

Műholdas gravimetriai mérések feldolgozása

MTA Doktori disszertáció

Földvály Lóránt

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

A tanulmányban használt jelölések, rövidítések	3
I. Bevezetés	8
II. Gravimetriai műholdak méréseinek feldolgozása.....	10
II.1. Mérések feldolgozása a newtoni mozgásegyenletek alkalmazásával	10
II.2. Mérések feldolgozása az energia integrál alkalmazásával.....	15
II.2.1. CHAMP-mérések feldolgozása	15
II.2.2. GRACE-mérések feldolgozása	19
II.3. Sebességek és gyorsulások származtatása numerikus differenciálással	22
II.4. Gradiometriai mérések feldolgozása	28
III. A mérések kiegyenlítése.....	31
IV. Időben változó nehézségi erőtér modellek alkalmazásai	37
V. A mérések feldolgozásának elvi nehézségei	45
V.1. A hónapos modellek simító hatásának rekonstrukciója.....	45
V.2. A Legendre-polinomok szinusz-soros alakja.....	48
V.3. A mintavételezés hibahatása.....	50
VI. Az új tudományos eredmények alapján megfogalmazott tézisek.....	56
VII. Tudományos hozzájárulás a tézisekben megfogalmazott eredményekhez	58
VIII. A kutatás és a bemutatott eredmények hatása, visszhangja.....	59
Köszönetnyilvánítás	61
Irodalmi hivatkozások listája.....	62

A tanulmányban használt jelölések, rövidítések

Változók, indexek

δ	az utána szereplő változó hibája, eltérései
$\delta_{(m\ odd)}^0$	Kronecker delta, $j = \begin{cases} 1, & \text{ha } m \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } m \text{ páratlan} \end{cases}$
ϑ	sarkmagasság, pólustávolság
λ	ellipszoidi földrajzi hosszúság
ρ	műholdak közötti távolság
$\dot{\rho}$	műholdak közötti távolságváltozás
$\rho_{Föld}$	a Föld átlagos sűrűsége
$\rho_{víz}$	a víz átlagos sűrűsége, $\rho_{víz} = 1000 \text{ kg/m}^3$
φ	ellipszoidi földrajzi szélesség
$\varphi_{\dot{e}}$	éves változás fázisa
$\varphi_{f\dot{e}}$	féléves változás fázisa
ω	frekvencia, körfrekvencia
$\underline{\underline{\omega}}$	a Föld forgási szögsebességének vektora
$\omega_{\dot{e}}$	éves változás körfrekvenciája
$\omega_{f\dot{e}}$	féléves változás körfrekvenciája
Δ	difference az utána szereplő mennyiségre vonatkozóan; (műholdak esetén) a két műholdra vonatkozó érték különbsége $B-A$ (hátsó mínusz első) előjellel
$\Delta\sigma$	tömeganomália
ΔT	mintavételezés hossza, egy minta vételéhez szükséges időintervallum
$\underline{\underline{\Omega}}$	Cartan mátrix
∇	„nabla” skalár-vektor operátor, mely egy skalármennyiség ortogonális irányok szerinti gradienseit foglalja egy vektorba
$\underline{\underline{a}}_e$	külső hatásokból (egyéb égitestek tömegvonzásából, a Föld időben változó, dinamikus tömegeinek vonzásából) származó gravitációs gyorsulások (tézerősségek) eredő vektora

\underline{a}_{ng} vagy \underline{a}	a műhold felületén jelentkező nem gravitációs eredetű gyorsulások (térerősségek)
$bias$	egy függvény eltolási értéke (lásd A_b)
\underline{e}	egységvektor
\underline{f}	térerősség
i, j, k, n	(több helyen) pozitív egész számok; indexelést, polinom fokszámát, egymást követő pontok számát is jelölhetik
j	$j = \begin{cases} 1, & \text{ha } m \text{ páros vagy nulla, kivéve } n = 0 \\ 0, & \text{ha } m \text{ páratlan vagy } n = 0 \end{cases}$
\tilde{j}	$\tilde{j} = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ páros vagy nulla, kivéve } n = 0 \\ 1, & \text{ha } m \text{ páratlan vagy } n = 0 \end{cases}$
k	Newtoni tömegvonzási állandó
k_n	Love-féle számok
m	gömbharmonikus (gömbfüggvény-sor) rendje
n	gömbharmonikus (gömbfüggvény-sor) foka
\underline{n}	a normálegyenletrendszer tisztatag vektora
n_{max}	a gömbfüggvény-sor maximális foka
\underline{p}	update vektor
r	geocentrális távolság
s_j	$s_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } \tilde{j} = 1 \\ -1, & \text{ha } \tilde{j} = 0 \end{cases}$
t	idő
x	független változó, abszcissza
\underline{x}	a műhold pályáját leíró helyvektor, a Földdel együtt forgó, geocentrikus koordináta-rendszerben
$\underline{\dot{x}}$	műhold sebességvektora, a Földdel együtt forgó, geocentrikus koordináta-rendszerben
$\underline{\ddot{x}}$	műhold gyorsulásvektora, a Földdel együtt forgó, geocentrikus koordináta-rendszerben

\underline{x}	Legkisebb Négyzetek Módszere szerinti kiegyenlítés esetén a paraméterek vektora
\underline{x}_e	Legkisebb Négyzetek Módszere szerinti kiegyenlítés esetén az előzetes paraméterek vektora
y	függő változó, ordináta
A	Low-Low SST elrendezés esetén az első műhold
$\underline{\underline{A}}$	alakmátrix
A_b	egy függvény eltolási értéke (lásd <i>bias</i>)
A_{c1}	éves változás koszinuszos komponensének amplitúdója
A_{c2}	féléves változás koszinuszos komponensének amplitúdója
$A_{\acute{e}}$	éves változás amplitúdója
$A_{f\acute{e}}$	féléves változás amplitúdója
A_l	lineáris trend, regressziós egyenes meredeksége
A_m	regressziós parabola másodrendű, kvadratikus tagjának együtthatója
$A_{n,m}$	valamely Legendre-függvény tiszta szinuszos sora n fokú és m rendű ($n\theta$ periódusú és m szerinti fázisú) tagjának amplitúdója
A_{s1}	éves változás szinuszos komponensének amplitúdója
A_{s2}	féléves változás szinuszos komponensének amplitúdója
B	Low-Low SST elrendezés esetén a hátsó műhold
$B_{n,m}$	valamely Legendre-függvény tiszta szinuszos sora n fokú és m rendű tagjának $A_{i,j}$ együtthatókból levezetett amplitúdója
\bar{C}_{lm}	normalizált l fokú és m rendű gömbfüggvény együttható, a gömbfüggvény-sor koszinuszos tagjának együtthatója
\underline{F}	erővektor
F	egy mért függvény mérés alatti átlagolódásának korrekciós tényezője
$F(\omega_i)$ vagy F_i	egy mért függvény mérés alatti átlagolódásának ω_i frekvenciára vonatkozó korrekciós tényezője
F_{lm}	egy l fokú és m rendű gömbharmonikus átlagolódásának korrekciós tényezője
H	Hamilton-függvény

K	kinetikus energia
L	gömbharmonikus szintézis és analízis során a gömbfüggvény-sor maximális fokszáma
M	a Föld össztömege
$\underline{\underline{N}}$	normálmátrix
$\underline{\underline{P}}$	súlymátrix
P_{lm}	l fokú és m rendű Legendre-függvény
\bar{P}_{lm}	normalizált l fokú és m rendű Legendre-függvény
R	a Föld közepes sugara
$\underline{\underline{R}}$	a Földhöz-kötött és az inerciális geocentrikus koordináta-rendszerek közötti transzformáció forgatási mátrixa
\bar{S}_{lm}	normalizált l fokú és m rendű gömbfüggvény együttható, a gömbfüggvény-sor szinuszos tagjának együtthatója
T	periódusidő
V	potenciál; potenciális energia
\underline{X}	a műhold pályáját leíró helyvektor, inerciális, geocentrikus koordináta-rendszerben
$\underline{\dot{X}}$	műhold sebességvektora, inerciális, geocentrikus koordináta-rendszerben
$\underline{\ddot{X}}$	műhold gyorsulásvektora, inerciális, geocentrikus koordináta-rendszerben

Mozaikszavak

<i>ARMA</i>	Autoregressive-moving-average
<i>CHAMP</i>	CHAllenging Minisatellite Payload
<i>CSR</i>	Center for Space Research, University of Texas at Austin
<i>ESA</i>	European Space Agency
<i>ESTEC</i>	European Space Research and Technology Centre
<i>EWH</i>	equivalent water height (ekvivalens vízoszlop magassága)
<i>GFZ</i>	GeoForschungsZentrum
<i>GIA</i>	Glacial Isostatic Adjustment (glaciális izosztikus kiegyenlítőds)
<i>GNSS</i>	Global Navigation Satellite System (globális műholdas navigációs rendszer)
<i>GOCE</i>	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
<i>GPS</i>	Global Positioning System (az USA GNSS helymeghatározó rendszere)
<i>GRACE</i>	Gravity Recovery and Climate Experiment
<i>JPL</i>	Jet Propulsion Laboratory, NASA
<i>KBR</i>	K-Band Ranging System; a GRACE-műholdak fedélzeti műszere, mely a műholdak közötti távolságváltozás nagy pontosságú mérését végzi
<i>LEO</i>	Low Earth Orbit (alacsony földkörüli pálya) vagy Low Earth Orbiter (alacsony földkörüli pályán keringő műhold)
<i>NASA</i>	National Aeronautics and Space Administration, U.S.A.
<i>PCGMA</i>	Preconditioned Conjugate Gradients Method for Adjustment
<i>SST</i>	Satellite-to-Satellite Tracking (műhold-műhold követés)

I. Bevezetés

A műholdak nagyszámú megjelenése, azok tudományos és mérnöki célú felhasználása az 1960-as évektől kezdődően szemléletbeli váltást eredményezett a geodéziában is: a Földünk 70%-át kitevő óceánok, valamint az ember számára megközelíthetetlen szárazföldi területek az űrből elérhetővé, tehát felszíni formái, topográfiája meghatározhatóvá, egyes felületi tulajdonságai távérzékelési technikákkal mérhetővé váltak. A műholdas technológiák valamely mérési mennyiséget globálisan azonos technológiával, az egyes országok geodéziai szolgálatának felkészültségétől függetlenül, közel homogén felbontásban szolgáltatják, amely a Föld globális vizsgálatát, a nagyobb léptékű földfizikai folyamatok értelmezését kvázi egyenletes eloszlású mérési adatok alapján teszi lehetővé.

A legtöbb geodéziai célú műhold (feladatát tekintve) a fizikai földfelszínre vonatkozó méréseket szolgáltat. Így például a GNSS műholdrendszerek (geodéziai célú felhasználásuk során) a földfelszín helymeghatározását végzik; az altimetriai műholdakkal az óceánok és a jégtakaró topográfiája határozható meg; az InSAR technika a fizikai földfelszín időbeli vertikális megváltozásáról, süllyedéséről, emelkedéséről nyújt információt stb. Valamennyi mérési mennyiség jellegét tekintve geometriai adat. Az ezen műholdas technikákkal meghatározott, a fizikai földfelszínre vonatkozó mérések vonatkoztatási rendszere – a műholdas technikák jellegénél fogva – a Föld tömegközéppontja és forgástengelye által definiált kvázi-inerciális koordináta-rendszer. Ezekből a gyakorlati alkalmazások számára ésszerű, topocentrikus információ csak a geoid pontos ismeretében nyerhető. Elkerülhetetlen tehát a Föld geometriájának megismerése céljából a Föld belsejének ismerete is [Földváry, 2004].

A Föld belsejéről műholdas mérési technikákkal csak korlátozottan szerezhetünk információt, elsősorban a Föld mágneses terének és nehézségi erőterének mérésével. A Föld belső felépítésére vonatkozóan leginkább a szeizmológiai mérésekből, a rengéshullámok terjedéséből következtethetünk, amelyhez további adalékot szolgáltatnak a Föld mágneses terének és nehézségi erőterének földfelszíni és műholdas mérései. Ezért is alapvető jelentőségűek a 2000-es évektől megvalósuló műholdas gravimetriai projektek, melyek műholdjai az első, dedikáltan a földi nehézségi erőter meghatározása, részleteinek feltérképezése céljából pályára állított műholdaknak számítanak. A dedikált gravimetriai műholdas kísérletek a CHAMP 2000-es, majd a GRACE műholdpár 2002-es, végül a GOCE műhold 2009-es pályára állításával valósultak meg [Balmino et al., 2001]. (Ezen kísérletek kapcsán említhetjük még a GRAIL műholdat, amely a Hold nehézségi erőterét mérte 2012-ben egy 3, majd egy 4 hónapos időtartamban, azonban a holdi körülmények eltérő kihívásai miatt jelen tanulmányban nem tárgyaljuk).

Ezen küldetések mindegyike néhány 100 km-es LEO (Low Earth Orbit) pályamagasságon zajlott (zajlik), amely pályák kiváló felbontású globális nehézségi erőter modellek levezetését tették lehetővé. A LEO magasságon egy műhold pályája – a légkör számottevő fékező hatásának következtében – meglehetősen szabálytalannak (perturbáltak) mondható. Ezen pályák gravimetriai célú alkalmazását két technikai fejlesztés tett lehetővé: egyrészt a légköri fékezés méréséhez megfelelő pontosságú gyorsulásmérők, másrészt a pálya folyamatos követésének lehetőségét biztosító GNSS műholdrendszerek. Míg korábban pályameghatározás alatt néhány földi követő állomásról végzett távolságmérésből meghatározott pozícióra erőtani megfontolások alapján illesztett pályáivet, ún. dinamikus pályát értettek, addig mára a műhold pályája alatt pár másodpercenként GPS-szel mért helyvektorokat, ún. kinematikus pályát értünk, ahol az egyes pozíciók meghatározása egymástól függetlennek

tekinthető. Ez azt is jelenti, hogy a dedikált gravimetriai műholdak következtében látványosan megváltozott a nehézségi erőter meghatározásának helyzete, és rövid időn belül korábban nem látott mennyiségű mérési adat állt a szakemberek rendelkezésére. Másrészről fontos említenünk, hogy a korábbi, meglehetősen kisszámú mérések jórészt inhomogén eloszlásban álltak rendelkezésre, így a Föld nehézségi erőterének globális modellezése nem volt megoldható feltevésmentesen. Összességében mind az óriási adathalmaz, mind a korábbi gyakorlat számára ismeretlen kinematikus pálya új kihívásnak számított, számos alapkutatási feladatot generálva.

A jelölt doktori tanulmányai során (1998-2001) a később megvalósult GRACE műholdak pályájának optimális kialakításával, várható mérési eredményeinek feldolgozásával foglalkozott szimulált adatok alapján ([Földváry és Fukuda, 2001a; Földváry és Fukuda, 2001b; Fukuda és Földváry, 2001; Földváry és Fukuda, 2002a; Földváry és Fukuda, 2002b]). A PhD fokozat megszerzése óta a kapcsolódó témakörökben a jelölt foglalkozott a nehézségi erőter modell meghatározásával CHAMP mérési eredmények (Gerlach et al, 2003; Földváry et al, 2004; Wermuth et al, 2004a; Sneeuw et al., 2005; Földváry és Bokor, 2010; Wermuth et al, 2004b; Wermuth et al, 2004c]), GRACE mérési eredmények ([Földváry és Wermuth, 2003; Paizs és Földváry, 2006; Paizs és Földváry, 2007; Földváry, 2007c], valamint GOCE szimulált mérések (Wermuth és Földváry, 2003; Tóth et al, 2004; Tóth et al, 2005; Tóth és Földváry, 2005; Földváry és Wermuth, 2005; Wermuth et al, 2006; Tóth et al, 2006; Tóth et al, 2007]), később valódi GOCE mérések ([Polgár et al, 2013; Földváry et al, 2014b; Földváry et al, 2014a]) alapján. A témához közvetlenül kapcsolódó alapkutatásai során foglalkozott a műholdpálya és a pályamenti sebesség és gyorsulás meghatározásának pontossági kérdéseivel ([Svehla és Földváry, 2006; Földváry, 2007a; Földváry, 2007b; Földváry, 2008b; Somodi és Földváry, 2011; Somodi és Földváry, 2012]), a mintavételezés következményei időbeli- és térbeli torzításainak kérdéskörével ([Földváry, 2015a; Földváry, 2015b; Földváry és Kiss, 2015; Földváry, 2018; Földváry, 2021]), továbbá a levezetett nehézségi erőter modellek geofizikai és geodéziai célú hasznosításával ([Földváry és Mészáros, 2009; Földváry, 2012; Tóth és Földváry, 2015a; Földváry et al, 2015a; Kemény és Földváry, 2015; Tóth és Földváry, 2015b; Kiss és Földváry, 2017a; Kiss és Földváry, 2017b; Kiss és Földváry, 2018; Földváry, 2019; Földváry és Nyilas, 2020; Földváry et al, 2020]).

II. Gravimetriai műholdak méréseinek feldolgozása

Mint azt már említettük, a gravimetriai műholdak 2000-es évektől tapasztalt felfutásának háttérében (szakmai és szakmapolitikai szempontok mellett) a műholdas gravimetriát lehetővé tévő technika megjelenése áll [Csapó és Földváry, 2006]: egyrészt a nem gravitációs eredetű gyorsulások detektálásához szükséges nagy pontosságú gyorsulásmérők kifejlesztése, másrészt a pálya folyamatos meghatározását lehetővé tévő GNSS műholdrendszer létrejötte.

A CHAMP műhold méréseinek feldolgozása szempontjából kulcsfontosságúak a folyamatos, 30 másodpercenként rögzített pályaadatok. A (gyorsulásmérővel mért) nem gravitációs eredetű gyorsulásokra, továbbá egyéb tömegek tömegvonzására korrigálva a pályát, eredményül egy olyan fiktív pálya vezethető le, amely csak a földi tömegvonzás hatását tükrözi. A pálya ismeretében következtetni lehet az azt kialakító erőterre, tehát a földi tömegvonzásra. Ez utóbbi feladat nem egyértelmű, egyrészt a mérések elhelyezkedése miatt (hiszen pusztán pályamenti mérésekből szeretnénk következtetni az egész erőterre), másrészt az időbeli egyenetlensége miatt (a mérések időtartama alatt az erőter is változik).

II.1. Mérések feldolgozása a newtoni mozgásegyenletek alkalmazásával

A műholdpályából a nehézségi erőterre következtetni olyan fizikai összefüggések alapján lehet, amelyek tartalmazzák mind a helyet (pálya), mind a nehézségi gyorsulást [Földváry és Wermuth, 2005]. Ilyen a Newtoni mozgásegyenlet. A műhold mozgásegyenlete Newton II. törvénye alapján:

$$\underline{\ddot{X}} = \underline{f_{össz}} \quad (1),$$

ahol $\underline{\ddot{X}}$ a műhold gyorsulása inerciális, geocentrikus koordináta-rendszerben, $\underline{f_{össz}}$ pedig a műholdra ható valamennyi térerősség eredője. (Megjegyezzük, hogy a tanulmányban „Földhöz-kötött” koordináta-rendszerként a geocentrikus elhelyezésű, a Földdel együtt forgó koordináta-rendszert értjük, z tengelye a Föld forgástengelyére esik, előjele az északi pólus irányában pozitív, x tengelye az Egyenlítő síkjában a Greenwichi kezdőmeridián irányába mutat, y tengelye pedig jobb-sodrású rendszerré egészíti ki e két tengelyt. Az „inerciális” koordináta-rendszer kifejezés pedig a geocentrikus elhelyezésű, ám az inerciális térben mozdulatlan rendszerre utal; ennek x tengelye az ekliptika síkjába esik és a Tavasz-pont irányába mutat, z tengelye a közepes északi pólus felé mutat, az y tengely pedig az x és a z tengelyre merőlegesen jobb-sodrású rendszert képez. A tanulmányban a „Földhöz-kötött” koordinátákat kis x , y és z , míg az „inerciális” koordinátákat X , Y és Z változókkal jelöljük.)

A (1) összefüggés alapján a CHAMP mérési mennyiségeire összefüggést vezetünk le. Mivel az (1) egyenlet gyorsulásmentes (inerciális) koordináta-rendszerben érvényes, a földi potenciáltér azonban a Földdel együtt forog, értelemszerűen kényelmesen egy Földdel együtt forgó koordináta-rendszerben kezelhető, a két rendszer közötti átjárást matematikailag biztosítanunk kell. Jelölje \underline{R} a Földhöz-kötött és az inerciális geocentrikus koordináta-rendszerek közötti transzformáció forgatási mátrixát; ekkor:

$$\underline{e}_x = \underline{R} \underline{e}_X \quad (2),$$

tehát valamely egységvektort inerciális rendszerből (\underline{e}_x) Földhöz-kötött rendszerbe (\underline{e}_x) ezen forgatással tudjuk transzformálni. A forgatás egy időtől függő transzformáció, mely t eltelt idő alatt a Föld forgásának megfelelő ω szögsebességgel történő α szögelfordulás értékétől függ, azaz

$$\alpha = \omega t \quad (3).$$

A (2) szerinti transzformációt egy $\underline{x} = x\underline{e}_x$ vektorra alkalmazva:

$$\underline{x} = r\underline{\underline{R}}\underline{X} \quad (4),$$

amiből következik, hogy

$$\underline{X} = \underline{\underline{R}}^T \underline{x} \quad (5),$$

figyelembe véve, hogy a forgatási mátrix ortogonális, tehát $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$. Az (1) bal oldalán a helyvektor idő szerinti második deriváltja szerepel, ennek Földhöz-kötött koordináta-rendszerbeli megfelelőjének származtatása végett a (5) egyenletet két lépésben idő szerint deriváljuk. Az első idő szerinti derivált:

$$\underline{\dot{X}} = \underline{\underline{R}}^T \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{\dot{R}}}^T \underline{x} \quad (6).$$

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $\underline{\underline{R}}$ -rel kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{R}}\underline{\dot{X}} = \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{R}}\underline{\dot{R}}^T \underline{x} = \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{\Omega}} \underline{x} \quad (7),$$

ahol $\underline{\underline{\Omega}}$ az ún. Cartan mátrix. A Cartan mátrix bemutatása végett a Földdel együtt forgó koordináta-rendszer z-koordinátatengelye körüli, (3) egyenlet szerinti szög adott irányú komponensével (ω_z) történő elforgatásról belátható, hogy

$$\underline{\underline{R}}\underline{\dot{R}}^T = \begin{bmatrix} \cos\omega_z t & \sin\omega_z t & 0 \\ -\sin\omega_z t & \cos\omega_z t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_z \sin\omega_z t & -\omega_z \cos\omega_z t & 0 \\ \omega_z \cos\omega_z t & -\omega_z \sin\omega_z t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8).$$

A térbeli transzformációt három egymást követő elforgatás összegeként megadva a Cartan mátrix

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

alakúra adódik, ahol a ω_i mennyiségek a szögsebesség vektor egy-egy koordinátatengely irányú összetevőit jelölik.

A második idő szerinti derivált képzése előtt szorozzuk meg a (7) egyenlet mindkét oldalát $\underline{\underline{R}}^T$ -tal.

$$\underline{\dot{X}} = \underline{R}^T \underline{\dot{x}} + \underline{R}^T \underline{\Omega} \underline{x} \quad (10),$$

A (10) egyenlet idő szerinti deriváltja:

$$\underline{\ddot{X}} = \underline{\dot{R}}^T \underline{\dot{x}} + \underline{R}^T \underline{\ddot{x}} + \underline{\dot{R}}^T \underline{\Omega} \underline{x} + \underline{R}^T \underline{\dot{\Omega}} \underline{x} + \underline{R}^T \underline{\Omega} \underline{\dot{x}} \quad (11).$$

Az egyenlet mindkét oldalát \underline{R} -rel szorozva, illetve a Cartan mátrix definícióját felhasználva az egyenlet az alábbi formát veszi fel:

$$\underline{R} \underline{\ddot{X}} = \underline{\ddot{x}} + 2\underline{\Omega} \underline{\dot{x}} + \underline{\Omega} \underline{\Omega} \underline{x} + \underline{\dot{\Omega}} \underline{x} \quad (12).$$

A Cartan mátrix (9) szerinti alakja alapján belátható, hogy tetszőleges \underline{r} helyvektorra igaz, hogy

$$\underline{\Omega} \underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (13),$$

ezt felhasználva a Földhöz-kötött rendszerbeli gyorsulás végleges formája

$$\underline{R} \underline{\ddot{X}} = \underline{\ddot{x}} + 2\underline{\omega} \times \underline{\dot{x}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}) + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{x} \quad (14).$$

A (14) egyenlet alapján elmondható, hogy az $\underline{\ddot{X}}$ inerciális rendszerbeli gyorsulást Földhöz-kötött rendszerbe transzformálva a forgatás három további taggal egészül ki, amelyek (az egyenlet szerinti sorrendben) a Coriolis-gyorsulás, a centrifugális gyorsulás, valamint az Euler gyorsulás. A műholdas mérések feldolgozásának alapjául szolgáló (1) mozgásegyenletbe behelyettesítve (14) egyenletet, Földhöz-kötött koordináta-rendszerben:

$$\underline{\ddot{x}} + 2\underline{\omega} \times \underline{\dot{x}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}) + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{x} = \underline{f}_{össz} \quad (15).$$

Ennek jelentősége, hogy a földi nehézségi erőteret a gyakorlatban Földhöz-kötött koordináta-rendszerben írjuk le. Az egyenlet jobb oldalán szereplő eredő térerősség az alábbi összetevőkből áll:

$$\underline{f}_{össz} = \nabla V + \underline{a}_e + \underline{a}_{ng} \quad (16),$$

Tekintettel arra, hogy a nehézségi erőteret konzervatív (tehát potenciális), a Föld külső terében a nehézségi gyorsulás a potenciáltér (V) gradiensével egyenlő, ahol a ∇ operátor a tér független irányai mentén képzett gradienseket foglalja vektorba: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right)$. Az \underline{a}_e vektor az egyéb égitestek (elsősorban a Nap és a Hold, de esetenként a Jupitert is figyelembe vettük) műholdra gyakorolt tömegvonzásának közvetlen és közvetett hatásait összegzi, míg \underline{a}_{ng} a műhold felszínét érő nem gravitációs eredetű térerősségek eredője.

A nehézségi erőter meghatározása szempontjából a (16) egyenletben a V földi potenciál tekinthető ismeretlennek. A földi potenciáltér leírására számos matematikai eszköz rendelkezésre áll, hagyományosan a legelterjedtebb a földi potenciál gömbfüggvény-soros alakú megadása.

$$V = \frac{kM}{R} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (17),$$

ahol a jelölések az alábbiak: V potenciál, k a Newtoni tömegvonzási állandó, M a Föld össztömege, R a közepes sugara, L a maximális fokszám, r , φ és λ a földrajzi koordinátahármas, \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} a gömbfüggvény együtthatók, \bar{P}_{nm} pedig a Legendre-függvény.

A (16) egyenletben szereplő \underline{a}_e vektort leginkább modellezéssel tudjuk figyelembe venni. Egyéb égitestek közvetlen tömegvonzása okozta gravitációs térerősséget a newtoni gravitációs törvény alapján tudjuk meghatározni,

$$\underline{a}_e = k \frac{M_e}{r^2} \frac{r}{|r|} \quad (18),$$

amely felhasználásával az \underline{a}_e térerősség nagysága az égitest tömege (M_e) és Földtől vett pillanatnyi távolsága (r), míg iránya az égitest látszó éggömbi koordinátái (φ , λ) segítségével határozható meg. Az egyes égitestek látszó éggömbi koordinátái és távolsága csillagászati ismeretek, csillagászati adatbázisok alapján vehetők figyelembe.

