



**Mechanikai és természeti formák elemzése:  
matematikai modellek a morfológiában**

Az MTA doktora eljárás részeként benyújtott  
értekezés rövid összefoglalója és tézisei

Sipos András Árpád

BME Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék  
MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2022 Budapest

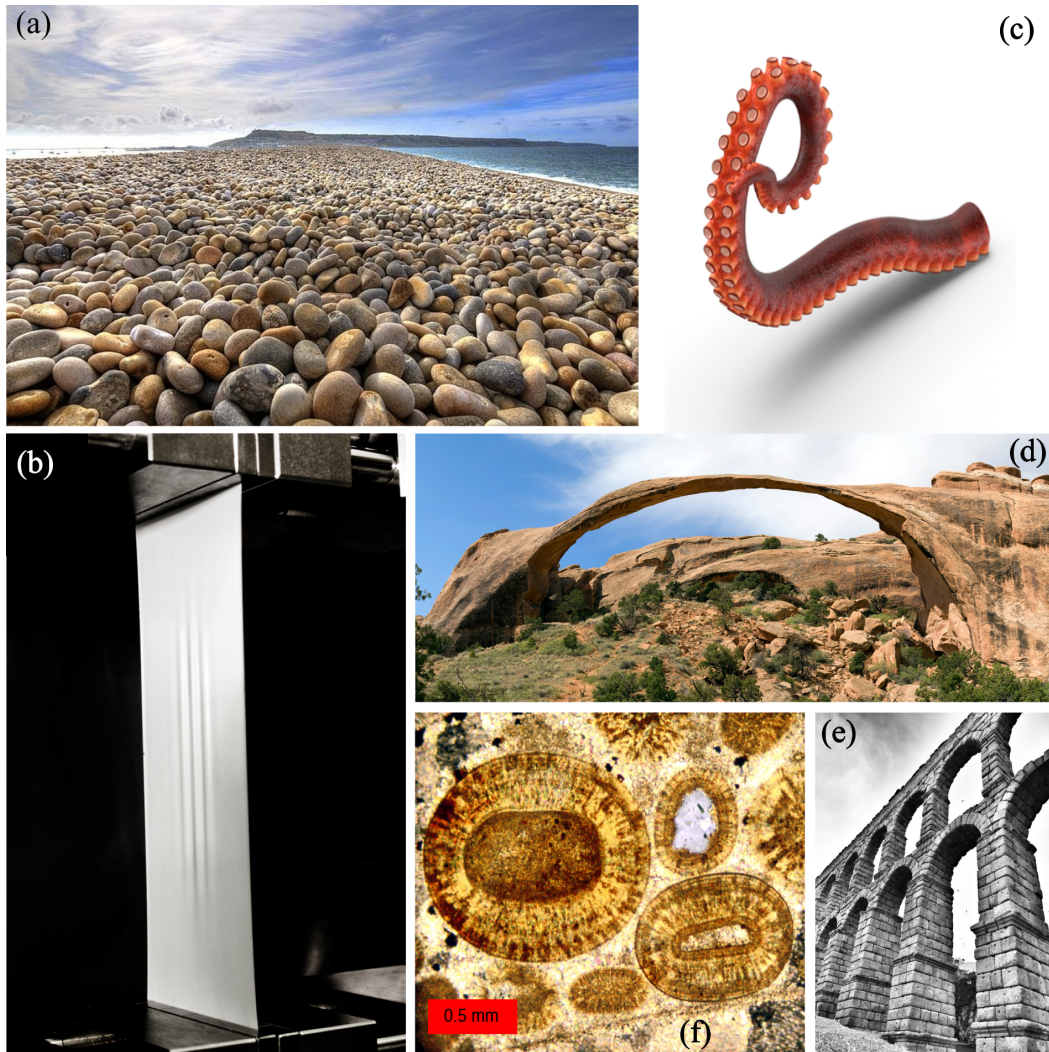
## A DISSZERTÁCIÓ RÖVID ÖSSZEFOGLALÓJA

Az írott történelem előtti művészeti alkotások, például barlangrajzok, használati eszközökbe vésett ábrák és népművészeti emlékek tanúsítják, hogy a természetben megfigyelhető geometriai formák és mintázatok kezdetektől fogva mély érdeklődésre tartottak számot. A modern tudomány születése *matematikai eszköztárat*, azaz nyelvet adott a formák tanulmányozásához. A matematikai leírás egymástól távol eső jelenségekről mutatja ki, hogy a hozzájuk köthető forma (közel) azonos. Jó példa erre a *logaritmikus spirál*, amit Jacob Bernoulli, a XVII. század kiemelkedő matematikusa részben matematikai tulajdonságai, részben talán univerzalitása miatt nevezett *csodálatos spirálnak* (*spira mirabilis*). A névválasztás indokolt: egyes spirális galaxisok alakjától a csigahéjak középvonalának felülnézetéig a logaritmikus spirál meglepően sok természeti formában megfigyelhető [12].

