MŰEGYETEM 1782

Mechanikai és természeti formák elemzése: matematikai modellek a morfológiában

MTA doktori értekezés

Sipos András Árpád

BME Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék
MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2022 Budapest

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

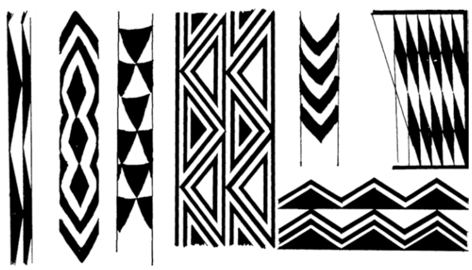
A tudós nem azért tanulmányozza a természetet,
mert az haszonnal jár, hanem azért,
mert örömét leli benne; és azért leli benne örömét,
mert a természet gyönyörű.
Henri Poincaré

Az írott történelem előtti művészeti alkotások, például barlangrajzok, használati eszközökbe vésett ábrák és népművészeti emlékek tanúsítják, hogy a természetben megfigyelhető geometriai formák és mintázatok kezdetektől fogva mély érdeklődésre tartottak számot az emberek körében (1.1. ábra).

Az ókori görög tudomány és filozófia inspirációi, eszközei és eredményei közül kiemelkedően sok tartozik a geometria körébe (Simonyi, 1978). Jól példázza a geometria erős hatását a külső bolygók égbolton megfigyelhető hurokmozgásának ptolemaioszi magyarázata, amely egymáson mozgó körök sorozatával igyekezett az elméleti és mért eredményeket közelíteni egymáshoz. Eukleidész *Elemek* című munkája évszázadokra határozta meg a tudományos gondolkodás irányát és kritériumait.

(a)

(b)



1.1. ábra. Geometrikus mintázatok a népművészetben. (a) Palócz hímzés (Petrás, 1984) (b) Hagyományos ruandai motívumok (Huylebrouck, 2019).

A modern tudomány születése *matematikai eszköztárat*, azaz nyelvet adott a formák tanulmányozásához. A matematikai leírás egymástól távol eső jelenségekről mutatta ki, hogy a hozzájuk köthető forma (közel) azonos. Jó példa erre a *logaritmikus spirál*, amit Jacob Bernoulli, a XVII. század kiemelkedő matematikusa részben matematikai tulajdonságai, részben talán univerzalitása miatt nevezett *csodálatos spirálnak (spira mirablis)*. A névválasztás nagyon is indokolt: egyes spirális galaxisok alakjától a csigahéjak középvonalának felülnézetéig a logaritmikus spirál meglepően sok természeti formában megfigyelhető (1.2. ábra). Ez vélhetően összefügg a logaritmikus spirál egyik nevezetes geometriai tulajdonságával: a spirális O középpontjából a görbe tetszőleges P pontjához húzott egyenes a görbe P-beli érintőjével minden pontban azonos, (derékszögtől eltérő) szöget zár be. Könnyű belátni, hogy amennyiben a spirál növekedés útján keletkezik, akkor ez a geometriai tulajdonság épp az OP irányra merőleges növekedés következménye (Thompson, 1942). Más szavakkal: egy elemi szabály a növekedésre azt eredményezi, hogy a *spira mirablis* a természetben számtalan helyen felbukkan.

Az értekezésben egyedi formákat létrehozó mechanikai rendszereket és élettelen természeti folyamatokat vizsgálok. A formát, hasonlóan az említett logaritmikus spirálhoz, mindegyik példában a rendszerhez rendelt *matematikai modell* magyarázza. Ezen modell jellemzően egy nemlineáris közönséges, vagy parciális differenciálegyenlet rendszer (rövidítve: KDE, PDE) alakjában foglalható össze. A természetben vagy kísérletekben megfigyelhető formák ezen egyenletrendszer adott kezdeti- és/vagy peremfeltételek mellett számított, *stabil* megoldásaival állnak kapcsolatban, ezért különös hangsúlyt kap a megoldás stabilitásának vizsgálata. Egyaránt szó lesz statikus, az időtől nem függő mechanikai rendszerek megoldásairól, és időben fejlődő természeti formákról.

