

## Válasz Dr. Bagi Katalin professzor asszony bírálatára

Szeretném megköszönni professzor asszony bírálatát, értekezésem gondos átolvasását, támogató bírálói véleményét és elgondolkodtató kérdéseit. Külön köszönöm a bírálat mellékleteként összegyűjtött hibajegyzéket. A bírálatban szereplő észrevételekre és a feltett kérdésekre válaszaim a következők.

1. A puha robotkarok modelljében Jelölt zérusnak tekinti a kar tengelyének hosszváltozását és a szögtorzulást, és lineárisan rugalmasnak az anyag viselkedését. Polipok karjára nem tűnnek reálisnak ezek a közelítések. Puha robotkarokra miért indokoltak ezek? Kérem Jelöltet, mutassa be, hogy puha robotkarok szerkezeti kialakításánál miért indokoltak az általa alkalmazott egyszerűsítések.

*Válasz:* Köszönöm bírálóm kérdését! A *puha robotkar* fogalom természetesen túl tág ahhoz, hogy minden puha robotkarnak nevezett szerkezetre reális legyen a bemutatott szögtorzulásmentes és tengelyében hosszváltozásmentes modell. Például a pneumatikus módon kontrollált robotkarok minden bizonnyal összetettebb modellt igényelnek. Hasonlóan, a polip karja, mint természeti inspiráció jelenik meg az értekezésben, hiszen ismert, hogy leírása összetett mechanikai modellt igényel [1]. Ezzel szemben a gyógyászatban, vagy akár az űrkutatásban alkalmazott manipulátor karokat (melyeket szintén a puha robotkarok csoportjába sorolnak), elfogadható közelítéssel lehet az értekezésben bemutatott, dominánsan hajlító és csavaró alakváltozásra képes rúdként leírni [2,3]. A tényleges alkalmazásokon túlmutat, hogy jól dokumentált kísérleteket és az ezeket alátámasztó, analitikusan is követhető matematikai modellt leginkább a szögtorzulásmentes és tengelyében hosszváltozásmentes esethez dolgoztak ki [4]. Ennek alapvető okát abban látom, hogy elsődlegesen a jelentős alakváltozások szerepének és kontrolálhatóságának tisztázása volt a kutatások elsődleges iránya. Munkánk ezen vonulathoz kapcsolódik. Jelenleg is folyik vizsgálódás összetettebb modellek irányában, de fontos, hogy ez lépésről lépésre felépített matematikai modell leírásához vezessen, ne csupán az irodalomban széles körben publikált, de sok esetben homályos számítógépes vizsgálatokat jelentsen.

2. Fontos eredmény annak felismerése, hogy az irodalomból ismert kinyúlásszámítás a biztonság kárára téved. Tudna valamilyen számszerű becslést adni, hogy milyen nagy lehet ez a hiba?