Az értekezésben egyedi formákat létrehozó mechanikai rendszereket és élettelen természeti folyamatokat vizsgálok. A formát, hasonlóan az említett logaritmikus spirálhoz, mindegyik példában a rendszerhez rendelt *matematikai modell* magyarázza. Ezen modell jellemzően egy nemlineáris közönséges, vagy parciális differenciálegyenlet rendszer (rövidítve: KDE, PDE) alakjában foglalható össze. A természetben vagy kísérletekben megfigyelhető formák ezen egyenletrendszer adott kezdeti- és/vagy peremfeltételek mellett számított, *stabil* megoldásaival állnak kapcsolatban, ezért fontos hangsúlyt kap a megoldás stabilitásának vizsgálata. Egyaránt szó lesz statikus, az időtől nem függő mechanikai rendszerek megoldásairól, és időben fejlődő természeti formákról.

Fontos kiemelni, hogy a valóság összetett formái a matematikai modellnek gyakran elemi eszközökkel nem számítható megoldásait jelentik. Ha precíz módon igazolni is lehet egyes megoldáshalmazok *egzisztenciáját* (pl.: posztkritikus egyensúlyi utak léte), egyes konkrét megoldások előállítása *numerikus eljárást* igényel. A numerikus módszerekkel szembeni óvatosság miatt fontos, hogy (akár egyszerűsítő feltételezések mellett) analitikus eredmények is rendelkezésre álljanak. Ez indokolja azt, hogy az értekezés elsősorban a modellek leírására és az analitikus eredmények bemutatására törekszik. Az egyes megoldások számítására használt numerikus eljárást minden, bemutatásra kerülő modell esetében a hivatkozott publikációk tartalmazzák.

A formák és mintázatok szakirodalmának összegzése meghaladja ezen írás kereteit, a természeti formavilág matematikai magyarázata kiemelkedő írásokat inspirált [2, 10, 12]. Az értekezés egy *szerkezeti mechanikai* kérdéseket tárgyaló és kettő, a *természeti morfológiában* gyökerező problémákat vizsgáló fejezetet tartalmaz, a vizsgált kérdésekre utalnak az 1. ábra képei.



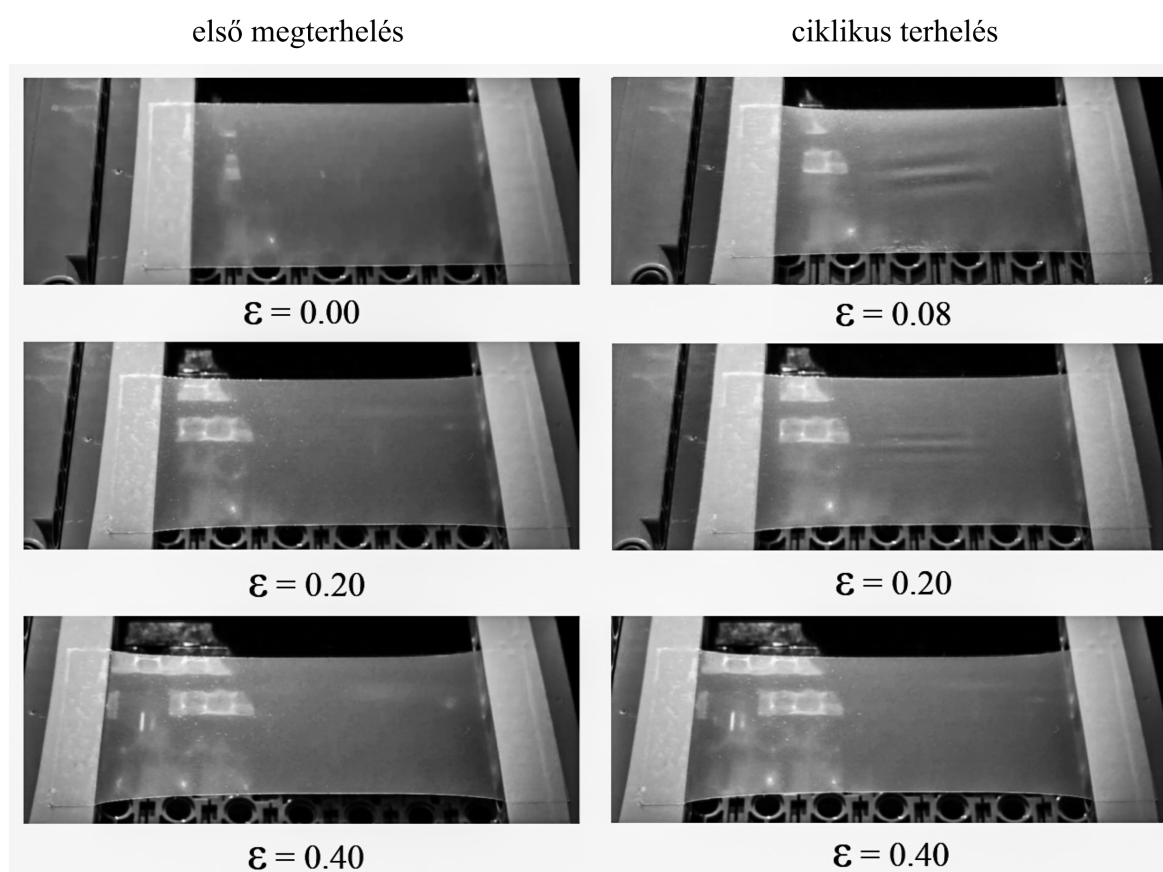
1. ábra. Az értékezésben érintett problémák képes összefoglalója. Kavicsok egyedi és kollektív kopása (a), vékony filmek ráncosodása (b), puha robotkarok maximális kinyúlása (c), korlátozott húzószilárdságú ívek formája (d)-(e), ooid részecskék alakja (f).

