény használata célravezető módszer.

3.2 altézis. Kimutattam, hogy előzetesen ismert nehézségi erőtér modell felhasználása pontos függvényillesztést alkalmazó módszerek esetén nem befolyásolja a megoldást, azonban simító eljárások esetén az eredmény az ismert modell hatását tükrözheti.

3.3 altézis. Kimutattam, hogy gyorsulások meghatározására az első derivált képzése két egymást követő lépésben jóval pontosabb eredményt szolgáltat, mint a második derivált meghatározása közvetlenül, egy lépésben.

4. tézis.

Elsőként alkalmaztam IIR-szűrőt a GOCE-gradiensek sávkorlátos jellegének szűrésére. Az IIR-szűrő a hivatalos eljárásban használt FIR-szűrővel hasonló eredményre vezetett, használata azonban hatékonyabbnak tekinthető (kapcsolódó publikációk: [Földváry et al, 2014b; Polgár et al, 2013]).

5. tézis.

Új eljárást fejlesztettem ki a permanens jég- és hótakaró napjainkban tapasztalható megváltozásának becslésére GRACE hónapos nehézségi erőtér modellek alapján (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Földváry és Mészáros, 2009; Földváry, 2012]).

6. tézis.

Eljárást dolgoztam ki időben vagy térben átlagolt adatok szélsőérték-simító hatásának csökkentésére, és kimutattam ezek gyakorlati jelentőségét a geodéziai gyakorlatban (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Földváry, 2015a; Földváry, 2018]).

6.1 altézis. Eljárást fejlesztettem mért periodikus idősorok amplitúdójának pontosítására (alkalmas GRACE hónapos nehézségi erőtér modellek alapján végzett éves- és féléves periódusú tömegátrendeződések vizsgálatára).

6.2 altézis. A módszert általánosítottam tetszőleges mérési adatsor vizsgálatára annak Fourier-spektruma alapján (felhasználható mért GOCE gravitációs gradiensek energia spektrumának pontosítására).

6.3 altézis. A módszert adoptáltam felületi függvényekre (alkalmas blokkokba átlagolt DTM-ek szélsőértékeinek a felbontásnak megfelelő hullámhosszhoz rendelhető visszaállítására).

6.4 altézis. Levezettem az eljárás gömbfüggvény-soros alakját (felhasználható a fizikai geodéziai változók térbeli átlagolódásának pontosítására a Föld felületére számolt szintézis során).

7. tézis.

Új rekurziós összefüggéseket vezettem le a Legendre-függvények teljes szinusz-soros alakja meghatározására (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry, 2015b]).

8. tézis.

Új analitikus formulát vezettem le periodikus függvények mintavételezési hibahatásának mind L1, mind L2-norma szerinti becslésére. (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry, 2021]).

Irodalmi hivatkozások listája

Balmino, G., Perosanz, F., Rummel, R., Sneeuw, N., Sünkel, H. (2001) CHAMP, GRACE and GOCE: mission concepts and simulations. Bollettino di Geofisica Teorica e Applicata 40(3–4):309–320.

Földváry, L. (2007a) Analysis of numerical differentiation methods applied for determination of kinematic velocities for LEOs, Periodica. Polytechnica Civil Engineering, 51/1, pp. 17-24.

Földváry, L. (2007b) Determination of satellite velocity and acceleration from kinematic LEO orbits, ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA HUNGARICA 42(4), pp. 399–419.

Földváry, L. (2008) Spectral analysis of CHAMP kinematic velocities determined by applying smoothing cubic splines, Periodica. Polytechnica Civil Engineering, 52/1, pp. 29-34.

Földváry L. (2012) Mass-Change Acceleration in Antarctica from GRACE Monthly Gravity Field Solutions. In: Geodesy for Planet Earth, Proceedings of IAG Symposium in Buenos Aires (eds: Kenyon, S., Pacino, M. C., Marti, U.), IAG Symposia Series, Vol. 131, pp. 591-597.

Földváry, L. (2015a) Desmoothing of averaged periodical signals for geodetic applications, Geophysical Journal International, 201 (3), pp. 1235-1250, DOI 10.1093/gji/ggv092

Földváry, L. (2015b) Sine series expansion of associated Legendre functions, Acta Geodaetica et Geophysica, 50(2), pp. 243-259, DOI 10.1007/s40328-014-0092-2

Földváry, L. (2018) Desmoothing of block-wise gridded geoinformation, Journal of Geographical Society of Uzbekistan, Special Volume, pp. 22-27.