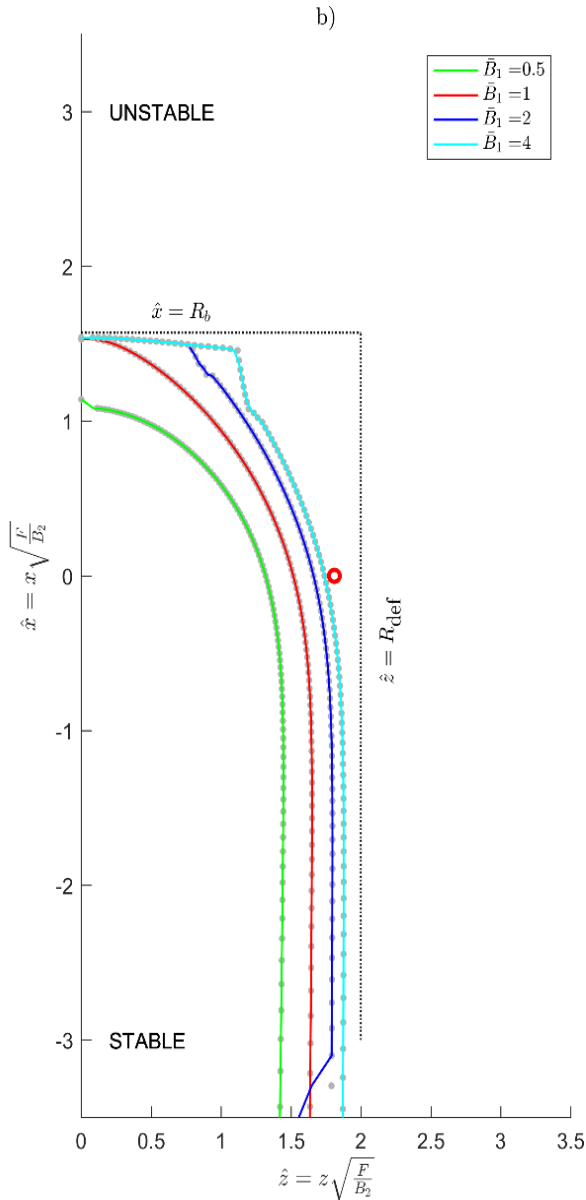
*Válasz:* Az irodalomban szereplő, síkbeli modellen alapuló eredményt a dolgozat (2.2) és (2.3) egyenletei tartalmazzák. Jelölje  $B_2$  a rúd függőleges síkbeli hajlítással szembeni merevségét,  $F$  a végponti koncentrált terhet! A (2.2) egyenlet az  $R_{def}$  maximálisan elérhető vízszintes távolság, amennyiben a végpontoknak nem szükséges azonos magasságba esnie:

$$R_{def} = 2 \sqrt{\frac{B_2}{F}}. \quad (1)$$

A (2.3) egyenlet a  $R_{def}^*$  maximális kinyúlást arra az esetre adja meg, ha a végpontok függőleges magassága azonos:

$$R_{def}^* \approx 1.81 \sqrt{\frac{B_2}{F}}. \quad (2)$$

Jelölje  $B_1$  (terheletlen állapotban) függőleges keresztmetszeti tengely körüli hajlítómerevséget és  $B_3$  a csavarómerevséget. A fenti képletek a  $B_1 \rightarrow \infty$  határátmenet esetén igazak. Vegyük észre, hogy ekkor a modell tiszta csavarásra vonatkozó feltételei sérülnek, akár véges, akár végtelen csavarómerevséget tételezünk fel. Érdeemes megjegyezni, hogy a kísérleti vizsgálatokban vízszintesen elnyújtott téglalap keresztmetszetet használtak a kifordulás megakadályozására [4].



1. ábra: az értekezés 2. fejezetében bemutatott rúdmodellel számított stabilitási határok különböző (dimenzióatlanított) harántirányú  $\bar{B}_1 = B_1/B_2$  hajlítómerevségek esetén. A csavarómerevség minden számításban  $\bar{B}_3 = B_3/B_2 = 2/3$  értékű. Az ábrán fekete pontvonal jelzi az (1) egyenletnek megfelelő határt, a piros körrel jelölt pont felel meg a (2) egyenletnek. Ezek az (1) és (2) egyenletben szereplő 2.00 és 1.81 értékű konstans együtthatókkal egyeznek meg. Az ábra forrása az [5] publikáció.