Az egyes égitestek tömegvonzása egyrészt közvetlenül hat a műholdakra, másrészt a Földön is okoz olyan mértékű tömegátrendeződéseket, amelyek hatása a műhold pályájában, méréseiben is tükröződik, ezek az árapályhatások. Mivel a földi nehézségi erőter meghatározásakor az időben (hosszabb vagy rövidebb távon) változatlanak tekinthető nehézségi formák modellezése a cél, ezen időben gyorsan, dinamikusán fellépő hatásokra korrigálnunk kell a műhold pályákat, méréseket. Az árapályhatások összetevői a (1) merev Föld árapálya, az (2) óceáni árapály, és a (3) pólus árapály (Petit és Luzum [2010] 6. fejezete). Az első két összetevő (a merev Föld és az óceáni árapály) a tömegek átrendeződésén keresztül hat a nehézségi erőter megváltozására. A pólus árapály a pólusmozgás centrifugális hatásának a merev Föld és az óceáni árapályokra gyakorolt hatása. Valamennyi árapályhatás esetén a modellezés elterjedt és elfogadott módszere az árapály geopotenciálra gyakorolt hatásának meghatározása [Petit és Luzum, 2010], mely a potenciál (17) egyenlet szerinti gömbfüggvény-soros alakjának megfelelő együtthatóinak meghatározását jelenti, így értelemszerűen a (16) egyenletben is ennek gradienseként adható meg:

$$\underline{a}_{\dot{a}a} = \nabla V_{\dot{a}a} \quad (19),$$

ahol az $\dot{a}a$ alsó index az említett „egyéb” hatások közül kizárólagosan az „árapály” hatásaira utal. A $V_{\dot{a}a}$ árapályjelenségeknek a potenciálra gyakorolt hatása számításának formalizmusát Petit és Luzum [2010] (6.6), (6.7), (6.15), (6.16) és (6.22) egyenletei adják meg, a változók ismertetésével és részletes magyarázattal ellátva.

A (16) egyenletben szereplő \underline{a}_{ng} változó a műhold felszínét érő nem gravitációs eredetű térerősségek eredőjét jelenti. Ezen erőhatások egyrészt felületi erők (tehát nem a műhold tömegére, hanem a felületére hatnak), másrészt disszipatívak (azaz a műhold energiaszintjét csökkentik). Ilyen például a légköri fékezőhatás vagy a Nap sugárnyomása. Ezen erőhatások nem, vagy csak erős közelítésekkel modellezhetők, ezért ezek kiküszöbölésére a nehézségi erőter meghatározása céljából felbocsátott műholdak fedélzetén kapacitív gyorsulásmérő(ke)t használnak, amelyek felhasználásával a mérési idősor közvetlenül korrigálható.

A módszer összegzéseként a (15) és (16) egyenletek alapján a nehézségi potenciál meghatározásának a közvetítő egyenlete:

$$\nabla V = \ddot{\underline{x}} + 2\underline{\omega} \times \dot{\underline{x}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}) + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{x} - \underline{a}_e + \underline{a}_{ng} \quad (20).$$

Mivel a (20) egyenlet baloldalán a potenciál gradiense szerepel, ezeket képezve az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dx} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dy} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dy} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dz} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dz} \end{bmatrix} \quad (21),$$

ahol

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{kM}{R^2} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (22),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{kM}{R} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)}{\partial \varphi} \quad (23),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{kM}{R} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (-m\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + m\bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (24),$$

és

$$\begin{bmatrix} \frac{dr}{dx} & \frac{dr}{dy} & \frac{dr}{dz} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi \cos\lambda}{r} & -\frac{\sin\varphi \sin\lambda}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ -\frac{\sin\lambda}{r \cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{r \cos\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (25).$$

Ezek levezetését lásd Földváry és Bokor [2010]. A (21)-(25) összefüggések már lineáris függvénykapcsolatot teremtenek az ismeretlen \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} gömbfüggvényegyütthatókra, megoldásuk a Legkisebb Négyzetek Módszerével már közvetlenül elvégezhető.

1. táblázat. Néhány CHAMP modell összehasonlítása az EIGEN-GRACE01S modellel. A táblázatban átlagos geoid unduláció középhiba értékek szerepelnek cm mértékegységben. [Földváry és Bokor, 2010]

modell	EGM96	EIGEN-1S	EIGEN-2	saját modell
középhiba [cm]	±38,2	±61,9	±41,1	±52,9

A levezetett összefüggés gyakorlati alkalmazhatóságának validációja megtörtént [Földváry és Bokor, 2010], azonban az eredmények azt mutatják, hogy CHAMP műhold esetén nem éri el az energia integrállal elérhető pontosságot. Az 1. táblázatban az így számolt és egyéb CHAMP mérések alapján levezetett modellek pontossági összehasonlítása látható a CHAMP

modelleknél jobbnak tekinthető EIGEN-GRACE01S, csak GRACE méréseken alapuló modellel. Az értékek azt mutatják, hogy a megoldás elfogadható, de nem kiemelkedő. Látható továbbá az is, hogy a CHAMP modellek eltérése a GRACE modelleltől nagyobb, mint a GRACE modellek eltérése egymástól, lásd fentebb a saját GRACE modellel végzett összehasonlítás $\pm 4,4$ cm-es átlagos geoid unduláció középhiba értékét. (A Newtoni mozgásegyenlet alkalmazását foglalja össze a **2. tézis**).

II.2. Mérések feldolgozása az energia integrál alkalmazásával

II.2.1. CHAMP-mérések feldolgozása

A Newtoni mozgásegyenlet mellett egyéb elvek alapján is történhet a feldolgozás, így például a műholdra felírt energia integrál is hasznosítható. Az energiamegmaradás törvénye alapján

$$K + V = H \quad (26),$$

amely szerint egy zárt rendszerben a K kinetikus (mozgási) energia és a V potenciális (helyzeti) energia összege állandó, ennek értékét a H Hamilton-függvény adja meg. Egy műhold nem egy zárt rendszerben kering, változik tehát a teljes energiája, így egy műholdra felírható az energia integrál, amelynek értelmében a műhold testére ható erők által végzett munka megváltoztatja a műhold teljes energiáját, tehát a potenciális (helyzeti) és a kinetikus (mozgási) energiájának összegét:

$$K + V - H = \int \underline{F} dx \quad (27).$$

A (27) egyenletben \underline{F} a műholdat érő erőket, x pedig azt az utat jelenti, amelyen az erő munkát végez. Az energia integrált Földhöz kötött koordináta-rendszerben egy műholdra felírva az alábbi alakot ölti [Földváry et al, 2004]:

$$V = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2 - H - \frac{1}{2} (\underline{\omega} \times \underline{x})^2 - \int \underline{a}_e dx - \int \underline{a}_{ng} dx \quad (28),$$

ahol (csak az új jelölésekre kitérve) \underline{x} és $\dot{\underline{x}}$ a műhold pályája és sebessége Földhöz-kötött, Földdel együtt forgó koordináta-rendszerben, $\underline{\omega}$ a Föld forgási szögsebessége, \underline{a}_e a külső (pl. Nap vagy Hold tömege okozta) gravitációs gyorsulásokat, \underline{a}_{ng} pedig a nem gravitációs eredetű gyorsulásokat jelöli (ez utóbbi két mennyiség értelmezését részletesebben lásd a (16)-(20) egyenletek közötti részen). A (28) egyenlet jobb oldalán a mennyiségek fizikai tartalma az alábbi: az $\frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2$ tag a kinetikus energia, H a Hamilton-függvény, az $\frac{1}{2} (\underline{\omega} \times \underline{x})^2$ tag a centrifugális energia, az utolsó két tag pedig az \underline{a}_e és \underline{a}_{ng} térerősségek által végzett munka.

A (28) egyenlet alkalmas arra, hogy egy folyamatosan ismert pályájú LEO műhold (így a CHAMP műhold) mérései (\underline{x} pálya, \underline{a}_{ng} nem gravitációs eredetű gyorsulások) és a V nehézségi erőter potenciálja között megteremtse a matematikai kapcsolatot. A (28) egyenlet baloldalán szereplő V potenciál lineáris kapcsolatát az ismeretlen \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} gömbfüggvényegyütthatókkal a (17) egyenlet adja meg, amely behelyettesítésével az energia integrál szerinti megoldás közvetítő egyenletét nyerjük.

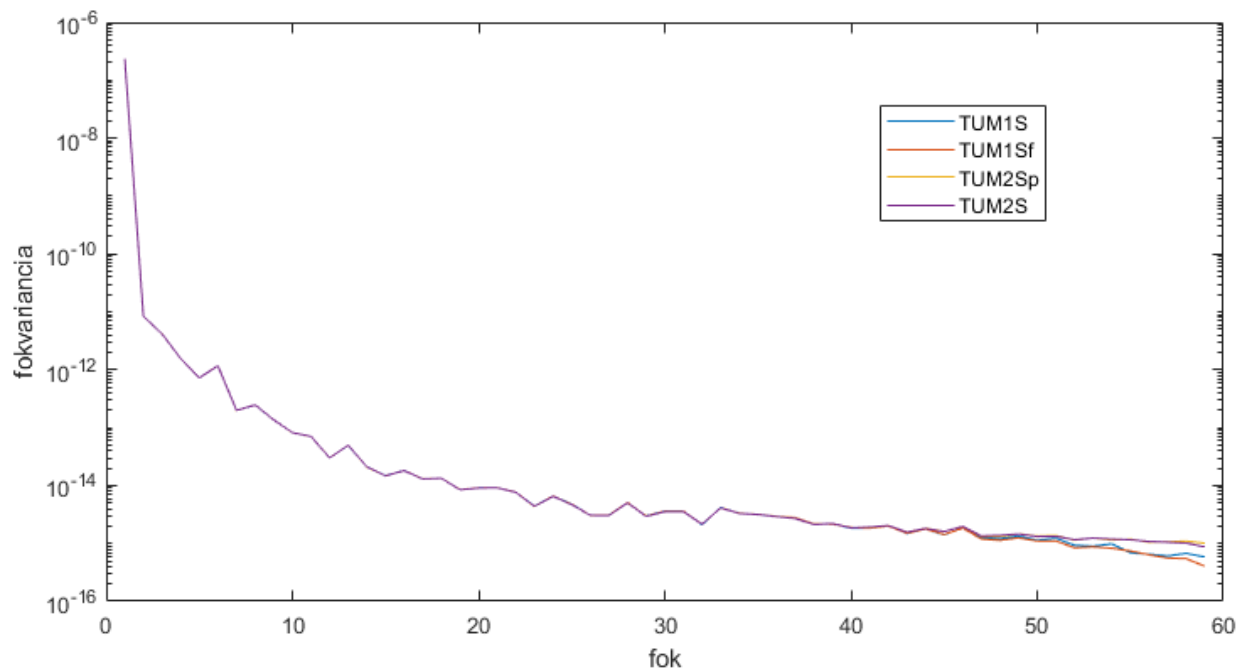
A levezetett (28) összefüggés gyakorlati alkalmazhatóságát a felhasználásával meghatározott TUM-1S [Gerlach et al, 2003], TUM-2Sp [Földváry et al, 2004] és TUM-2S [Wermuth et al, 2004b; Wermuth et al, 2004c] nehézségi erőter modellek mutatják. Az egyes nehézségi erőter modellek módszertanilag egymástól kissé eltérő módszerrel, eltérő kiegyenlítéssel készültek, ezen módszertani eltéréseket összegyez az 2. táblázat.

Alapvető eltérést az egyes modellek feldolgozása során a kinematikus pályából származtatott sebesség, \dot{x} meghatározásának a módja eredményez. Mivel a (28) egyenlet szerint ez négyzetesen szerepel a mérésekből levezetett potenciál idősorában, ennek meghatározására érzékeny a végeredmény is. A TUM-1S esetében a sebességek meghatározását az ún. „remove-restore” módszerrel végeztük. Ekkor a kinematikus pályából egy (valamely korábban meghatározott nehézségi erőter modellből számított) dinamikus pálya levonva a kinematikus pálya egyenetlenségeit, a mérési hibák okozta szabálytalanságait látjuk a reziduálok idősorában („remove” lépés). Mivel a sebesség meghatározás során cél, hogy a pozíció mérési hibái az eredményt minél kevésbé befolyásolják, a pálya-reziduálokat egy simító spline függvény illesztésével szabályosabbá tettük. A simító spline-nal közelített pálya-reziduálokat analitikusan differenciáltuk, azaz a harmadfokú függvények megfelelő együtthatóinak felhasználásával másodfokú függvénnyel állítottunk elő sebesség-reziduálokat. A kinematikus sebességeket a sebesség-reziduáloknak a dinamikus pálya sebességekhez adásával kapjuk („restore” lépés). A TUM-2Sp és TUM-2S modellek esetén a sebesség meghatározást közvetlenül a pozíció adatokon végeztük analitikusan; a legalkalmasabbnak a célra a Newton-Gregory interpolációt találtuk (részletesen a kapcsolódó vizsgálatokat lásd a II.3 fejezetben).

2. táblázat. A CHAMP műhold pályájából meghatározott nehézségi erőter modellek módszertani jellemzői. [Földváry et al, 2004]

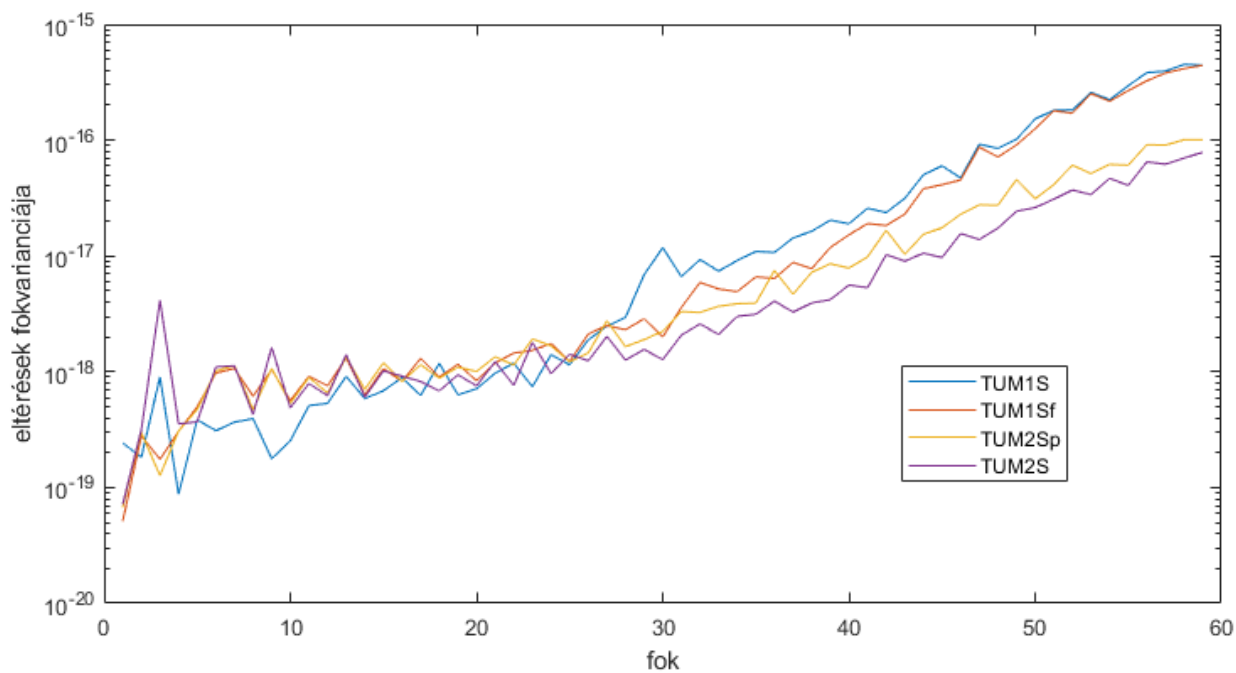
modell	időtartam	sebesség meghatározás módja	referencia pálya	kiegyenlítés	megjelenés éve, helye
TUM-1S	1/2 év	simító spline	dinamikus	szemi-analitikus	2003 [Gerlach et al, 2003]
TUM-1Sf	1 év	simító spline	dinamikus	szemi-analitikus	2004 [-]
TUM-2Sp	1 év	Newton-Gregory interpoláció	nincs	szemi-analitikus	2004 [Földváry et al, 2004]
TUM-2S	1 év	Newton-Gregory interpoláció	nincs	PCGMA	2004 [Wermuth et al, 2004c]

Az eredményül kapott modellek fokvarianciáját mutatja az 1. ábra. Ez alapján elmondható, hogy a sebességmeghatározásra simító spline függvényt alkalmazó modellek (TUM-1S, TUM-1Sf) magasabb fokú és rendű hullámhosszakon kevesebb energiával rendelkeznek, mint a Newton-Gregory interpolációt alkalmazó modellek (TUM-2Sp, TUM-2S), ami annak a jele, hogy a simító spline alkalmazása rövid hullámhosszakon információ veszteséget eredményez.



1. ábra. A TUM-1S, TUM-1Sf, TUM-2Sp és TUM-2S modellek fokvarianciája

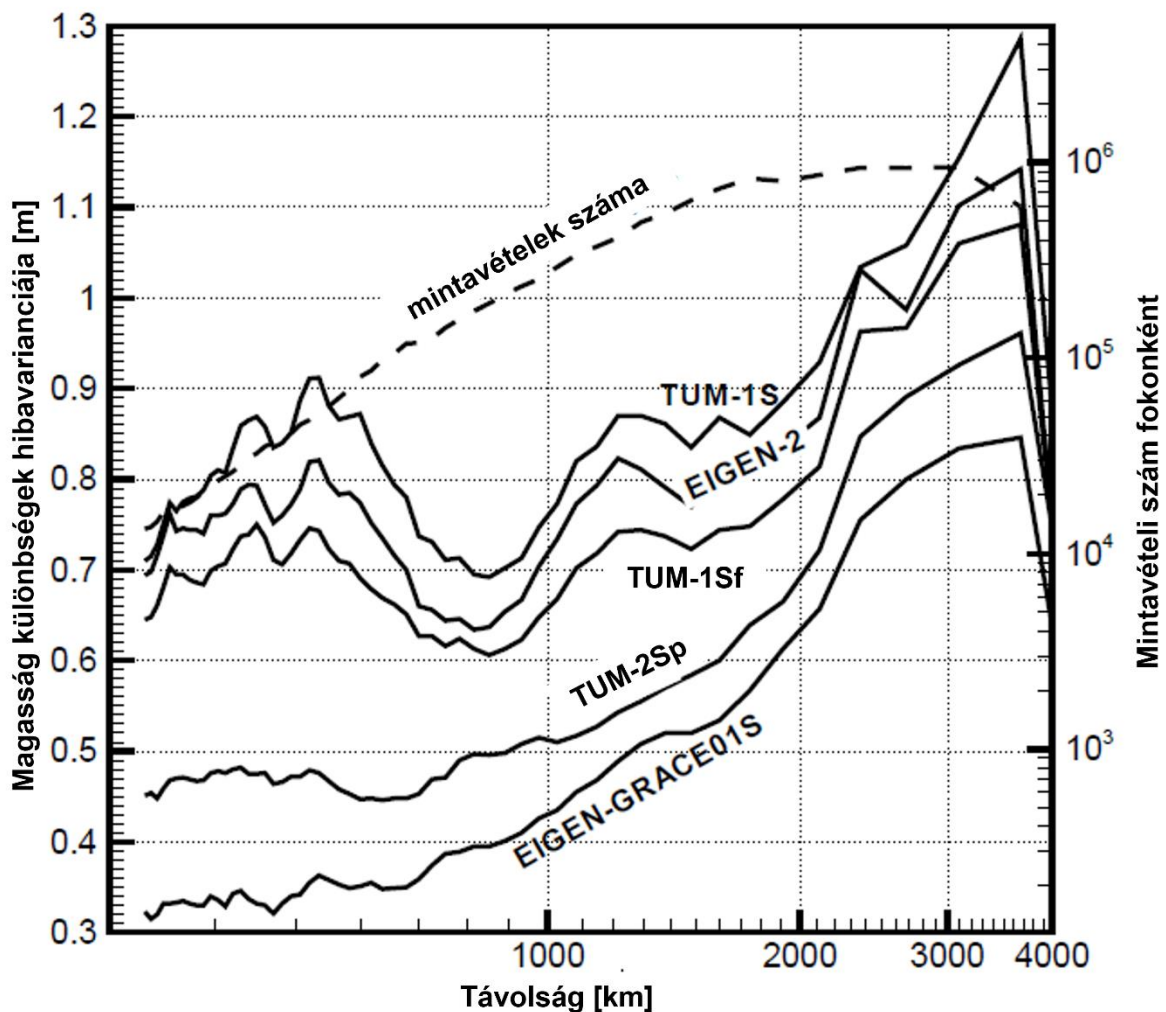
A 2. ábrán napjaink egyik legkorszerűbb modellje, az EGM2008-hoz [Pavlis et al, 2012] viszonyított eltérések fokvarianciáit jelenítjük meg. Tekinthejtük ezeket a TUM modellek hibájának is.



2. ábra. A TUM-1S, TUM-1Sf, TUM-2Sp és TUM-2S modellek EGM2008 modellhez viszonyított eltéréseinek fokvarianciája

A 2. ábra alapján látszik, hogy a rövid hullámhosszakon az információtartalma a TUM-2Sp és TUM-2S modelleknek valós, 30 fok és rend felett láthatóan jobban produkálnak, mint a TUM-1S és TUM-1Sf.

Ezen modellek különböző kiterjedésű mintavételezéshez (távolságokhoz) rendelhető magassági hibavariáciáit mutatja a 3. ábra. Az ábrán látható, hogy a TUM-1S modellhez képest az 1 évvel későbbi, jóval több mérési adaton alapuló TUM-1Sf jellegében nem, csak pontosságában tér el (kis mértékben), és hogy mindkét modell a referencia modellként használt EIGEN-2 lefutását követi. Ezzel szemben a szintén 1 éves adatot felhasználó TUM-2Sp számottevő pontossági javulást mutat, amely jellegét tekintve egy CHAMP modellektől teljesen független forrás, egy korai GRACE modellel, az EIGEN-GRACE01S [Reigber et al, 2003] modellel mutat hasonlóságot.



3. ábra. A TUM nehézségi erőter modelleknek különböző sűrűséggel vett mintavételezésű geoid unduláció hibaábrája. [Földváry et al, 2004]

A nehézségi erőter modellek minősítésére független lehetőséget jelent a GPS/szintezési hálózati pontokban ismert geoid unduláció értékekkel történő összehasonlítás. Egy-egy ilyen összehasonlításba regionális, több területre vonatkozó adatokat érdemes bevonni – jelen esetben az Amerikai Egyesült Államok, az EU, Ausztrália és Japán GPS-szel és szintezéssel

egyaránt meghatározott pontjait használtuk fel. Az eredményeket a 3. táblázat összesíti; az egyes szórások cm mértékegységben értendők. Láthatóan több dm-es eltérésekről van szó, azonban az nem meglepő: a műholdas módszerekkel meghatározott nehézségi erőtér modellek durva, pár 100 km-es felbontásúak, amelyek így nem tükrözik a nehézségi erőtér helyi változatosságát, finomszerkezetének formáit. A táblázatban szerepel a szintén CHAMP mérések feldolgozásán alapuló EIGEN-2 modell, illetve független összehasonlítás céljából szerepel a GRACE-mérésekből meghatározott EIGEN-GRACE01S modell is. Láthatóan a TUM-2Sp jelentős pontossági fejlődést jelentett, mely az akkori CHAMP modellek közül a legjobban teljesített, csak a jóval kifinomultabb méréseket szolgáltató GRACE modellek tudták felülmúlni.

3. táblázat. A TUM modellek és egyes GPS/szintezési pontokban a geoid unduláció eltérések szórása. Mértékegység: cm [Földváry et al, 2004]

	pontok száma	TUM-1S	TUM-1Sf	TUM-2Sp	EIGEN-2	EIGEN-GRACE01S
USA	5168	±64,1	±56,4	±47,1	±60,2	±41,5
Európa	180	±56,4	±55,7	±33,1	±59,3	±19,4
Ausztrália	197	±63,3	±63,8	±52,7	±67,4	±50,3
Japán	837	±65,5	±66,7	±54,8	±69,5	±51,5

Összességében az eredmények azt mutatják, hogy a TUM-1S modell esetén a simító spline függvény túlságosan hozzásimította a méréseket a „remove-restore” módszer alkalmazása során referencia modellként felhasznált EIGEN-2 nehézségi erőtér modellhez [Reigber et al, 2003], emiatt a végeredményül kapott modellben közvetve megjelenik a referencia modell is. Ugyanezt a sebesség meghatározási módszert használtuk 1 évnyi adatsor rendelkezésre állásakor is, azonban mivel az eredmények csak kis mértékben javultak, az ebből levezetett TUM-1Sf modellt nem publikáltuk, ehelyett a sebesség meghatározás módját a fent ismertetett módszerrel megváltoztattuk. A Newton-Gregory interpoláció felhasználásával levezetett TUM-2Sp modell a közép- és rövid hullámhosszakon jobban teljesít, de további előrelépést a kiegyenlítés módszerének megváltoztatása eredményezett: a nagy adatmennyiség mellett is PC-ken kényelmesen és gyorsan futtatható szemi-analitikus eljárást [Sneeuw, 2000] a (PC-ken szintén kényelmesen és gyorsan futtatható) a Preconditioned Conjugate Gradients Method for Adjustment (PCGMA) módszere [Han, 2003] váltotta fel (részletesebben ezekről a módszerekről a III. fejezetben). A PCGMA-ról vizsgálatainkkal kimutattuk, hogy a teljes alakmátrix felhasználásával végzett idő- és memóriaigényes, ellenben közelítésmentes kiegyenlítéshez képest nagyon kis eltéréseket szolgáltat [Wermuth et al, 2004c], ami az eredményekben is megjelent, és a TUM-2S a TUM-2Sp-nél valamelyest pontosabb nehézségi erőtér modell lett.

II.2.2. GRACE-mérések feldolgozása

A GRACE kísérletben két teljesen megegyező kialakítású, azonos pályájú műhold követi egymást mintegy 220 km-es eltéréssel. A pálya-meghatározás mindkét műhold esetében (a CHAMP-pel megegyező módon) GPS-műholdak alapján történik. A GRACE műholdak különlegessége, hogy a két műhold között a K-Band Ranging System (KBR) elnevezésű műszerrel folyamatosan nagy pontosságú távolságváltozás-mérés zajlik (jelölése a

továbbiakban $\dot{\rho}$), ennek megbízhatósága $1 \mu\text{m/s}$ alatti érték. A nagypontossággal végzett távolságváltozás-mérés (KBR-mérés) nélkül két CHAMP-műhold jellegű megoldással rendelkezünk, ez a mérés azonban lehetővé teszi, hogy a nehézségi erőteret jóval finomabb felbontásban érzékeljük. Az ilyen műhold-elrendezést alacsony-alacsony műhold-műhold követésnek (Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking, Low-Low SST) nevezik, utalva arra, hogy két LEO műhold között követés, folyamatos távolságváltozás-mérés történik.

A GRACE műholdakra minden további nélkül felírható az energia integrál, a két műholdra felírt (28) egyenlet különbségét képezve,

$$V_{AB} = V_B - V_A = \frac{1}{2}(\dot{\underline{x}}_B^2 - \dot{\underline{x}}_A^2) - H_{AB} - \left[\frac{1}{2}(\underline{\omega} \times \underline{x}_B)^2 - \frac{1}{2}(\underline{\omega} \times \underline{x}_A)^2 \right] - \int (\underline{a}_B \dot{\underline{x}}_B - \underline{a}_A \dot{\underline{x}}_A) dt \quad (29),$$

ahol az A és B index az első, illetve a hátsó műholdra vonatkozik, a BA alsóindex pedig valamely mennyiség két műholdra vonatkozó értékének a különbségét jelenti, $B-A$ előjellel. Az \underline{a} jelölés (az eddig \underline{a}_e -t és \underline{a}_{ng} -t egyaránt magába foglalóan) a külső erőhatásokra okozta gyorsulásokra utal, magába foglalva az egyéb égitestek tömegvonzását és a nem gravitációs eredetű gyorsulásokat is.

