Válasz Dr. Faragó István professzor úr bírálatára

Szeretném megköszönni professzor úr bírálatát, értekezésem gondos átolvasását, támogató bírálói véleményét és elgondolkodtató kérdéseit. A bírálatban szereplő észrevételekre és a feltett kérdésekre válaszaim a következők.

1. A Szerző a következő megállapítást teszi (16. oldal): *Mivel egy hipermátrix sajátérétkeinek halmaza az egyes blokkok sajátértékeinek uniójaként áll elő (Rózsa, 1991),* amivel nem értek egyet. Ez csak a blokkokra vonatkozó erős megkötések mellett érvényes. Lényeges a hipermátrixok mátrixelemeinek kommutálása, illetve azok egyszerű struktúrája (teljes sajátvektor-rendszer létezése).

   Válasz: Köszönöm bírálóm észrevételét! A 16. oldalon említett megfogalmazás valóban félreérthető, és a hivatkozott formában a sajátértékekre levont következtetés hibás. Helyesen a $\delta^2\mathcal{L}$ bármely diszkretizálása *blokkdiagonális mátrixot* eredményez, melynek főátlójában a $\delta^2\mathcal{L}_\mathrm{p}$ és $\delta^2\mathcal{L}_\mathrm{s}$ második variációkat approximáló blokkok szerepelnek (és a (2.50) egyenletet követő diszkusszió alapján a mellékátlóban lévő blokkok zérus mátrixok). A főátló két említett blokkja szimmetrikus, valós mátrix, így a szimmetrikus mátrixok spektrál tétele alapján a teljes sajátvektor-rendszer létezése garantált. Tehát azon állítás, hogy a $\delta^2\mathcal{L}$ második variációt approximáló mátrix sajátértékei a $\delta^2\mathcal{L}_\mathrm{p}$ és $\delta^2\mathcal{L}_\mathrm{s}$ második variációkhoz tartozó mátrixok sajátértékeinek uniójaként áll elő, helyes. A félreértést a szöveget megalapozó cikkben helyesen szereplő állítás hibás magyarítása (blokkdiagonális mátrix helyett a hipermátrix szó használata) okozta.

2. A (2.73) funkcionálnak (23. oldal) miért létezik minimuma? Ez a minimum egyetlen? Milyen simaságú? A közelítésére lehet-e más végeselemet alkalmazni?

   Válasz: A dolgozat jelöléseit használom. A (2.73) funkcionálban szereplő minden anyagi paraméter (r,q…stb.) pozitív valós szám. Megjegyzendő, hogy a dolgozat szövegébe a (2.71) egyenlet előtt egy sajtóhiba csúszott, hiszen helyesen $\mathbf{C}_{1212} = \mathbf{C}_{2121} = -q\left(r\nu_{[xy]}^2 - 1\right)$. (A sajtóhiba a fejezet további képleteit nem érinti, az ottani eredmények helyesek.) Ismert, hogy $\left(1 - r\nu_{[xy]}^2\right) = \left(1 - \nu_{[xy]}\nu_{[yx]}\right)$ kifejezés fizikai megfontolás miatt pozitív [1]. Így (2.73) funkcionál egy alsó korlátja számítható:

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{u}) &= \int_\Omega \{\Psi_m(\mathbf{E}) + \Psi_b(\mathbf{k})\} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \{12\xi \mathbf{E}\cdot\tilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{k}\}\mathrm{d}\Omega = \\
&\int_\Omega \{12\xi(\mathbf{E}_{11}^2 + 2r\nu_{[xy]}\mathbf{E}_{11}\mathbf{E}_{22} + r\mathbf{E}_{22}^2 + 2q\left(1 - r\nu_{[xy]}^2\right)\mathbf{E}_{12}^2)\}\mathrm{d}\Omega + \\
&\int_\Omega \{\mathbf{k}_{11}^2 + 2r\nu_{[xy]}\mathbf{k}_{11}\mathbf{k}_{22} + r\mathbf{k}_{22}^2 + 2q\left(1 - r\nu_{[xy]}^2\right)\mathbf{k}_{12}^2\}\mathrm{d}\Omega \geq \\
&\int_\Omega \{12\xi(\mathbf{E}_{11}^2 + 2r\nu_{[xy]}\mathbf{E}_{11}\mathbf{E}_{22} + r\mathbf{E}_{22}^2)\}\mathrm{d}\Omega + \\
&\int_\Omega \{\mathbf{k}_{11}^2 + 2r\nu_{[xy]}\mathbf{k}_{11}\mathbf{k}_{22} + r\mathbf{k}_{22}^2\}\mathrm{d}\Omega =: J(\mathbf{u})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   Az egyenlőtlenség $\left(1 - r\nu_{[xy]}^2\right) > 0$ következménye. Tekintsük az $\mathbf{E}_{22} = m_1\mathbf{E}_{11}$ és a $\mathbf{k}_{22} = m_2\mathbf{k}_{11}$ egyeneseket, ahol $m_i \in (-\infty \ldots \infty)$ és $i \in \{1,2\}$. Ekkor $J(\mathbf{u})$ a következő alakban írható:

$$J(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \{12\xi \mathbf{E}_{11}^2(1 + 2r\nu_{[xy]}m_1 + rm_1^2)\}d\Omega + \int_\Omega \{\mathbf{k}_{11}^2(1 + 2r\nu_{[xy]}m_2 + rm_2^2)\}\mathrm{d}\Omega. \qquad (2)$$

Megmutatjuk, hogy mindkét integrálban az anyagi paraméterektől és az m_i számoktól függő $R_i = 1 + 2r\nu_{[xy]}m_i + rm_i^2$ polinom pozitív ($i \in \{1,2\}$). Mivel

$$\lim_{m_i \to \pm\infty} R_i = +\infty, \qquad (3)$$

következik, hogy R_i minimumhelyén vett értékét keressük. Az m_i szerinti első deriváltat segítségével kapjuk, hogy R_i minimuma $m_i = -\nu_{[xy]}$ helyen van. Behelyettesítve

$$R_i|_{m_i=-\nu_{[xy]}} = 1 - 2r\nu_{[xy]}^2 + r\nu_{[xy]}^2 = 1 - r\nu_{[xy]}^2 > 0. \qquad (4)$$

Tehát $I(\mathbf{u}) \geq J(\mathbf{u}) > 0$.

A funkcionál minimumhelyeinek számossága nehéz kérdés:

(i) Numerikus vizsgálatok a triviális ág és a dolgozatban elemzett, ráncos alakokat tartalmazó posztkritikus ág vizsgálatára irányultak. Ezen kívüli, pl.: sziget-szerűen megjelenő megoldáshalmaz(ok)ról nincs tudomásunk, de a létük az eddigi vizsgálatok alapján nem zárható ki.

(ii) A [2] publikáció bemutatja, hogy az izotróp modellben a posztkritikus ág valójában nem egy ág, hanem egyensúlyi utak egy családja, ahol a ráncos alak megfelelő geometriai transzformációja felel meg az ágak között váltásnak. Más szavakkal, adott megnyúlás és oldalarány esetén az izotróp modellben ráncos alakok egy családja mind minimalizálja a funkcionált. Ezen jelenség vélhetően az ortotróp modellben is megjelenik, de erre nem végeztünk kiterjedt számítógépes vizsgálatot.

Az ismeretlen függvények regularitása $u \in C^1(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$ és $w \in C^2(\Omega)$, ez a funkcionál minimumhelyén is szükséges. Így az egyensúlyi egyenletek gyenge alakjának végeselemes számításához u és v közelítése történhet szakaszosan lineáris (C^0 folytonos) bázisfüggvényekkel, azonban w közelítéséhez elengedhetetlen a C^1 folytonos bázisfüggvények használata.

