Válasz Dr. Bertóti Edgár professzor úr bírálatára

Szeretném megköszönni professzor úr bírálatát, értekezésem gondos átolvasását, támogató bírálói véleményét és elgondolkodtató, lényeglátó kérdéseit. A bírálatban szereplő észrevételekre és a feltett kérdésekre válaszaim a következők.

E.1. A 2. fejezetben a nyúlás és a nyújtás, mint relatív és abszolút alakváltozási jellemzők használatában (és értékében) némi inkonzisztencia teszi próbára az olvasó figyelmét:

- A 12. oldal (2.7) képletében megjelenő λi értékeket a dolgozat nyúlásoknak nevezi, lentebb $\lambda 1 = \lambda 2 = 0$ (?) és $\lambda 3 = 1$ értékeket ad meg rájuk, ugyanakkor a 2.3. fejezetben λ már nyújtásként (stretch) van definiálva.
- A (2.58)-ban makroszkopikus nyúlásként definiált ε értékei a 12. oldalon már nyújtásértékekként vannak említve.

Válasz: Bírálóm észrevétele helytálló, a szóhasználat nem konzekvens. Legyen egy szakasz a referencia állapotban L, az aktuális állapotban l hosszúságú. Ekkor a λ *nyújtás* (stretch) $\lambda := l/L$ és az ε *nyúlás* (strain) $\varepsilon := (l-L)/L$. Az említett helyeken:

- *A 2.7* képletben a Cosserat-féle rúdelméletben szereplő nyúlásokról van szó, ezek a bevezetett definíció szerint: λ_1 és λ_2 nyúlás és λ_3 nyújtás. A nem szokványos keveredés a *Cosserat-féle rúdelmélet* sajátja, részeletes levezetése megtalálható S. Antman híres könyvében [1]. Valóban zavaró, hogy az értekezésben egyaránt λ jelöli a Cosserat-féle rúdelmélet említett mezőit és a nyújtást.
- A 2.3. fejezetben a nyújtás definíciója és használta helyes.
- A (2.58) egyenlet nyúlást definiál, összhangban a fenti definícióval. A 26. oldalon a szóhasználat valóban hibás.

K.1. A 2.2. ábra szerint a vizsgált rúd geometriailag erősen nemlineáris alakváltozást is szenvedhet, kezdeti görbülete jelentősen megváltozhat. Milyen korlátot jelenthet a puha robotkarok kinyúlásának vizsgálatában a nyomatékok és a görbületek közötti (2.23) szerinti lineáris anyagmodell feltételezése, amely a rúd hajlítási és csavarási merevségeit – a görbülettől függetlenül – állandónak tekinti?

Válasz: A lineáris nyomaték-görbület összefüggés feltételezése gyakorlati alkalmazás esetén mindenképpen további, kísérleti alátámasztást igényel. Minden bizonnyal valamely hiperelasztikus anyagtörvény alkalmazása, esetleg a kezdeti görbülettől függő merevségek bevezetése lenne realisztikus. Azonban tényleges kísérleti apparátus hiányában indokoltnak tűnt a legegyszerűbb, lineáris modell használata. Továbbá, ez lehetővé tette eredményeink összevetését az irodalomban publikált síkbeli modellel [2].

E.2. A 2. fejezet 21. oldalán L a terheletlen film hosszaként van bevezetve. Célszerű lett volna az ugyanezen oldalon először megjelenő másik, ugyanilyen betűvel jelölt – és a későbbiekben is többször használt – L operátor értelmezésére is utalni.

Válasz: Egyetértek a bírálóval, L első esetben az $\Re^2 \to \Re^2$, lineáris operátorok terét jelenti, ami a dolgozatban sajnos nem definiáltam.

E.3. A (2.54) szerinti, linearizált nyúlási tenzorként bevezetett **e** tenzor az elmozdulás-mezőnek nemlineáris függvénye, csak részlegesen linearizált nyúlási tenzor. Bevezetése inkább zavarónak tűnik, mivel a dolgozat rövidesen áttér a Green-Lagrange-féle E nyúlási tenzor használatára. A 2.2.1. alfejezet gondolatmenete – megfelelő feltételezések után – szerintem egyértelműbb lenne kizárólag a (2.63) és (2.55) bevezetésével, majd a (2.64), (2.57) és $\Psi_{\mathrm{m}}(\mathbf{E})$ (2.56) alakú közvetlen felírásával. Ezzel egyrészt elkerülhetővé válna az **e**-ről **E**-re való áttérés indoklása (illetve az arra vonatkozó utalás), másrészt a Saint Venant-Kirchhoff-féle anyagmodell eleve a Green-Lagrange nyúlási tenzor és a II. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor között tételez fel lineáris kapcsolatot.