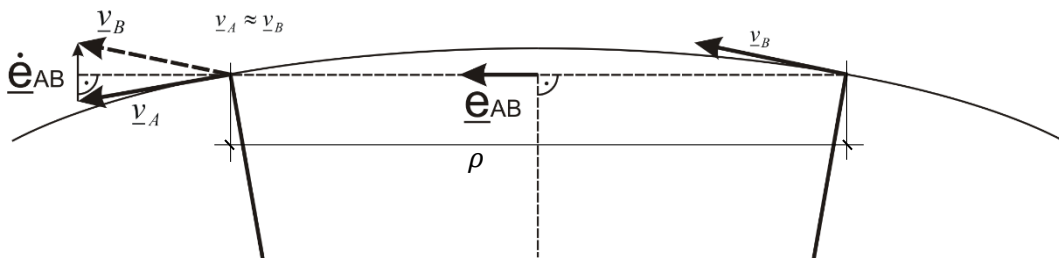
A GRACE-mérések lényege azonban a két műhold között folyamatosan végzett nagypontosságú $\dot{\rho}$ távolságváltozás-mérés. Ahhoz, hogy ezt a nagypontosságú mérést hasznosítani tudjuk, az alábbi egyszerű levezetésre van szükség. A műholdak közötti ρ távolság az egyik műholdról a másikra mutató vektor hossza,

$$\underline{x}_{AB} = \rho \underline{e}_{AB} \quad (30)$$

Az (30) egyenletben $\underline{x}_{AB} = \underline{x}_B - \underline{x}_A$, míg \underline{e}_{AB} az A műholdról a B -re mutató egységvektor. Ennek időszerinti deriváltja már tartalmazza a $\dot{\rho}$ távolságváltozást:

$$\dot{\underline{x}}_{AB} = \dot{\rho} \underline{e}_{AB} + \rho \dot{\underline{e}}_{AB} \quad (31),$$

ahol az egyes változók geometriai jelentését a 4. ábra mutatja be.



4. ábra. A GRACE műholdak közötti ρ távolság, \underline{e}_{AB} egységvektor és annak időszerinti deriváltja, $\dot{\underline{e}}_{AB}$ geometriai értelmezése.

Képezzük (31) négyzetét:

$$\dot{\underline{x}}_{AB}^2 = \rho^2 \underline{e}_{AB}^T \underline{e}_{AB} + 2\rho \dot{\rho} \underline{e}_{AB}^T \dot{\underline{e}}_{AB} + \rho^2 \dot{\underline{e}}_{AB}^T \dot{\underline{e}}_{AB} \quad (32),$$

felismerve továbbá, hogy

$$\rho^{-2} \left((\underline{x}_{AB} \times \dot{\underline{x}}_{AB}) \times \underline{e}_{AB} \right) = \rho^{-2} \left((\rho \underline{e}_{AB} \times \dot{\rho} \underline{e}_{AB} + \rho \underline{e}_{AB} \times \rho \dot{\underline{e}}_{AB}) \times \underline{e}_{AB} \right) == \rho^{-2} (\rho^2 \underline{e}_{ct} \times \underline{e}_{AB}) = \rho^{-2} (\rho^2 \dot{\underline{e}}_{AB}) = \dot{\underline{e}}_{AB} \quad (33),$$

az alábbi egyszerű alakra jutunk:

$$\dot{\underline{x}}_{AB}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^{-2} \left((\underline{x}_{AB} \times \dot{\underline{x}}_{AB}) \times \underline{e}_{AB} \right)^2 \quad (34)$$

Ezen összefüggés nagy előnye, hogy a négyzetesen szereplő kevésbé pontos $\dot{\underline{x}}_{AB}$ változót a jóval pontosabb $\dot{\rho}$ mérésre cseréli, míg a $\dot{\underline{x}}_{AB}$ sebességkülönbség már csak lineárisan jelenik meg. Felhasználva a (34) összefüggést, az energia integrált Low-Low SST elrendezésre az alábbi formában kapjuk [Paizs és Földváry, 2006; Paizs és Földváry, 2007]:

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \rho^{-2} (\underline{x}_{AB} \times \dot{\underline{x}}_{AB})^2 - H_{AB} + \dot{\underline{x}}_A^T \underline{\Delta} \dot{\underline{x}} - \frac{1}{2} \left[(\underline{\omega} \times \underline{x}_B)^2 - (\underline{\omega} \times \underline{x}_A)^2 \right] - \int (\underline{a}_B \dot{\underline{x}}_B - \underline{a}_A \dot{\underline{x}}_A) dt \quad (35).$$

A (29) és (35) egyenletek baloldalán szereplő V_{AB} potenciálkülönbség lineáris kapcsolatát az ismeretlen \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} gömbfüggvényegyütthatókkal az egyes műholdakra felírt (17) egyenletek különbsége adja meg, amely behelyettesítésével a GRACE mérések energia integrál szerinti feldolgozásának közvetítő egyenletét nyerjük.

Mind az \underline{x}_{AB} bázisvonalon alapuló (lásd (29) egyenlet), mind a ρ mikrohullámú KBR-méréseken alapuló (lásd (35) egyenlet) feldolgozást elvégeztük. A kiegyenlítést a PCGMA módszerrel végeztük. Az így számolt nehézségi erőteret modellt [Paizs és Földváry, 2007] a szintén GRACE mérések alapján számolt EIGEN-GRACE01S [Reigber et al, 2005] modellel hasonlítottuk össze 12 fokig és rendig (azért csak ilyen alacsony fokszámig történt az összehasonlítás, mert az akkori számítógépes kapacitás mellett a bázisvonalon alapuló megoldást nem tudtuk magasabb fokszámig elvégezni). A teljes Földre kialakított $1^\circ \times 1^\circ$ -os rácshálóra számolt geoid unduláció értékek eltérése az EIGEN-GRACE01S-ből számolt hasonló értékektől a mikrohullámú KBR-méréseket hasznosító módszer esetén $\pm 4,4$ cm-es középhibát, míg a bázisvonalon alapuló módszer esetén $\pm 7,4$ cm-es középhibát mutat. Az eredmény egyértelműen alátámasztja a kidolgozott módszer elvi helyességét. Azonban a mások által kidolgozott „short arc” módszer [Ilk et al, 2005] annyira meggyőzően teljesített, hogy felhagytunk a gyakorlati feldolgozás lépéseinek finomításával, a módszer tovább fejlesztésével. (Az energia integrál alkalmazására vonatkozó eredményeket összegzi az **1. tézis**).

II.3. Sebességek és gyorsulások származtatása numerikus differenciálással

Az energia integrál használatának egy fontos tényezője, hogy a feldolgozás során a műhold pozíciója mellett annak sebességét, \dot{x} is használja bemeneti adatként, lásd (28) és (35) egyenlet. Hasonlóan, a Newtoni mozgásegyenlet alkalmazása esetén a műhold pályája mellett annak sebességét, \dot{x} , és gyorsulását, \ddot{x} is felhasználjuk, lásd (20) egyenlet.

A műholdpálya ismeretéből a sebesség és a gyorsulás numerikus differenciálással, vagy valamilyen függvényillesztéssel és annak analitikus deriválásával határozható meg. A derivált számításának pontossága döntő szerepű a módszerek pontossága szempontjából. Megjegyezzük továbbá, hogy a CHAMP-re és a GOCE-ra végzett vizsgálatok eredményei valójában az egyszeri alkalmazásoknál sokkal általánosabb eredményeket szolgáltatnak, ugyanis semmi nem mutat arra, hogy ezen műholdak által végzett pályameghatározás alapelve a közeli jövőben megváltozna: LEO-k esetén a pályameghatározást a következő néhány évtizedben pontosan és költséghatékonyan továbbra is GNSS-műholdrendszerekkel lehet végezni. Mivel ezen LEO-k 500 km körüli pályamagasságukkal a troposzféra és a „sűrű” ionoszféra fölött keringenek, a GNSS-műholdakra végzett távolságmérések a földfelszínről végzett méréseknél jóval pontosabbak, a gravimetriai műhold pillanatnyi helyzete néhány másodperces felbontással $\pm 1-2$ cm-es pontossággal határozható meg [Svehla és Földváry, 2006]. Azonban a ciklustöbbségtelműség feloldása során, a vivőhullám egész periódusai meghatározásának ellentmondásai miatt, a mért pályák mégis „szakaszosak” lesznek, szakadásokat mutatnak. Az így előálló szakaszok önmagukban ugyan pontos pályáivéknek tekinthetők, de abszolút értelemben hibával terheltek. Fontos szem előtt tartanunk, hogy a vevők további fejlődésével sem küszöbölhető ki ez a hibaforrás. Egyes esetekben a ciklustöbbségtelműség feloldása során adódó hiba szembeűnő (és az adatsort utólag vizsgálva beazonosítható) akár több méteres ugrásokat eredményez a műholdpályában, más esetekben azonban csak néhány cm-es eltérést okoz, amely hiba így belesimul a pályaképbe, nem azonosítható be. Mindezek fényében a gravimetriai műholdak pályájának numerikus differenciálására kapott eredményeink általános érvényűnek, tetszőleges LEO pályából sebesség- és gyorsulás-meghatározásra vonatkozó eredményeknek tekinthetők.

A sebesség- és gyorsulás-meghatározás céljából empirikusan vizsgáltuk az idő szerinti deriválást, melyet elvégeztünk:

- numerikusan véges differenciahányadossal közelítve,
- a pályáivre egy magas fokszámú polinomot illesztve, majd ennek deriváltját analitikusan képezve,
- a Newton-Gregory interpoláció alapján analitikusan levezetett derivált összefüggéssel,
- a pályáivre köbös spline függvényt illesztve és azt deriválva analitikusan,
- magasabb fokszámú polinomos simítással,
- köbös spline simítással.

A következőekben röviden áttekintjük a vizsgált eljárásokat, ismertetjük és értelmezzük a sebesség és a gyorsulás értékeinek számítása során felhasznált összefüggéseket.

(a) A véges differenciahányados (más néven elsőrendű osztott differencia) képzése során az első deriváltat, \dot{x} , az egymást követő x függvényértékek különbségét a Δt időintervallummal osztva nyerjük:

$$\dot{x}_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (36).$$

Valamely i . időpontban az első deriváltra az $\dot{x}_{i+1/2}$ és $\dot{x}_{i-1/2}$ értékek lineáris interpolációjával (állandó lépésközű mintavételezés esetén a számtani közép képzésével) jutunk. A második deriváltat hasonlóan kapjuk:

$$\ddot{x}_i = \frac{\dot{x}_{i+1/2} - \dot{x}_{i-1/2}}{t_{i+1/2} - t_{i-1/2}} \quad (37).$$

A véges differenciahányados egy durva közelítése a deriválnak, eredménye egyrészt a mintavételezés finomságától, másrészt a véletlen hibák mértékétől is erősen függ.

(b) A függvényértékek lefutását jobban tükröző közelítést kapunk, ha a függvény valahány egymást követő pontjára (n), egy (az adatsor változatosságától függő) valamilyen fokú ($n - 1$) polinomot illesztünk. Az $n - 1$. fokú polinomoknak a monomok $(1, t, t^2, t^3, \dots, t^{n-1})$, ahol t jelölje a független változót) egy lineáris bázisát alkotják; ennek megfelelően a polinom valamely t_i pontban az alábbi alakban megadható:

$$x_i = a_{n-1}t_i^{n-1} + a_{n-2}t_i^{n-2} + \dots + a_2t_i^2 + a_1t_i + a_0 \quad (38),$$

ahol a_j a polinom együtthatói $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ értékekre. Előzetes vizsgálatok alapján 6. fokú polinomillesztést végeztünk, ahol az együtthatók meghatározására 7 pont egymás követő pontot, az $i = j - 3, j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2, j + 3$ indexű pontokat használtuk. A deriváltak képzését már az együtthatók ismeretében analitikusan végeztük, mely szerint

$$\dot{x}_i = (n - 1)a_{n-1}t_i^{n-2} + (n - 2)a_{n-2}t_i^{n-3} + \dots + 2a_2t_i + a_1 \quad (39),$$

$$\ddot{x}_i = (n - 1)(n - 2)a_{n-1}t_i^{n-3} + (n - 2)(n - 3)a_{n-2}t_i^{n-4} + \dots + 2a_2 \quad (40).$$

Ennek a módszernek a hátránya, hogy környező pontok hibái is terhelik a sebesség-, illetve a gyorsulás becslését.

(c) A polinomillesztés monomokra felírt formája a (38) összefüggés. A Newton-Gregory interpoláció során a polinom illesztéséhez Newton-féle bázist, azaz a $1, (t - t_1), (t - t_1)(t - t_2), \dots, \prod_{j=1}^{n-1}(t - t_j)$ bázist használjuk, amely segítségével a polinom valamely t_i független változó helyén a

$$x_i = a_0 + a_1(t_i - t_1) + a_2(t_i - t_1)(t_i - t_2) + \dots + a_{n-1}(t_i - t_1)(t_i - t_2) \dots (t_i - t_{n-1}) \quad (41)$$

alakot ölti. A (41) egyenlet a (38) összefüggéssel ekvivalens: ugyanúgy egy $n - 1$. fokú polinomot ír le, mely ugyanúgy n számú együttható ismeretét igényli. Ezen együtthatók tehát n egymást követő pont függvényértékei alapján meghatározhatók. Az i index megfelelő $i = 1, 2, \dots, n - 1$ behelyettesítéseivel belátható, hogy az együtthatók az

$$a_0 = x_1; a_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; a_2 = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; a_3 = \frac{\frac{x_4 - x_1}{t_4 - t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{t_4 - t_2} \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_2}; \dots \quad (42)$$

formában előállíthatók. A (38) egyenlet szerinti polinomillesztéshez hasonlóan a Newton-Gregory interpoláció esetén is 6. fokú polinommal dolgoztunk, amelyhez az együtthatók

meghatározására az $i = j - 3, j - 2, j - 1, j, j + 1, j + 2, j + 3$ indexű 7 pont egymás követő pontot használtuk. Valamely szakaszra így az együtthatók

$$a_0 = x_{j-3}; a_1 = \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{t_{j-2} - t_{j-3}}; a_2 = \frac{\frac{x_{j-1} - x_{j-3}}{t_{j-1} - t_{j-3}} - \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{t_{j-2} - t_{j-3}}}{t_{j-1} - t_{j-2}};$$

$$a_3 = \frac{\frac{\frac{x_{j-1} - x_{j-3}}{t_{j-1} - t_{j-3}} - \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{t_{j-2} - t_{j-3}}}{t_{j-1} - t_{j-2}} - \frac{\frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{t_{j-2} - t_{j-3}}}{t_{j-1} - t_{j-2}}}{t_{j-1} - t_{j-2}}; \dots \quad (43)$$

formában adódnak. A független változó állandó $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ lépésköze esetén ez egyszerűsödik

$$a_0 = x_{j-3}; a_1 = \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{\Delta t}; a_2 = \frac{\frac{x_{j-1} - x_{j-3}}{2\Delta t^2} - \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{\Delta t^2}}{\Delta t^2};$$

$$a_3 = \frac{\frac{x_{j-1} - x_{j-3}}{6\Delta t^3} - \frac{x_{j-1} + x_{j-2} - 2x_{j-3}}{2\Delta t^3} + \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{\Delta t^3}}{\Delta t^3}; \dots \quad (44),$$

majd

$$a_0 = x_{j-3}; a_1 = \frac{x_{j-2} - x_{j-3}}{\Delta t}; a_2 = \frac{x_{j-1} - 2x_{j-2} + x_{j-3}}{2\Delta t^2}; a_3 = \frac{x_{j-3}x_{j-1} + 3x_{j-2} - x_{j-3}}{6\Delta t^3}; \dots \quad (45)$$

alakra. Láthatóan a formula általánosítható

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{\Delta^k x_{j-3}}{\Delta t^k} \quad (46)$$

formában, ahol a $\Delta^k x_{j-3}$ a k . rendű differenciát jelöli az x_{j-3} helyen. A k . rendű differencia az $k - 1$. rendű differenciából

$$\Delta^k x_j = \Delta^{k-1} x_{j+1} - \Delta^{k-1} x_j \quad (47)$$

módon állítható elő, amely k lépésben levezethető az 1. rendű differenciából, tehát a

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j \quad (48)$$

különbségből. A (46) összefüggés figyelembevételével (41) leegyszerűsíthető

$$x_i = x_{i - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\Delta^k x_{j-3}}{\Delta t^k} \prod_{j=1}^k (t_i - t_j) \quad (49)$$

formára, ahol a $\lfloor \cdot \rfloor$ operátor a lefelé kerekítést (vagy *floor* függvényt) jelöli, tehát $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$. A (49) szerinti polinom a (46) szerint megadott együtthatókkal már lineáris alakban megadható, amelyeket deriválva a sebesség és a gyorsulás meghatározható. A 6. fokú Newton-Gregory interpoláció esetén a (49) deriválásából kapott formulák az alábbiak:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{60\Delta t} (-x_{i-3} + 9x_{i-2} - 45x_{i-1} + 45x_{i+1} - 9x_{i+2} + x_{i+3}) \quad (50)$$

és

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\frac{1}{90}x_{i-3} - \frac{3}{20}x_{i-2} + \frac{3}{2}x_{i-1} - \frac{49}{18}x_i + \frac{3}{2}x_{i+1} - \frac{3}{20}x_{i+2} + \frac{1}{90}x_{i+3} \right) \quad (51).$$

(d) A mérnöki gyakorlatban az egyik legelterjedtebb interpolációs eljárás a spline-interpoláció. Leginkább a köbös spline függvényt használják, mivel ez közelíti legjobban egy pontseregbe szabad kézzel húzott folytonos görbe alakját. A spline függvények olyan szakaszonként értelmezett (jelen tanulmányban harmadfokú) polinomok, amelyek a szakasz határokra folytonosak, továbbá az egymáshoz csatlakozó polinomoknak az elsőrendű (egyenes) és a másodrendű (simulókör) érintője is azonos, tehát egy csatlakozó pont t_i helyén jobbról (+) vagy balról (-) közelítve a ponthoz minden esetben fennállnak a

$$g(t_i)_+ = g(t_i)_- \quad (52)$$

$$\dot{g}(t_i)_+ = \dot{g}(t_i)_- \quad (53)$$

$$\ddot{g}(t_i)_+ = \ddot{g}(t_i)_- \quad (54)$$

egyenlőségek. Mivel harmadfokú görbékről beszélünk, ennek harmadik deriváltjai szakaszonként egy-egy konstans eredményeznek; a harmadik deriváltak már nem folytonosak, hanem az ún. lépcsős függvényt adják. Általánosítva, k . fokú spline esetén az $k - 1$ -szeri differenciálhatóság és folytonosság biztosított.

A spline függvény esetén a „szakaszonkénti” harmadfokú polinomok a lehető legkisebb szakaszokra értelmezettek: valamennyi pont között eltérőek ezek, egy-egy polinom értelmezési tartománya csak a $[t_i, t_{i+1})$ intervallumra korlátozódik. Értelemszerűen ez azt jelenti, hogy n pont esetén $n - 1$ darab különböző harmadfokú függvényt jelent, intervallumonként

$$g_i(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (55)$$

függvény formában. Az i alsó index a kezdőpont indexe, így a $[t_i, t_{i+1})$ intervallumra utal. Függvényeként tehát négy együttható jellemzi a görbe alakját, ami összesen $n - 1$ függvény esetén $4n - 4$ együttható ismeretét igényli, tehát jóval több az ismeretlen, mint ahány egyenletünk van. Az összes lehetséges megoldás közül a harmadfokú spline függvény az, amelyik a teljes idősorra a második deriváltak négyzetösszegét minimalizálja, tehát a

$$\int_{t_0}^{t_n} \ddot{g}^2(t) dt = \min. \quad (56)$$

feltételes szélsőérték keresési feladatot teljesíti, ahol a feltételeket a (52)-(54) peremfeltételek adják.

A (55) egyenlet együtthatóinak meghatározását nem ismertetjük, egyrészt azért, mert a szakirodalomban részletesen megtalálható [Reinsch, 1967; Greville, 1969; Schönberg, 1964], másrészt azért, mert a legtöbb szoftver beépített programokkal rutinszerűen kezeli a spline-

illesztést. A vizsgálatok szempontjából a fontos az, hogy a (55) egyenlet együtthatóit ismerjük, mert ezek ismeretében lehetőségünk van a deriváltak analitikus meghatározására,

$$\dot{g}_i(t) = 3at^2 + 2bt + c \quad (57)$$

$$\ddot{g}_i(t) = 6at + 2b \quad (58).$$

A vizsgálatok később kimutatták, hogy a gyorsulás számítását érdemesebb két lépésben, az (57) összefüggés kétszeri alkalmazásával végezni, mint egy lépésben az (58) egyenlet felhasználásával.

(e) A vizsgálatok során szimulált és valódi műhold pályákat egyaránt felhasználtunk. A szimulált pályák esetében volt zajmentes és zajjal terhelt eset is, a valódi pálya pedig jellegénél fogva mérési zajjal terhelt. A zaj a becült sebesség és gyorsulás értékeit is terheli. Kísérletet tettünk a zaj hatásának csökkentésére valamilyen simítási eljárással. Simítást eredményez, ha egy k . fokú polinomot $n > k - 1$ pontra illesztünk. A simítás optimális paraméterezését szimulált, zajjal terhelt pályákra végzett előzetes vizsgálatok alapján határoztuk meg [Földváry, 2007b], amely eredményeként 7. fokú polinom 12 pontra történő illesztése mellett döntöttünk. Az illesztésből meghatározott polinom együtthatókkal a (39) és (40) összefüggésekkel végeztük a sebességek és a gyorsulások meghatározását.

(f) A spline függvények meghatározása alapvetően egy feltételes optimalizációs feladat, amelynek függvénye (56) egyenlettel adott, feltételi egyenletei pedig (52)-(54) egyenletek. A simító spline függvények esetén egy további feltételi egyenlet megadásával írhatjuk elő a kívánt simító hatást, ez pedig:

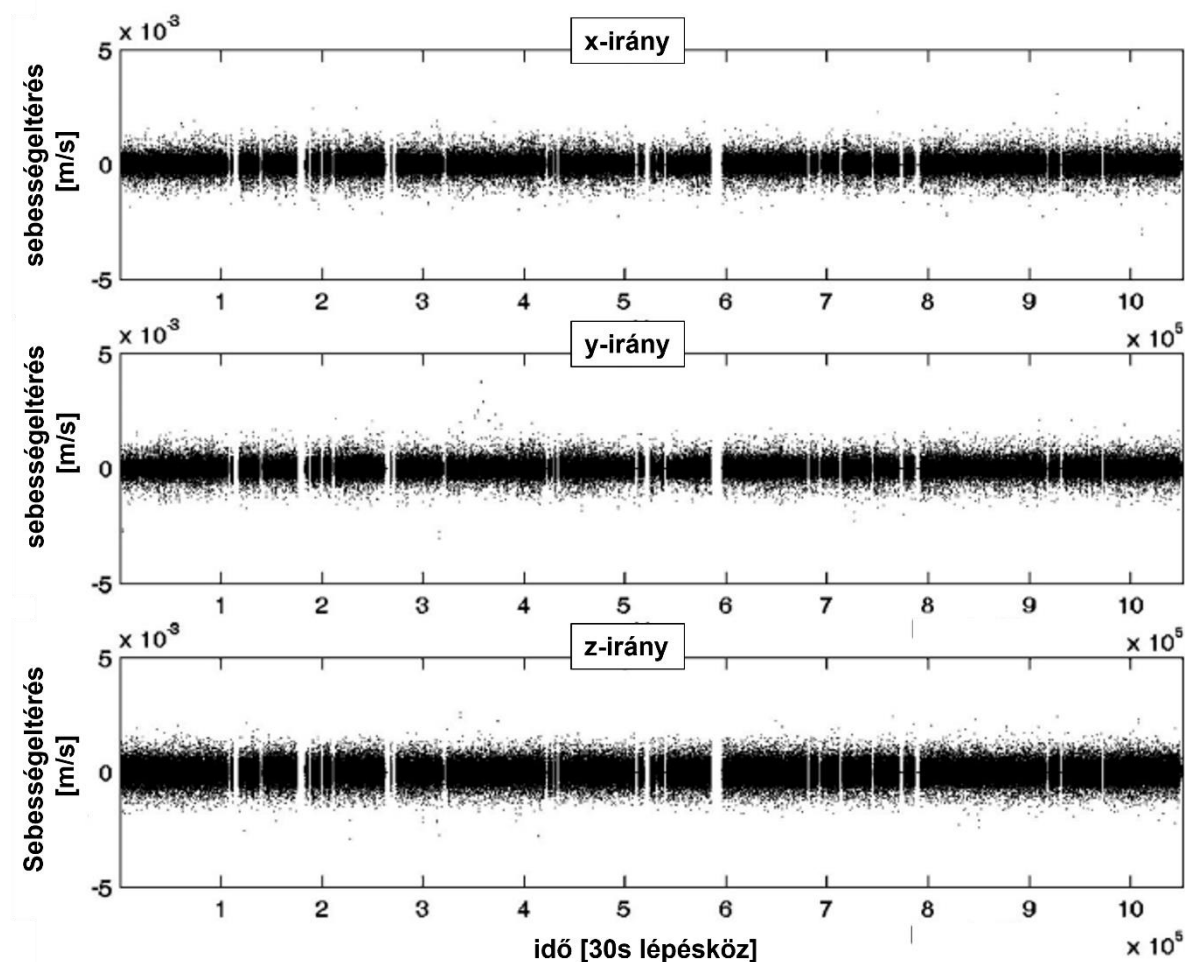
$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{g(t_i) - x_i}{\delta x_i} \right)^2 \leq S \quad (59).$$

A (59) egyenlet tehát a függvényértékek helyén (amelyek egyben szakaszok határait jelentő pontok is) definiálják a függvényértékek, x_i és a simító spline függvényértékek, $g(t_i)$ eltéréseinek a megengedett mértékét, ehhez a függvényértékek δx_i középhibáit is figyelembevéve. A simítás mértékét egy önkényesen felvett S simítási paraméterrel lehet szabályozni, felvételét körültekintően kell végezni. A simítási paraméter felvételét szimulált, zajjal terhelt pályákra végzett előzetes vizsgálatok alapján határoztuk meg (lásd Földváry [2007b]); tapasztalataink alapján a simítási paraméter értéke részletesebb mintavételezés, illetve magasabb zajszint mellett nagyobb. A simító spline függvény együtthatóinak meghatározása után a sebességek és a gyorsulások értékeit a (57) és (58) összefüggésekkel határoztuk meg.

Valamennyi bemutatott eljárást (lásd (a)-(f) alpontok) vizsgáltuk előfeldolgozott pozíciók idősorára, valamint egy ismert nehézségi erőter modellből integrált pályához viszonyított eltérések, ún. reziduálok idősorára egyaránt. A vizsgálatokat elvégeztük valós CHAMP [Földváry, 2007a; Földváry, 2008b; Svehla és Földváry, 2006] és szimulált GOCE [Földváry, 2007b] pályákra egyaránt. A gyorsulás meghatározására két megközelítést is vizsgáltunk: valamely módszerrel nyert interpolációs függvény második deriváltját analitikusan képezve, illetve az első deriváltat két egymást követő lépésben alkalmazva. A vizsgálatok tehát sokféle esetre, különböző mintavételezésekre és számos megoldási módszerre kiterjedtek; az egyes vizsgálatok eredményeinek részletes ismertetése helyett a kapcsolódó cikkekre hivatkozunk ([Földváry, 2007a; Földváry, 2007b; Svehla és Földváry, 2006; Földváry, 2008b]), és a

könnyebb értelmezhetőség céljából a több vizsgálatból levonható általános tapasztalatokra, megállapításokra, következtetésekre szorítkozunk.

A vizsgálat összességében a 7 epochára illesztett Newton-Gregory interpolációt találta legcélravezetőbbnek, amely alkalmazásával a 60 másodperces mintavételezésű CHAMP pályákból (becsült középhiba ~ 2 cm) a sebességet $0,3$ mm/s pontossággal sikerült előállítani [Svehla és Földváry, 2006]. A pontossági becslés alapja a fél-dinamikus pályával végzett összehasonlítás volt (5. ábra). A szimulált GOCE pályából mind a sebesség, mind a gyorsulás előállítására a 7 epochára illesztett Newton-Gregory interpoláció bizonyult a legjobbnak [Földváry, 2007b]. A vizsgálatok kimutatták továbbá, hogy előzetesen ismert nehézségi erőter modell felhasználása pontos függvényillesztést alkalmazó módszerek esetén nem befolyásolja a megoldást, azonban simító eljárások esetén igen, mert a megoldást a felhasznált modellhez simíthatja [Földváry, 2007b; Földváry, 2008b]. A gyorsulásokra vonatkozóan kimutattuk, hogy az első derivált képzése két egymást követő lépésben jóval pontosabb eredményt szolgáltat, mint a második derivált meghatározása közvetlenül, egy lépésben [Földváry, 2007b]. (A sebesség- és gyorsulás-meghatározásra vonatkozó eredményeket a 3. tézis tartalmazza).