### Mechanikai eredetű formák

A mérnöki mechanika egyszerű, linearizált modelljei a szerkezeti elemek szabad szemmel éppen látható deformációinak közelítő számítására alkalmasak. Jelentősebb mértékű alakváltozás vagy összetettebb alakokat formáló mechanikai rendszerek a geometriai és anyagi viselkedés egzakt leírására törekvő elméleteket igényelnek. A disszertációban tárgyalt vékony rudak és héjak tekintetében különösen a *geometriai nemlinearitás* egyszerűsítésektől mentes kezelése kiemelendő. A geometriailag egzakt rúd- és héjelméletek alapjait a Cosserat testvérek [5] és S. Timoshenko [14, 13] fektették le a XX. század első

felében írt műveikben. Ezen elméletek matematikailag egzakt összefoglalását nyújtja [1].

Az értekezésben vizsgált első, mechanikai eredetű kérdés a robotika területén felmerült problémát jár körbe. A puha robotkarok (*soft robotic arms*) az elmúlt évtizedben váltak különösen népszerűvé, gyakran természeti inspirációt (pl.: polip karja, 1.(c) ábra) használva a tervezéshez [11]. Arra a kérdésre keresek választ, hogy *milyen módon határozható meg egy vékony, befogott konzol maximális kinyúlása*, azaz milyen távoli pontokat tud elérni egy adott mechanikai és geometriai paraméterekkel rendelkező robotkar? A 2. fejezet *puha robotkar maximális kinyúlása* című része rámutat arra, hogy a kérdésre adandó válasz eredendően térbeli, geometriai értelemben egzakt rúdmodellel adható meg. Megmutatom, hogy az irodalom síkbeli modelljei a *biztonság kárára* tévednek, a kifordulás jelensége miatt a robotkar maximális kinyúlása az ott közölt értékeknél kisebb. Ugyanakkor a rúd *kezdeti görbületének* megfelelő szabályozásával a robotkar kinyúlása érdemben növelhető [T2].



2. ábra. A húzott, két végén befogott, vékony film rugalmatlan viselkedése  $\varepsilon$  makroszkopikus nyúlás mellett: az első megnyújtás során a film ráncmentes (bal oldali képsorozat), de a leterhelés (és az ezt követő ciklikus terhelés) folyamán a ráncok megjelennek, illetve eltűnnek a nyújtás mértékének függvényében (jobb oldali képsorozat).

Az értekezés *vékony filmek ráncosodásával* foglalkozó részei egyszerű mechanikai rendszerben mutatnak példát a geometriai mintázat (hullámos alak) megjelenésére és eltűnésére (1.(b) ábra). Egy, a két végükön befogott, húzott, vékony filmek ráncosodására vonatkozó elméleti előrejelzés [8] kísérleti igazolása során felmerült kérdésekre keresek választ. *A kísérleti eredmények szerint a húzott filmek nyújtásuk során anyagi átalakuláson mennek keresztül. Milyen módon lehet a megjelenő ortotróp viselkedést és a terhelés miatt bekövetkező károsodást figyelembe venni az eredetileg lineárisan rugalmas, izotróp kontinuummechanikai modell kiterjesztésével?* Levezetem Kármán Tódor nagy lehajlású, vékony lemezek elméletének véges nyúlásokra kiterjesztett modelljének ortotróp változatát, ami tisztán rugalmas elméletként magyarázza az előfeszített filmekben rögzített kísérleti eredményeket. Az  $L$  hosszúságú film  $\Delta L$  megnyújtásának mértékét a  $\varepsilon = \Delta L/L$  makroszkopikus nyúlás jellemzi. A kísérletek folyamán a 2. ábra szerinti érdekes jelenséget tapasztaltuk: az első megterhelés idején ráncmentes film a tehermentesítés és a soron következő ciklusos terhelés folyamán ráncosodik. A teljes, előfeszítést is tartalmazó folyamatot, illetve az említett jelenséget egy új, *pseudoelasztikus* modellel magyaráztuk. A ráncosodással kapcsolatos részek végzett doktoranduszommal, *Fehér Eszterrel* közös munka eredményei [T1,T3].