Válasz: A (2.54)-es képlettel a *Kármán Tódor nagy lehajlású, vékony lemezek elmélete* és az új, kiterjesztett modell közötti kapcsolatot szerettem volna bemutatni. A szöveg idővel sokat tömörödött, egyetértek bírálómmal, hogy akár ezt az egyenletet is el lehetett volna hagyni.

E.4. A (2.69) képletben megjelenő q-t a dolgozat *rögzített* paraméterként értelmezi, amely félreérthető. A későbbiek alapján kiderül, hogy q az ortotrópia mértékével és anyagjellemzőivel együtt egy folyamatosan változó paraméter.

Válasz: A modell szintjén q valóban anyagi paraméter, az ortotróp lemez G nyírási és E_0 rugalmassági modulusának hányadosa. A kísérletekben valóban r és q egyidejű változását tapasztaltuk. Az anyagparaméterek változására mutat modellezési lehetőséget az értekezés 2.3. fejezete, amelyben – részletes nyírási kísérletek hiányában – csak az r paraméter mért és számított értékeit vetettem össze a 35. oldalon.

E.5. A 23. oldalon (jobb oszlop) a dolgozat (2.73)-ra Euler-Lagrange egyenletként utal, amely valószínűleg elírás, feltételezhető, hogy (2.65)-(2.66) lenne a helyes hivatkozás.

Válasz: Igen, valóban elírás történt, a végeselemes eljárás a (2.65)-(2.66) egyenletek gyenge alakján alapul.

E.6. A dolgozat a matematikai átalakításokat többnyire megfelelően részletezi, a (2.78)-(2.79) parciális differenciálegyenletek megoldását viszont csak közli, (2.80)-(2.81) alakjában. Hiányolom a megoldásra vonatkozó utalást, mert az ránézésre szerintem nem következik.

Válasz: A (2.78) és a (2.79) egyenletek hasonlóak, ezért csak a (2.79)-es egyenlet megoldását mutatom be, a (2.78)-as eredménye analóg módon következik. Keressük a (2.79)-ben felírt egyenlet megoldást $v(x,y)=v_1(x)v_2(y)$ alakban! Vegyük figyelembe, hogy $r>0$ és $\nu>0$! A változók szeparálása elvégezhető:

$$-\frac{1}{r\nu}\frac{v_{1,xx}}{v_1} = m, \tag{1}$$

$$\frac{v_{2,yy}}{v_2} = m, \tag{2}$$

ahol m tetszőleges pozitív szám. A közönséges differenciálegyenleteket megoldva:

$$v_1(x) = c_1 sin\left(\sqrt{(mr\nu)}x\right) + c_2 cos\left(\sqrt{(mr\nu)}x\right), \tag{3}$$

$$v_2(y) = c_3 sinh(\sqrt{m}y) + c_4 cosh(\sqrt{m}y) \tag{4}$$

ahol c_1, c_2, c_3 és c_4 tetszőleges valós konstansok. Alkalmazva a szimmetriából következő $v_2(0)=0$ és a $v_{1,x}(0)=0$ peremfeltételeket, következik, hogy $c_1=c_4=0$. Bevezetve a $c=-c_2c_3$ és a $d=m^{1/2}$ jelöléseket, az értekezésben szereplő (2.81) megoldás adódik eredményül.

E.7. A 29. oldal 2.3.1. alfejezetének elején a síkbeli alakváltozási mező helyett a síkbeli elmozdulásmező van értelmezve és bevezetve.

Válasz: Egyetértek bírálómmal.

K.2. A (2.85) szerinti Ψ_m energiasűrűség a **C** alakváltozási tenzor függvénye, így Ψ_m elvileg a **C**12 alakváltozási komponenstől is függhet. Megjelenik-e ez a komponens a számításokban, illetve milyen szerepe van/lehet ennek komponensnek a ráncosodás és az anizotrópia (ortotrópia) kialakulása során?