5. ábra. Newton-Gregor interpolációval előállított CHAMP kinematikus sebességek összehasonlítása a fél-dinamikus sebességekkel. [Földváry, 2007b]

II.4. Gradiometriai mérések feldolgozása

Míg a CHAMP és a GRACE műholdak közvetett mérések (a pálya, illetve a műholdak közötti távolságváltozás-mérések) alapján teszik lehetővé a nehézségi erőter meghatározását, addig a GOCE fedélzetén a nehézségi erőter gradienseinek közvetlen mérése folyik [Földváry et al, 2015b]. Ilyen szempontból a GOCE által végzett gradiens-mérések (vagy a szakirodalomban használt nevén a Satellite Gravity Gradiometry (SGG) mérések) közvetlen lineáris függvénykapcsolatba hozhatók az ismeretlen gömbfüggvény együtthatókkal, a gyakorlatban azonban az SGG-mérések sávkorlátosak, így elkerülhetetlen ezek előfeldolgozása.

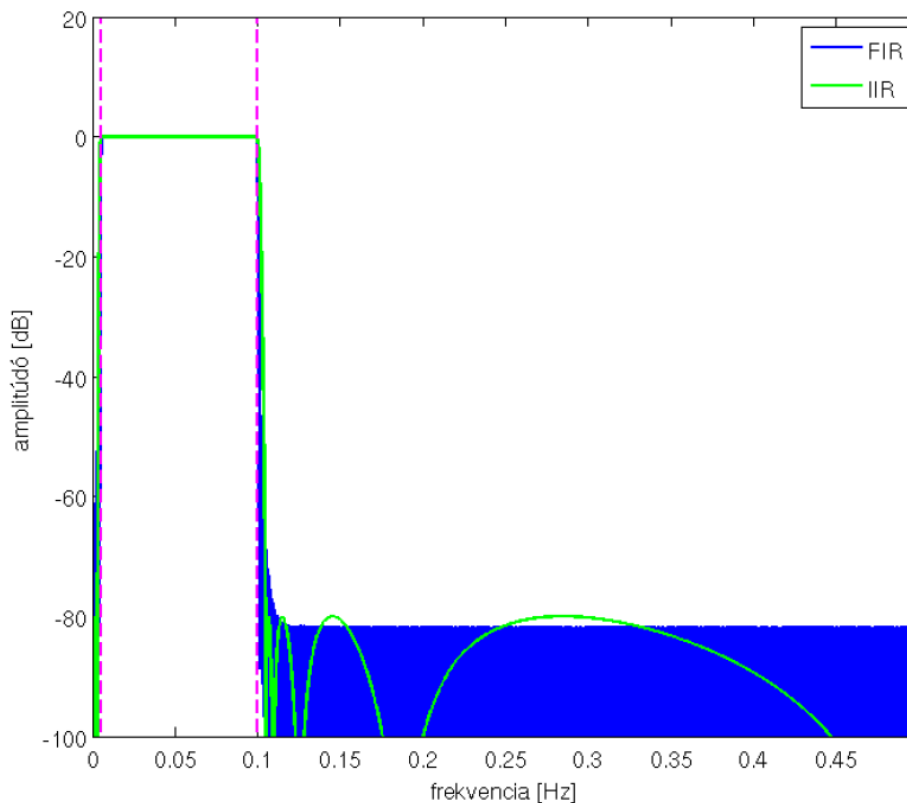
A mérési mennyiség tehát a 6 független V_{ij} gradiens. A gradiens értékek pontossága a gradiométer két tengelye mentén, a mérési sáv szélességen belül $10 - 12 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$, míg a harmadik tengely kisebb érzékenységgű, mintegy $20 - 25 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ [Bouman et al, 2011]. Az Eötvös-tenzor főátlójában elhelyezkedő három gradiens (V_{xx} , V_{yy} , V_{zz}), valamint a V_{xz} gradiens értéke nagy pontossággal meghatározott, míg V_{xy} és V_{yz} értékei kisebb pontosságúak. Ez a földfelszíni kalibráció elkerülhetetlen következménye, ugyanis a kalibráció során az egyik tengely nagyságrendekkel nagyobb gyorsulásnak van kitéve, mint az arra merőleges irányokban [Bouman et al, 2009]. A műszer technikai paraméterei, továbbá a pálya kialakítása következtében rendkívüli pontosságot csak a mérési sávban, a 5-100 mHz mérési frekvenciatartományban lehet elérni.

A mért gradienseket ezért valamelyik sávkorlátos szűrővel a mérési sávra szűrjük. Schuh et al [2010] véges impulzusválaszú (Finite Impulse Response; FIR) szűrőt javasolt és használt, amellyel hasonló képességű további FIR szűrők előállíthatóknak bizonyultak, de annál látványosan jobb megoldást nem sikerült szolgáltatnunk, ezért végtelen impulzusválaszú (Infinite Impulse Response; IIR) szűrővel oldottuk meg a feladatot [Polgár et al, 2013; Földváry et al, 2014b]. A FIR-szűrők előnye a lineáris fázisátmenet, ezáltal alakhú átvitel valósítható meg, hátránya azonban a szűrőparaméterek nagy száma. Az IIR szűrőkről elmondható, hogy kevés paraméterrel is összetett feladat megoldására képesek, a fázisátmenetük azonban nem lineáris. Az IIR szűrő kedvezőtlen, nemlineáris fázisátmenete nem okoz gondot, ha a szűrendő mintasorozat offline rendelkezésre áll, mint az SGG mérések esetén is (az adatok offline elérhetősége arra vonatkozik, hogy nem valós idejű szűrési feladatról van szó, hanem korábban rögzített mérések utólagos feldolgozásáról). Ez esetben az IIR szűrőt „oda-vissza” lehet alkalmazni, azaz a jelet meg kell szűrni a szokásos módon, majd a szűrés eredményeként kapott mintasorozatot „visszafelé”, az időben utolsó mintával kezdve is meg kell szűrni. A „visszafelé” szűrés amplitúdómenete megegyezik a normál szűrés amplitúdómenetével, fázisátmenete viszont a normál szűrés mínusz egyszerese. A teljes szűrési folyamat amplitúdómenete a megtervezett IIR szűrő amplitúdómenetének négyzete, fázisátmenete pedig zérus, amely alakhú átvitelt biztosít.

4. táblázat. Szűrőspecifikációk GOCE-SGG mérések szűrésére [Polgár et al, 2013]

mintavételezési frekvencia	elnyomás a 0...5 mHz tartományban (zárótartomány)	elnyomás a 100...500 mHz tartományban (zárótartomány)	ingadozás az 5...100 mHz tartományban (áteresztőtartomány)
1 Hz	80 dB	80 dB	0,05 dB

A szűrőre vonatkozó specifikációkat Shuh et al [2010] alapján állítottuk fel, amelyet ésszerű megfontolások alapján további feltételekkel egészítettünk ki. A szűrőspecifikációk a 4. táblázatban láthatók. Az IIR szűrőt a fentieket figyelembe véve lehet tervezni (40 dB elnyomás, 0.025 dB ingadozás), amely segít az egyébként igen szigorú specifikáció teljesítésében. Ezen kívül az erősen aszimmetrikus sávszűrőt egy felül- és egy aluláteresztő szűrő soros kapcsolásával tervezzük, illetve valósítjuk meg. Az egyenletes ingadozás érdekében elliptikus közelítést alkalmaztunk. Ennek eredményeként a tervezett szűrő egy 5-ödrendű aluláteresztő és egy 9-edrendű feluláteresztő szűrő kaszkádjaként áll elő. A tervezett IIR szűrő, valamint a Schuh-féle FIR szűrő [Schuh et al, 2010] amplitúdómenetét a 6. ábra szemlélteti (az IIR szűrő esetében valójában az oda-vissza szűrésből kapott amplitúdómenet négyzetét mutatjuk). A függőleges, szaggatott vonalak a levágási frekvenciát jelölik (5 mHz, ill. 100 mHz). Az IIR szűrőt megvizsgálva látható, hogy az áteresztő tartományban ± 0.02 dB mértékű ingadozást mutat (Schuh-szűrő esetén ez mintegy ± 0.07 dB), míg a zárótartományokban az elnyomás mértéke 80 dB (a Schuh-féle szűrőhöz teljesen hasonlóan). Szűrőnk ezzel teljesítette a specifikációban előírtakat (4. táblázat). A szűrők viselkedését vizsgálva az átmeneti tartományban azt tapasztaljuk, hogy az IIR szűrő jóval rövidebb átmenetet biztosít, mint a Schuh-féle FIR szűrő, továbbá az áteresztő tartomány szélein jóval kisebb a Gibbs-oszcilláció mértéke. Összességében az IIR szűrő viselkedése az átmeneti tartományban jóval kedvezőbbnek mondható.



6. ábra. A tervezett IIR szűrő és a Schuh-féle FIR szűrő karakterisztikája [Polgár et al, 2013]

Alkalmazva a szűrőt GOCE-mérésekre (teszt nap: 2009. november 2.) vizuálisan összehasonlítva nagyon hasonló képet tapasztalunk Schuh et al [2010] eredményével, különösen a fázisok terén nem látható eltérés. Statisztikai összehasonlítás (5. táblázat) alapján látható, hogy a szűrő jelek nagyságához képest az egyes szűrőkkel kapott jelek mintegy egy nagyságrenddel kisebb eltéréseket eredményeznek.

5. táblázat. A szűrt jelek statisztikai összehasonlítása. Mértékegység: mE [Polgár et al, 2013]

	IIR-szűrő	FIR-szűrő	A két szűrt jel eltérése
V _{xx}	3,67	3,65	0,34
V _{yy}	3,40	3,32	0,52
V _{zz}	6,78	6,72	0,68
V _{xy}	177,52	176,89	14,18
V _{xz}	6,96	6,92	0,60
V _{yz}	263,79	262,54	22,87

Összességében két olyan szűrő áll rendelkezésünkre, amelyek megfelelnek a specifikációnak, és egymáshoz képest számottevő, mintegy 10%-kal eltérő eredményt produkálnak. Az amplitúdómenet tekintetében az IIR szűrő kedvezőbbnek tűnik. További összehasonlításként megemlítenénk az egyes szűrők együtthatóinak a számát, amely a szűrők számítási hatékonyságát, eleganciáját jellemzi. A FIR szűrő 2001 együtthatót, míg a két IIR szűrő kaszkádja összesen 30 együtthatót használ. (Az IIR-szűrő alkalmazását írja le a **4. tézis**).

III. A mérések kiegyenlítése

A II. fejezetben a „nyers” mérések (valójában a nyers mérésekből visszafordítható módon származtatott mennyiségek) előfeldolgozását mutattuk be, amely a nehézségi erőterrel közvetlen kapcsolatban álló mennyiségeket eredményezett. Ezek a mennyiségek lineáris kapcsolatban állnak a Föld nehézségi erőterének potenciáljával, vagy annak valamilyen formájával (lásd az energia integrál esetén a (28), a newtoni mozgásegyenlet esetén a (20) egyenleteket, míg SGG esetén a mérés közvetlen eredményei a V_{ij} gradiensek), ezért a nehézségi erőter modell számára közvetítő egyenletként alkalmazhatók. A feldolgozási folyamat következő lépése a kiegyenlítés, amely a potenciál gömbfüggvénysorának (17) egyenlet szerinti megoldását jelenti, eredménye pedig egy nehézségi erőter modell, ami alatt a potenciál \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} gömbfüggvény együtthatóit értjük (figyelembevéve, hogy a Föld össztömegének és a Newton-féle tömegvonzási állandónak a szorzata nagyságrendekkel pontosabban ismert).

A (17) egyenlet Legkisebb Négyzetek Módszerének II. kiegyenlítési csoportja szerinti kiegyenlítése során a feladat egy lineáris egyenletrendszer megoldása, az ún. normálegyenletrendszeré, mely szerint

$$\underline{\underline{N}} \cdot \underline{x} = \underline{n} \quad (60),$$

ahol $\underline{\underline{N}}$ a normálmátrix, \underline{x} az ismeretlenek paraméter vektora és \underline{n} a normálegyenletrendszer tisztatag vektora. Az egyenlet megoldása alapvetően az $\underline{\underline{N}}$ normálmátrix invertálását igényli.

A kiegyenlítés során a rendelkezésre álló teljes adatsorból a mérések számával megegyező számú közvetítő egyenlet keletkezik. Amennyiben a kiegyenlítést egy n_{max} értékig végezzük, úgy az ismeretlen paraméterek száma $\frac{(n_{max}+1)(n_{max}+2)}{2}$, ez tehát 120 fokig és rendig kiegyenlítve 7381, 180 fokig 16471, 300 fokig már 45451 paramétert jelent. Ez pedig a mérések száma szorozva a paraméterek száma dimenziójú $\underline{\underline{A}}$ alakmátrix felírását igényli, ami kellően hosszú idősor esetén számos programnyelvben kritikus, de különösen az azt követő lépés, az ismeretlenek számával megegyező méretű, négyzetes $\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{A}}$ normálmátrix invertálása válik a programozás szempontjából memória- és időigényessé [Földváry és Wermuth, 2005].

A hivatalos feldolgozó központok (CSR, GFZ, JPL) a fenti módszerek bármelyike esetén a végleges produktumnak szánt nehézségi erőter modellt a Legkisebb Négyzetek Módszerének közvetett mennyiségek kiegyenlítésének megfelelően, a II. kiegyenlítési csoport szerint, a teljes alakmátrix felírása mellett és a normálmátrix invertálásával végzi. Ez azonban idő- és számításgényes, így csak hónapokkal a mérések után bocsájtható a felhasználók rendelkezésére. Felmerült az igény gyorsan előállítható, de mégis megfelelő pontosságú kiegyenlítési módszerek előállítására, ezeket tekintjük át Han [2003], Sneeuw [2000], Földváry és Wermuth [2003], Földváry és Wermuth [2005], Wermuth és Földváry [2003], Wermuth et al [2004b], Wermuth et al [2006] és Földváry et al [2014a] tanulmányok alapján.

Az egyszerűsítő módszerek hátterében Colombo [1981] felismerése áll, mely szerint közel kör alakú pályán végzett műholdas mérések esetén, azokat rácshálóba rendezve, továbbá amennyiben a gömbfüggvény-együtthatókat az ismeretlenek paraméter vektorát növekvő rend szerint

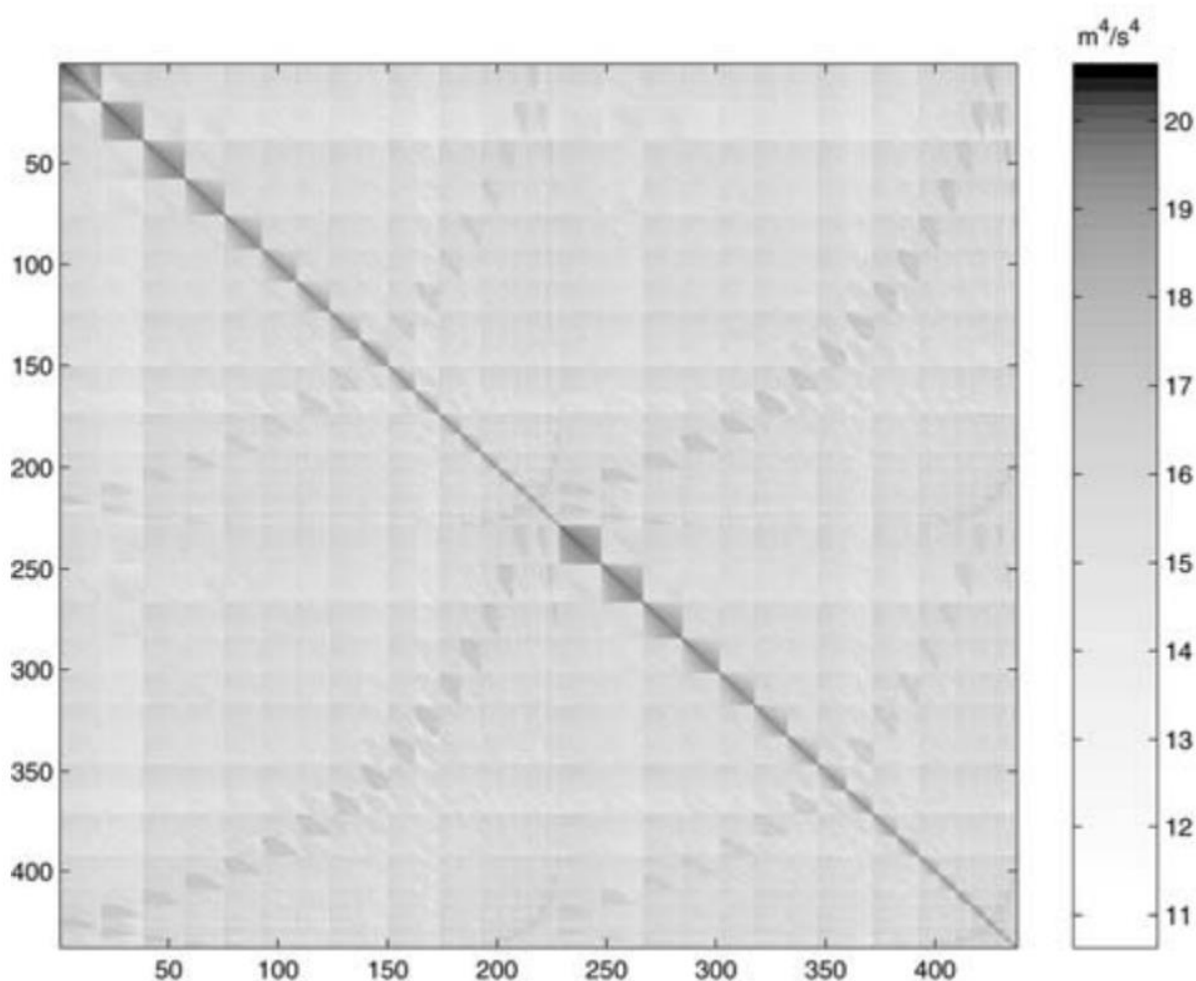
$$\underline{x} = [\underline{x}_0 \quad \underline{x}_1 \quad \dots \quad \underline{x}_m \quad \dots \quad \underline{x}_{n_{max}}] \quad (61),$$

ezen belül növekvő fok szerint, \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} sorrendben

$$\underline{x}_m = [\bar{C}_{m,m} \quad \bar{C}_{m+1,m} \quad \dots \quad \bar{C}_{n_{max},m} \quad \bar{S}_{m,m} \quad \bar{S}_{m+1,m} \quad \dots \quad \bar{S}_{n_{max},m}] \quad (62)$$

építjük fel, akkor a normálmátrix blokk-diagonális elrendezésű lesz. Ezek a feltételezések geodéziai, gravimetriai műholdak esetén reálisnak tekinthetők, mivel a kis excentricitású, közel kör alakú műholdpálya gyakori a földtudományokban (ezek biztosítanak homogén felbontást), továbbá a pályák kialakítása során jellemzően homogén térbeli eloszlásra törekednek (tehát szabályos fokhálóra interpolálhatók).

Példaként a 7. ábrán bemutatjuk egy szimulált LEO pályának az energia integrál szerinti megoldásának normálmátrixát [Földváry és Wermuth, 2005], ahol a színskála logaritmikus, így a nagyságrendi kiemelkedése az átló blokkjainak szembevető.



7. ábra. Szimulált GOCE pályából energia integrál szerinti megoldás normálmátrixa [Földváry és Wermuth, 2005]

Két ilyen módszert mutatunk be, amelyeket a nehézségi erőter modellek meghatározása során rendszeresen alkalmaztunk, és bizonyították, hogy alkalmasak a kellően pontos nehézségi erőter modell meghatározására egyszerű PC-ken is, néhányszor 10 percnyi futási idő mellett.

Az egyik ilyen a kiegyenlítési mód az ún. Előfeltételes Konjugált Gradiens Módszer (Preconditioned Conjugate Gradients Method for Adjustment; röviden PCGMA), amely során iteratív módon, valamilyen előzetes feltétel figyelembevételével előállított konjugált gradiensek felhasználásával, és azok iterációs módon történő pontosításával közelítik a normálmátrix inverzét a valódi inverzhez [Han, 2003]. A PCGMA módszer alkalmazásakor a normálmátrix blokk-diagonális része szolgál előfeltételként, ezt pontosítjuk iteratív jelleggel, fokozatosan konvergálva a pontos együtthatókhoz.

A PCGMA módszer a megvalósítás során az egyes iterációs lépésekben megvizsgálja a (60) normálegyenletrendszerben az egyenlőség teljesülésének mértékét, azaz, hogy az iteráció során fokozatosan konvergál-e a megoldás. A számítás a két oldal eltérését jelentő $\underline{\delta n}$ vektor (ún. tisztatag eltérések vektora), illetve az egyes iterációs lépések közötti aktualizálást leíró \underline{p} update vektor folyamatos frissítésével történik, a leállási feltételt is ezek szabályozzák. A PCGMA megoldási sémája [Han, 2003] után az alábbi:

(1) A kezdeti (0. iteráció) tisztatag eltérések $\underline{\delta n}$ vektora és \underline{p} update vektora a paraméterek \underline{x}_e előzetes értékei alapján:

$$\underline{\delta n}_0 = \underline{n} - \underline{N} \cdot \underline{x}_e \quad (63),$$

$$\underline{p}_0 = \underline{\delta n}_0 \quad (64),$$

(2) az i . iteráció \underline{x} paramétervektora

$$\alpha_i = \frac{\underline{p}_{i-1}^T \underline{\delta n}_{i-1}}{\underline{p}_{i-1}^T \underline{N} \underline{p}_{i-1}} \quad (65),$$

$$\underline{x}_i = \underline{x}_{i-1} + \alpha_i \underline{p}_{i-1} \quad (66),$$

(3) Az i . iterációban a tisztatag eltérések $\underline{\delta n}$ vektora és \underline{p} update vektora

$$\underline{\delta n}_i = \underline{n} - \underline{N} \cdot \underline{x}_i \quad (67),$$

$$\beta_i = \frac{\underline{\delta n}_i^T \underline{\delta n}_i}{\underline{\delta n}_{i-1}^T \underline{\delta n}_{i-1}} \quad (68),$$

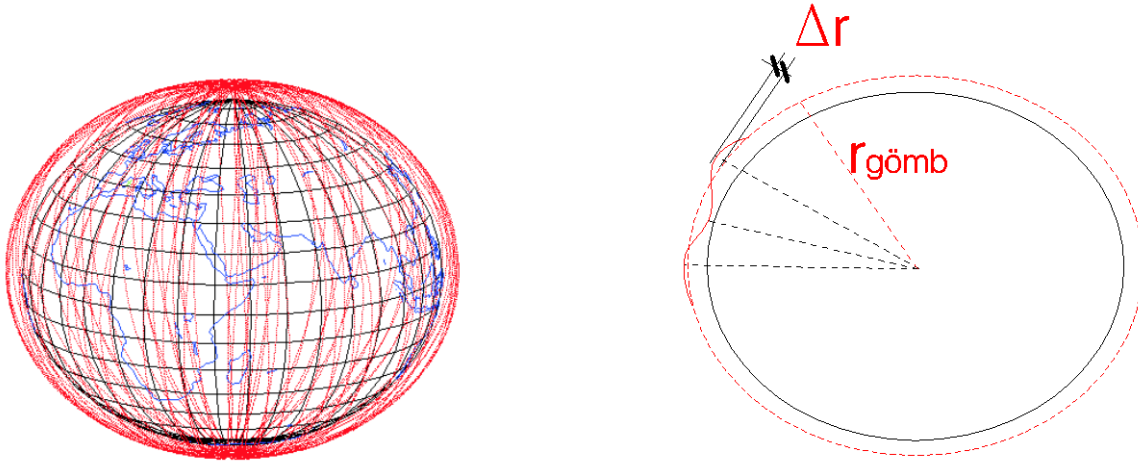
$$\underline{p}_i = \underline{\delta n}_i + \beta_i \underline{p}_{i-1} \quad (69),$$

(4) Az iteráció folytatása a (2) lépéstől addig, amíg a \underline{p} update vektor egy kellően alacsony küszöbérték alá nem megy.

A másik említett megoldás is a normálmátrix blokk-diagonális tulajdonságait hasznosítja. A PCGMA módszerrel szemben, a szemi-analitikus módszer [Sneeuw, 2000] során magukat a

méréseket, pontosabban a mérésekből levezetett potenciál értékeket interpoláljuk a blokk-diagonális normálmátrixot jelentő rácsháló pontjaiba, leegyszerűsítve ezzel a ténylegesen blokk-diagonális normálmátrix invertálását egy inverz Fourier-transzformációra.

A szemi-analitikus módszer pontossága attól függ, hogy milyen és mekkora hibákat eredményez a mérések interpolációja egy átlagos pályamagasságban felvett gömb felszínén egy szabályos rácstra. A hibát az interpoláció eredményezi, és emiatt ez a módszer is iterációt igényel: az eredményül kapott nehézségi erőter modellt visszaforgatva a mérések interpolációjának hibája csökkenthető.



8. ábra. Műholdpálya mentén számolt potenciál értékek gömbre vetítése

Első lépésben a mérések (vagy a potenciál) vertikális értelmű vetítését végezzük el (8. ábra). A vetítést a lefelé/felfelé folytatás szerint számítjuk [Tóth és Földváry, 2005]:

$$V(r_{gömb}, \varphi, \lambda) = V(r, \varphi, \lambda) + \frac{\partial V(r_{gömb}, \varphi, \lambda)}{\partial r} \Delta r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(r_{gömb}, \varphi, \lambda)}{\partial r^2} \Delta r^2 + \dots \quad (70),$$

ahol a $V(r, \varphi, \lambda)$ potenciál értékei és a Δr radiális eltérések mérésekből meghatározott mennyiségek, azonban a potenciál első és második radiális gradiense, $\frac{\partial V(r_{gömb}, \varphi, \lambda)}{\partial r}$ illetve $\frac{\partial^2 V(r_{gömb}, \varphi, \lambda)}{\partial r^2}$, egy már korábbról ismert nehézségi erőter modelltől számolhatók. Mivel ez utóbbi számítás nem feltevésmentes, a vertikális vetítést a lehetőség szerint minimalizálni kell, ezért a feldolgozáshoz használt gömböt a műholdpálya átlagmagasságában érdemes (és szokás) felvenni.

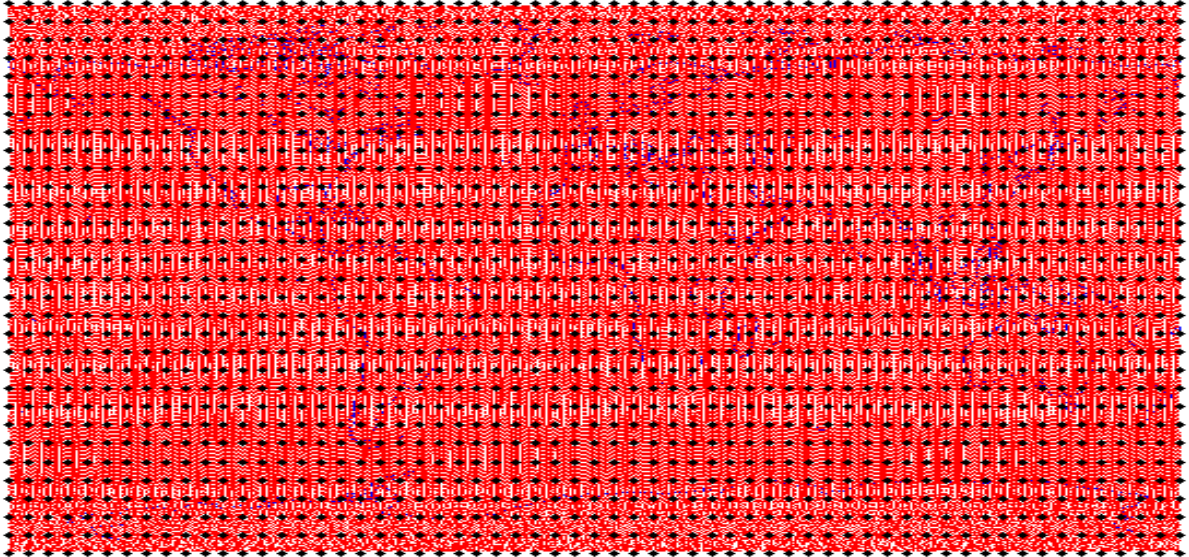
Ezt egy második lépésben a gömb felszínére vetített mérések vízszintes értelmű interpolációja követi. Ennek eredményeképpen tetszőleges $\Delta\varphi$ és $\Delta\lambda$ felbontású

$$\varphi_{grid} = k\Delta\varphi \quad \text{ahol} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (71)$$

$$\lambda_{grid} = m\Delta\lambda \quad \text{ahol} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (72)$$

fokhálóra kapunk potenciálértékeket. A célra gyakorlatilag bármilyen felületi interpolációs eljárást alkalmazhatunk, akár a lineáris interpoláció is teljesen megfelel, tekintettel arra, hogy

hatalmas adatmennyiségről van szó, így az interpoláció során minden egyes rácsháló ponthoz egészen közel is szép számmal találhatóak mérések. A nagy adatsűrűség szemléltetésére a 9. ábrán a CHAMP műhold 2 évnyi méréseit jelenítettük meg, ami mintegy félmillió mérést jelent (az elméleti 525.600 értéknél a hibás mérések miatt valamivel kisebb a darabszám), ami mintegy 30 km-es felszíni felbontásnak felel meg.