Bírálom kérdésére a válasz tehát  $B_1$  függvényében adható meg. Az 1. ábrán a dimenzióatlanított  $[\hat{z}\hat{x}]$  térben látható a számítógépes szimulációval meghatározott *stabilitási határ*. Ez azon pontok halmaza, amit éppen kritikus állapotban lévő síkbeli alakkkal el lehet érni. A szimulációkban a rögzített  $\bar{B}_3 = B_3/B_2 = 2/3$  mellett különböző  $B_1$  értékekhez ( $\bar{B}_1 = B_1/B_2 = 0.5, 1, 2, 4$ ) határoztam meg a stabilitási határt. Az eredmények közül a  $\bar{B}_1 = B_1/B_2 = 1$  merevséghez tartozó stabilitási határ (piros görbe) egy kör keresztmetszetű,  $\nu = 1/2$  Poisson tényezőjű rúdnak felel meg. Ennél, a praktikus szempontból is lényeges esetről az  $R$  vízszintesen elérhető maximális távolság körülbelül:

$$R \approx 1.60 \sqrt{\frac{B_2}{F}}. \quad (3)$$

Tehát a kör keresztmetszetű rúddal elérhető maximális távolság  $1.60/2.00 = 0.8$ , az irodalmi érték 80%-a. Hasonlóan, az  $R^*$  vízszintes irányban elérhető legtávolabbi pont távolsága:

$$R^* \approx 1.50 \sqrt{\frac{B_2}{F}}. \quad (4)$$

Ekkor 1.50/1.81 alapján a keresett távolság az irodalmi érték 82.8%.

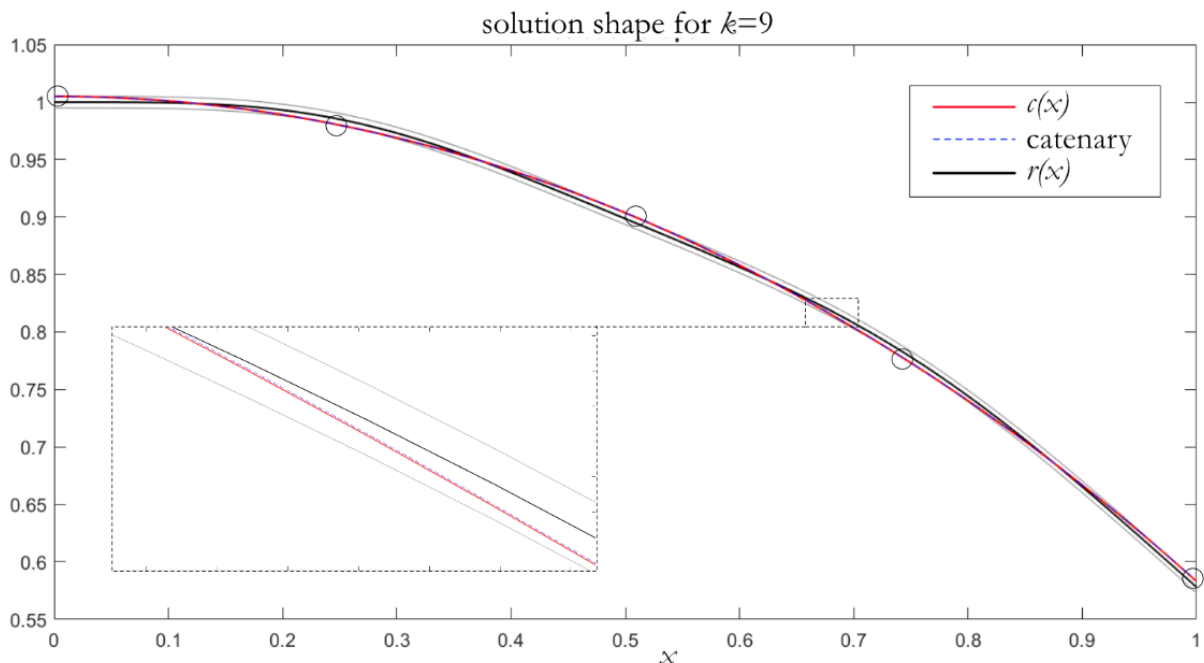
3. Kármán-modellben a síkra merőleges deformációk - mind a fajlagos nyúlás, mindpedig a két szögtorzulás - zérusok, nem pedig véges nagyságúak. Jelölt talán a síkra merőleges eltolódásokra gondolhatt, ezek valóban végesek.