Válasz: A (2.85) képletben $\mathbf{C}_{12}$ ténylegesen megjelenik (a det(**C**) tagok mindegyike $\mathbf{C}_{12}$ függvénye). $\mathbf{C}_{12}$ érdemben a befogások környékén különbözik zérustól, összefüggésben azzal, hogy a gátolt harántkontrakció nyírási igénybevételt jelent a befogások környezetében. Azonban a film területének nagy részén a hosszirányú húzás dominál, az anyagi károsodást és az ortotrópia megjelenését elsősorban ez okozza. A befogások környékén az eltérő mértékű (és esetleg jellegű) károsodásról nincsenek mérési eredményeink, a de *Saint-Venant elv* alapján ezt a vizsgálatainkban másodlagos jelentőségűnek tekintettük és célzottan nem vizsgáltuk.

K.3. A (2.90)-ben megjelenő **K** tenzor azonos-e a korábban bevezetett és használt **k** hajlítási tenzorral?

Válasz: Igen, megegyeznek, sajtóhiba a nagybetűs szedés.

K.4. A 2.3 alfejezetben milyen modellezési korlátot jelenthet az, hogy a membrán energia nemlineárisan rugalmas anyagmodellel történő figyelembe vétele mellett a hajlítási energia továbbra is lineáris anyagmodellt tételez fel?

Válasz: A bíráló kérdése nagyon fontos. Mind a 2.2. alfejezetben bemutatott ortotróp modell, mind 2 3. alfejezet károsodást is tartalmazó modellje a hajlítás szempontjából izotróp, linearizált viselkedést feltételez. Ez a 2.2. alfejezetben bemutatott vizsgálatok alapján védhető: a síkbeli (membrán) viselkedés érdemben befolyásolja a nyomófeszültségek eloszlását a vékony lemezben. A ráncosodást, mint a nyomófeszültségek miatt bekövetkező posztkritikus egyensúlyi alakot, elsősorban a nyomófeszültségek eloszlása határozza meg. A ráncos alak tényleges számításakor és/vagy összetett terhelési esetekben a modell kiterjesztése anizotróp hajlítási taggal elengedhetetlen. Ezen irányban jelenleg is végzünk vizsgálatokat.

K.5. A vékony filmek ráncosodásának vizsgálata során mennyire helytálló az a feltételezés, hogy a hajlítási energia független a kialakuló ortotrópiától és a károsodás mértékétől, például a ráncos és a sima tartományok átmeneténél?

Válasz: A hajlítás modellezése egyszerű, izotróp modellel azért védhető, mert amíg az energiasűrűségben a ψ_m membrán tag a h vastagságtól lineáris módon függ, addig a hajlítási ψ_b energiasűrűség függése h^3. Tekintettel arra, hogy h kicsiny értékeit vizsgáljuk, az alkalmazott közelítés nem jár érdemi hibával, legalábbis az egyensúlyi utak helyzetének tekintetében. Amennyiben a konkrét hullámos alakot (pl. a ráncok pontos profilja) szeretnénk számítani, akkor a modell a bíráló által jelzett irányokban további finomításra szorul.

K.6. A 3.4.(a) ábrán látható ooid részecskék egy része nem látszik tengelyesen szimmetrikusnak, közülük többnek is van konkáv szakaszokat tartalmazó határológörbéje. Milyen lehetőségek rejlenek a geometriai parciális differenciál-egyenletekben az ilyen típusú – nem tengelyesen szimmetrikus és konkáv határológörbékkel rendelkező – alakzatok fejlődésének leírására?

Válasz: A bemutatott modell invariáns alakjai konvex, tengelyesen szimmetrikus görbék. Tekintettel arra, hogy a geometriai parciális differenciálegyenlet a részecske ütközéseinek átlagolt hatását hivatott leírni, konkáv kezdeti alakok esetén a görbületes és a súrlódásos tagot a test aktuális konvex burkán érdemes hattatni. (Esetleg kizárólag a test konvex felületi pontjainak halmazán értelmezni.) Ennek, más alakfejlődési modellekhez hasonlóan az a következménye, hogy létezik $T<\infty$ időpont, amelytől kezdve az alakzat minden pontjában szigorúan konvex. A kérdésben rejlő felvetés, nevezetesen, hogy fizikai megfontolások alapján a konkáv felületeken esetleg más evolúciós törvényt érdemes figyelembe venni, véleményem szerint fontos és további vizsgálódásra okot adó felvetés. Például a klasszikus