A kísérletekben, vagy a természetben megfigyelhető alakot a szerkezet *anyagi nemlinearitása* is jelentősen befolyásolja, beleértve a képlékenyedés, és a károsodási folyamatok szerepét. Húzószilárdság nélküli testek és szerkezetek repedései a mérnöki gyakorlat meghatározó jelenségei, egyidejűleg izgalmas természeti mintázatok. A repedéskép vizsgálatának kiemelkedően gazdag irodalma van, gondoljunk csak a repedéskép szerepére a szerkezeti földtan gyakorlatában, vagy a tartószerkezeti mechanikát modern formában útjára indító problémára, a Szent Péter Bazilika kupolájának repedésére [9]. Ezzel együtt összetett esetben a kialakuló repedéskép elméleti magyarázata mind a mai napig komoly kihívást jelent [6]. Valamivel egyszerűbb kérdés az elemekből épített szerkezet állékonysága és formája között meglévő kapcsolat elemzése. Az építőelemek egymással érintkező felületei egy geometriai mintázatot adnak, ezt *sztereotómiának* nevezzük. Tekinthetjük a sztereotómiát a szerkezetben mesterségesen létrehozott repedési mintázatnak. Húzószilárdság nélküli kapcsolat esetén a kapcsolódási felületeken dominánsan nyomóerőnek kell átadódnia, ez a feltétel meghatározza az ilyen módon építhető szerkezetek formáját. Az értekezés utolsó mechanikai problémája – *Falazott ívek alakja* címmel – az anyagi nemlinearitás formát meghatározó szerepére mutat rá (1.(d) és (e) ábrák). Ez a rész egy klasszikus mérnöki problémát, az önsúlyával terhelt falazott ív viselkedését vizsgálja. Megmutatom, hogy függőleges és radiális sztereotómia esetén egy körívekből szerkesztett, állandó vastagságú, szimmetrikus csúcsívben *maximum hét darab csukló alakulhat ki*, továbbá igazolom, hogy tetszőleges, előre rögzített  $C > 3$  csuklószámhoz létezik olyan, önsúlyával terhelt ív, amelynek tönkremenetele során *pontosan  $C$  csukló alakul ki* [T4].

Az értekezésben bemutatott mechanikai modellek a karcsú szerkezetek gazdag ipari alkalmazása miatt gyakorlati jelentőséggel bírnak, akár a posztkritikus tartomány elkerülése (pl.: ráncosodás kizárása ipari és űrkutatási alkalmazásokban), vagy ellenkezőleg, a posztkritikus stabil megoldások elérése a cél (pl.: robotkarok alakja).

### Természeti morfológia

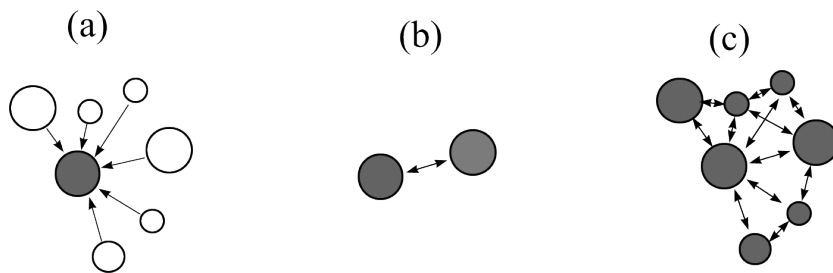
A természetben megtalálható részecskék (kavicsok, ooidok stb.) alakfejlődése egyidejűleg fontos téma a földtudományok és a matematika területén. A XX. században W.J. Firey 1974-ben megjelent írása [7] meghatározó mérföldkő, ebben a kavics alakfejlődését a zárt, kompakt felület egy pontjához rendelhető törvénnyel (ún. lokális modellel) magyarázza a szerző. A Firey-féle modell a befelé mutató felületi normális irányú sebességet adja meg. Feltételezve, hogy a kopó részecske egy síkkal véletlenszerűen ütközve kopik, Firey kopási törvénye a  $v$  kopási sebességet a felület  $K$  Gauss-görbületével tekinti arányosnak:

$$v^{3D} = cK, \quad (1)$$

ahol  $c > 0$  egy rögzített állandó. Síkgörbe esetén a kopási sebesség a  $\kappa$  görbülettel arányos:

$$v^{2D} = c\kappa. \quad (2)$$

Később F.J. Bloore a Gauss-görbülettől függő modellt véges méretű koptató részecskék feltételezésével terjesztette ki [4]. Az eddig ismertetett modellekben közös, hogy egyetlen *koptatott részecskét* írnak le. A kopást számtalan, *koptató részecskével* történő ütközés eredőjének tekintik (lásd 3.(a) ábra), a vizsgálatban a koptatott részecske tömegének és alakjának jellemzésére szolgáló változók idősorát állítják elő. Ezt a megközelítést az értekezésben *egyedi kopásnak* nevezem. Az egyedi kopás általánosítása kettő, egymást *kölcsönösen* koptató részecske időfejlődésének vizsgálata a *bináris kopás* (3.(b) ábra).



3. ábra. Kopási sémák. Egyedi kopás (a), bináris kopás (b) és kollektív kopás (c). A tömegveszteséget a szürkével jelölt részecskékre számítjuk. A nyilak a részecskék között (nem egy időpillanatban bekövetkező) ütközési eseményeket jelzik.

A természeti morfológia területére eső vizsgálatokat az *egyedi kopási folyamat* síkbeli modelljeinek elemzésével kezdem. A *Síkgörbe görbület-vezérelt kopásáról* című rész fő

kérdése, hogy a *sima, konvex görbék görbület függvényének szélsőérték száma milyen módon változik a kopási folyamat során?* A rész egyben összegzi a síkbeli kopásmodellek analitikus leírásának lehetőségeit, a görbe különböző paraméterezései mellett. Ezután egy, a *növekedést, az ütközéses kopást és a súrlódást* tartalmazó modell magyarázza a meleg, telített tengervízben képződő, ún. *oooid* részecskék alakfejlődését. Megmutatom, hogy az egyszerű fizikai alapvetésen alapuló modell alkalmas a természetben megfigyelt részecskék *szimmetriájának magyarázatára*, illetve igazolom a *a megoldások unicitását* (1.(f) ábra) [T5,T6].