Fontos kiemelni, hogy a valóság összetett formái a matematikai modellnek gyakran elemi eszközökkel nem számítható megoldásait jelentik. Ha precíz módon igazolni is lehet egyes megoldáshalmazok egzisztenciáját (pl.: posztkritikus egyensúlyi utak léte), egyes konkrét megoldások előállítása numerikus eljárásokat igényel. A mérnöki gyakorlatban széles körben használt numerikus algoritmusok alkalmassága a stabil megoldások számítására kérdéses, ennek többek között az az oka, hogy egyes modellekben a differenciáloperátor fő része (*principal part*) szorzódik egy közel zérus értékű paraméterrel. A bemutatásra kerülő példák közül ide tartozik a vékony filmek ráncosodása, ahol a film vastagságának négyzete ez a kicsiny paraméter. A numerikus módszerekkel szembeni óvatosság miatt fontos, hogy (akár egyszerűsítő feltételezések mellett) analitikus eredmények is rendelkezésre álljanak. Ez (részben) indokolja azt, hogy az értekezés elsősorban a modellek leírására és az analitikus eredmények bemutatására törekszik. Az egyes megoldások számítására használt numerikus eljárást minden, bemutatásra kerülő modell esetében a hivatkozott publikációk tartalmazzák.

(a)

(b)

1.2. ábra. Logaritmikus spirál a természetben. (a) Nautilus héjának metszete (b) Spirális galaxis (Messier 101, NGC 5457) A képek forrása: Wikipedia Commons.

Az értekezés egy *szerkezeti mechanikai* kérdéseket tárgyaló és kettő, a *természeti morfológiában* gyökerező problémákat vizsgáló fejezetet tartalmaz, a dolgozatban vizsgált kérdésekre utalnak az 1.4. ábra képei.

1.1 Irodalmi áttekintés

A formák és mintázatok szakirodalmának összegzése meghaladja ezen írás kereteit, a természeti formavilág matematikai magyarázata kiemelkedő írásokat inspirált (Thompson, 1942; Hoyle, 2006; Ball, 2016). A dolgozatban tárgyalt problémák a *klasszikus mechanika* és a *természeti morfológia* területére esnek. A mechanikai kérdések a szilárd testek (időben lassan változó) külső terhek alatt felvett alakjára; a geomorfológiai témák pedig az élettelen természet részecskéinek (pl.: kavicsok, ooidok) egyedi és kollektív alakfejlődésére irányulnak.

1.1.1. Mechanikai eredetű formák

A szilárd testek mechanikájában a forma egy önkényesen választott kezdeti időpillanatban megfigyelhető alakhoz (*referencia konfiguráció*) viszonyított, külső hatások (pl.: teher, támaszsüllyedés stb.) miatt kialakuló *deformációként* jelentkezik. A külső hatás és az alakváltozás kapcsolatát a Newton II. törvényét kontinuumokra alkalmazó *Cauchy-féle mozgásegyenlet*, az anyag empirikusan meghatározott viselkedése és a szerkezet peremfeltételei együttesen határozzák meg (Howell *et al.*, 2009). Állandósult, vagy időben elegendően lassan változó forma vizsgálata *kvázi statikus* módon hajtható végre, ilyen rendszerekben az inerciális hatások elhanyagolhatóak. A dolgozatban bemutatott összes modell kvázi statikus.

A mérnöki mechanika egyszerű, linearizált modelljei a szerkezeti elemek szabad szemmel éppen látható deformációinak közelítő számítására alkalmasak. Jelentősebb mértékű alakváltozás vagy összetettebb alakokat formáló mechanikai rendszerek a geometriai és anyagi viselkedés egzakt leírására törekvő elméleteket igényelnek. A dolgozatban tárgyalt vékony rudak és héjak tekintetében különösen a *geometriai nemlinearitás* egyszerűsítésektől mentes kezelése kiemelendő. A geometriailag egzakt rúd- és héjelméletek alapjait a Cosserat testvérek (Cosserat & Cosserat, 1909) és S. Timoshenko (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959; Timoshenko & Gere, 1963) fektették le a XX. század első felében írt műveikben. Az elméletek egzakt összefoglalását nyújtja (Antman, 2005). A teljesség igénye nélkül, a vékony rudakra és héjakra kidolgozott modellek számtalan természeti formát magyaráznak a DNS alakjától (Healey, 2002) a szén nanocsövek viselkedéséig (Chandraseker *et al.*, 2009), és nyernek széleskörű alkalmazást az orvosi területtől (Taber, 2004) az űrkutatásig (Miura & Pellegrino, 2020).