3. A (2.144) képlet (45. oldal) a Szerző ezt írja: „a módszer pontossága O(4h^2)". Az Edmund Landautól származó ordó-jelölés egyik tulajdonsága, hogy O(constans h^n)=O(h^n). Ezért nem látom jelentőségét a fenti összefüggésben a négyes szorzónak.

   Válasz: Egyetértek a bíráló megjegyzéssel, a szövegben feleslegesen kerül megemlítésére O(4h^2). Helyesebb lett volna azt írni, hogy a (2.144) szerinti módszer pontossága, hasonlóan a (2.143) szerinti képlethez O(h^2). Azonban a (2.144) szerinti becslés a fele olyan sűrű diszkretizáló rácshoz tartozik és ez előnytelen a számítás szempontjából.

4. A 3. fejezetben a Szerző azzal a feltételezéssel él, hogy a kezdeti Jordan típusú görbületfüggvénye generikus (azaz minden kritikus pontja vagy maximum, vagy minimum). A vizsgálat során egy további feltételezéssel is él: *Ámbár a fejezetben bemutatásra kerülő eredmények közül több általánosítható konkáv, illetve konvex görbékre, az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy a görbe szigorúan konvex*. (49. oldal). Ezen feltétel

elhagyásával, avagy csak a szigorúság elhagyásával, feltehető-e, hogy létezik olyan T időpont, hogy minden t>T esetén a görbe szigorúan konvex?

Válasz: A szigorú konvexitás kikötése a T időpont létezése tekintetében nem szükséges feltétel: a 4. fejezetben szereplő vizsgálatok rámutatnak arra, hogy konvex test, (például egy poliéder) koptatása esetén a görbületfüggő modellben létezik $T>0$ időpont, ameddig az eredeti test lapjain létezik egy nem zérus mértékű ponthalmaz, ahol a test határa sík. Ezen ponthalmaz(ok) legkésőbb a T időpontban nullmértékűek, a test bármely $t>T$ időpontban szigorúan konvex. Az értékezés 3.3. fejezete a T időpontig tartó intervallumot nevezi a *kopás első fázisának* (72. oldal).
Konkáv test esetén szükséges tisztázni, hogy a konkáv felületdarabokon hogyan alakul a kopási törvény. Az egyik lehetséges, de fizikai szempontból nehezen indokolható megoldás, ha az $f(\kappa)$ kopási törvénybe a görbület az előjelének megfelelően kerül beírásra. Például ebben az esetben a *Firey-féle* $f(\kappa)=c\kappa$ *kopási törvény* a konkáv tartományokon a test növekedéséhez vezet. Ebben az esetben belátható, hogy létezik T időpont, ami felett a test szigorúan konvex. Ezzel szemben, amennyiben olyan $f(\kappa)$ kopási törvényt konstruálunk, amelyben negatív görbület esetén a (test belseje felé megvalósuló) kopás sebessége elegendően nagy, akkor a T időpont létezése kizárható, azaz az evolúció folyamán végig konkáv marad a test.
Érdemes megemlíteni, hogy a konkáv felületeken a konvex felülettől eltérő evolúciós törvény véleményem szerint további vizsgálódásra okot adó felvetés. Például a klasszikus Bloore modell fizikai interpretációjában a konstans tagot a kisméretű részecskék koptató hatásával, a görbületes tagot a koptatott részecskénél jóval nagyobb koptató részecske hatásával hozzuk összefüggésbe. Konvex kopó test esetén könnyű amellett érvelni, hogy a kettő megfelelő súlyozása adja a véges méretű koptató részecske esetét (ennek részletes levezetése megtalálható a [3] cikkben). Azonban konkáv felületi pont esetén az ütköző test mérete felülről korlátos. Tehát egy olyan modell mellett is szólnak érvek, ahol az egyenlet egyes együtthatóinak értéke más konvex felületen (vélhetően a koptató részecskék méretétől függő konstansok) és más konkáv felületen, ahol a kopó részecske negatív görbületének is függvénye az együttható. Azaz egy ilyen megközelítésben a Bloore modell lineáris függése a test görbületétől eltűnik, egy bonyolultabb, a negatív görbület esetében nemlineáris modellt kapunk eredményül.