A felületek görbület-vezérelt alakfejlődését leíró PDE-k numerikus szimulációjára új, sztochasztikus algoritmust ismertetek. Az algoritmusban definiált események a Bloore-féle kopási modell egyes tagjainak feleltethetőek meg. Az algoritmus az alakfejlődést véletlenszerűen felvett síkmetszések sorozataként állítja elő. Segítségével rámutatok arra, hogy az (1) egyenlettel adott Firey-féle kopás poliéder kezdeti alak esetén két fázisú: az első fázisban a poliéder felületének egy részhalmaza érintett a kopásban, csak a második fázisban teljesül, hogy a test minden felületi pontja koptatott. A két fázis miatt azon gyakorlat, amikor részecskék méretét az illesztett ellipszoid tengelyhosszai alapján végzik, megkérdőjelezhető, hiszen az első fázisban ezek állandóak, ugyanakkor a kezdeti tömeg akár 50%-a is elveszhet az első fázisban [T7,T8].

Az alakfejlődés egyedi modelljein túl a részecskék kollektív fejlődése is kiemelten érdekes, mind az elmélet, mind a geomorfológiai alkalmazások szempontjából (1.(a) és 3.(c) ábrák). A kavicsokkal kapcsolatos egyik alapvető megfigyelés, hogy a természetben fellelhető *kavicspopulációk* (pl.: kavicsos tengerpart) méret és alak szerint elkülönültek. A geológiai irodalom ezt a *szelektív szállítás* és a *kopás* folyamataival magyarázza, álláspontja szerint a tengerparti és folyami környezetben a szállítás és a kopás együttesen határozza meg a kavicsok tömeg- és alakfejlődését [3]. Az, hogy melyik folyamat domináns, függ a helyszín geológiai adottságaitól, de jellemzően mindkét folyamat érdemi szerepet játszik. Amíg a szelektív szállítást részletesen elemezték, addig a kopás pontos szerepét egy prediktív elmélet, és az azt vizsgáló mérésorozat hiányában eddig nem tisztázták. Az elmélet bevezetésére tesz kísérletet az értekezés 4. fejezete, amely a kollektív tömegfejlődés elemzésével mutat rá arra, hogy az egy részecske szintjén determinisztikus modellek szükségszerűen részlegesek, az alakfejlődés megértéséhez valószínűségi alapvetés szükséges. Itt az első kérdés arra vonatkozik, hogy *magyarázható-e a részecskék kollektív kopásával az a megfigyelés, hogy míg egyes geológiai helyszíneken a kavicsok mérete (közel) azonos, addig más helyszíneken a kavicsok mérete nagy változatosságot mutat?* A kifejlesztett kollektív módszer összhangban van az egyedi kopás ismertetett, geometriai modelljeivel és egyidejűleg teljesíti a tömeg exponenciális lecsengését kimondó Sternberg törvényt. A kavicsok tömegvesztését kölcsönös ütközésük esetén az ún. *környezeti paramétertől* függő, egyparáméteres *ütközési kernel* adja meg. A tömegeloszlás időfejlődését leíró, determinisztikus

Fokker-Planck egyenlet megoldása után igazolom, hogy a környezeti paraméternek létezik kritikus értéke, amely a kollektív fejlődés *fókuszáló* és *szétszóró* tartományait választja el. A modell eredményei szerint a természetben megfigyelt homogén kavicspopulációk kopási folyamat eredményeként is létrejöhetnek [T9].

Az értekezés természeti morfológiát tárgyaló részei rámutatnak arra, hogy egy megfelelő részletezettségű matematikai modell nem kizárólag a természetben megfigyelhető alak magyarázatát nyújtja: lehetővé teszi, hogy pusztán a forma megfigyelésével következtessünk az azt létrehozó folyamatra.

## TÉZISEK

**1. Tézis.** Tisztán rugalmas anyagmodellel és geometriai nemlinearitással jellemezhető rugalmasságtani modellekben keletkező formákat és mintázatokat vizsgáltam [T1,T2].

- (i) Vékony robotkarok maximális kinyúlását a deformáció és a rúdalak stabilitása együttesen határozza meg. A robotkarhoz rendelhető térbeli rúdmodellben, a potenciális energia második variációjának segítségével analitikusan igazoltam, hogy az irodalomban szereplő, síkbeli modellek által elhanyagolt kifordulás csökkenti a maximális kinyúlás értékét. Rámutattam arra, hogy a kezdeti görbület változtatásával a stabilitási kritérium alapján számított maximális kinyúlás növelhető. A modell alapján numerikus algoritmust adtam a robotkar maximális kinyúlásának meghatározására.
- (ii) (**Fehér Eszterrel közös eredmény**) Két végén befogott, húzott, vékony filmek kísérletben megfigyelt ráncosodásának magyarázatára új, a klasszikus Kármán-féle nagy lehajlású, vékony lemezek elméletét véges membránnnyúlásokra általánosító, ortotróp modellt írtunk le. Előfeszített mintadarabokon végrehajtott kísérletekkel összhangban a modell helyesen jósolja meg a ráncos mintázat megjelenését és eltűnését. Ezen jelenség magyarázható egy izola-központ bifurkációval. A modell alapján a sima és ráncos megoldásokat elválasztó stabilitási határ helye a  $\beta$  tengelyarány és a  $\varepsilon$  makroszkopikus nyúlás paraméterek terében jelentősen függ az ortotrópia mértékétől.