$$f(\kappa) = c_0 + c_1\kappa \tag{5}$$

Bloore modell fizikai interpretációjában a c_0 konstans tagot a kisméretű részecskék koptató hatásával, a c_1 görbületes tagot a koptatott részecskénél jóval nagyobb koptató részecske hatásával hozzuk összefüggésbe. Konvex kopó test esetén könnyű amellett érvelni, hogy a kettő megfelelő súlyozása adja a véges méretű koptató részecske esetét (ennek részletes levezetése megtalálható az [3] cikkben). Azonban konkáv felületi pont esetén az ütköző test mérete felülről korlátos. Tehát egy olyan modell mellett is szólnak érvek, ahol az egyenlet egyes együtthatóinak értéke más konvex felületen (a koptató részecskék méretétől függő konstansok) és más konkáv felületen, ahol a kopó részecske negatív görbületének is függvénye az együttható. Azaz egy ilyen megközelítésben a Bloore modell lineáris függése a kopó test görbületétől eltűnik, egy bonyolultabb, a negatív görbület esetében nemlineáris modellt kapunk eredményül.

A tengelyes szimmetria az ooid részecskék kopására használt modellben abból következik, hogy feltesszük pontosan egy, leghosszabb átló létezését, amely az evolúció során megtartja irányát. A súrlódás hatása ezen átlóval párhuzamosan domináns. Ez a megszorítás a kezdeti alakra más súrlódási modell esetén elhagyható. Például természetes módon adódna egy olyan kopási törvény, amely a test stabil egyensúlyi pontjainak környezetében tételez fel domináns súrlódást. Ámbár szavakkal egy ilyen modell könnyen megfogalmazható, az ilyen módon felírt, nemlokális egyenlet analitikus elemzésére kevés reményt látok. Az általunk bemutatott, egyszerű súrlódási modell meglepően jó egyezést mutat a természetben és mesterséges környezetben növesztett ooidok keresztmetszetével, beleértve a metszetben megfigyelhető, a fák évgyűrűire emlékeztető köztes állapotokat. Tekintve a meggyőző egyezést, az egyszerűbb modell vizsgálatát követtem.

E.8. A 3.16. Tételben (66. oldal) megjelenik a D_2 szimmetria fogalma, de értelmezését nem találtam meg, a későbbiek alapján derül ki, mit ért rajta a dolgozat. Részben azért említem ezt meg, mert a D_2 szimmetriacsoport fogalma és jele a 3. tézisben explicit módon is megjelenik, azonban ott már index nélküli D2-ként.

Válasz: A D_2 diédercsoport a téglalap szimmetria csoportja. Bírálóm jogosan veti fel, hogy ennek bevezetését a dolgozat nem tartalmazza. Mindkét említett jelölés használta járatos az irodalomban, azonban keverésük egy értekezésen belül valóban nem szerencsés.

E.9. A 4.6. Tétel *kollektív kernelre* fogalmaz meg állítást. A tétel bizonyítása alapján feltételezhető, hogy ez a kernel azonos a korábban *összetett kernel* néven definiált (4.25) kernellel. Nem tartom szerencsésnek, ha egy dőlt betűvel kiemelten definiált fogalmat (kernel nevet) a rá vonatkozó tétel eltérő néven említ. (Kevésbé zavaró, ezért csak zárójelben említem, hogy az ugyancsak dőlt betűvel definiált *összegzési kernelt* a 4.2. Lemma már összeg kernelnek nevezi és fogalmaz meg rá állítást).

Válasz: Igen, a 4.6. Tétel a (4.25) képlettel definiált *összetett kernelről* fogalmaz meg állítást, a szóhasználat nem szerencsés. Hasonlóan, figyelmetlenségből maradt két, eltérő név az *összegzési kernelre*.

K.7. A 4.1.2. alfejezetben bemutatott numerikus eredmények síkbeli vagy térbeli ütközések szimulációjával nyert eredmények? Van-e, várható-e lényeges különbség a kétféle szimulációval kapható eredmények között?