Földváry L. (2021) Sampling Error of Continuous Periodic Data and its Application for Geodesy, Mathematical Methods in the Applied Sciences, in print, DOI 10.22541/au.159654396.62738949

Földváry, L., Bokor, Zs. (2010) Determination of a CHAMP gravity model based on the Newtonian equation of motion, Periodica. Polytechnica Civil Engineering, 54(2), pp. 155–161.

Földváry, L., Kiss, A. (2016) Accuracy analysis of Glacial Isostatic Adjustment models using for satellite gravimetry, 11th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2016), Székesfehérvár November 11, 2016, pp. 5-10.

Földváry, L., Mészáros, P. (2009) Az Antarktisz tömegátrendeződéseinek vizsgálata GRACE geopotenciális modellek alapján, GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK, XII., pp. 109-118.

Földváry, L., Sujbert, L., Polgár, Zs. (2014) A GOCE műhold gravitációs gradiens méréseinek szűrése és pontossági kérdései, GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK, XVII., pp. 33-45.

Földváry, L., Svehla, D., Gerlach, Ch., Wermuth, M., Gruber, Th., Rummel, R., Rothacher, M., Frommknecht, B., Peters, Th., Steigenberger, P. (2004) Gravity model TUM-2sp based on the energy balance approach and kinematic CHAMP orbits In: Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit (Ed. Reigber Ch, Lühr H, Schwintzer P et al.), Springer, Berlin, pp. 13-18.

Gerlach, Ch.., Földváry, L., Svehla, D., Gruber, Th., Wermuth, M., Sneeuw, N., Frommknecht, B., Oberdorfer, H., Peters, Th., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2003) A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral, GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS 30(20): 2037, doi:10.1029/2003GL018025

Kiss, A., Földváry, L. (2017) Uncertainty of GRACE-borne long periodic and secular ice mass variations in Antarctica, Acta Geodaetica et Geophysica, 52:(4), pp. 497–510.

Paizs, Z., Földváry, L. (2006) Gravitációs modell meghatározása 4 hónap GRACE mérési adatból, Geodézia és Kartográfia 59(9), pp. 7-11.

Paizs, Z., Földváry, L. (2007) Geopotenciális modell számítása GRACE mikrohullámú távolságmérés alapján, GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK, X., pp. 201-210.

Polgár, Z., Sujbert, L., Földváry, L., Asbóth, P., Ádám, J. (2013) Filter design for GOCE gravity gradients, Geocarto International, 28(1), pp. 28-36, DOI:10.1080/10106049.2012.687401

Reigber, Ch., Schmidt, R., Flechtner, R., König, R., Meyer, U., Neumayer, K. H., Schwintzer, P., Zhu, S.

Z. (2005) An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE01S, Journal of Geodynamics 39, no. 1, pp. 1–10, DOI 10.1016/j.jog.2004.07.001

Schuh, W. D., Brockmann, J. M., Kargoll, B., Krasbutter, I., Pail, R. (2010) Refinement of the stochastic model of GOCE scientific data and its effect on the in-situ gravity field solution. Proceedings of the ESA living planet symposium (szerk. Lacoste-Francis H), ESA Publications SP-686, 28. June–2. July 2010, Bergen, Norway, ISBN: 978-92-9221-250-6

Svehla, D, Földváry, L. (2006) From kinematic orbit determination to derivation of satellite velocity and gravity field, in: Observation of the Earth System from Space (editors: Flury, J., Rummel, R., Reigber, C., Rothacher, M., Boedecker, G., Schreiber, U.), Springer Berlin Heidelberg New York, pp. 177-192.

Wermuth, M, Földváry, L., Svehla, D., Gerlach, C., Gruber, T., Frommknecht, B., Peters, T., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2004a) Gravity Field Modelling from CHAMP Kinematic Orbits Using the Energy Balance Approach, In: Proceedings of Joint CHAMP/GRACE Science Meeting 2004, Potsdam, 2004.07.06-2004.07.08., pp. 1-4.

Wermuth, M., Svehla, D., Földvary, L., Gerlach, C., Gruber, T., Frommknecht, B., Peters, T., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2004b) A gravity field model from two years of CHAMP kinematic orbits using the energy balance approach, GEOPHYSICAL RESEARCH ABSTRACTS 6: Paper 03843.