5. A 3.1. táblázatban (51. oldal) több, f görbületfüggő kopási törvényt sorol fel a Szerző. Milyen közös matematikai tulajdonságai vannak ezeknek a függvényeknek? A simaságon túlmenően, pl. az $x>0$ esetén $f(x)>0$ triviális feltételen túl is egyéb tulajdonság? Ezek hogyan hatnak ki a (3.4)-(3.7) modell megoldhatóságára?

   Válasz: A professzor úr felvetésében szereplő feltételek akár gyengíthetőek is, hiszen az $f(x)>0$ megkötés eredete, hogy minden felületi pontban kopást, azaz anyagveszteséget tételezünk fel. Amennyiben bármilyen oknál fogva növekedést is tartalmaz a fizikai folyamat, akkor még a pozitivitást sem kell megkövetelni (erre mutat példát az ooid alakfejlődést leíró modell a 3.2. alfejezetben).
   Ugyanakkor a (3.4)-(3.7) egyenletek viselkedése a kopási törvény alatt összetett kérdés, ami nem csak a kopási törvénnyel, hanem a kezdeti feltétellel is összefügg. Például az $f(\kappa)=1$ törvénnyel definiált *Eikonal kopás* az alakzat érintőit azonos mértékben mozgatja a lokális normális irányába. Jelölje T_f az alakzat eltűnéséhez tartozó időt, ami az

Eikonal modellben értelemszerűen véges. A kopási folyamatban a kör invariáns alakzat, ott az egyenletrendszer a teljes kopás alatt és minden kerületi pontban helyesen írja le az érintő irány állandóságát és az w pályasebesség evolúcióját. Ezzel szemben ugyanezen egyenlet körtől különböző kezdeti alakzat esetén $t<T_f$ idő után szingularitást fejleszt (a w pályasebesség a görbe egyes pontjaiban zérussá válik, emiatt a görbe többé nem jól definiált). Az Eikonal kopás esetén a felület szingularitásainak, azaz síkbeli esetben a csúcsok, térbeli esetben a csúcsok és élek megjelenése jól ismert.

6. A (4.1)-(4.2) törvény (79. oldal) általánosítása az r (úm. környezeti) skaláris paraméter bevezetésével nyert (4.3)-(4.4) modell. (Mint láttuk, ez a modell r=0.5 esetén kritikus.) A Szerző megfogalmazásában: *A modell két feltételezésen alapul: egyrészről az ütközés valószínűsége a részecske méretétől függ, másrészről az ütközési sebesség független a tömegtől.* Hogyan jön ki ez az implikáció? Vannak-e más jellegű modellek is?

   Válasz: Hasonló modellek a fizika számtalan területén a molekuláris léptéktől a csillagködökig bezárólag megjelennek. Az egyes fizikai folyamatokat hűen megadó, egyszerű kernelek keresése aktív kutatási terület. Például a [4] publikáció közel 100, különböző kernelt sorol fel az elmúlt 100 év tudományos irodalmából.

   Az értekezésben szereplő összetett kernelt az [5] cikk vezette be, a következő megfontolások alapján. Tegyük fel, hogy a kopás mértéke az X és Y tömegű, ütköző részecskék E_{kin} mozgási energiájával egyenesen arányos. A súlyponti referencia rendszerben a mozgási energia:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\frac{XY}{X+Y}u^2, \tag{5}$$

   ahol u a részecskék relatív sebessége. Feltételezve továbbá, hogy átlagosan minden részecskepár esetén u állandó (azaz független X és Y tömegektől) a bináris ütközés egyenleteit kapjuk:

$$\begin{aligned} -X_{,t} &= c_{12}\frac{XY}{X+Y}, \\ -Y_{,t} &= c_{21}\frac{XY}{X+Y}. \end{aligned} \tag{6}$$