A kísérletekben vagy a természetben megfigyelhető alakot a szerkezet *anyagi nemlinearitása* is jelentősen befolyásolja, beleértve a képlékenyedés, és a károsodási folyamatok szerepét. Húzószilárdság nélküli testek és szerkezetek repedései a mérnöki gyakorlat meghatározó jelenségei, egyidejűleg izgalmas természeti mintázatok. A repedéskép vizsgálatának kiemelkedően gazdag irodalma van, gondoljunk csak a repedéskép szerepére a szerkezeti földtan gyakorlatában, vagy a tartószerkezeti mechanikát modern formában útjára indító problémára, a Szent Péter-bazilika kupolájának repedésére (Heyman, 1995). Összetett esetben a kialakuló repedéskép elméleti magyarázata mind a mai napig komoly kihívást jelent (Domokos *et al.*, 2020). Valamivel egyszerűbb kérdés az elemekből épített szerkezet állékonysága és formája között meglévő kapcsolat elemzése. Az építőelemek egymással érintkező felületei egy geometriai mintázatot adnak, ezt *sztereotómiának* nevezzük (Fallacara & Gadaleta, 2019). Tekinthetjük a sztereotómiát egy mesterségesen a szerkezetben létrehozott repedési mintázatnak. Húzószilárdság nélküli kapcsolat esetén a kapcsolódási felületeken dominánsan nyomóerőnek kell átadódnia, ez a feltétel határozza meg az ilyen módon építhető szerkezetek formáját.

1.1.2. Természeti morfológia

A természetben megtalálható részecskék (kavicsok, aszteroidák stb.) alakfejlődése egyidejűleg fontos téma a földtudományok és a matematika területén. Nem meglepő módon, a kavicsok alakjának magyarázatával Arisztotelész is foglalkozott (Krynine, 1960). A XX. században W.J. Firey 1974-ben megjelent írása (Firey, 1974) meghatározó mérföldkő, ebben a kavics alakfejlődését a felület egy pontjához rendelhető törvénnyel (ún. lokális modellel) magyarázza a szerző. A Firey-féle modell a felületi normális irányú sebességet posztulálja. Egy részecske lokális alakfejlődési sebességét a továbbiakban *kopási törvénynek* nevezem, ha az irányát külön nem jelzem, akkor az a kompakt, sima felület befele mutató normálisának irányában értendő. Feltételezve, hogy a kopó részecske egy síkkal véletlenszerűen ütközve kopik, Firey kopási törvénye a v kopási sebességet a felület K *Gauss-görbületével* (a κ_1 és κ_2 főgörbületek segítségével: $K = \kappa_1\kappa_2$) tekinti arányosnak:

$$v^{3D} = cK, \tag{1.1}$$

ahol c egy rögzített állandó. Síkgörbe esetén a kopási sebesség a görbe κ görbületével arányos:

$$v^{2D} = c\kappa. \tag{1.2}$$

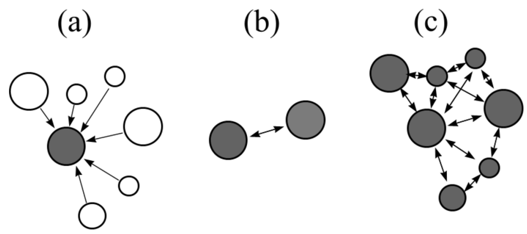
Később F.J. Bloore a Gauss görbülettől függő modellt véges méretű koptató részecskék feltételezésével terjesztette ki (Bloore, 1977). A síkbeli és térbeli kopási törvények Bloore modelljében

$$v^{2D} = c_0 + c_1\kappa, \tag{1.3}$$

$$v^{3D} = c_0 + c_1 H + c_2 K, \tag{1.4}$$

ahol c_0, c_1 és c_2 is rögzített állandók, H jelöli a felület *átlaggörbületét* ($H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$).