**2. Tézis.** A terhelés hatására kialakuló alak és az anyagi nemlinearitás kapcsolatát vizsgáltam [T3,T4].

- (i) (**Fehér Eszterrel és Timothy J. Healey-vel közös eredmény.**) A két végén befogott, húzott, vékony filmek ciklikus kísérletben megfigyelhető ráncosodásának megjelenését és eltűnését elemezve az első terhelés során eltérő ráncosodást a Mullins-hatással magyaráztuk. Új, a Mooney-Rivlin anyagmodell károsodási állapotváltozóval ( $\eta$ ) kiegészítő, pseudoelasztikus modellt adtunk a jelenség magyarázatára.



- (ii) Az (i) pontban említett modellről megmutattam, hogy az a Mullins-hatásra az irodalomban javasolt modellosztály egy speciális, egy állapotváltozót tartalmazó esete. Továbbá, módszert adtam az első nyújtás során kialakuló ortotrópia mértékének a kísérleti adatokból történő becslésére.
- (iii) Húzószilárdság nélküli falazott ívek állékonysága függ az ívben természetesen kialakuló, vagy mesterségesen előírt repedésképétől (sztereotómia). Az adott terhelésű ív állékonyságának klasszikus geometriai feltételét (nyomásvonal elmélet) térgörbe referencia vonalú szerkezetre általánosítottam.
- (iv) Igazoltam, hogy az előre rögzített  $C > 3$  csuklószámhoz konstruálható olyan, síkbeli, önsúlyával terhelt, húzószilárdság nélküli ív, amelyben a tönkremenetel pillanatában kialakuló csuklók száma pontosan  $C$ .
- (v) A síkbeli, önsúlyával terhelt, körívekből szerkesztett, állandó vastagságú, szimmetrikus csúcsívről bizonyítottam, hogy a szerkezetben radiális sztereotómia esetén kialakuló csuklók száma maximum  $C = 7$ .

**3. Tézis.** A körrel homeomorf, konvex görbék alakfejlődését leíró geometriai parciális differenciálegyenleteket vizsgáltam [T5,T6].

- (i) Bizonyítottam, hogy a görbület-vezérelt kopási modellek körében az  $f_{,\kappa}(\kappa) > 0$  feltételt kielégítő kopási törvénnyel rendelkező, a görbét a befelé mutató normális irányába fejlesztő alakfejlődési modellben a görbületi szélsőértékek  $N_{\kappa}(t)$  száma monoton csökken.
- (ii) Az ooid részecskék növekedést, ütközéses és súrlódási kopást tartalmazó, két állandó paraméterrel adott modelljéről bizonyítottam, hogy a modellben szereplő affin tag ellenére az ellipszis nem invariáns megoldás, kivéve a súrlódásmentes esetet, amikor az invariáns alak kör.
- (iii) Bizonyítottam, hogy a (ii) pontban említett modell sima, egyensúlyi megoldásai a D2 szimmetriacsoportba tartoznak.
- (iv) Bizonyítottam, hogy a (ii) pontban említett modell két paramétere ( $c_1 \geq 0$  és  $c_2 > 0$ ) és a sima egyensúlyi alak kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

**4. Tézis.** A gömbbel homeomorf, konvex felületek alakfejlődését leíró, ún. Bloore-féle alakfejlődési modellt vizsgáltam [T7,T8].

- (i) A kopó testet poliéderrel reprezentáló, a testet sztochasztikusan felvett metsző síkokkal fejlesztő numerikus algoritmust írtam le a Bloore-féle alakfejlődési egyenlet approximációjára. Megadtam a sztochasztikus algoritmus esemény valószínűségei és a folytonos geometriai PDE állandói közötti kapcsolatot.
- (ii) A sztochasztikus algoritmus felhasználásával numerikusan demonstráltam, hogy a Firey-féle alakfejlődési modellben poliéder kezdőfeltétel esetén két fázis különíthető el: az első fázisban a kopás által még nem érintett felület területe nem zérus. Ez a mérték fokozatosan csökken, a második fázisban pedig a test minden felületi pontja kopásnak kitett. A numerikus eredmények szerint az első fázisban a tömegveszteség az 50%-ot is elérheti.