9. ábra. 2 évnyi CHAMP műholdpályaadatak (piros pöttyök) és interpolációjának (fekete pöttyök) szemléltetése

A szabályos rácshálóra interpolált potenciálértékekre a (17) egyenlet már egy egyszerűbb formára hozható [Wermuth et al, 2006]:

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{L_{max}} \Sigma \left(\frac{R}{r_{gömb}} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l}^l (C_{lm} \cos m \lambda + S_{lm} \sin m \lambda) \begin{cases} \cos k\vartheta \\ \sin k\vartheta \end{cases} \quad (73),$$

ahol $\vartheta = 90^\circ - \varphi$ a sarkmagasság, vagy pólustávolság. A (73) egyenlet egy felületi Fourier-sornak felel meg, ennek invertálása egy egyszerű inverz Fourier-transzformációval végezhető. Az így meghatározott nehézségi erőter modell azonban az interpoláció miatt jelentős hibákkal terhelt, viszont jó eséllyel az előzetesen felvett nehézségi erőtermodellnél jobban írja le egy adott műhold méréseit. Emiatt az eredményül kapott modellt előzetes modellként felhasználva a (70) összefüggéssel elvégezzük a radiális vetítést, a gömbfelületen megismételjük az interpolációt, és újra invertáljuk az adatainkat a (73) összefüggéssel. Az iterációt egészen addig folytatjuk, amíg a mérésből és a modelltől számolt potenciálértékek különbsége el nem ér egy általunk megadott határt.

Korábban számos mérési típus, beleértve a CHAMP megoldást jelentő High-Low SST és a GRACE megoldást jelentő Low-Low SST elrendezéseket is, többé-kevésbé kidolgozásra kerültek [Sneeuw, 2000]. A módszer kidolgozása során mindig az a kritikus, hogy az iteráció során az eredmény konvergál-e. Ez pedig nemcsak a nyers méréseken, de a mérések feldolgozása során alkalmazott matematikai eszközökön is múlik. A gyakorlat azt mutatja, hogy konvergencia esetén mintegy 5 iteráció után már megfelelő pontossággal érhető el a

műholdak méréseiből kinyerhető információ [Földváry és Wermuth, 2003; Wermuth és Földváry, 2003].

Wermuth et al [2006] kidolgozott egy szemi-analitikus megoldást a High-Low SST elrendezés (mint a CHAMP) és az SGG mérések (mint a GOCE gravitációs gradiensek) kombinált feldolgozására. Mayrhofer et al [2010] a módszert továbbfejlesztette annak figyelembevételével, hogy a mért GOCE gradiensek sávkorlátosak, a mérések az 5-100 mHz tartományban tartalmaznak értékes információt. A módszer kulcsa a GOCE mérések mérési sáv szélességre szűrése céljából felhasznált ARMA szűrő, ami egy FIR szűrő, továbbá a két mérési típus (SST és SGG) együttes feldolgozása. A két mérési mennyiség együttes feldolgozása azért hasznos, mert a két mérési típus kiegészíti egymást: míg az SST a nehézségi erőter hosszú- és a közép-hullámhosszúságú, addig az SGG mérések a rövidhullámú formáiról hordoznak magukban információt.

Kutatásaink során az SGG mérések információtartamát összetevőnként elemeztük, továbbá új megoldásként az általunk bevezetett IIR szűrőt alkalmaztuk, amely vizsgálataink alapján az ARMA szűrőnél jobban teljesít (lásd III.4. alfejezet). Az IIR szűrő használatára fejlesztett módszerről elmondható, hogy hatása a hosszúhullámú tagokat mintegy 40 fokig és rendig érinti, valamint a közel zonális együtthatók esetén regularizációt igényel, illetve, hogy mintegy 150 fokig és rendig szolgáltat jó megoldást, amely fölött a módszer simító hatása érvényesül. Az SGG mérések feldolgozásával, kiegyenlítésével kapcsolatos eredményeinket részletesen lásd Földváry et al [2014a].

IV. Időben változó nehézségi erőtér modellek alkalmazásai

A GRACE műholdpár pályáit úgy tervezték, hogy egy hónap alatt a mérések eloszlása a Föld felszínén homogén legyen. Egy hónapnyi mérés így elegendő arra, hogy (ha csak kis felbontással is, mintegy 60 fokig és rendig) hónapos (havi rendszerességű) globális nehézségi erőtér modelleket határozzunk meg. A hónapos nehézségi erőtér modellek pedig lehetővé teszik a nehézségi erőtér (egyben a tömegeloszlás) időbeli változásának vizsgálatát [Földváry, 2007c; Földváry és Kiss, 2015]. A hónapos időbeli felbontás elsősorban az éves- és féléves periódusú [Kiss és Földváry, 2015; Kiss és Földváry, 2017b], másodsorban a hosszúperiódusú, szekuláris változások [Földváry, 2012; Földváry et al, 2015a; Földváry és Mészáros, 2009; Kiss és Földváry, 2017a; Földváry és Nyilas, 2020; Földváry et al, 2020] vizsgálatára ad módot. Ez utóbbi különösen érdekes és hasznos a napjainkban tapasztalható globális felmelegedés hatásának, például a sarki jégsapkák tömegátrendeződésének vizsgálata szempontjából [Földváry, 2008a]. Nem meglepő, hogy miután a GRACE befejezte a működését, a GRACE-FO pályára állításával a hónapos felbontású nehézségi erőtér modellek meghatározása tovább folytatódik [Földváry és Nyilas, 2020], még ha egy közel egyéves megszakítással is [Földváry, 2019].

A tapasztalatok alapján elmondható, hogy az éves- és féléves periódusú tömegátrendeződéssel járó változásokat leginkább az atmoszféra, az óceánok és a hidrológiai folyamatok okozzák. Ezek mindegyike magassági értelemben egy szűk, pár 10 km-es vastagságú zónában (a földfelszínen, a hidroszférában vagy az atmoszférában) zajló folyamat, így a Föld méreteihez képest elhanyagolható magassági kiterjedéssel bír, kvázi földfelszíni tömegátrendeződésnek értelmezhető. Ennek szellemében a tömegátrendező folyamatok leírására bevezették a felszíni tömeganomália fogalmát, mely megadható a potenciál gömbfüggvény együtthatóival is [Swenson és Wahr, 2002].

$$\Delta\sigma(\varphi, \lambda) = \frac{R\rho_{Föld}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{1+k_n} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m \lambda + \bar{S}_{nm} \sin m \lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (74),$$

ahol a változók jelentése megegyezik a (17) egyenletnél leírtakkal, új változók a $\rho_{Föld}$, ami a Föld átlagos sűrűségét, illetve a k_n , ami a Love-féle számokat jelöli. A felszíni tömeganomália abszolút értelemben nem, csak relatíve jellemzi két időpontban a tömegeloszlás megváltozásának mértékét. Mértékegysége kg/m^2 , tehát felületegységre eső tömegváltozást ír le, de megadható az adott tömegnek megfelelő, felületegységre eső vízoszlop magasságaként is, ez az ún. ekvivalens vízoszlop magassága („equivalent water height”, vagy EWH), amely a víz sűrűségével ($\rho_{víz} = 1000 kg/m^3$) osztva származtatható, így értelemszerűen $\Delta\sigma \left(\left[\frac{kg}{m^2} \right] \right) = EWH([mm])$.

A (74) egyenlettel meghatározott tömegátrendeződések idősorának elemzését GRACE és GRACE-FO hónapos nehézségi erőtér modellek alapján egy legkisebb négyzetek minimalizálásának alapelvein végzett függvényillesztéssel határozzák meg. Bár a függvényillesztés egyenlete elméletileg bármilyen periódus és tetszőleges fokszámú polinom figyelembevételét lehetővé teszi [Baur, 2012], a gyakorlatban ennek egyenlete néhány, az időbeli változások szempontjából releváns tagot szokott tartalmazni:

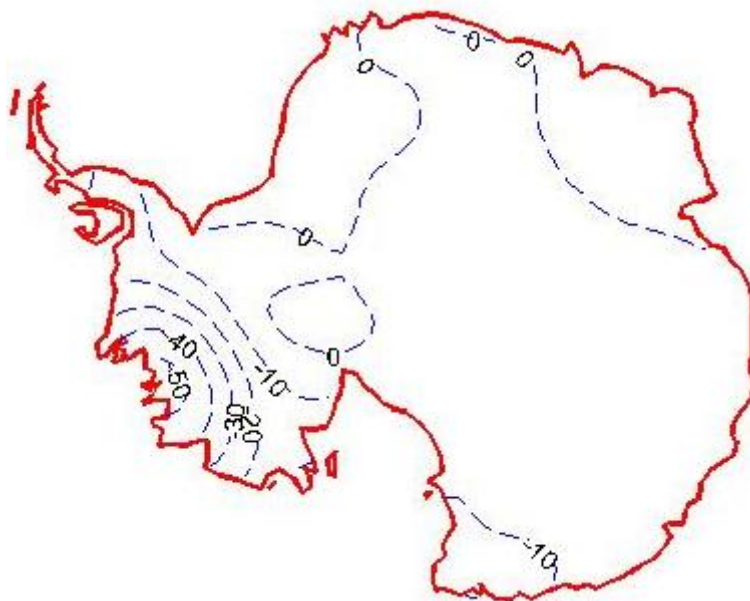
$$\Delta\sigma(t) = A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e) + A_{f_e} \sin(\omega_{f_e} t + \varphi_{f_e}) + A_l t + A_b \quad (75),$$

$$\Delta\sigma(t) = A_e \sin(\omega_e t + \varphi_e) + A_{f_e} \sin(\omega_{f_e} t + \varphi_{f_e}) + A_l t + \frac{1}{2} A_m t^2 + A_b \quad (76),$$

$$\Delta\sigma(t) = A_{c1} \cos(\omega_{\dot{\epsilon}}t) + A_{s1} \sin(\omega_{\dot{\epsilon}}t) + A_{c2} \cos(\omega_{f\dot{\epsilon}}t) + A_{s2} \sin(\omega_{f\dot{\epsilon}}t) + A_l t + A_b \quad (77).$$

(Referenciaként (75)-höz Földváry és Mészáros [2009], Kiss és Földváry [2015], (76)-hoz Kiss és Földváry [2017a], Steffen et al [2012] és (77)-hez Steffen et al [2009], Gido et al [2019] adható meg). A (75)-(77) egyenletekben $\Delta\sigma$ a tömeganomália időszora, t az idővektor, $A_{\dot{\epsilon}}$, $\omega_{\dot{\epsilon}}$ és $\varphi_{\dot{\epsilon}}$ az éves periódusú változások amplitúdója, körfrekvenciája és fázisa, $A_{f\dot{\epsilon}}$, $\omega_{f\dot{\epsilon}}$ és $\varphi_{f\dot{\epsilon}}$ a féléves periódus ugyanezen jellemzői, A_l az idősor lineáris trendje, A_m a másodrendű, kvadratikus tag együtthatója, A_b a függvény eltolása; a fázis helyett szinuszos és koszinuszos tagokat figyelembe vételekor A_{c1} és A_{s1} az éves periódus szinuszos és koszinuszos komponenseinek amplitúdói, A_{c2} és A_{s2} pedig a féléves periódus szinuszos és koszinuszos komponenseinek amplitúdói.

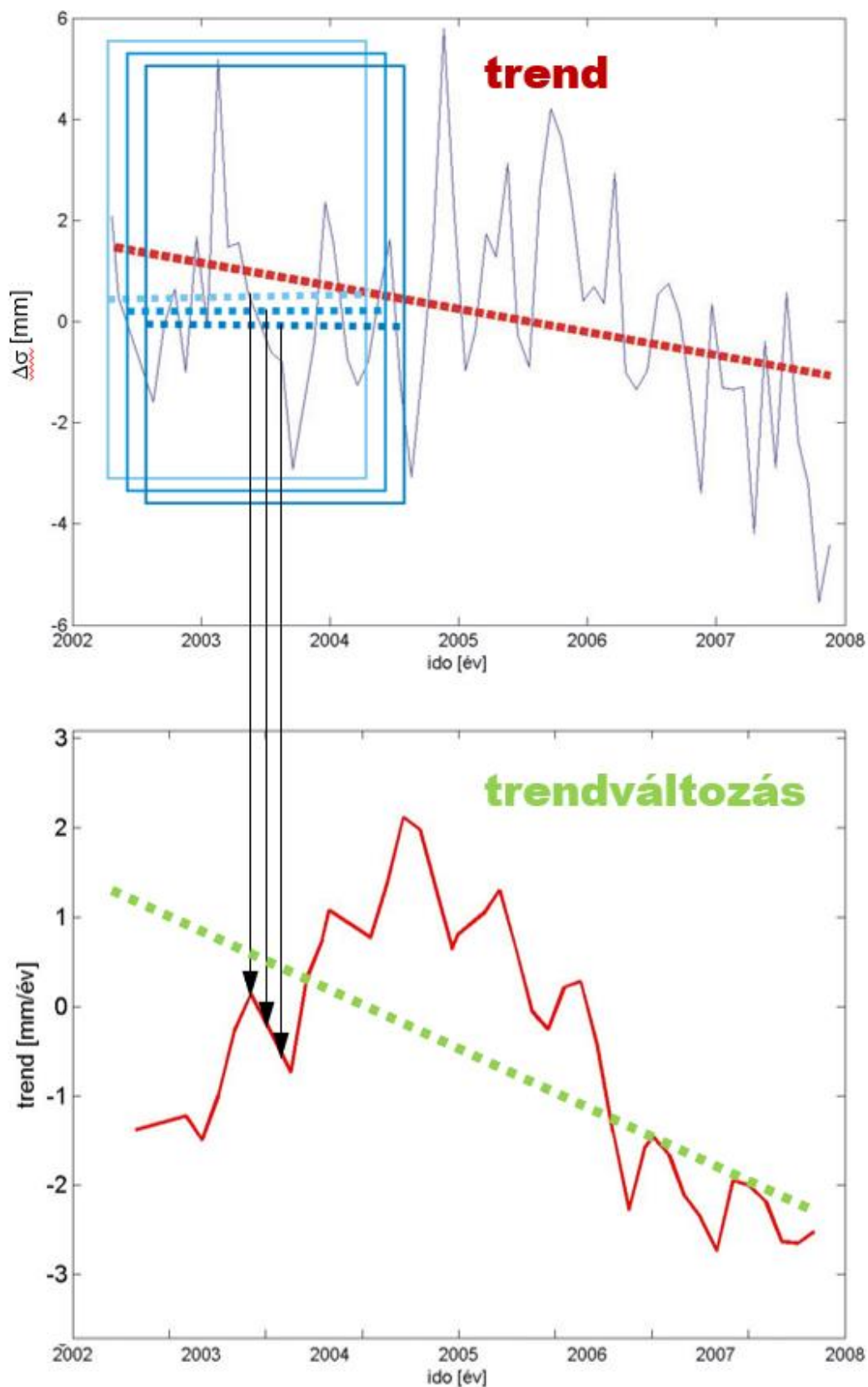
A tömeganomália idősorokból, az (75)-(77) egyenletekkel végzett függvényillesztés eredményeként kapott együtthatókból a Föld tömegátrendezéssel járó geofizikai folyamatainak elemzésére, időbeli változásainak számszerűsítésére és megértésére adódik lehetőség. A feladatot nehezíti azonban, hogy a GRACE és GRACE-FO modellek által kimutatható tömegátrendeződések magasságilag összemosódnak, az egyes kiváltó okok nem különíthetők el egymástól vertikálisan [Kiss és Földváry, 2017a]. Számos területen, így például a globális éghajlatváltozás szempontjából fontos antarktisi jégtakaró időbeli változásainak észleléseiből nem különíthető el a kontinens felúszási folyamatainak hatása (ún. Glacial Isostatic Adjustment, röviden GIA), amely egyrészt a litoszféra (a legutóbbi jégkorszak levonulása óta tartó) lassú, maradandó felúszási folyamatainak, másrészt a jelenkori olvadások következtében fellépő hirtelen jellegű felúszási folyamatainak összessége. Az Antarktisz esetén a GIA felúszás mértéke számottevő, azonban közvetlen méréssel nem, csak földtörténeti áramlás-modellek alapján becsülhető. A gyakorlat azt mutatja, hogy a különböző GIA modellek (eltérő földtörténeti háttérből kiindulva, eltérő paraméterezést feltételezve, valamelyest eltérő módszertannal dolgozva) jelentős eltéréseket mutatnak [Shepherd et al, 2012; Földváry és Kiss, 2016]. Nincs adekvát mérőszáma valamely modell helyességének a többi felett, ennek folyamánya pedig az, hogy az antarktisi jégtakaró időbeli változásának meghatározása során használatos GIA modell kiválasztása egyfajta meggyőződésbeli kérdéssé vált, és a kutatók kvázi önkényesen döntenek arról, hogy az „ICE” modellek aktuális verzióját [Peltier, 1994; Peltier et al, 2015], vagy valamelyik „IJ” modellt [Ivins et al, 2013], vagy ezek valamilyen kombinációját [Whitehouse et al, 2012; Shepherd et al, 2012] választják és használják korrekcióra.



10. ábra. A felszíni tömeganomália GRACE hónapos modellekből számolt lineáris trend értékeinek szintvonalai $\text{kg/m}^2/\text{év}$ mértékegységben.

Az antarktisi jégolvadás becslésére vonatkozó vizsgálatokhoz a CSR (Center for Space Research, University of Texas at Austin) hónapos nehézségi erőtér modelljeit [Bettadpur, 2003] egy bő 7 éves időszakra (2002 áprilisától 2009 májusáig) használtuk fel. Antarktisz területére egy $100 \text{ km} \times 100 \text{ km}$ -es rácshálót vettünk fel, melynek valamennyi pontjában meghatároztuk a (75) egyenlettel a regressziós egyenesek meredekségének, A_l értékeit. A 10. ábrán a rácsháló pontjaiban meghatározott lineáris trend értékekből interpolált szintvonalakat jelenítjük meg. Ezen értékek a GIA-folyamatokkal terheltek, közvetlenül ezekből nem lehet a jégolvadás mértékére következtetni, csak egy GIA modellel történő korrigálás után.

A GIA modell megválasztásának önkényességét elkerülendő, a jégtakaró időbeli változásának meghatározására módszert dolgoztunk ki, amely a GIA modelltől független megoldást szolgáltat [Földváry, 2012; Földváry és Mészáros, 2009]. A módszer lényege, hogy a tömeganomália idősorára, annak szekuláris változásainak meghatározására nem egyetlen regressziós egyenest illesztünk (mint egyébként teszik ezt a gyakorlatban a (75)-(77) egyenletek valamelyikével), hanem részintervallumokra illesztünk regressziós egyeneseket, a részintervallumokat pedig egy-egy epochával a teljes időtartamon végigtolva, az ún. mozgóablak („moving window”) technikával, azok meredekségének változásából a tömeganomália-változás időbeli alakulását határozzuk meg és értelmezzük. Az eredményül kapott trend-idősorra újabb trendet illesztve, a trendváltozást kapjuk, amelyből már differenciálisan kiejtettük a (néhány éves időtartamon belül lineárisnak feltételezhető) GIA-folyamatok hatását.

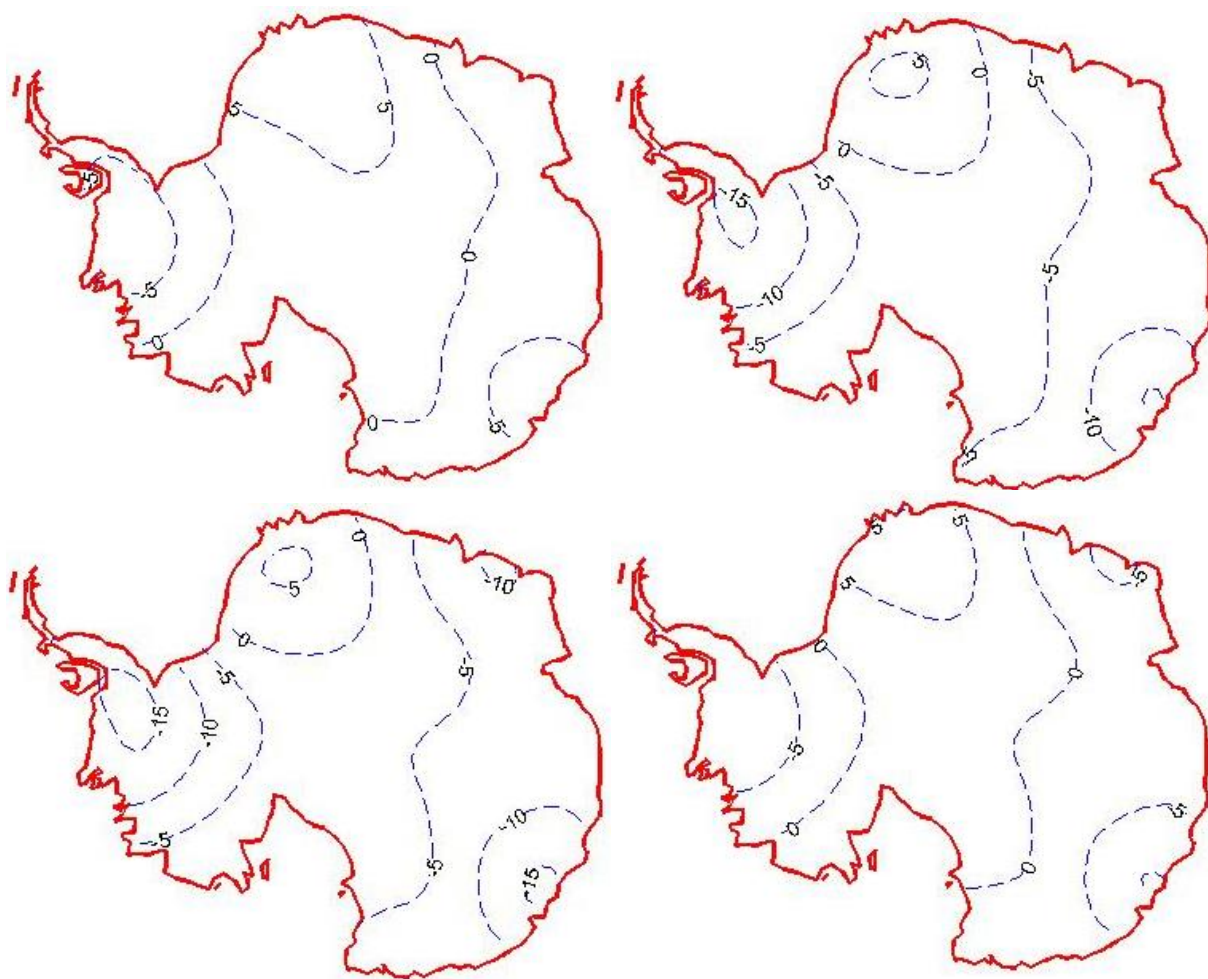


11. ábra. Egy tömeganomália idősor lineáris regresszió becslései 2 éves ablakkal. A 2 éves ablakot egy-egy időponttal elcsúsztatva kismértékben eltérő regressziós egyeneseket kapunk (ablakokban a szaggatott vonalak), amelyek összességében nagyon eltérhetnek a teljes időintervallumra becsült regressziós egyenestől.

A módszer végrehajtásának lényegét szemlélteti a 11. ábra. A megoldás során a teljes idősor első elemeinek összefüggő részhalmazát vesszük, amelyet elég nagyra választunk ahhoz, hogy a regressziós egyenes illesztését (a lineáris trend meghatározását) megbízhatóan el lehessen végezni (a 11. ábra példáján ez 2 év, ami alá nem is igazán lehet menni). A trendet meghatározva, az idősoron egy elemet csúsztatva, újabb trendet határozunk meg, majd a trend meghatározást egy-egy elemmel csúsztatva az egész időtartamra elvégezzük a vizsgálatot. Az egyes trendértékekhez a becslés során használt időintervallum közepét rendeljük időpontként, így a trendértékek idősorát kapjuk (lásd 11. ábra alsó ábrája). A trendek a GIA hatásával terheltek, azonban a trendek idősorára trendet illesztve, az eredményül kapott trendváltozás értékéből a GIA már differenciálisan kiesik. A trendváltozás jelentése az éppen zajló tömegváltozási (csökkenő vagy gyarapodó) folyamat tendenciáját írja le: negatív előjel esetén a tömegcsökkenés felgyorsulását, vagy a tömeggyarapodás lelassulását jelenti, míg pozitív előjel esetén a tömegcsökkenés lassulásának vagy a tömeggyarapodás gyorsulásának lehetünk tanúi.

A módszert az antarktisi jégolvadás becslésére alkalmaztuk a 10. ábrán bemutatott trendbecsléshez használt adatsorral, az ott leírt módon a (75) egyenlettel [Földváry, 2012; Földváry és Mészáros, 2009]. A módszer egyik önkényes paraméterezési lehetősége a mintavételezési ablak hosszának megválasztása. Egy 7 éves adatsort vizsgálva a regressziós egyenes illesztését 2, 3, 4 és 5 éves ablakokkal elvégezve megkaptuk az antarktisi kontinens területére felvett 100km×100 km-es rácsháló valamennyi pontjában a regressziós egyenesek meredekségét.

Mivel az eredményül kapott trendértékek több-dimenziósak térben és időben, az értelmezéshez területi és/vagy időbeli átlagolásra van szükség. Valamennyi pontban és valamennyi időpontban kiszámoltuk a trend értékét, ezek időbeli átlagát képezve határoztuk meg a 12. ábrán látható lineáris trend értékeket.