*Válasz:* Egyetértek a bírálóval, az idézett mondatban a szóhasználat hibás. Helyesen: geometriai szempontból ez egy nemlineáris elmélet, amelyben a síkra merőleges elmozdulás komponens véges nagyságú lehet mindaddig, amíg a síkbeli nyúlásokat infinitezimálisnak lehet tekinteni.

4. Az ív anyagáról nem szabad feltételeznünk, hogy húzószilárdsága zérus: a kapcsolatokban a nyomás mellett tipikusan nyírás is átadódik az érintkezési felületen, így a Mohr-körnek mindenképpen van olyan része is, amely a húzás tartományába esik. Helyesebb úgy fogalmazni, hogy a kapcsolatok húzószilárdsága zérus, vagy úgy, hogy az anyag húzószilárdsága a sztereotómiára merőlegesen zérus.

*Válasz:* Egyetértek a bíráló pontosító javaslatával.

5. A 2.7. és 2.10. tételket, ha nem is valós kísérletekkel, de legalább numerikus szimulációkkal könnyű lett volna alátámasztani (akár kontaktelemes nemlineáris végeeselemes modell is alkalmas lett volna erre a célra). Ez emelte volna a most tisztán elméleti eredmények súlyát.



2. ábra: A  $k=9$  csuklóhoz tartozó  $r(x)$  referencia vonal önsúlyával terhelt ívre az (5) egyenlettel meghatározott  $\mathbf{j}(x)$  sztereotómia mellett.

Az ábrán a  $c(x)=r(x)+\mathbf{j}(x)\mathbf{g}_2$  piros görbe a nyomásvonal.

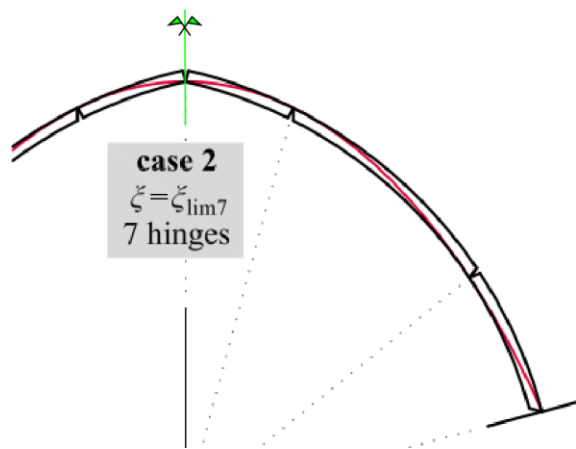
Az ív vastagsága  $2v=0.02$ . Az ábra forrása az [6] publikáció.

Válasz: A 2.7 tételt illusztrálja a 2. ábra, ahol a  $k$  csuklószám a félv függőleges tengelyre történő tükrözésével nyert ív csuklóinak számát jelenti. A 2. ábrán az ív az  $s$  ívhossz helyett az  $x$  vízszintes koordináta szerint paraméterezett. A  $2v$  vastagságú ív előírt sztereotómia függvénye legyen:

$$\hat{\mathbf{j}}(x) = v \cos\left(\pi(k-1)\frac{x}{x_{max}}\right) \mathbf{g}_2. \quad (5)$$

A numerikus eljárás az értekezés (2.127) jelű egyensúlyi egyenlete alapján számítja az  $r(x) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}_2$  függvényt.

A 2.10. tétel esetén a hét csukló létezése numerikus és részben analitikus számítások eredményeként ismert, erre mutat példát egy közelmúltban megjelent cikkből a 3. ábra. A 2.10. tétel igazolja, hogy ez a csuklószám *maximális* (ráadásul különböző, a tételben nevesített sztereotómiák esetén a csuklók számának maximuma egyaránt hét).



3. ábra: A szimmetrikus, önsúlyával terhelt csúcsív hét belső csuklóval.  
Az ábra forrása a [7] publikáció.