**5. Tézis.** Statisztikai számosságú objektum tömegeloszlásának kopás miatt bekövetkező időfejlődését vizsgáltam [T9].

- (i) Megadtam a kavicspopulációk kollektív tömegeloszlásának időfejlődését leíró Fokker-Planck egyenletet.
- (ii) Analitikusan igazoltam, hogy folytonos esetben a geometriai alakfejlődési egyenletekkel összhangban lévő, az  $r$  környezeti paramétertől függő, egyparaméteres ütközési kernel elsőrendű sorfejtéssel egyszerűsített formája a kollektív modellben  $r > 1/2$  értékeinél fókuszáló,  $r < 1/2$  esetén szétszóró viselkedésű.
- (iii) Analitikusan igazoltam, hogy az említett egy paraméteres ütközési kernel alatt az azonos méretű részecskéknek megfelelő Dirac- $\delta$  tömegeloszlás invariáns. Továbbá  $r > 1/2$  esetén a Dirac- $\delta$  tömegeloszlás stabil,  $r < 1/2$  esetén instabil.
- (iv) A Fokker-Planck egyenletet numerikus szimulációjával megmutattam, hogy valós kavicspopulációk esetében az  $r = 1/2$  érték a teljes, nemlineáris modellben is kritikus.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom az értekezésben bemutatott kutatásokban részes kollégáknak és diákoknak. Különösen hálás vagyok Domokos Gábornak az inspiráló és lényeglátó kérdésekért és a sok éves együttműködésért. Köszönöm Fehér Eszternek, Gáspár Orsolyának, Sajtos Istvánnak és Várkonyi Péternek a kitartó és gyümölcsöző együttműködést. A mérnöki tudományok és a matematika határterületének művelésében nagy hatással volt rám posztdoktori témavezetőm, Timothy J. Healey. Az interdiszciplináris kutatás a különböző szakterületek eltérő attitűdje és szaknyelve miatt igen kihívásos vállalkozás, köszönöm Fodor László, Douglas J. Jerolmack, Lángi Zsolt, Károlyi György, Márton Péterné Szalay Emőke, Páll-Gergely Barna és Török János nyitottságát, türelmét és azt, hogy közös munkáinkban számomra ismeretlen, új világokba vezettek be.

Az értekezésben bemutatott kutatásokat a Budapesti és Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén, később a Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszékén, továbbá az MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport munkatársaként végeztem. Köszönöm a kollégák és az Építészmérnöki Kar vezetésének támogató hozzáállását. A kutatásokat a Műszaki Egyetemen túl az MTA, az EMMI, az NKFIH, a HAESF és az NSF pályázatai támogatták.

Hálás vagyok családomnak, feleségemnek és gyermekeimnek a meleg családi légkörért, ami lehetővé tette számomra az elmélyült kutatómunkát.

## Irodalomjegyzék

- [1] S.S. Antman. *Nonlinear Problems in Elasticity*. Springer-Verlag, NY, 2nd edition, 2005.
- [2] P. Ball. *Patterns in Nature: Why the Natural World Looks the Way It Does*. University of Chicago Press, IL, 2016.
- [3] D. Bertoni, G. Sarti, E. Grottoli, P. Ciavola, A. Pozzebon, G. Domokos, and T. Novák-Szabó. Impressive abrasion rates of marked pebbles on a coarse-clastic beach within a 13-month timespan. *Marine Geo.*, 381:175 – 180, 2016.
- [4] F. J. Bloore. The shape of pebbles. *Math. Geol.*, 9:113–122, 1977.
- [5] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann & Fils, Paris, 1909.
- [6] G. Domokos, D. J. Jerolmack, F. Kun, and J. Török. Plato’s cube and the natural geometry of fragmentation. *PNAS*, 117:18178 –18185, 2020.
- [7] W. J. Firey. Shapes of worn stones. *Mathematika*, 21(1):1–11, 1974.
- [8] T. J. Healey, Q. Li, and R. B. Cheng. Wrinkling behavior of highly stretched rectangular elastic films via parametric global bifurcation. *J. Nonlin. Sci.*, 23:777–805, 2013.
- [9] J. Heyman. *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] R. Hoyle. *Pattern Formation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [11] C. Laschi, M. Cianchetti, B. Mazzolai, L. Margheri, M. Follador, and P. Dario. Soft robot arm inspired by the octopus. *Advcd. Rob.*, 26(7):709–727, 2012.
- [12] D.W. Thompson. *On Growth and Form. The Complete Revised Edition*. Dover Publications, NY, 1942.
- [13] S. P. Timoshenko and J.M. Gere. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill International Book Company, NY, 2nd edition, 1963.
- [14] S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill International Book Company, NY, 2nd edition, 1959.