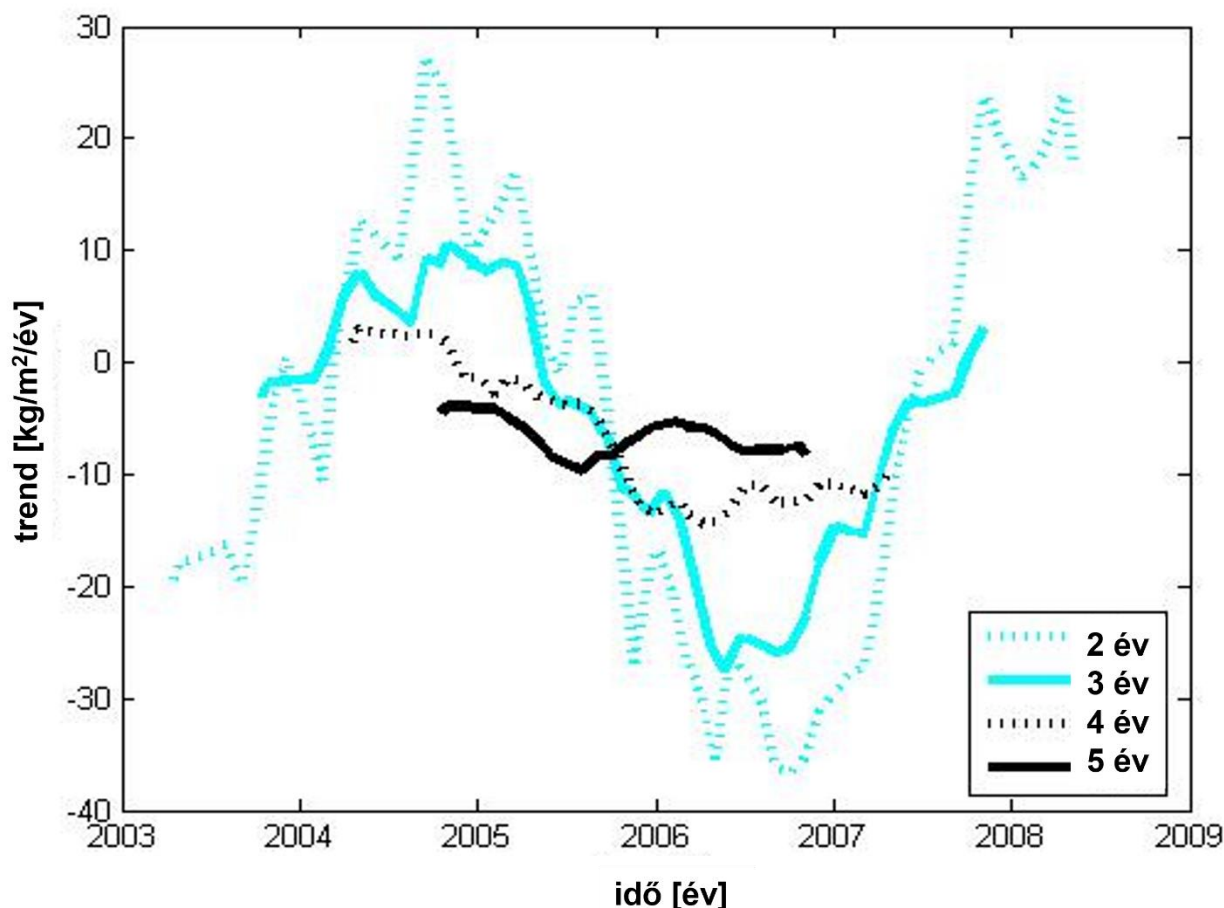
12. ábra. A felszíni tömeganomália GRACE hónapos modellekből számolt lineáris trend értékeinek szintvonalai $\text{kg/m}^2/\text{év}$ mértékegységben különböző mozgóablakkal számolt trendek átlagaként, ahol a mozgóablak mérete (bal felül) 2 év, (jobb felül) 3 év, (bal alul) 4 év, (jobb alul) 5 év.

Az átlagként kapott trendek egymáshoz hasonló képet, de eltérő nagyságú változásokat mutatnak. A változatosság mérésére a 12. ábra modelljeinek időbeli átlaga mellett a szórását is meghatároztuk, amelynek területi átlagait mutatja a 6. táblázat.

6. táblázat. Antarktiszra számolt trendek területi és időbeli átlagainak statisztikái

ablakméret	trend	a trend szórása
2 év	$-6,5 \text{ kg/m}^2/\text{év}$	$\pm 21,3 \text{ kg/m}^2/\text{év}$
3 év	$-8,1 \text{ kg/m}^2/\text{év}$	$\pm 13,0 \text{ kg/m}^2/\text{év}$
4 év	$-8,6 \text{ kg/m}^2/\text{év}$	$\pm 6,9 \text{ kg/m}^2/\text{év}$
5 év	$-8,3 \text{ kg/m}^2/\text{év}$	$\pm 2,8 \text{ kg/m}^2/\text{év}$

A 6. táblázat alapján elmondható, hogy növekvő ablakméret mellett csökkenő szórást tapasztalunk, ami a trendbecslés időszaktól való függéséről nyújt információt: minél rövidebb időszak áll a rendelkezésünkre, annál esetlegesebb a becsült trend hasonlatossága a valódi trendhez képest. Ez részben nyilvánvaló eredmény, azonban a nagyságrendeket nézve láthatjuk, hogy egy 7-éves időszak távlatában is 2-éves, illetve 3-éves időszakot becsülve a trend megbízhatósága jóval nagyobb, mint maga a trend, tehát a trend jellege (jégtakaró esetén: olvadó vagy gyarapodó volta) sem nyilvánvaló. Ez egyrészt felhívja a figyelmet az idősorokból végzett becslések esetlegességére, másrészt pedig a mindenkori mérési idősorok folytatásának igényére a minél hosszabb idősor elemzése végett.



13. ábra. Regressziós egyenes meredekség értékek területi átlaga 2, 3, 4 és 5 éves ablakokkal végzett illesztések alapján. [Földváry, 2012]

Míg a 12. ábra a lineáris trend időbeli átlagait, addig a 13. ábra a területi átlagokat mutatja. Az ábráról látható, hogy a 2, 3 és 4 éves ablak esetén is a számítás helyétől függően hol pozitív (gyarapodó), hol negatív (olvadó) trendet kapunk. Ezen idősorok ráadásul még a GIA-folyamatok hatásával is terheltek, ami valamennyi görbének ismeretlen mértékű eltolását jelenti. A Földváry [2012] tanulmány által javasolt módszer szerint a lineáris trendek helyett azoknak az időbeli változását érdemes meghatározni, tehát lineáris trendeket illesztettünk a 13. ábra görbéire. A trendváltozások értékeit összegzi a 7. táblázat.

7. táblázat. Antarktiszra számolt trendváltozások időbeli átlagai

ablakméret	trendváltozás
2 év	-3,6 kg/m ² /év ²
3 év	-4,1 kg/m ² /év ²
4 év	-3,2 kg/m ² /év ²
5 év	-1,8 kg/m ² /év ²

A trendváltozások azt mutatják, hogy az Antarktiszon a jégtakaró változásai (abszolút értékük pontatlan ismerete ellenére), a kontinens területét egy egységként kezelve, alapvetően olvadó tendenciájúak. A trendváltozások használata informatív egyrészt azért, mert azok a trendillesztés időtartamától kevésbé függenek (lásd 7. táblázat értékei), másrészt pedig a GIA-folyamatok hatásától mentesek. (A GIA modell alkalmazása nélküli differenciális módszert a **5. tétel** mutatja be).

V. A mérések feldolgozásának elvi nehézségei

Shannon mintavételi törvénye [Shannon, 1949; Shannon, 1998] értelmében elviekben sávkorlátos jelek mintavételezése során bekövetkező jelvesztés teljesen visszaállítható: mivel az időtartományban a sávkorlátos jel mintavételezése (azaz Dirac-impulzusokkal végzett szorzás) a frekvenciatartományban a jel egyéb frekvenciatartományokra sokszorozódását eredményezi, a mintavételezett jel a frekvencia tartományban ablakozással (boxcar szűrővel szorozva) az eredeti jel visszaállítható (lásd Marks [1991]). Ez a megközelítés azonban meglehetősen idealizált, mivel a valóságban a sávkorlátosság nem pontosan biztosított, és a legtöbb esetben a frekvenciasávok között spektrális szivárgás (ún. aliasing) tapasztalható. Bár a gyakorlatban Shannon formulája – a sinc függvény lassú lecsengése miatt – a legritkábban használatos, a Shannon mintavételi törvény jelentősége óriási, mivel elméletileg bármilyen Lebesgue-integrálható függvény (jel) végtelen számú periodikus függvényre alakítható Fourier-transzformáció segítségével:

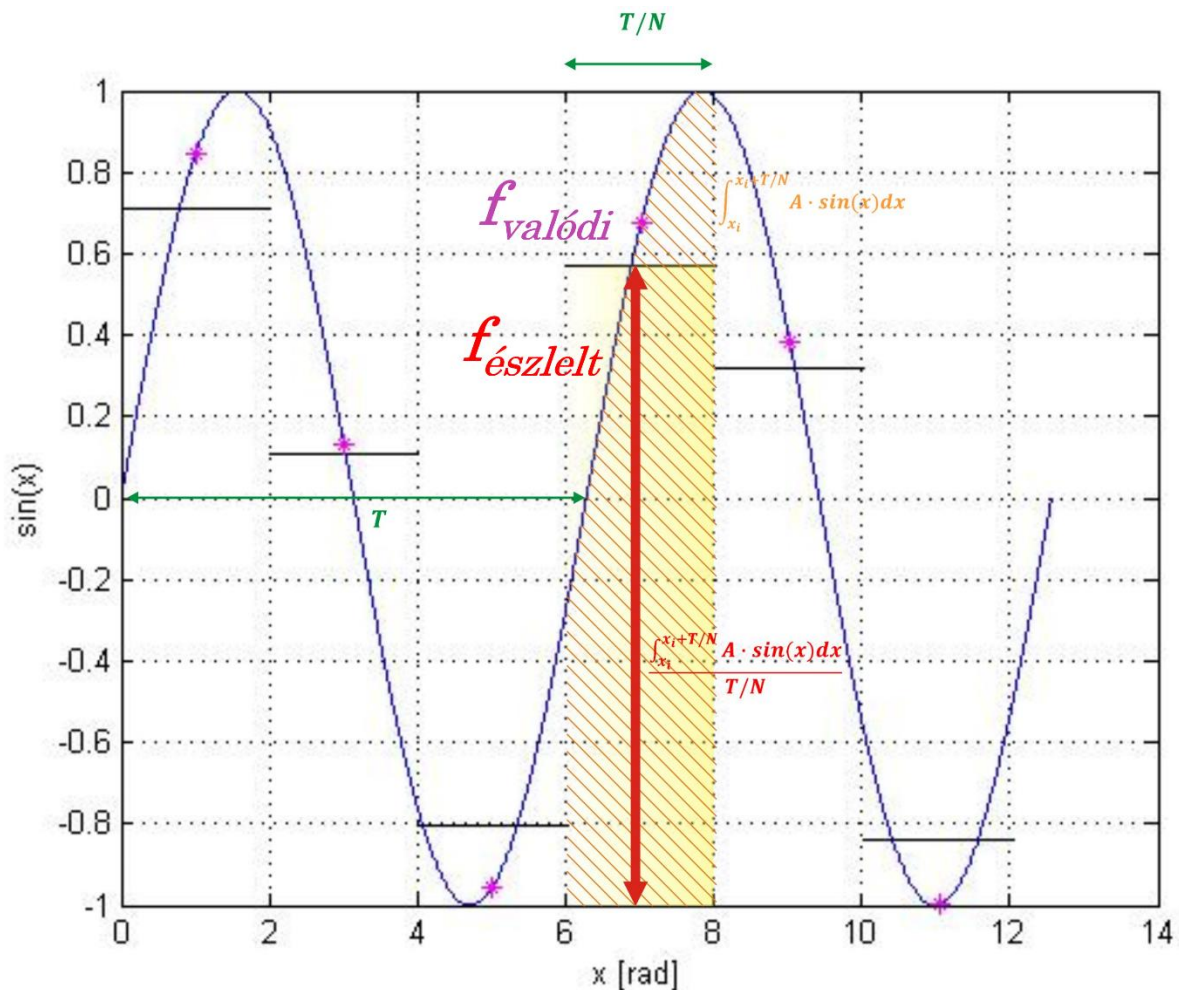
$$f(t) = \sum_{c=0}^{\infty} A_c \sin(2\pi f_c t + \phi_c) \quad (78)$$

Mivel a gyakorlatban a Fourier-transzformáció csak véges frekvenciákra határozható meg, egy-egy jel Fourier-sora nem teljesen felel meg az eredeti függvénynek. A (78) összefüggés azonban értékessé teszi a periodikus függvények vizsgálatát, hiszen a Fourier-spektrum egyes frekvenciáinak ortogonalitása miatt az egyes periódusokra (frekvenciákra) meghatározott valamely jelenséget komponensenként összegezve az egy tetszőleges Lebesgue-integrálható függvényre általánosítható eredményre vezet.

V.1. A hónapos modellek simító hatásának rekonstrukciója

A GRACE hónapos nehézségi erőter modellek földtudományi felhasználásának elsődleges célja az éves- és féléves periódusú tömeganomália változások meghatározása, amelyeket a gyakorlatban a (75)-(77) egyenletek valamelyikével szoktak leírni. A tömeganomália idősorokra az illesztés eredményeként kapott periodikus tag amplitúdója a Föld egyes tömegátrendezéssel járó folyamatainak (hidrológiai folyamatok, óceáni áramlatok) az adott periódusú változásban résztvevő tömegek nagyságát írja le.

A GRACE műhold méréseiből levezetett nehézségi erőter modellek, amelyek alapján a tömeganomália idősort számítjuk, nem egy időpillanatra, hanem egy egész hónapra vonatkoznak, egy teljes hónap méréseiből lettek meghatározva. A (75)-(77) egyenletek szerint azonban a t idővektor elemei nem egy időtartamra, hanem egy időpillanatra vonatkoznak. Általánosságban levezethető, hogy egy periodikus függvényt részintervallumokra mintavételezve, a részintervallumon belüli energiát (görbe alatti területet) meghatározva, annak értéke ($f_{\text{észlelt}}$) abszolút értékben kisebb, mint a függvény értéke a részintervallum középső időpillanatában ($f_{\text{valódi}}$, lásd 14. ábra). Technikailag a mérés időtartama (részintervallum) alatt a függvény idő szerinti integráljának értéke tekinthető a mérés eredményének, azonban a (75)-(77) egyenletek szerinti illesztést alkalmazva ezt a részintervallum középső időpillanatára vonatkozó értéknek tekintjük. Ezek alapján a változás amplitúdóját a (75)-(77) összefüggések bármelyikével becsülve alulbecsüljük a valódi értéket.



14. ábra. Egy $f(x)$ függvény valamely (a képen a $x \in [6,8]$ intervallumára) vonatkozó görbe alatti integrálja kevesebb, mint az intervallum közepén ($x = 7$) a függvény értéke. [Földváry, 2015a]

Levezettük, hogy az alulbecsült amplitúdót a két függvényérték arányával szorozva megkapjuk a megfelelő amplitúdót, így az illesztés függvényére az átlagolódás (integrálás) hatását kiküszöbölendő az alábbi alakban adható meg [Földváry, 2012]:

$$\Delta\sigma(t) = \mathbf{F}(\omega_{\acute{e}})A_{\acute{e}} \sin(\omega_{\acute{e}}t + \varphi_{\acute{e}}) + \mathbf{F}(\omega_{f\acute{e}})A_{f\acute{e}} \sin(\omega_{f\acute{e}}t + \varphi_{f\acute{e}}) + A_t t + A_b \quad (79),$$

ahol a $\mathbf{F}(\omega_i)$ szorzótag tartalma a vizsgálat T periódusának és a mintavételezés ΔT hosszának arányából számítható:

$$\mathbf{F}(\omega_i) = \frac{1}{\text{sinc}\frac{\Delta T}{T}} \quad (80).$$

A GRACE hónapos nehézségi erőter modellekből számított tömeganomália esetén az éves periódus meghatározása során a $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1 \text{ hónap}}{12 \text{ hónap}}$ hányados figyelembevételével $\mathbf{F}(\omega_{\acute{e}}) = 1,0115$, tehát 1,15%-os eltérést jelent, míg a féléves periódus becslése során a $\mathbf{F}(\omega_{f\acute{e}}) = 1,0472$, tehát 4,72%-os különbséget eredményez a korrekció alkalmazása.

Az összefüggés (a mintavételezés következtében fellépő korlátokon belül) tetszőleges függvény átlagolt értékeinek módosítására általánosítható, mivel egy tetszőleges függvény a Fourier-spektrum előállításával periodikus függvények összegére alakítható. A Fourier-spektrum egyes frekvenciáihoz külön korrekció határozható meg. Valamely i . frekvenciához, f_i tartozó korrekciós szorzó tényező, F_i az alábbi:

$$F_i = \frac{1}{\text{sinc}\frac{\Delta T}{T_i}} = \frac{1}{\text{sinc}\frac{f_i}{f_{\Delta T}}} \quad (81),$$

ahol ΔT a mintavételezés időtartama, $f_{\Delta T} = 1/\Delta T$ ennek frekvenciája, hasonlóképpen, a Fourier-spektrum i . frekvenciája és annak periódusideje között a $f_i = 1/T_i$ kapcsolat áll fenn. Nyilvánvalóan a Nyquist-frekvenciánál magasabb frekvenciájú tagok adott mintavételezéssel nem meghatározottak, így nem is korrigálhatók. Emiatt bármely függvény amplitúdójának visszaállítása az átlagolódás hatása alól csak a mintavételezésnek megfelelő felbontásig végezhető. Összességében ezen hiányosság miatt elsősorban sávkorlátos alkalmazások számára lehet hasznos ez az eljárás. A műholdas geodéziai gyakorlatban gyakori a hasznos mérési sáv szélességgel kialakított mérési megoldás, így pl. a GOCE műhold által mért gravitációs gradiensek teljes mérési spektrumából feldolgozásra csak az 5-100 mHz-es intervallum adatait tartják felhasználhatónak.

További általánosítás az abszcisszára vonatkozóan is megadható: az idő szerinti abszcissza a tér valamely iránya is lehet, ami térbeli átlagolás visszaállítására ad lehetőséget (a felbontással megegyező vagy annál nagyobb hullámhosszú változások esetében). Mivel a geodéziai gyakorlat egydimenziós problémával ritkán foglalkozik, életszerűbb ennek felületi, 2D alkalmazása. Erre jó példa a digitális terepmodell (DTM). Egy Δx és Δy mintavételezésű átlagolt értékekkel adott felületi függvény 2D Fourier-transzformáltjának i . frekvenciáján az alábbi szorzóval ellátva javíthatjuk az adott frekvenciához tartozó jel amplitúdóját:

$$F_i = \frac{1}{\text{sinc}(f_i \Delta x)} = \frac{1}{\text{sinc}(f_i \Delta y)} \quad (82),$$

Megjegyezzük, hogy a geodéziai gyakorlat a Föld közel gömb alakja miatt előszeretettel használja a gömbfüggvényeket valamely felületi változó (potenciál, geoidunduláció, nehézségi anomália, gravitációs gradiens, stb.) globális leírására. A gömbfüggvény-sor esetén a térbeli felbontást a gömbharmonikusok foka (n) és rendje (m) szabályozza. A gömbfüggvény-sor hagyományos alakját (v.ö. (17) egyenlet) a korrekció érdekében előbb pusztán szinuszos tagokat tartalmazó alakra kell hozni, ami a potenciálon szemléltetve az alábbi:

$$V = \frac{kM}{R} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sqrt{\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2} \sin(m\lambda + \text{atan2}(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm})) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (83),$$

ahol a jelölések a geodéziai gyakorlatnak megfelelően az alábbiak: V potenciál, k a Newtoni tömegvonzási állandó, M a Föld össztömege, R a közepes sugara, L a maximális fokszám, r , φ és λ a földrajzi koordinátahármas, \bar{C}_{nm} és \bar{S}_{nm} a gömbfüggvény együtthatók, \bar{P}_{nm} pedig a normalizált Legendre-függvény.

Átlagolódásra korrigálni akkor lehet igény, ha az adatok földrajzi koordináták szerinti raszterben állnak rendelkezésre. A potenciál gömbfüggvény-sorát az átlagolódást visszaállító korrekcióval egy fok és rend szerinti szorzó beiktatásával lehet megoldani, melyet a kétszeres

szumma mögött kell alkalmazni, és φ szerinti tagját egy további (i indexszel jelölt) tiszta szinusz-sorrá kell alakítani:

$$F_{nm} = \sum_i F_{nm}(\varphi) \cdot F_m(\lambda) = \sum_i \frac{1}{\text{sinc} \frac{i\Delta\varphi}{2\pi}} \cdot \frac{1}{\text{sinc} \frac{m\Delta\lambda}{2\pi}} \quad (84).$$

A (84) egyenletben $\Delta\varphi$ és a $\Delta\lambda$ a blokkok felbontása a megfelelő földrajzi irányban. (Az időben vagy térben átlagolt adatok szélsőérték-simító hatásának csökkentésére kidolgozott eljárást az **6. tézis** ismerteti).

V.2. A Legendre-polinomok szinusz-soros alakja

A (84) egyenletben szerepel a földrajzi szélesség (φ) szerinti tiszta szinusz-sor. A Földvály [2015b] tanulmány különböző rekurziós formulákat felhasználva teljes indukcióval bemutatja, hogy minden Legendre polinomnak létezik véges taggal megadható tiszta szinusz-soros alakja, majd egy iterációs eljárást ad meg ezek előállítására. Az említett szinusz-soros alak általánosan az alábbi formában írható le:

$$P_{n,m}(\cos \vartheta) = A_{n,m} \sin\left(n\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + A_{n-2,m} \sin\left((n-2)\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + \dots + bias \quad (85)$$

ahol $j = \begin{cases} 1, & \text{ha } m \text{ páros vagy nulla, kivéve } n = 0 \\ 0, & \text{ha } m \text{ páratlan vagy } n = 0 \end{cases}$

A (85) egyenletben $\vartheta = 90 - \varphi$ a sarkmagasság, n és m pedig a Legendre polinom foka és rendje (egyben a gömbfüggvény-sor foka és rendje is), $A_{n,m}$ együtthatók pedig racionális számok. A *bias* értéke csak páros fok és páros rend esetén nem nulla.

A (85) szerinti alak létezése alacsony fokú és rendű tagokra belátható, tetszőleges magasabb fokú és rendű tag (85) egyenlethez hasonló alakja teljes indukcióval meghatározható. A levezetett formula a fokszám növelésére az alábbi:

$$P_{n+1,m}(\cos \vartheta) = B_{n+1,m} \sin\left((n+1)\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + B_{n-1,m} \sin\left((n-1)\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + B_{n-3,m} \sin\left((n-3)\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right) + \dots \quad (86)$$

ahol

$$B_{n-2k+1,m} = \frac{(2n+1)}{(n-m+1)} \frac{A_{n-2k+2,m} + A_{n-2k,m}}{2} - \frac{(n+m)}{(n-m+1)} A_{n-2k+1,m} \quad (87)$$

A (86) egyenlet utolsó tagja külön figyelmet igényel, mely páros $n+1$ esetén $B_{0,m} \sin\left(0 + j\frac{\pi}{2}\right)$, míg páratlan $n+1$ esetén $B_{1,m} \sin\left(\vartheta + j\frac{\pi}{2}\right)$ alakban adható meg, melyek értéke:

$$B_{0,m} = \frac{(2n+1)}{(n-m+1)} \frac{\delta_{(m \text{ odd})}^0 A_{1,m}}{2} - \frac{(n+m)}{(n-m+1)} A_{0,m} \quad (88)$$

$$B_{1,m} = \frac{(2n+1)}{(n-m+1)} \frac{A_{2,m} + 2A_{0,m}}{2} - \frac{(n+m)}{(n-m+1)} A_{1,m} \quad (89)$$

ahol $\delta_{(m \text{ odd})}^0$ az ún. Kronecker delta, mely páros m esetén 1, egyébként 0 értékű.

Létezik egy (86)-hoz hasonló formula a rend növelésére is. Ez az alábbi:

$$P_{n,m+1}(\cos \vartheta) = B_{n,m} \sin\left(n\vartheta + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right) + B_{n-2,m} \sin\left((n-2)\vartheta + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right) + B_{n-4,m} \sin\left((n-4)\vartheta + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right) + \dots + B_{0,m} \sin\left(0 + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right) \quad (90)$$

ahol

$$B_{n-2k,m} = 2s_j \left[(n-m) \left(\frac{A_{n-2k,m}}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} A_{n-2i,m} \right) - (n+m) \sum_{i=0}^{k-1} A_{n-2i-1,m} \right] \quad (91)$$

ebben \tilde{j} a j inverze, tehát

$$\tilde{j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = 0 \\ 0, & \text{ha } j = 1 \end{cases}$$

$$\text{és } s_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = 0 \text{ és } \tilde{j} = 1 \\ -1, & \text{ha } j = 1 \text{ és } \tilde{j} = 0 \end{cases}$$

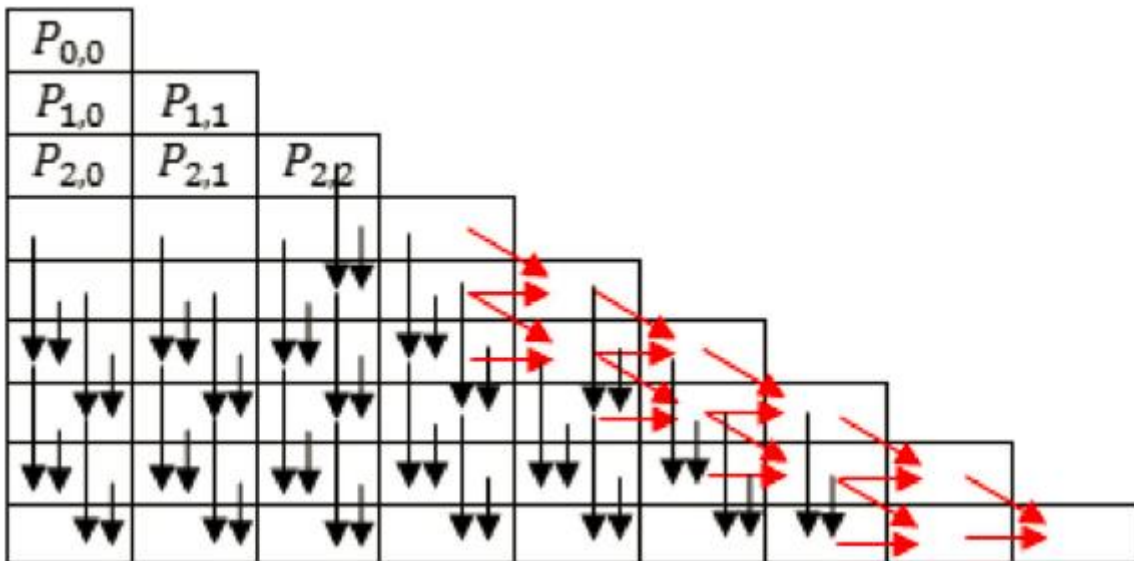
továbbá $k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$

A (90) egyenlet utolsó tagja ismét külön figyelmet igényel, mely páros n esetén $B_{0,m} \sin\left(0 + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right)$, míg páratlan n esetén $B_{1,m} \sin\left(\vartheta + \tilde{j}\frac{\pi}{2}\right)$ alakban megadható, melyek értéke:

$$B_{1,m} = s_j \left[(n-m) \frac{-A_{1,m}}{2} - (n+m) \sum_{i=0}^{k-1} A_{n-2i-1,m} \right] \quad (92)$$

$$B_{0,m} = (-1)^n (2n-1)!! \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} \quad (93)$$

ahol a $!!$ jelölés a kettős faktoriálisra vonatkozik. A (86)-(93) egyenletek lehetővé teszik a Legendre polinomok tiszta szinuszos leírását zárt alakban, valamennyi együtthatót racionális számokkal megadva.



15. ábra. A rekurziós formulák alkalmazásának javasolt sémája. [Földváry, 2015b]

A kapcsolódó pontossági vizsgálat alapján a számításokhoz javasolt sémát a 15. ábra mutatja [Földváry, 2015b]. Az ábrán a fekete nyíl a (86) egyenlet használatát, míg a piros nyíl a numerikusan kevésbé stabil (90) egyenlet használatát javasolja. A levezetett összefüggések gyakorlati jelentőségére példa a (84) egyenlet. (A Legendre-függvények teljes szinuszos alakjának rekurziós összefüggéseire vonatkozó eredményeket a 7. tétel összegzi).

V.3. A mintavételezés hibahatása

Ebben a részben analitikus formulát vezetünk le periodikus függvények mintavételezési hibahatásának becslésére, Földváry [2021] alapján. A mintavételi hiba becslése négy paraméterrel történik: amplitúdó, fázis, eltolás és periodicitás. Ezek ismeretében a mintavételezés tervezése során annak felbontása optimalizálható.