6. A 61. oldal 4. megfigyelése így nem érthető. Mit kell értenünk az ooidok nagytengelyre merőleges vetületein?

Válasz: A 4. megfigyelés jelen formájában valóban félreérthető. Helyesen: az ooidok bármely, legnagyobb átmérőjükkel párhuzamos síkra vett vetületein a határológörbe kontúrja jellemzően két, egymásra merőleges szimmetriatengellyel rendelkezik.

7. Néhány sorral lejjebb hogyan értendő az, hogy a forgási szimmetriát kihasználva síkbeli modellel írja le az alakfejlődést, mit ért a forgási szimmetria kihasználásán?

Válasz: A modell a növekedést, az ütközéses kopást és a súrlódást tekinti az alakfejlődést meghatározó fizikai folyamatoknak. Forgásszimmetrikus alakzat esetén a növekedés és az ütközéses kopás nyilvánvalóan megtartja a forgásszimmetriát. Kérdés, hogy ez a súrlódásra is teljesül-e. Reális feltételezés, hogy a súrlódás a test a forgástengelyével (ami egyben a legnagyobb távolság a test két, tetszőleges felületi pontja között) párhuzamos mozgás esetén domináns, azaz ezen hatás alatt a test forgásszimmetriája invariáns. Tehát, a forgásszimmetriát megtartó kopási törvény esetén a test nagytengelyt tartalmazó síkmetszetein a kontúr alakfejlődése azonos. A bemutatott modell a kontúr alakfejlődését írja le.

8. Mi indokolja, hogy a (3.40) modell szerint a két  $\cos(\gamma) = 0$  végpontnak nincs súrlódásos kopása? A homokszemcsék a hullámzás hatására billegnek, forognak, így a két végpont környéke is súrlódik más szemcsékkel. Amennyiben ez a hatás fontos annyira, hogy figyelembe kell venni, akkor hogyan változtatná meg a (3.40) modellt?

*Válasz:* A súrlódással kapcsolatban azt tételeztük fel, hogy dominánsan a nagytengellyel párhuzamos hatásról van szó, ez indokolta a  $\cos(\gamma) = 0$ -val jellemezhető végpontok viselkedését. Természetesen ez egy heurisztikus megközelítés, a súrlódás fizikai modellezése további munkát igényel. Ugyanakkor az a tény, hogy egy elemi megfontolásokon alapuló modell meglepően jó egyezést mutat a földtörténet különböző korszakaiból származó, és ezért különböző méretű ooid szemcsék keresztmetszetével, számomra azt mutatja, hogy a precíz modell érdemben nem fog különbözni a bemutatott egyenlettől. Ténylegesen arra számítok, hogyha van érdemi súrlódási kopás a végpontok környékén, akkor is a keresztmetszet pontjai mentén a súrlódás változása közel lesz ahhoz a függvényhez, amivel mi számoltunk, csak meg fog jelenni egy állandó eltolás. A súrlódási tag ekkor közel van a  $\cos(\gamma)+c_s$  függvényhez, ahol  $c_s > 0$  pozitív konstans. Emiatt az illesztés során a növekedési tag relatív súlya esetleg különbözni fog a jelen modellel illesztett értéktől, de az evolúció során megvalósuló alakokok érdemben nem fognak különbözni attól, amit az értekezésben bemutatott modell jósol.