## A téziseket megalapozó saját publikációk

- [T1] A.A. Sipos and E. Fehér. Disappearance of stretch-induced wrinkles of thin sheets: a study of orthotropic films. *Int. J. Solids & Struct.*, 97–98:275–283, 2016.
- [T2] A.A. Sipos and P.L. Várkonyi. The longest soft robotic arm. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 119, 2020. Article number: 103354.
- [T3] E. Fehér, T.J. Healey, and A. A. Sipos. The mullins effect in the wrinkling behaviour of highly stretched thin films. *J. Mech. Phys. Solids*, 119:417–427, 2018.
- [T4] O. Gáspár, I. Sajtos, and A. A. Sipos. Multi-hinge failure mechanisms of masonry arches subject to self-weight as derived from minimum thickness analysis. *Int. J. Arch. Herit.*, 2022. Bírálólat alatt.
- [T5] A. A. Sipos, G. Domokos, and D. J. Jerolmack. Shape evolution of ooids: a geometric model. *Sci. Rep.*, 8, 2018. Article number: 1758.
- [T6] A. A. Sipos. Ooid growth: Uniqueness of time-invariant smooth shapes in 2d. *Eu. J. Appl. Math.*, 31:172–182, 2020.
- [T7] A. A. Sipos, G. Domokos, A. Wilson, and N. Hovius. A discrete random model describing bedrock profile abrasion. *Math. Geosci.*, 43:583–591, 2011.
- [T8] G. Domokos, D. J. Jerolmack, A. A. Sipos, and Á. Török. How river rocks round: Resolving the shape-size paradox. *PLoS ONE*, 9(2):e88657, 2014.
- [T9] A. A. Sipos, G. Domokos, and J. Török. Particle size dynamics in abrading pebble populations. *Earth Surf. Dyn.*, 9:935–251, 2021.

**A dolgozat témájához tartozó,  
a tézispontokban nem hivatkozott, saját publikációk**

- [E1] G. Domokos, A. A. Sipos, Gy. M. Szabó, and P. L. Várkonyi. Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion. *Astrophys. J.*, 699(1):L13–L16, 2009.
- [E2] G. Domokos, A. A. Sipos, and P. L. Várkonyi. Continuous and discrete models for abrasion processes. *Per. Pol. Arch.*, 40(1):3–8, 2009.
- [E3] G. Domokos, A. A. Sipos, T. Szabó, and P. L. Várkonyi. Pebbles, shapes, and equilibria. *Math. Geosci.*, 42:29–47, 2010.
- [E4] G. Domokos, A. A. Sipos, and T. Szabó. The mechanics of rocking stones: Equilibria on separated scales. *Math. Geosci.*, 44:71–89, 2012.
- [E5] A. A. Sipos. Statisztikai próbák sztochasztikus, közel izotróp tenzorral leírható közetfizikai mennyiségek vizsgálatára. *Magyar Geofizika*, 54(4):170–184, 2013.
- [E6] T. J. Healey and A. A. Sipos. Computational stability of phase-tip splitting in the presence of small interfacial energy in a simple two-phase solid. *Phys. D: Nonlin. Phen.*, 261:62–69, 2013.
- [E7] E. Fehér and A. A. Sipos. Húzott, vékony filmek ráncosodása: a ráncos mintázat keletkezése és eltűnése. *Építés-Építésztudomány*, 42(1-2):23–42, 2014.
- [E8] G. Domokos, G. W. Gibbons, and A. A. Sipos. Circular, stationary profiles emerging in unidirectional abrasion. *Math. Geosci.*, 46:483–491, 2014.
- [E9] G. Domokos, F. Kun, A. A. Sipos, and T. Szabó. Universality of fragment shapes. *Sci. Rep.*, 5, 2015. Article number: 9147.
- [E10] G. Domokos, A. A. Sipos, Gy. M. Szabó, and P. L. Várkonyi. Explaining the elongated shape of 'oumuamua by the eikonal abrasion model. *Res. Not. AAS*, 1(50), 2017.
- [E11] A. A. Sipos, E. Márton, and L. Fodor. Reconstruction of early phase deformations by integrated magnetic and mesotectonic data evaluation. *Tectonophysics*, 726:73–85, 2018.
- [E12] T. Novák-Szabó, A. A. Sipos, S. Shaw, D. Bertoni, A. Pozzebon, E. Grottoli, G. Sarti, P. Ciavola, G. Domokos, and D. J. Jerolmack. Universal characteristics of particle shape evolution by bed-load chipping. *Sci. Adv.*, 4(3), 2018. Article number: ea4946.
- [E13] O. Gáspár, A. A. Sipos, and I. Sajtos. Effect of stereotomy on the lower bound value of minimum thickness of semi-circular masonry arches. *Int. J. Arch. Herit.*, 12(6):899–921, 2018.
- [E14] G. M. Horváth, P. L. Várkonyi, and A. A. Sipos. Shape of an elastica under growth restricted by friction. *Int. J. Solids & Struct.*, 156-157:137–147, 2019.
- [E15] O. Gáspár, I. Sajtos, and A. A. Sipos. Friction as a geometric constraint on stereotomy in the minimum thickness analysis of circular and elliptical masonry arches. *Int. J. Solids & Struct.*, 225, 2021. Article number: 111056.
- [E16] G. Domokos, Zs. Lángi, and A. A. Sipos. Tracking critical points on evolving curves and surfaces. *Exp. Math.*, 31(1):1–20, 2022.

- [E17] A. A. Sipos and P. L. Várkonyi. A unified morphoelastic rod model with application to growth-induced coiling, waving, and skewing of plant roots. *J. Mech. Phys. Solids*, 160:104789, 2022.
- [E18] S. Cao and A. A. Sipos. Cracking patterns of brittle hemispherical domes: an experimental study. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 16(59):265–310, 2022.
- [E19] S. Michel and A. A. Sipos. On the cracking patterns of brittle rings with elastic radial support under hydrostatic pressure. *Meccanica*, 2022. Közlésre elfogadva.