Induljunk ki egy periodikus jelből, melyet egyértelműen meg lehet adni az A amplitúdóval, az ω jelfrekvenciával és a ϕ fázissal az alábbi formában:

$$f(x) = A \sin(2\pi\omega x + \phi) \quad (94),$$

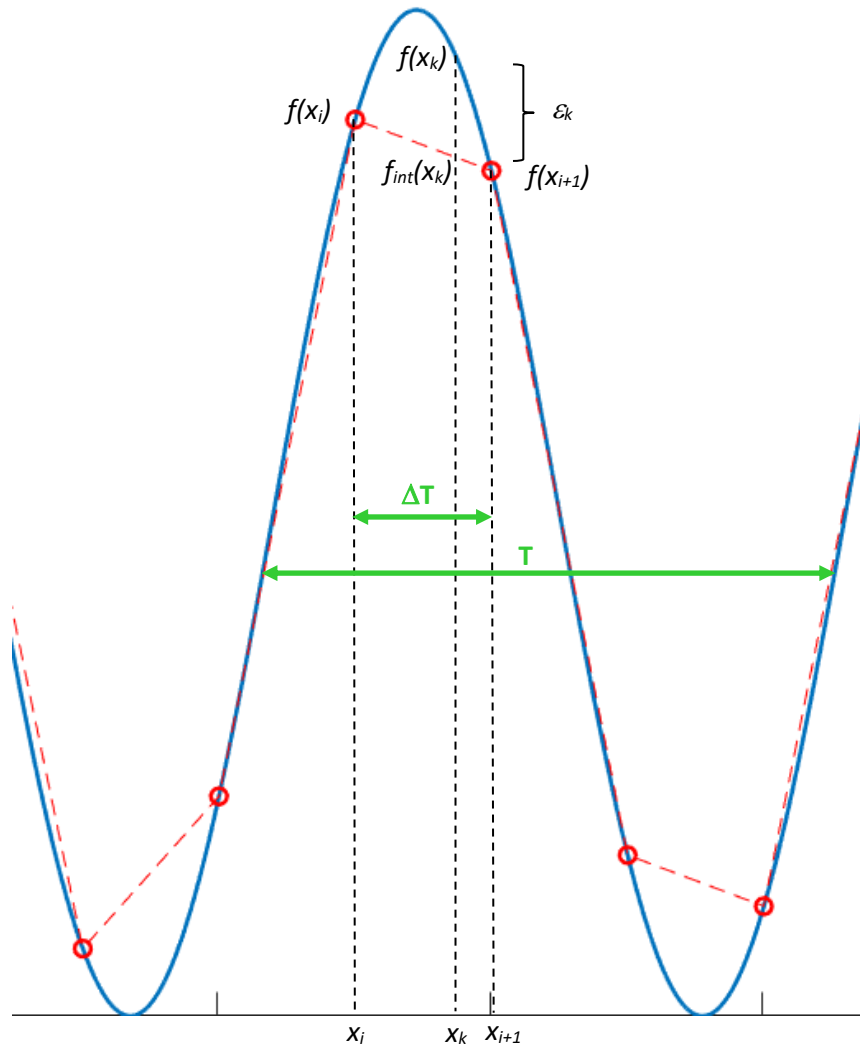
ahol x jelöli a független változót.

Egy szabályos T periódusú (tehát $\omega = 1/T$ frekvenciájú) jelet mintavételezzünk szabályos $\Delta T = 1/f_s$ lépésközzel, ahol f_s jelölje a mintavételezési frekvenciát. A T periódussal változó jel jellegét, nagyságát és hullámhosszát tekintve tetszőleges lehet, így gondolhatunk akár időben változó folyamatra másodpercekben, órákban, években vagy évezredekben mérve azt, vagy akár helyhez kötött mennyiségekre milliméterben, méterben, kilométerben vagy csillagászati egységben lépésközökkel mintavételezve. A jel és a mintavételezés relatív kapcsolatát (a jel jellegétől és mértékegységétől függetlenül) jellemzi, hogy egy periódus alatt hány mintavételezésre kerül sor, tehát a jel, ω és a mintavételezés, f_s frekvenciáinak az aránya:

$$N = \frac{\omega}{f_s} = \frac{\Delta T}{T} \quad (95).$$

Mivel a jel jellege és nagysága bármilyen lehet, az általánosítás jegyében az A amplitúdót egységnyire vesszük, és a mintavételezés okozta hibát az ω jelfrekvencia és az N arány függvényében az amplitúdó százalékában jellemezzük. Jelen vizsgálat során felhasználjuk, hogy a gyakorlatban (a gazdaságossági és technológiai szempontokat figyelembevétele mellett) a mintavételezést olyan gyakorisággal végezzük, hogy az a jelet megfelelően vissza tudja adni, és két mintavételezés közötti részét lineárisnak feltételezhetjük. Ha a gyakorlatban ez nem teljesül, akkor különféle matematikai interpolációs technikákkal finomítjuk az interpoláció pontosságát. A jelen vizsgálat a legegyszerűbb lineáris interpolációra korlátozódik. Tesszük ezt egyrészt azért, mert a mérnöki gyakorlatban ez a leggyakrabban használt eljárás, másrészt azért, mert (szemben egyéb interpolációs eljárásokkal) lineáris interpolációt feltételezve következetesen alul-becsüljük a periodikus jel nagyságát, tehát szabályos hibát vétünk.

Vizsgáljuk a 16. ábrának megfelelően azt az esetet, amikor a független változó, x_k két mintavételezett érték közé, x_i és x_{i+1} esik. Ekkor a mintavételezés hibája a valódi érték, $f(x_k)$ és az interpolált érték, $f_{int}(x_k)$ különbsége, ε_k .



16. ábra. Periodikus jel mintavételezésének hibája lineáris interpolációt feltételezve

Az interpolált függvényérték, $f_{int}(x_k)$ egy osztópont, amely a $(x_i, f(x_i))$ és $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ pontok közötti szakaszt $(x_k - x_i) : (x_{i+1} - x_k)$ arányban osztja. Így:

$$f_{int}(x_k) = \frac{(x_{i+1} - x_k)f(x_i) + (x_k - x_i)f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \quad (96).$$

Az 16. ábra alapján a (96) összefüggés figyelembevételével a mintavételezés hibája:

$$\varepsilon_k = f(x_k) - f_{int}(x_k) = f(x_k) - \frac{(x_{i+1} - x_k)f(x_i) + (x_k - x_i)f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \quad (97).$$

A (97) egyenletben két egymást követő abszcissa különbsége (az egyenlet jobb oldalán a nevező) a mintavételezés lépésköze, $\Delta T = x_{i+1} - x_i$.

A mérnöki gyakorlatban a hiba (így a mintavételezés hibája) becslésére leginkább az L2-normát (eseténként L1-normát vagy L_∞ -normát) használjuk, amelyet az L1-normára kapott összefüggés felhasználásával nyerünk. A mintavételezés hibájának L1-normája az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumban az ε_k eltérések (lásd 16. ábra) átlagértékeként határozható meg, azaz

$$\sigma_{L1}([x_i, x_{i+1}]) = \frac{L1([x_i, x_{i+1}])}{n} = \frac{\sum_{x_i}^{x_{i+1}} |\varepsilon_k|}{n} = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varepsilon(x)| dx}{\Delta T} \quad (98).$$

A (98) egyenlet utóbbi tagja folytonos változó esetén írja le a hibát a valódi és az interpolált görbék közötti terület formájában. Földváry [2021] leírása alapján a mintavételezés L1-norma szerinti hibájára (a (94) és (97) egyenletek (98)-ba helyettesítésével)

$$\sigma_{L1}([x_i, x_{i+1}]) = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| A \sin(2\pi\omega x + \phi) - \frac{(x_{i+1}-x)A \sin(2\pi\omega x_i + \phi) + (x-x_i)A \sin(2\pi\omega x_{i+1} + \phi)}{\Delta T} \right| dx}{\Delta T} \quad (99),$$

az alábbi eredményre vezet:

$$\sigma_{L1}([x_i, x_{i+1}]) = |C \cdot \cos(2\pi\omega x_i + \phi) + S \cdot \sin(2\pi\omega x_i + \phi)| \quad (100),$$

ahol

$$C = \frac{A}{2\pi\omega\Delta T} - \frac{A}{2} \sin(2\pi\omega\Delta T) - \frac{A}{2\pi\omega\Delta T} \cos(2\pi\omega\Delta T) \quad (101)$$

és

$$S = -\frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi\omega\Delta T} \sin(2\pi\omega\Delta T) - \frac{A}{2} \cos(2\pi\omega\Delta T) \quad (102).$$

Bevezetve a

$$n = 2\pi N = 2\pi\omega\Delta T \quad (103)$$

jelölést (101) és (102) egyszerűbb alakot öltenek:

$$C = \frac{A}{n} - \frac{A}{2} \sin(n) - \frac{A}{n} \cos(n) \quad (104)$$

és

$$S = -\frac{A}{2} + \frac{A}{n} \sin(n) - \frac{A}{2} \cos(n) \quad (105).$$

Felhasználva továbbá a $C \cdot \cos(\alpha) + S \cdot \sin(\alpha) = R \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ konverziót, a C és S paraméterek R és ϕ paraméterekre alakíthatók, tehát:

$$\sigma_{L1}([x_i, x_{i+1}]) = R \cdot |\sin(2\pi\omega x_i + \phi + \varphi)| \quad (106),$$

ahol

$$R = \sqrt{2} \frac{A}{n} \sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{4}\right) - n \sin(n) - \left(1 - \frac{n^2}{4}\right) \cos(n)} \quad (107)$$

és

$$\varphi = \arctg \frac{1 - \frac{n}{2} \sin(n) - \cos(n)}{-\frac{n}{2} + \sin(n) - \frac{n}{2} \cos(n)} \quad (108).$$

Fontos eredmény, hogy a (107) és (108) egyenletek kizárólag a mintavételezési lépésköz és a jel periódusának n hányadosától (lásd (103) egyenlet) függenek. A (85) egyenletben szerepel még az A amplitúdó is, amely a jel méretarányát és mértékegységét hivatott definiálni R értékében.

Hasonlóan, a mintavételezés hibájának L2-normája is levezethető, ahol az L2-normát jelentő négyzetes középhibaként,

$$\sigma_{L2}([x_i, x_{i+1}]) = \frac{L2([x_i, x_{i+1}])}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_k^2}{n}} = \sqrt{\frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon(x)^2 dx}{\Delta T}} \quad (109).$$

Behelyettesítve (94) és (97) összefüggéseket a (109)-ben szereplő határozott integrálba

$$L2([x_i, x_{i+1}])^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(A \sin(2\pi\omega x + \phi) - \frac{(x_{i+1} - x) A \sin(2\pi\omega x_i + \phi) + (x - x_i) A \sin(2\pi\omega x_{i+1} + \phi)}{\Delta T} \right)^2 dx \quad (110)$$

összefüggést nyerjük, melyből szintén egy kompakt összefüggés nyerhető

$$L2([x_i, x_{i+1}])^2 = C \cdot \cos(4\pi\omega x_i + 2\phi) + S \cdot \sin(4\pi\omega x_i + 2\phi) + B \quad (111)$$

alakban, ahol

$$C = -\frac{A^2 \Delta T}{24\pi^2 \omega^2 \Delta T^2} \{4\pi^2 \omega^2 \Delta T^2 - 6 + (4\pi^2 \omega^2 \Delta T^2 - 6) \cos(4\pi\omega \Delta T) + (4\pi^2 \omega^2 \Delta T^2 + 12) \cos(2\pi\omega \Delta T) - 9\pi\omega \Delta T \sin(4\pi\omega \Delta T)\} \quad (112),$$

$$S = -\frac{A^2 \Delta T}{24\pi^2 \omega^2 \Delta T^2} \{9\pi\omega \Delta T - (4\pi^2 \omega^2 \Delta T^2 - 6) \sin(4\pi\omega \Delta T) - (4\pi^2 \omega^2 \Delta T^2 + 12) \sin(2\pi\omega \Delta T) - 9\pi\omega \Delta T \cos(4\pi\omega \Delta T)\} \quad (113),$$

és

$$B = -\frac{A^2\Delta T}{24\pi^2\omega^2\Delta T^2}\{12 - 20\pi^2\omega^2\Delta T^2 - (4\pi^2\omega^2\Delta T^2 + 12)\cos(2\pi\omega\Delta T)\} \quad (114).$$

Felhasználva (103) összefüggést n definíciójára, ez az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$C = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\left\{n^2 - 6 + (n^2 - 6)\cos(2n) + (n^2 + 12)\cos(n) - \frac{9}{2}n\sin(2n)\right\} \quad (115),$$

$$S = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\left\{\frac{9}{2}n - (n^2 - 6)\sin(2n) - (n^2 + 12)\sin(n) - \frac{9}{2}n\cos(2n)\right\} \quad (116),$$

és

$$B = -\frac{A^2\Delta T}{6n^2}\{12 - 5n^2 - (n^2 + 12)\cos(n)\} \quad (117).$$

Ismét felhasználva a $C \cdot \cos(\alpha) + S \cdot \sin(\alpha) = R \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ konverziót, a C és S paraméterek a velük egyenértékű R és φ paraméterekkel is megadhatók

$$L2([x_i, x_{i+1}])^2 = R \cdot \sin(4\pi\omega x_i + 2\phi + \varphi) + B \quad (118)$$

alakban, ahol

$$R = \frac{A^2\Delta T}{6n^2}\left(\left(n^2 + 12 - 9n\sin(n) + (2n^2 - 12)\cos(n)\right)^2 \cos^2(n) + \frac{1}{4}(-9n + 9n\cos(2n) + (2n^2 - 12)\sin(2n) + (2n^2 + 24)\sin(n))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (119),$$

$$\varphi = \arctg \frac{n^2 - 6 + (n^2 - 6)\cos(2n) + (n^2 + 12)\cos(n) - \frac{9}{2}n\sin(2n)}{\frac{9}{2}n - (n^2 - 6)\sin(2n) - (n^2 + 12)\sin(n) - \frac{9}{2}n\cos(2n)} \quad (120)$$

és B marad a (117) szerinti formában. A (115)-(120) összefüggések alapján a (109) egyenletben megadott $L2([x_i, x_{i+1}])$ szerinti mintavételezési hiba így alakul:

$$\sigma_{L2}([x_i, x_{i+1}]) = \frac{L2([x_i, x_{i+1}])}{\sqrt{\Delta T}} = \sqrt{\frac{L2([x_i, x_{i+1}])^2}{\Delta T}} = \sqrt{\frac{R \cdot \sin(4\pi\omega x_i + 2\phi + \varphi) + B}{\Delta T}} \quad (121).$$

Erre az esetre tehát nincs zárt formában megoldás. Mindazonáltal a (107) és (108) egyenletekhez hasonlóan, (119) és (120) egyenletek is csak a mintavételezési lépésköz és a jel periódusa n arányától függenek, illetve itt is az R szolgáltatja a méretarányt és a mértékegységet a (119) egyenletben a $A^2\Delta T$ szorzó formájában.

Az L1-norma szerinti hibára levezetett (100), (104)-(108) összefüggések, valamint az L2-normára levezetett (111)-(121) összefüggések lehetővé teszik valamely mintavételezett

periodikus jel mintavételezése okozta hibája mértékének és periodicitásának meghatározását. Példaképpen a levezetett összefüggéseket alkalmaztuk a GRACE és GRACE-FO nehézségi anomália idősoraira az Amazonas vízgyűjtőjére. Az éves periódusú jelnek a mintavételezés hónapos időbeli felbontása okozta mintavételezési hiba L1-norma szerint maximálisan 2,27%-re alakul, míg L2-norma esetén ugyanez a jel 2,49%-a. (A periodikus függvények mintavételezési hibahatásának L1- és L2-norma szerinti becslésére kidolgozott eljárást a **8. tézis** ismerteti).

VI. Az új tudományos eredmények alapján megfogalmazott tézisek

1. tézis.

Kidolgoztam és a gyakorlatban elsők között alkalmaztam az energia integrál összefüggését a globális nehézségi erőtér meghatározása céljából (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Gerlach et al, 2003; Földváry et al, 2004; Wermuth et al, 2004a]).

1.1 altézis. Az energia integrál módszert kidolgoztam és alkalmaztam High-Low SST műholdakra (pl. CHAMP) [Földváry et al, 2004; Gerlach et al, 2003; Wermuth et al, 2004a; Wermuth et al, 2004c]

1.2 altézis. Az energia integrál módszert kidolgoztam és alkalmaztam Low-Low SST műholdakra (pl. GRACE) [Paizs és Földváry, 2006; Paizs és Földváry, 2007]

2. tézis.

Új eljárást dolgoztam ki a nehézségi erőtér meghatározására a Newtoni mozgásegyenletek alapján (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry és Bokor, 2010]).

3. tézis.

Mért diszkrét adatsor deriválására alkalmas technikák vizsgálata alapján optimális eszközt találtam LEO típusú műholdak sebességének és gyorsulásának meghatározására (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Svehla és Földváry, 2006; Földváry, 2007a, Földváry, 2007b; Földváry, 2008b]).

3.1 altézis. Kimutattam, hogy a 7 epochára Newton-Gregory interpolációval függvényt illesztve, azt analitikusan deriválva a kapott függvény használata célravezető módszer.

3.2 altézis. Kimutattam, hogy előzetesen ismert nehézségi erőtér modell felhasználása pontos függvényillesztést alkalmazó módszerek esetén nem befolyásolja a megoldást, azonban simító eljárások esetén az eredmény az ismert modell hatását tükrözheti.

3.3 altézis. Kimutattam, hogy gyorsulások meghatározására az első derivált képzése két egymást követő lépésben jóval pontosabb eredményt szolgáltat, mint a második derivált meghatározása közvetlenül, egy lépésben.

4. tézis.

Elsőként alkalmaztam IIR-szűrőt a GOCE-gradiensek sávkorlátos jellegének szűrésére. Az IIR-szűrő a hivatalos eljárásban használt FIR-szűrővel hasonló eredményre vezetett, használata azonban hatékonyabbnak tekinthető (kapcsolódó publikációk: [Földváry et al, 2014b; Polgár et al, 2013]).

5. tézis.

Új eljárást fejlesztettem ki a permanens jég- és hótakaró napjainkban tapasztalható megváltozásának becslésére GRACE hónapos nehézségi erőtér modellek alapján (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Földváry és Mészáros, 2009; Földváry, 2012]).

6. tézis.

Eljárást dolgoztam ki időben vagy térben átlagolt adatok szélsőérték-simító hatásának csökkentésére, és kimutattam ezek gyakorlati jelentőségét a geodéziai gyakorlatban (fontosabb kapcsolódó publikációk: [Földváry, 2015a; Földváry, 2018]).

6.1 altézis. Eljárást fejlesztettem mért periodikus idősorok amplitúdójának pontosítására (alkalmas GRACE hónapos nehézségi erőtér modellek alapján végzett éves- és féléves periódusú tömegátrendeződések vizsgálatára).

6.2 altézis. A módszert általánosítottam tetszőleges mérési adatsor vizsgálatára annak Fourier-spektruma alapján (felhasználható mért GOCE gravitációs gradiensek energia spektrumának pontosítására).

6.3 altézis. A módszert adoptáltam felületi függvényekre (alkalmas blokkokba átlagolt DTM-ek szélsőértékeinek a felbontásnak megfelelő hullámhosszhoz rendelhető visszaállítására).

6.4 altézis. Levezettem az eljárás gömbfüggvény-soros alakját (felhasználható a fizikai geodéziai változók térbeli átlagolásának pontosítására a Föld felületére számolt szintézis során).

7. tézis.

Új rekurziós összefüggéseket vezettem le a Legendre-függvények teljes szinuszos alakja meghatározására (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry, 2015b]).

8. tézis.

Új analitikus formulát vezettem le periodikus függvények mintavételezési hibahatásának mind L1, mind L2-norma szerinti becslésére. (fontosabb kapcsolódó publikáció: [Földváry, 2021]).

VII. Tudományos hozzájárulás a tézisekben megfogalmazott eredményekhez

Az egyes tézisek esetén az új kutatási eredményeket alátámasztó publikációk listáját böngészve látható, hogy esetenként azok társszerzőkkel közösen végzett kutatás eredményeként adódott. Ezekben az esetekben szükséges letisztázni a jelölt szerepvállalását, tudományos hozzájárulását a kutatásokhoz.

Az 1. tézis 1.1 altézisének kutatásait alátámasztó publikációk alapján látható, hogy azok a Technische Universität München Institute für Astronomische und Physikalische Geodäsie intézményében egy kutatócsoport keretében születtek. Az együttműködés során az egyes kutatóknak meghatározott szerepük volt, a feldolgozás egyes lépései szerint egymástól elkülönítve. Első lépésben a nyers mérési adatokból Drazen Svehla állított elő kinematikus és fél-dinamikus műholdpályákat. A nyers gyorsulásmérő mérésekből nem gravitációs eredetű gyorsulásokat Björn Frommknecht és Helmut Oberdorfer állítottak elő. Második lépésben a műhold pályák és a nem gravitációs eredetű gyorsulások idősorai alapján a jelölt feladata volt az energia integrál szerinti feldolgozás, tehát a CHAMP-mérések műholdas pályadataiból a kiegyenlítés bemeneti adatát jelenő potenciálzavar idősor számítását végezte. A harmadik lépés a kiegyenlítés, ezért Martin Wermuth felelt. Ezt követően a negyedik lépésben az eredmények értékelését jelentő validációt Thomas Gruber végezte. Összességében elmondható, hogy az 1.1 altézis a fent leírt második lépésre vonatkozik, mely alapvetően a jelölt munkája, amelyhez kisebb mértékben hozzájárult Christian Gerlach, akitől a jelölt a feladatot intézményen belül „megörökölte”, továbbá a kutatóhely senior kutatói, Reiner Rummel és Markus Rothacher.

Az 1. tézis 1.2 altézise a jelölt és a jelölt akkori doktoranduszának közös munkája. A jelölt az elméleti alapozást, az összefüggések levezetését és a számítások egyes moduljainak fejlesztését végezte, míg Paizs Zoltán doktorandusz a számítások kivitelezéséért felelt. Az alapelv kigondolása és kidolgozása okán a jelölt az 1.2 altézist teljes egészében sajátjának tekinti.

A 2. tézist alátámasztó publikáció társszerzője Bokor Zsolt diplomázó hallgató. A jelölt ebben az esetben is önállóan végezte az elméleti alapozást és az összefüggések levezetését, így a jelölt 2. tézist is teljes egészében sajátjának tekinti.

A 3. tézist alátámasztó publikációk közül csak a Svehla és Földváry [2006] publikáció társszerzős. Ebben az esetben a cikk egyértelműen két részre osztható: az első rész, a pályameghatározás Drazen Svehla munkája, míg a második részt adó sebességmeghatározás a jelölt önálló munkája. A 3. tézis teljes egészében a jelölt önálló munkájának tekinthető.

A 4. tézis esetén számottevő hozzájárulást jelentett Sujbert László és Polgár Zsuzsanna munkája. A probléma felvetése és megfogalmazása, a teszt adatok előállítás, a szűrés után a gradiensek megfelelő koordinátarendszerbe transzformálása és az eredmények értelmezése a jelölt munkája. A szűrőtervezést Sujbert László docens úr Polgár Zsuzsanna hallgatóval közösen végezte. A közös munka Polgár Zsuzsanna TDK dolgozata kapcsán indult meg, és egy intézményen belüli, szakterületek közötti szakmai együttműködéssé formálódott.

Az 5., 6., 7. és 8. tézisek egyértelműen a jelölt önálló munkái, amelyet a sok egyszerezős cikke is alátámaszt. Egyedüli társszerzője az egyik cikkben Mészáros Péter, aki a téma kidolgozása során egy kisebb részfeladathoz járult hozzá, de az elméleti rész kidolgozását önállóan a jelölt végezte.

VIII. A kutatás és a bemutatott eredmények hatása, visszhangja

A nehézségi erőter modellek pontossága napjainkban – a folyamatosan bővülő műholdas adatmennyiség következtében – nagyon gyorsan nő. Így egy 10 évvel ezelőtti modell mára már elavultnak tekinthető. Azonban a maga idejében, a jelölt részvételével az energia integrál alkalmazásával (1. tézis) készült TUM-1S modell [Gerlach et al, 2003], majd annak későbbi generációi, a TUM-2Sp [Földváry et al, 2004] és TUM-2S [Wermuth et al, 2004a] modellek nemzetközi szinten korszerű, nagy pontosságú modelleknek számítottak. A fontosabb nehézségi erőter modelleket az International Centre for Global Earth Models (ICGEM) honlapján foglalják össze, a korábbi és az aktuális újabb modelleket itt teszik közzé [Barthelmes és Köhler, 2012]. A folyamatosan bővülő nehézségi erőter modellek között az említett TUM nehézségi erőter modelleket is nyilvántartják, a felhasználók számára elérhetővé teszik. Az MTMT alapján a kapcsolódó publikációkra ([Földváry et al, 2004; Gerlach et al, 2003; Wermuth et al, 2004a; Paizs és Földváry, 2006; Paizs és Földváry, 2007; Wermuth et al, 2004c]) kapott független hivatkozások száma összesen 107.

A Ilk et al [2005] által kidolgozott „short arc” módszer sikeresnek bizonyult; minden egyéb módszer feletti sikerét bizonyítja, hogy az EGM2008 kombinált nehézségi erőter modell [Pavlis et al, 2012] meghatározása során a GRACE méréseket a „short arc” módszeren alapuló ITG-GRACE03S modell [Mayer-Gürr et al, 2007] felhasználásával végezték. Ekkorra minden egyéb eljárás a háttérbe szorult, így a jelölt által a Newtoni mozgásegyenletek alapján levezetett nehézségi erőter modell meghatározási módszere (2. tézis) sem terjedt el, mivel a vizsgált műhold esetén (CHAMP) ez alulmaradt a pontosság tekintetében. Fontos hangsúlyozni azonban, hogy a pontosságbeli eltérés nem nagyságrendi, így a módszer bizonyította alkalmazhatóságát, csak a CHAMP műhold esetén nem vezetett optimális eredményre. Mindenképpen egy alternatív módszerré válhat későbbi műholdas megoldások méréseinek feldolgozása számára. Az MTMT alapján a kapcsolódó publikációra ([Földváry és Bokor, 2010]) kapott független hivatkozások száma 3.

Az energia integrál használatához a műhold pillanatnyi pozíciója mellett szükség van a sebesség pontos ismeretére. Az említett nehézségi erőter modellek (TUM-1S, TUM-2Sp, TUM-2S) számára a jelölt numerikus differenciálási technikákra végzett vizsgálatai alapján (3. tézis), az általa definiált paraméterezéssel a simító spline eljárást és a Newton-Gregory interpolációt alkalmazták. Az MTMT alapján a kapcsolódó publikációkra ([Svehla és Földváry, 2006; Földváry, 2007a; Földváry, 2007b; Földváry, 2008b]) kapott független hivatkozások száma 29.

A GOCE műhold által mért gradiensek sávkorlátos jellegűek, a nagy pontosságú mérések az 5-100 mHz mérési tartományra korlátozódnak. A mért gradiensek szűrésére alkalmazott FIR-szűrő [Schuh et al, 2010] mellett jó alternatívát jelent a jelölt által javasolt IIR-szűrő (4. tézis), mely információ el is jutott a témával foglalkozó, meglehetősen szűk szakmai körhöz, de a hivatalos feldolgozási módszer során nem alkalmazták. Az MTMT alapján a kapcsolódó publikációkra ([Földváry et al, 2014b; Polgár et al, 2013]) kapott független hivatkozás száma 8.

A földfelszín és a felszín közeli rétegek tömegeloszlásának időbeli változása összetett folyamatok eredménye, ami miatt a permanens jégtakaró oladási és gyarapodási folyamatainak meghatározása GRACE erőter modellek alapján (5. tézis) nem tekinthető egyértelműen megoldható feladatnak. A hibák egy jelentős részét adja az egyes területek legutóbbi jégkorszak óta tartó maradandó felúszási folyamata. Ez ugyanis szintén a

tömegeloszlás átrendeződését eredményezi, amit el kell tudni különíteni a jégtakaró tömegváltozásaitól. Az MTMT alapján a kidolgozott differenciális módszer kapcsolódó publikációkra ([Földváry és Mészáros, 2009; Földváry, 2012]) kapott független hivatkozások száma 6.

Az időben és/vagy térben átlagolt adatok szélsőértékei ellaposodásának csökkentésére a jelölt által kidolgozott módszer (6. tézis) elméleti jellegű, a kapcsolódó publikációk kevésbé keltették fel a szakmai közönség érdeklődését ([Földváry, 2015a; Földváry, 2018]), eddig csak 1 független hivatkozást kapott a téma. Azonban a módszer kidolgozása során levezetett rekurziós összefüggések, melyek a Legendre-függvények Fourier-soros alakját adják meg (7. tézis), illetve az ebből írt publikáció ([Földváry, 2015b]) összesen 4 (ebből 3 nívós) független hivatkozást kapott. A periodikus függvények mintavételezési hibahatásának L1- és L2-norma szerinti becslése (8. tézis) egészen friss, egyelőre nincs visszhangja ([Földváry, 2021] frissen, 2021-ben publikálva). Az MTMT alapján a kapcsolódó publikációkra ([Földváry, 2015a; Földváry, 2015b; Földváry, 2018; Földváry, 2021]) kapott független hivatkozások száma 5.