Kiemelendő, hogy az (1.4) egyenletben $c_0 = c_2 = 0$ választásával a matematikai irodalomban széles körben vizsgált *átlaggörbületi folyamot* (*mean curvature flow*) kapjuk. Ez az euklideszi térbe beágyazott sima felületet annak átlaggörbületével arányosan, normális irányban fejleszti. Az átlaggörbületi folyamban a normális irányú sebességet a felület egy *lokális* tulajdonsága határozza meg. A folyamat *globális* viselkedése, elsősorban az evolúció során érintett felületek jellemzése széles érdeklődésre tart számot. Bizonyított, hogy az átlaggörbületi folyam alatt a zárt görbék körhöz, illetve gömbhöz tartanak, egy *gömbszerű pontra* (*round point*) húzódnak rá (Grayson, 1987; Huisken, 1990). A folyam globális elemzése többek között megnyitotta az utat egyes topológiai tételek bizonyításához. Az átlaggörbületi folyam általánosításának (Hamilton, 1982) kiemelt szerepe volt a Poincaré-sejtés bizonyításában. Az átlaggörbületi folyam szorosan kapcsolódik a *klasszikus variációszámítás* nevezetes problémájához: adott peremfeltételek mellett minimalizálja a felület nagyságát, a *minimálfelületek* az átlaggörbületi folyam kritikus pontjai. Nem meglepő módon, az alkalmazások száma nagy, a képfeldolgozástól (Lu *et al.*, 2002) a felületi növekedésig terjed (Kardar *et al.*, 1986).



1.3. ábra. Az értekezésben vizsgált kopási sémák: egyedi kopás (a), bináris kopás (b) és kollektív kopás (c). A tömegveszteséget a szürkével jelölt részecskékre számítjuk. A nyilak a részecskék között (nem egy időpillanatban bekövetkező) ütközési eseményeket jelzik.

Az eddig ismertetett modellekben közös, hogy egyetlen *koptatott részecskét* írnak le. A kopást számtalan, *koptató részecskével* történő ütközés eredőjének tekintik, (lásd 1.3.(a) ábra), a vizsgálatban a koptatott részecske tömegének és alakjának jellemzésére szolgáló változók idősorát állítják elő. Ezt a megközelítést a dolgozatban *egyedi kopásnak* nevezem. Az egyedi kopás általánosítása kettő, egymást *kölcsönösen* koptató részecske időfejlődésének vizsgálata (1.3.(b) ábra). Ebben az esetben továbbra is lehetséges az átlagtér megközelítés alkalmazása.

Az alakfejlődés ezen, egyedi modelljein túl a részecskék kollektív fejlődése is kiemelten érdekes, mind az elmélet, mind a geomorfológiai alkalmazások szempontjából (1.3.(c) ábra). A kavicsokkal kapcsolatos egyik alapvető megfigyelés, hogy a természetben fellelhető *kavicspopulációk* (pl.: kavicsos tengerpart) méret és alak szerint elkülönültek. A geológiai irodalom ezt a *szelektív szállítás* és a *kopás* folyamataival magyarázza, álláspontja szerint a tengerparti és folyami környezetben a szállítás és a kopás együttesen határozza meg a kavicsok tömeg- és alakfejlődését (Carr, 1969; Bertoni *et al.*, 2016). Az, hogy melyik folyamat domináns, függ a helyszín geológiai adottságaitól, de jellemzően mindkét folyamat érdemi szerepet játszik. Amíg a szelektív szállítást részletes elemzésnek vetették alá, addig a kopás pontos szerepét egy prediktív elmélet, és az azt vizsgáló méréssorozat hiányában eddig nem tisztázták.