9. A 3.3.2. pontban említett kísérletekben miből állapította meg, hogy a súrlódásos kopás szerepe elhanyagolható?

*Válasz:* Az értekezés 3.3. táblázata szerint a mészkő mintadarabok mérete körülbelül 5cm x 6cm x 7 cm volt, tömegük  $m=0,5-0,6$ kg között ingadozott. A koptatáshoz használt, szabványos „Los Angeles” koptató dob belső átmérője  $D=71.1$  cm. Tekintve a mintadarab méretét, a súlypont legmagasabb és legalacsonyabb helyzetének távolsága a dobben körülbelül  $h=0.9D$ . Felteszem, hogy a kopás mértéke a koptató hatás energiájával arányos, továbbá, hogy az acél és a porózus mészkő közötti  $\mu_s$  csúszási súrlódási együttható:  $\mu_s = 0.25$ . Becsüljük meg az ütközéshez és a súrlódáshoz rendelhető energiákat! Az ütközés esetén a leeső kő ütközési energiája az  $1/2mv^2=mgh$  összefüggésből

$$E_{\text{ü}} = 0.9 mgD. \quad (6)$$

A súrlódás esetén felső becslést ad, ha a kő a dob teljes negyedkörívén végig csúszik

$$E_s = mg\mu_s \int_0^{\pi/2} \cos\alpha \frac{D}{2} d\alpha = 0.125mgD. \quad (7)$$

Azaz a súrlódási energia legfeljebb az ütközési energia 13,8%-át teszi ki, ez indokolja a súrlódás szerepének elhanyagolását.

10. Nagyon értékes megjegyzés a közelítő ellipszoiddal való térfogatbecslés kritikája.

*Válasz:* köszönöm az elismerő szavakat!

11. A kivételes részecskék tömege vélhetően egyszerűen azért nagyobb mindig a tipikus részecskékénél, mert Jelölt olyan modellt alkalmaz, amelyben a szemcsékről lepattanó kicsiny törmelékeket figyelmen kívül hagyja. Egy pontosabb, a fragmentációt is tükröző leírás másképp módosítaná a tömeg eloszlását.

*Válasz:* Vizsgáltuk azt az esetet is, amikor a kis részecskék benne maradnak a halmazban. Úgy tűnik, hogy a kivételes részecske ekkor is megmarad a folyamatban. A fragmentáció,

amikor kettő, vagy több érdemi méretű részecske keletkezik egy testből, különösen frissen fragmentált testekből álló halmaz esetén érdemben befolyásolhatja a tömegeloszlás időfejlődését. A modell kiterjesztése ebben az irányban valóban kézenfekvő lépés.

12. Jelölt igényességét fémjelzi, hogy kétféle numerikus szimulációval is vizsgálja a tömegeloszlás változását. Azonban e két modell egyike sem a szemcsék mozgásának és emiatt létrejövő ütközéseinek folyamatát kísérel meg szimulálni, hanem magának a kernelnek a viselkedését vizsgálja (ezt Jelölt ki is mondja). Hogyan lehetne olyan numerikus szimulációkat végezni, amelyek az inerciával és sebességekkel rendelkező szemcsék mozgásait követik, a mozgások miatti ütközéseknél pedig a kernel alapján modellezik a tömegek módosulását?

*Válasz:* A kérdésben felvetett eljárásra ún. *esemény vezérelt (event-driven)* szimulációk használhatóak. A részecskék mozgásának követésére ezek kiválóan alkalmasak, az értekezésben említett, a tudomány számos területén használt koagulációs modelleket is esemény vezérelt numerikus módszerekkel szimulálják. Esetünkben a nehézség az ütközés fizikájának precíz megragadásában rejlik. A témavezetésemmel Vízkeleti Áron fizikus hallgató 2020-as, *Collective abrasion of pebbles* című diplomamunkájában elemezte az ütközés fizikáját [8]. Rámutatott arra, hogy a rugalmasságtan eszköztára nem elegendő az ütközés leírásához, az ütközés kiváltotta kopás anyagvesztésének számszerűsítése további kontakt- és törésmechanikai megfontolásokat igényel.

13. A természetben előforduló kavics-halmazok kopásának vizsgálatokor a lognormális eloszlás mellett véleménye szerint milyen más eloszlású kiinduló halmazokat lenne érdemes még megvizsgálni?