Köszönetnyilvánítás

Több évtizedes kutatói munka számára elengedhetetlen a megfelelő támogatás, a megfelelő családi és baráti háttér. A család és a barátok támogatásáért végtelen hálával tartozom. Azonban a mű jellegénél fogva itt a kollégáktól kapott szakmai és emberi támogatást szeretném kiemelni. Elsősorban szeretném megköszönni a „megköszönhetetlen” édesanyámnak, Varga Magdolnának, akin keresztül kiskoromtól kezdve ismerkedtem a földmérő és egyetemi oktató munkájával, a mérnöki szemlélet alapjaival, a kutatás és szakpublikáció írás módszertanával. Szeretném megköszönni támogatását és iránymutatásait doktori tanulmányaim konzulensének, Prof. Fukuda Yoichinek, továbbá a posztdoktori évek alatt témavezetőmnek, Prof. Reiner Rummelnek. Hazatérve mind a BME-n, mind az Óbudai Egyetemen, de általánosságban az egész szakmában támogató légkör fogadott. Szeretnék köszönetet mondani valamennyi hazai kollégámnak, közülük kiemelten (fontossági sorrend helyett abc-sorrendben, a köszönet okának részletezése nélkül) Ádám Józsefnek, Bacsárdi Lászlónak, Balázsik Valériának, Barsi Árpádnak, Biró Péternek, Busics Györgynek, Csapó Gézának, Detrekői Ákosnak, Égető Csabának, Karem Fathynak, Fekete Gábornak, Fényi Istvánnak, Ferencz Orsolyának, Fodor Csillának, Frey Sánrodnak, Gósz Zoltánnak, Hegyi Péternek, Horvai Ferencnek, Horváth Gábor Istvánnak, Hudoba Györgynek, Iván Gyulának, Józsa Jánosnak, Kenyeres Ambrusnak, Kiss Mártának, Kiszely Mártának, Koppán Andrásnak, Koseczky Ádámnak, Kovács Annának, Kovács Istvánnak, Kovács Kálmánnak, Kratochvilla Krisztinának, Krauter Andrásnak, Kristóf Dánielnek, Laky Sándornak, Laky Piroskának, Lamár Krisztiánnak, Lázár Lajosnak, Lehoczky Máténak, Márkus Bélának, Mélykúti Balázsnak, Mélykúti Gábornak, Mentés Gyulának, Molnár Gábornak, Nagy Edinának, Nagy Gábornak, Nyilas Annamáriának, Paál Dávidnak, Pálincás Bélának, Palya Tamásnak, Papp Gábornak, Pődör Andreának, Quang Hop Trannak, Rózsa Szabolcsnak, Somodi Balázsnak, Stenzel Sándornak, Szabó Györgynek, Szabó Józsefnek, Szántó Marcellnek, Szarka Lászlónak, Szűcs Eszternek, Szűcs Lászlónak, Suba Norbertnek, Sujbert Lászlónak, Timár Gábornak, Tóth Erzsébetnek, Tóth Gyulának, Tóth Zoltánnak, Trupka Zoltánnak, Tuchband Tamásnak, Ultmann Zitának, Vámosy Zoltánnak, Varga Feliciánnak, Varga Péternek, Vekerdy Zoltánnak, Virág Gábornak, Völgyesi Lajosnak, Wesztergom Viktornak, Wojtaszek Malgorzatának, Zádori Adriánnak, Závoti Józsefnek, Zentai Istvánnak, Zentai Lászlónak.

Külföldi tanulmányaim és vendégkutató útjaim során is sok támogatást kaptam, ezért köszönettel leginkább az alábbi kollégáknak tartozom: Sato Tadahiro, Ateya Ismail Lukandu, Leni Sophia Heliani, Heki Kosuke, Takiguchi Hiroshi, Christian Gerlach, Martin Wermuth, Indridi Einarsson, Markus Rothacher, Thomas Gruber, Roland Pail, Harald Schuh, Jürgen Müller, Kal-Heinz Ilk, Ulrich Schreiber, Tóth Károly, Christopher Jekeli, CK Shum, Aive Liibusk, Nico Sneeuw, Vita Norbert, Wang Guangcai, Su Zixiao, Meng Qingyan, Huang Xiangzhi és Wang Dong. A közelmúltban zárult EU-s projektekben a közös munkáért köszönettel tartozom a következő kollégáknak: Nga Duong, Thomas Bauer, Markus Immitzer, Reinfried Mansberger, Jacek Kozak, Ivan Oliveira, Arno van Lieshout, Sarawut Ninsawat, Chitrini Mozumder, Pipat Reungsang, Ilhom Abdurahmanov, Mamanbek Reimov, Polat Reymov, Medetbay Oteuliev, Otabek Avezbaev, Malika Aminjanova, Azizjon Ruziev, Sabine Henning, Josef Strobl, Stefan Lang, Erika Blaschke, Max Hoffman és Florian Schierhorn,

Irodalmi hivatkozások listája

- [1]. Balmino, G., Perosanz, F., Rummel, R., Sneeuw, N., Sünkel, H. (2001) CHAMP, GRACE and GOCE: mission concepts and simulations. *Bollettino di Geofisica Teorica e Applicata* 40(3–4):309–320.
- [2]. Barthelmes, F. és Köhler, W. (2012) International Centre for Global Earth Models (ICGEM), *Journal of Geodesy, The Geodesists Handbook 2012*, 86(10), pp. 932-934. A modelleket tartalmazó link: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
- [3]. Baur, O. (2012) On the computation of mass-change trends from GRACE gravity field time-series. *Journal of Geodynamics*, 61, pp. 120–128.
- [4]. Bettadpur, S. (2003) Level-2 Gravity Field Product User Handbook, Rev 1.0. GRACE 327-734 (CSR-GR-03-01), Center of Space Research, the University of Texas at Austin, p. 18.
- [5]. Bouman, J., Rispens, S., Gruber, T., Koop, R., Schrama, E., Visser, P., Tscherning, C., Veicherts, M. (2009) Preprocessing of gravity gradients at the GOCE high-level processing facility. *Journal of Geodesy*, 83, pp. 659–678.
- [6]. Bouman, J., Fiorot, S., Fuchs, M., Gruber, Th., Schrama, E., Tscherning, Ch., Veicherts, M., Visser, P. (2011) GOCE gravitational gradients along the orbit. *Journal of Geodesy*, 85, pp. 791–805.
- [7]. Colombo, O. (1981) Numerical methods for harmonic analysis on the sphere, OSU Series on Geodesy, Report No. 310, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, p. 147.
- [8]. Csapó G., Földvály L. (2006) A magyarországi gravimetria története napjainkig, *Geodézia és Kartográfia* 59(7), pp. 23-30.
- [9]. Földvály L. (2004) A gravimetriai műholdak korszaka, *MAGYAR GEOFIZIKA* 45(4), pp. 118-124.
- [10]. Földvály, L. (2007a) Analysis of numerical differentiation methods applied for determination of kinematic velocities for LEOs, *Periodica. Polytechnica Civil Engineering*, 51/1, pp. 17-24.
- [11]. Földvály, L. (2007b) Determination of satellite velocity and acceleration from kinematic LEO orbits, *ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA HUNGARICA* 42(4), pp. 399–419.
- [12]. Földvály L. (2007c) Az évszakos nehézségi erőter változások GRACE műholdas meghatározásának pontossági kérdései, *Geodézia és Kartográfia* 59(8-9), pp. 40-46.
- [13]. Földvály L. (2008a) Globális klimatológiai változások hatása a nehézségi erőterre és annak műholdas észlelési lehetősége, *Magyar Tudomány*, 169 (2008/6), pp. 704-714.
- [14]. Földvály, L. (2008b) Spectral analysis of CHAMP kinematic velocities determined by applying smoothing cubic splines, *Periodica. Polytechnica Civil Engineering*, 52/1, pp. 29-34.
- [15]. Földvály L. (2012) Mass-Change Acceleration in Antarctica from GRACE Monthly Gravity Field Solutions. In: *Geodesy for Planet Earth, Proceedings of IAG Symposium in Buenos Aires* (eds: Kenyon, S., Pacino, M. C., Marti, U.), IAG Symposia Series, Vol. 131, pp. 591-597.

- [16]. Földváry, L. (2015a) Desmoothing of averaged periodical signals for geodetic applications, *Geophysical Journal International*, 201 (3), pp. 1235-1250, DOI 10.1093/gji/ggv092
- [17]. Földváry, L. (2015b) Sine series expansion of associated Legendre functions, *Acta Geodaetica et Geophysica*, 50(2), pp. 243-259, DOI 10.1007/s40328-014-0092-2
- [18] Földváry, L. (2018) Desmoothing of block-wise gridded geoinformation, *Journal of Geographical Society of Uzbekistan, Special Volume*, pp. 22-27.
- [19]. Földváry L. (2019) GRACE hónapos nehézségi erőter változások elemzése és előrejelzése ARIMA modellezéssel, *GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK*, XXII, pp. 7-27.
- [20] Földváry L. (2021) Sampling Error of Continuous Periodic Data and its Application for Geodesy, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, in print, DOI 10.22541/au.159654396.62738949
- [21]. Földváry, L., Bokor, Zs. (2010) Determination of a CHAMP gravity model based on the Newtonian equation of motion, *Periodica. Polytechnica Civil Engineering*, 54(2), pp. 155–161.
- [22]. Földváry, L., Fukuda, Y. (2001a) IB and NIB hypotheses and their possible differentiation by GRACE, *GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS* 28(4), pp. 663-666.
- [23]. Földváry, L., Fukuda, Y. (2001b) Evaluation of temporal variations on the gravity fields caused by geophysical fluids and their possible detection by GRACE In: *Gravity, Geoid, and Geodynamics 2000, IAG Symposia, Vol 123*. (Ed. Sideris M. G.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, pp. 143-148.
- [24]. Földváry, L., Fukuda, Y. (2002a) On the effects of the atmospheric corrections of the GRACE measurements for studies of oceanography, *PERIODICA POLYTECHNICA-CIVIL ENGINEERING* 46(2), pp. 185-198.
- [25]. Földváry, L., Fukuda, Y. (2002b) Effects of atmospheric variations on the marine geoid determined by forthcoming gravity satellites. In: *Vistas for Geodesy in the New Millennium, IAG Symposia, Vol. 125*. (Ed. Ádám J, Schwarz K. P.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, pp. 187-192.
- [26]. Földváry, L., Kemény, M., Asbóth, P. (2014a) Semi-analytical approach for adjusting GOCE SGG observations, 9th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas - AIS2014, Székesfehérvár November 12, 2014, ISBN: 978-615-5460-21-0, pp. 31-36.
- [27]. Földváry, L., Kiss, A. (2015) A globális geoid időbeli változásainak meghatározása, In: *XVI. Földmérő Találkozó konferencia kiadványa* (editor: J. Ferencz), Zilah, 2015.05.14-17., Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, pp. 33-37.
- [28]. Földváry, L., Kiss, A. (2016) Accuracy analysis of Glacial Isostatic Adjustment models using for satellite gravimetry, 11th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2016), Székesfehérvár November 11, 2016, ISBN: 978-615-5460-92-0, pp. 5-10.
- [29]. Földváry, L., Kiss, A., Su, Z.X., Wang, G. C., Wang, L. (2015a) Accuracy investigations of GRACE-borne ice mass variations in Antarctica, *Earth Science Frontiers* 22(4), pp. 239-246.

- [30]. Földváry, L., Mészáros, P. (2009) Az Antarktisz tömegátrendeződéseinek vizsgálata GRACE geopotenciális modellek alapján, GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK, XII., pp. 109-118.
- [31]. Földváry, L., Nyilas, A. (2020) A GRACE-FO első másfél éve, Geodézia és Kartográfia, 72:2020/4, pp. 4-9, DOI: 10.30921/GK.72.2020.4.1
- [32]. Földváry, L., Statov, V., Mamutov, N. (2020) Applicability of GRACE and GRACE-FO for monitoring water mass changes of the Aral Sea and the Caspian Sea. In: InterCarto. InterGIS. GI support of sustainable development of territories: Proceedings of the International conference. Moscow: Moscow University Press, V. 26. Part 2. P
- [33]. Földváry, L., Sujbert, L., Polgár, Zs. (2014b) A GOCE műhold gravitációs gradiens méréseinek szűrése és pontossági kérdései, GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK, XVII., pp. 33-45.
- [34]. Földváry, L., Svehla, D., Gerlach, Ch., Wermuth, M., Gruber, Th., Rummel, R., Rothacher, M., Frommknecht, B., Peters, Th., Steigenberger, P. (2004) Gravity model TUM-2sp based on the energy balance approach and kinematic CHAMP orbits In: Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit (Ed. Reigber Ch, Lühr H, Schwintzer P et al.), Springer, Berlin, pp. 13-18.
- [35]. Földváry, L., Tóth, Gy., Kiss, A., Kemény, M. (2015b) GOCE műhold: Eötvös-inga mérések Föld körüli pályán, Magyar Tudomány, 176 (2015/9), pp. 1063-1070.
- [36]. Földváry, L., Wermuth, M. (2003) Semi-Analytical Gravity Field Analysis Applied to Satellite-to-Satellite Tracking Data In: Observation of the System Earth from Space (eds. Rudloff, A.; Stroink, L.), GEOTECHNOLOGIEN Science Report, Nr. 3, Koordinierungsbüro GEOTECHNOLOGIEN, ISSN 1619-7399, pp. 51-53.
- [37]. Földváry, L., Wermuth, M. (2005) Gravity inversion techniques for high-low SST applied to a simulated GOCE orbit, ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA HUNGARICA 40(1), pp. 1-13.
- [38]. Fukuda, Y., Földváry, L. (2001) Environmental corrections for the precise gravity observations by mean of satellite gravity data, Journal of the Geodetic Society of Japan 47(2), pp. 679-685.
- [39]. Gerlach, Ch., Földváry, L., Svehla, D., Gruber, Th., Wermuth, M., Sneeuw, N., Frommknecht, B., Oberdorfer, H., Peters, Th., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2003) A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral, GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS 30(20): 2037, doi:10.1029/2003GL018025
- [40]. Gido, N.A.A., Bagherbandi, M., Sjöberg, L.E., Tenzer, R. (2019) Studying permafrost by integrating satellite and in situ data in the northern high-latitude regions. Acta Geophysica. 67, pp. 721–734.
- [41]. Greville, T. N. E. (1969) Theory and applications of spline functions. Proceedings of an advanced seminar conducted by the Mathematics Research Center, United States Army, at the University of Wisconsin, Madison, October 7-9, 1968. Academic Press, New York, London, p. 212.
- [42]. Han, S. C. (2003) Efficient Global Gravity Determination from Sattelite-to-Sattelite Tracking, OSU Series on Geodesy, Report No. 467, Columbus, Ohio: Geodetic and Geoinformation Science, Ohio State University, p. 110.

- [43]. Ilk, K. H., Mayer-Gürr, T., Feuchtinger, M. (2005) Gravity Field Recovery by Analysis of Short Arcs of CHAMP. In: Reigber C., Lühr H., Schwintzer P., Wickert J. (eds) Earth Observation with CHAMP. Springer, Berlin, Heidelberg. pp. 127-132, https://doi.org/10.1007/3-540-26800-6_20
- [44]. Ivins, E. R., James, T. S., Wahr, J., Schrama, E. J. O., Landerer, F. W., Simon, K. M. (2013) Antarctic contribution to sea level rise observed by GRACE with improved GIA correction. *Journal of Geophysical Research, Solid Earth*, 118, pp. 1-16.
- [45]. Kemény, M., Földváry, L. (2015) Számítástechnikai fejlesztés műholdas gravimetriai adatok feldolgozására, *GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK*, XVIII/2., pp. 53-62.
- [46]. Kiss, A., Földváry, L. (2015) Éves hidrológiai változások meghatározása GRACE geopotenciális modellek segítségével, *GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK*, XVIII/2., pp. 43-52.
- [47]. Kiss, A., Földváry, L. (2017a) Uncertainty of GRACE-borne long periodic and secular ice mass variations in Antarctica, *Acta Geodaetica et Geophysica*, 52:(4), pp. 497–510.
- [48]. Kiss, A., Földváry, L. (2017b) Seasonal hydrologic variations in the La Plata basin from GRACE gravity field models, *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 14:(2), pp. 145–152.
- [49]. Kiss, A., Földváry, L. (2018) Multi-annual mass variations from GRACE monthly solution – preliminary results; *Acta Geodyn. Geomater.*, Vol. 15, No. 2 (190), pp. 165-172, DOI 10.13168/AGG.2018.0011
- [50]. Marks, R.J. (1991) *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Springer-Verlag, New York, p. 324.
- [51]. Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Ilk, K. H. (2007) ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn, presented at the Joint International GSTM and SPP Symposium, Potsdam, Germany, 15–17 October. 2007.
- [52]. Mayrhofer, R., Pail, R., Fecher, T. (2010) Quick-look gravity field solution as part of the GOCE quality assessment, in: *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium*, H. Lacoste-Francis, Ed., ESA Publication SP-686, ESA/ESTEC. ISBN:978-92-9221-250-6; ISSN:1609-042X
- [53]. Paizs, Z., Földváry, L. (2006) Gravitációs modell meghatározása 4 hónap GRACE mérési adatból, *Geodézia és Kartográfia* 59(9), pp. 7-11.
- [54]. Paizs, Z., Földváry, L. (2007) Geopotenciális modell számítása GRACE mikrohullámú távolságmérés alapján, *GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK*, X., pp. 201-210.
- [55]. Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., Factor, J. K. (2012) The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008);, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* (1978-2012), 117, B04406, <https://doi.org/10.1029/2011JB008916>
- [56]. Peltier, W. R. (1994) Ice Age Paleotopography. *Science, New Series*, 265(5169), pp. 195-201.
- [57]. Peltier, W. R., Argus, D. F., Drummond, R. (2015) Space geodesy constrains ice-age terminal deglaciation: The global ICE-6G_C (VM5a) model. *Journal of Geophysical Research, Solid Earth*, 120, pp. 450-487.

- [58]. Petit, G., Luzum, B. (2010): IERS Conventions (2010), IERS Technical Note No. 36. ISSN: 1019-4568, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, p. 179.
- [59]. Polgár, Z., Sujbert, L., Földváry, L., Asbóth, P., Ádám, J. (2013) Filter design for GOCE gravity gradients, *Geocarto International*, 28(1), pp. 28-36, DOI:10.1080/10106049.2012.687401
- [60]. Reigber, C., Schwintzer, P., Neumayer, K. H., Barthelmes, F., König, R., Förste, C., Balmino, G., Biancale, R., Lemoine, J. M., Loyer, S., Bruinsma, S., Perosanz, F., Fayard, T. (2003) The CHAMP-only earth gravity field model EIGEN-2; *Advances in Space Research*, Vol 31, No. 8, p. 1883-1888, doi: 10.1016/s0273-1177(03)00162-5
- [61]. Reigber, Ch., Schmidt, R., Flechtner, R., König, R., Meyer, U., Neumayer, K. H., Schwintzer, P., Zhu, S. Z. (2005) An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE01S, *Journal of Geodynamics* 39, no. 1, pp. 1–10, DOI 10.1016/j.jog.2004.07.001
- [62]. Reinsch, Ch. (1967) Smoothing by spline functions, *Numerische Mathematik*, Vol. 10, pp. 177–183, DOI 10.1007/BF02162161
- [63]. Schönberg, I. J. (1964) On interpolation by spline functions and its minimal properties, *On Approximation Theory. Proceedings of the Conference held in the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, August 4–10, 1963.* Basel-Stuttgart: Birkhäuser, p. 109.
- [64]. Schuh, W. D., Brockmann, J. M., Kargoll, B., Krasbutter, I., Pail, R. (2010) Refinement of the stochastic model of GOCE scientific data and its effect on the in-situ gravity field solution. *Proceedings of the ESA living planet symposium (szerk. Lacoste-Francis H), ESA Publications SP-686, 28. June–2. July 2010, Bergen, Norway, ISBN: 978-92-9221-250-6*
- [65]. Shannon, C. E. (1949) Communication in the presence of noise, in: *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10-21.
- [66]. Shannon, C. E. (1998) Classic paper: Communication in the presence of noise, *Proc. IEEE*, vol. 86, no. 2, pp. 447–457.
- [67]. Shepherd, A., Ivins, E. R., Geruo, A., Barletta, V. R., Bentley, M. J., Bettadpur, S., Briggs, K. H., Bromwich, D. H., Forsberg, R., Galin, N., Horwath, M., Jacobs, S., Joughin, I., King, M. A., Lenaerts, J. T. M., Li, J., Ligtenberg, S. R. M., Luckman, A., Luthcke, S. B., McMillan, M., Meister, R., Milne, G., Mouginot, J., Muir, A., Nicolas, J. P., Paden, J., Payne, A. J., Pritchard, H., Rignot, E., Rott, H., Sørensen, L. S., Scambos, T. A., Scheuchl, B., Schrama, E. J. O., Smith, B., Sundal, A. V., van Angelen, J. H., van de Berg, W. J., van den Broeke, M. R., Vaughan, D. G., Velicogna, I., Wahr, J., Whitehouse, P. L., Wingham, D. J., Yi, D., Young, D., Zwally, H. J. (2012) A Reconciled Estimate of Ice-Sheet Mass Balance. *Science*, 338, pp. 1183–1189, doi:10.1126/science.1228102
- [68]. Sneeuw, N. (2000) A Semi-Analytical Approach to Gravity Field Analysis, *DKG Series*, vol. C 527, p. 154.
- [69]. Sneeuw, N., Gerlach, Ch., Földváry, L., Gruber, Th., Peters, Th., Rummel, R., Svehla, D. (2005) One year of time-variable CHAMP-only gravity field models using kinematic orbits In: *A Window on the Future of Geodesy, IAG Symposia, Vol 128.* (Ed. Sanso F), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 288-293.

- [70]. Somodi, B., Földváry, L. (2011) Application of numerical integration techniques for orbit determination of state-of-the-art LEO satellites, *Periodica Polytechnica Civil Engineering* 55/2, pp. 99–106.
- [71]. Somodi, B., Földváry, L. (2012) Accuracy of numerical integration techniques for GOCE orbit determination, In: Mokryš M, Lieskovský A (eds.), *Proceedings in Advanced Research in Scientific Fields: The 1st Virtual International Conference*. Zilina, Slovakia, 2012.12.03-2012.12.07, EDIS Zilina University Publishers, Zilina, ISBN: 978-80-554-0606-0, pp. 1578-1583.
- [72]. Steffen, H., Petrovic, S., Müller, J., Schmidt, R., Wunsch, J., Barthelmes, F., Kusche, J. (2009) Significance of secular trends of mass variations determined from GRACE data and comparison with geodynamic models. *Journal of Geodynamics*, 46(3–5), pp. 155–164.
- [73]. Steffen, H., Müller, J., Peterseim, N. (2012) Mass variations in the Siberian permafrost region from GRACE. In: *Geodesy for Planet Earth, Proceedings of IAG Symposium in Buenos Aires* (eds: Kenyon, S., Pacino, M. C., Marti, U.), IAG Symposia Series, Vol. 131., pp. 597–603.
- [74]. Svehla, D, Földváry, L. (2006) From kinematic orbit determination to derivation of satellite velocity and gravity field, in: *Observation of the Earth System from Space* (editors: Flury, J., Rummel, R., Reigber, C., Rothacher, M., Boedecker, G., Schreiber, U.), Springer Berlin Heidelberg New York, pp. 177-192.
- [75]. Swenson, S., Wahr, J. (2002) Methods for inferring regional surface-mass anomalies from GRACE measurements of time-variable gravity, *Journal of Geophysical Research*, 107(B9): 2193.
- [76]. Tóth, Gy., Ádám, J., Földváry, L., Tziavos, I. N., Denker, H. (2005) Calibration/validation of GOCE data by terrestrial torsion balance observations In: *A Window on the Future of Geodesy, IAG Symposia, Vol 128*. (Ed. Sanso F), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp 214-219.
- [77]. Tóth, Gy., Földváry, L. (2005) Effect of geopotential model errors on the projection of GOCE gradiometer observables In: *Gravity, Geoid and Space Missions, IAG Symposia, Vol. 129*. (Ed. Jekeli, Ch., Bastos, L., Fernandes, J.), Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, pp. 72-76.
- [78]. Tóth, Gy., Földváry, L. (2015a) Updated Hungarian gravity field solution based on fifth generation GOCE gravity field models, in: Editor: L. Ouwehand, *Proceedings of the 5th International GOCE User Workshop, Paris, France, 25–28 November 2014* (ESA SP-728, March 2015), paper no. p_g11, ISBN 978-92-9221-292-6
- [79]. Tóth, Gy., Földváry, L. (2015b) Új magyarországi geoidmeghatározás az ötödik generációs GOCE nehézségi erőtér modellek segítségével, *GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK*, XVIII/2., pp. 63-74.
- [80]. Tóth, Gy., Földváry, L., Tziavos, I. N. (2007) Practical aspects of upward / downward continuation of gravity gradients. In: *Proc. ‘The 3rd International GOCE User Workshop’, ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 6–8 November 2006* (ESA SP-627, February 2007), pp 115 – 120, ISBN 92-9092-983-3, ISSN 1609-042X
- [81]. Tóth, Gy., Földváry, L., Tziavos, I. N., Ádám, J. (2004) Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination, in: *Proc. ‘The 2nd International*

GOCE User Workshop', GOCE, the Geoid and Oceanography, ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 8–10 March 2004, ESA SP-569, ISBN 92-9092-880-8, ISSN 1609-042X

- [82]. Tóth, Gy., Földváry, L., Tziavos, I. N., Ádám, J. (2006) Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination, ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA HUNGARICA, Vol. 41(1), pp. 21–30.
- [83]. Wermuth, M., Földváry, L. (2003) Semi-Analytical Gravity Field Solution-Strategy for GOCE Data In: Observation of the System Earth from Space (eds. Rudloff, A.; Stroink, L.), GEOTECHNOLOGIEN Science Report, Nr. 3, Koordinierungsbüro GEOTECHNOLOGIEN, ISSN 1619-7399, pp. 185-187.
- [84]. Wermuth, M., Földváry, L., Svehla, D., Gerlach, C., Gruber, T., Frommknecht, B., Peters, T., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2004a) Gravity Field Modelling from CHAMP Kinematic Orbits Using the Energy Balance Approach, In: Proceedings of Joint CHAMP/GRACE Science Meeting 2004, Potsdam, 2004.07.06-2004.07.08., pp. 1-4.
- [85]. Wermuth, M., Gerlach, Ch., Svehla, D., Földváry, L. (2004b) Comparison of different gravity field solution methods applied to CHAMP gravity field modelling In: Proceedings of the 1st International Workshop on Gravity Field Research (Ed. Meurers B, Pail R), Österreichische Beiträge zu Meteorologie und Geophysik, Heft 31, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG), ISSN 1016-6254, pp. 45-50.
- [86]. Wermuth, M., Svehla, D., Földváry, L., Gerlach, C., Gruber, T., Frommknecht, B., Peters, T., Rothacher, M., Rummel, R., Steigenberger, P. (2004c) A gravity field model from two years of CHAMP kinematic orbits using the energy balance approach, GEOPHYSICAL RESEARCH ABSTRACTS 6: Paper 03843.
- [87]. Wermuth, M., Rummel, R., Földváry, L. (2006) Mission simulation and semi-analytical gravity field analysis for GOCE SGG and SST, in: Observation of the Earth System from Space (editors: Flury, J., Rummel, R., Reigber, C., Rothacher, M., Boedecker, G., Schreiber, U.), Springer Berlin Heidelberg New York, pp. 193-208.
- [88]. Whitehouse, P. L., Bentley, M. J., Milne, G. A., King, M. A., Thomas, I. D. (2012) A new glacial isostatic adjustment model for Antarctica: calibrated and tested using observations of relative sea-level change and present-day uplift rates. Geophysical Journal International 190, pp. 1464-1482.