Válasz: A 4.1.2. alfejezetben bemutatott eredmények nem kötöttek a dimenzióhoz abban az értelemben, hogy a kernel egyenletről feltettük, hogy az az ütközés fizikáját, beleértve a részecskék terének dimenzióját, tartalmazza. A kérdés ennek alapján az, hogy várunk-e különbséget a kernel egyenletben a térdimenzió függvényében. Ezt ún. *esemény vezérelt (event-driven*) szimulációval, rögzített ütközési törvény mellett lehet vizsgálni. A részecskék mozgásának követésére ezek jól használhatóak, az értekezésben említett, a tudomány számos területén használt koagulációs modelleket is esemény vezérlet numerikus módszerekkel szimulálják. Ott jellemzően azt találják, hogy az 1 dimenziós (vonal mentén értelmezett) modell érdemben különbözik a magasabb dimenziós modellektől, ez utóbbiak együtthatókban és exponensekben térnek el. Esetünkben a nehézség az ütközés fizikájának precíz megragadásában rejlik. A témavezetésemmel Vízkeleti Áron fizikus hallgató 2020-as, *Collective abrasion of pebbles* című diplomamunkájában foglalkozott az ütközés fizikai leírásával [4]. Rámutatott arra, hogy a klasszikus rugalmasságtan eszköztára nem elegendő, az ütközés kiváltotta kopás anyagveszteségének számszerűsítése további kontakt- és törésmechanikai megfontolásokat igényel.

K.8. A 3. és a 4. fejezetben elért eredmények nagyszerűsége és eleganciája abban áll, hogy bonyolult fizikai (mechanikai) és kémiai folyamatokat geometriai-matematikai szabályok felállításával tud figyelembe venni az alakfejlődés, illetve a méretfejlődés és eloszlás differenciálegyenletekkel történő leírása során. Pontosítaná-e (és mennyiben) az alakfejlődési és a kopási folyamatok leírását, illetve modellezését, ha az anyagmodelleket, a súrlódási és kopási törvényeket, a mozgási és helyzeti energiák szerepét, az áramló közeg sebességét, valamint a kémiai folyamatokat fizikai-mechanikai modellek felállításával próbálnánk – feltételezhetően jóval bonyolultabb és kevésbé elegáns módon – figyelembe venni?

Válasz: Köszönöm a dolgozat és a további kutatások szempontjából is alapvető kérdést! Az ütközés fizikai modelljeiből a geometriai parciális differenciálegyenletek származtatása komoly kihívás, összetett elméleti, numerikus és kísérleti apparátust igényel. Hasonlatos a helyzet a mérnöki mechanika tradicionális modelljeihez: *fenomenológiai anyagmodelleket* használunk, hiszen az atomi-molekuláris törvényszerűségek közvetlen figyelembevétele összetett, több méretskálát összekapcsoló modelleket igényel. Ezen, *többskálás* (*multiscale*) modellek vizsgálta egyre meghatározóbb a mechanika területén (is). Úgy vélem, a kopást meghatározó fizikai jelenségek, így az anyagszerkezet, a súrlódás és akár a kapillaritás figyelembevételére a jövőben a többskálás modellekhez hasonló numerikus és analitikus eszközökkel lesz lehetőségünk. Ugyanakkor a jelenlegi modellek prediktív erőssége és természeti folyamatokkal vett összhangja arra enged következtetni, hogy jelen formájukban is alkalmasak a természetben megfigyelt formák elemzésére. A többskálás modellek és a jelenleg tisztán determinisztikus geometriai PDE-ken túl, véleményem szerint, ígéretes irány a determinisztikus modellek sztochasztikus kiterjesztése és a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletének esetleges alkalmazása a morfológia területén.

Budapest, 2023.04.27.

Sipos András Árpád

Hivatkozott publikációk

[1] S.S. Antman: *Nonlinear Problems in Elasticity*. 2nd ed. Springer-Verlag NY. 2005.

[2] C. Armanini, F. Dal Corso, D. Misseroni, D. Bigoni, From the elastica compass to the elastica catapult: an essay on the mechanics of soft robot arm. *Proc. R. Soc. A*, 473(2198), 20160870. 2017

[3] G. Domokos, A.A. Sipos, P.L. Várkonyi: Continuous and discrete models for abrasion processes, *Periodica Polytechnica Architecture* 40(1) 3-8. 2009

[4] Á. Vízkeleti: *Collective abrasion of pebbles*, Diplomamunka, BME Elméleti Fizika Tanszék, 2020