*Válasz:* Az egyik a *szinguláris*, azaz a *Dirac-delta eloszlás*, ami nem más, mint a pontosan azonos tömegű kavicsok halmaza. Hasonlóan érdemes vizsgálni a kettő, vagy több Dirac-delta eloszlás esetét, azaz amikor több, azonos tömegű részkékből álló halmazt tesszünk ki az egyidejű és kölcsönösen ható kopási folyamatnak.

Amennyiben fragmentációból származó populáció időfejlődésének modellezése a célunk, indokolt exponenciális eloszlást választani, hiszen ismert [8], hogy a fragmensek tömege az

$$f(x) \approx x^{-\tau} \quad (8)$$

eloszlást követi, és a  $\tau$  exponens értéke az anyagjellemzőktől és a fragmentációt kiváltó folyamattól kevéssé függ, értéke  $\tau \approx 1.7 \pm 0.06$ .

14. A 4.2. alfejezet (i) pontjához: Fragmentáció esetén nem csak kettő, hanem több darabra is törnek a szemcsék. Ha modelljét fragmentációval is kiegészítené a jövőben, akkor a fragmensek számára is, illetve ebben a szemcsealak szerepére is feltételezéseket kell majd adnia. Vannak már ezzel kapcsolatos elképzelései?

*Válasz:* A [9] cikkünkben rámutattunk arra, hogy a fragmentáció során, függetlenül az azt kiváltó fizikai folyamattól, a keletkező fragmensek méreteloszlása és geometriai jellemzői univerzálisak. Egyik lehetőség a test szeletelése vágósíkokkal olyan módon, hogy a keletkező fragmensek a geometriai jellemzők megfigyelt eloszlását kövessék. Ekkor a fragmentációt a *térkitöltő mozaikok* elméletével hozzuk összefüggésbe. Ebben az irányban jelenleg is intenzív kutatás zajlik. Amennyiben a fragmentációt fizikai alapvetésekből kívánjuk származtatni, az a 12. kérdés alapján dinamikus törésmechanikai modellt igényel,

amit numerikus eszközökkel az irodalom vizsgál, az ezekkel összhangban lévő analitikus mechanikai modell tudomásom szerint jelenleg még nem létezik.

Budapest, 2023.04.27.



Sáros András Árpád

#### Hivatkozott publikációk

- [1] C. Laschi, M. Cianchetti, B. Mazzolai, L. Margheri, M. Follador, P. Dario P. Soft robot arm inspired by the octopus. *Adv. Robot.* 26. 709–727. 2012
- [2] F. Bosi, D. Misseroni, F. Dal Corso, D. Bigoni: Development of configurational forces during the injection of an elastic rod. *Extreme Mech. Lett.* 471, 83–88. 2015
- [3] M. Mahvash, P.E. Dupont: Stiffness control of surgical continuum manipulators. *IEEE Trans. Robot.* 27, 334–345. 2011
- [4] C. Armanini, F. Dal Corso, D. Misseroni, D. Bigoni, From the elastica compass to the elastica catapult: an essay on the mechanics of soft robot arm. *Proc. R. Soc. A*, 473(2198), 20160870. 2017
- [5] A.A. Sáros, P. L. Várkonyi: The longest soft robotic arm. *Int J. Nonlin. Mech.* 119. 103354. 2020
- [6] O. Gáspár, I. Sajtó, A.A. Sáros: Multi-hinge failure mechanism of masonry arches subject to self-weight as derived from minimum thickness analysis. *Int. J. Arch. Herit.* Közlésre elfogadva. 2023
- [7] D. Nikolić: Thrust line analysis and the minimum thickness of pointed masonry arches. *Acta. Mech.* 228, 2219–2236. 2017
- [8] Á. Vízkeleti: *Collective abrasion of pebbles*, Fizikus szakdolgozat, BME Elméleti Fizika Tanszék, 2020
- [9] G. Domokos, F. Kun, A. A. Sáros, T. Szabó: Universality of Fragment Shapes. *Sci. Rep.* 5, 9147. 2015