   Itt c_{12} és c_{21} konstansok tartalmazzák a (5) kifejezés konstans együtthatói mellett az anyag kopással szembeni ellenálló képességét. Azonos anyagú részecskék esetén $c_{12}=c_{21}$. Azonban egy kollektív modellben nem hagyhatjuk figyelmen kívül az X,Y részecskepár ütközésének valószínűségét. Például, reális feltételezésnek tűnik, hogy nagyobb tömegű részecskék egységnyi idő alatt több ütközésben vesznek részt, mint kisebb társaik. Modellünk azon a feltevésen alapszik, hogy adott X tömegű részecske egység idő alatt bekövetkező N_X ütközési száma arányos a méretével, azaz

$$N_X \propto \left(\frac{X}{Y}\right)^r \tag{7}$$

   Ezt tekinthetjük úgy, hogy a kollektív modell T idejét a bináris modell t idejéhez képest átskálázzuk a

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{X}{Y}\right)^{-r} \tag{8}$$

   módon. Ekkor

$$-X_{,T} = c_{12}\frac{XY}{X+Y}\left(\frac{X}{Y}\right)^r = c_{12}\frac{X^{1+r}Y^{1-r}}{X+Y}. \qquad (9)$$

A továbbiakban a kollektív eset T idejét t-vel jelölve kapjuk az értekezés (4.3) képletét, A (4.4) egyenlet analóg módon származtatható. Mindkét feltevés, azaz az u sebesség állandósága az (5) összefüggésben és az ütközési gyakoriság becslése a (7) egyenletben további vizsgálatokkal finomítható. Azonban érdemes kiemelni, hogy az értekezés (4.26) sorfejtése és az azt követő diszkusszió szerint a kernel r paramétere a kollektív populáció tömegének várható értékét nem, szórásnégyzetét viszont befolyásolja. Ez az összetett kernel egy olyan tulajdonsága, ami véleményem szerint kísérletekkel is igazolható, az ütközés fizikájának részletes elemzése *nélkül*.

7. A Szerző a teljes munkáját átívelően „Numerikus eredmények" fejezetcímet használ. Ezek a szakaszok rendre az elvégzett (és egyébként nagyon igényesen elvégzett) számítógépes kísérletek eredményeit tartalmazzák. Véleményem szerint Szerző által megadott cím nem fejez ki az adott szakasz tartalmát, hiszen nem a numerikus modellt vizsgálja, hanem annak számítógépes realizálását. Megítélésem szerint a „Számítógépes eredmények" elnevezés relevánsabb lenne.

   Válasz: Köszönöm bírálóm megjegyzését, amivel egyetértek.

Budapest, 2023.04.27.

Sipos András Árpád

Hivatkozott publikációk

[1] B.M. Lempriere: Poisson's Ratio in Orthotropic Materials, *AIAA Journal*, 6(11) 2226-2227. 1968

[2] T.J. Healey, Q. Li, R.B. Cheng: Wrinkling Behaviour of Highly Stretched Rectangular Elastic Films via Parametric Global Bifurcation. *J. Nonlin. Sci*. 23, 777-805. 2013

[3] G. Domokos, A.A. Sipos, P.L. Várkonyi: Continuous and discrete models for abrasion processes, *Periodica Polytechnica Architecture* 40(1), 3-8. 2009

[4] C. J. Meyer, D. A. Deglon: Particle collision modeling – A review, *Miner. Eng*. 24, 719–730. 2011

[5] G. Domokos, G. W. Gibbons: The Geometry of Abrasion, in: *New Trends in Intuitive Geometry*, edited by: Ambrus, G., Bárány, I., Böröczky, K. J., Fejes Tóth, G., and Pach, J., Springer, Berlin, Heidelberg, 125–153. 2018