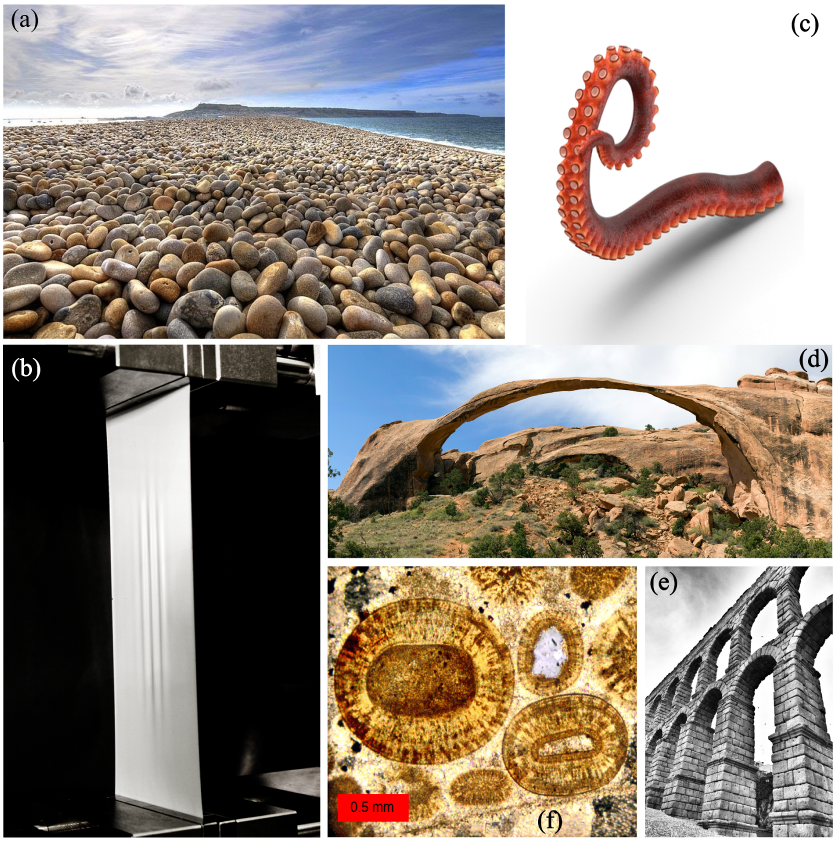
1.2 Célkitűzések

A dolgozat elsődleges célja néhány, érdekes formát és mintázatot eredményező folyamat leírása matematikai eszközökkel. A bemutatásra kerülő modellek mindegyike egy-egy nemlineáris KDE, vagy PDE vizsgálatához vezet. A modell analitikusan belátható tulajdonságait bizonyítom, a numerikus szimulációkkal alátámasztható tulajdonságokat röviden ismertetem.

A 2. fejezet a szilárdtest mechanika területére eső problémákat tárgyal. Az első vizsgált kérdés a robotika területén felmerült problémát jár körbe. A puha robotkarok (*soft robotic arms*) az elmúlt évtizedben váltak különösen népszerűvé, gyakran természeti inspirációt (pl.: polip karja) használva a tervezéshez (Laschi *et al.*, 2012). A dolgozatban arra keresem a választ, hogy *milyen módon határozható meg egy vékony, befogott konzol maximális kinyúlása*, azaz milyen távoli pontokat tud elérni egy adott mechanikai és geometriai paraméterekkel rendelkező robotkar? A *puha robotkar maximális kinyúlása* című rész rámutat arra, a kérdésre adandó válasz eredendően térbeli megközelítést igényel (1.4.(c) ábra).

A következő kettő rész egy egyszerű mechanikai rendszerben mutat példát a geometriai mintázat (hullámos alak) megjelenésére és eltűnésére. Itt egy, a húzott, vékony filmek ráncosodására vonatkozó elméleti előrejelzés (Healey *et al.*, 2013) kísérleti igazolása során felmerült kérdésre keresek választ: *a kísérleti eredmények sze-*

rint a húzott filmek nyújtásuk során anyagi átalakuláson mennek keresztül. Milyen módon lehet a megjelenő ortotróp viselkedést és a terhelés miatt bekövetkező károsodást figyelembe venni az eredetileg lineárisan rugalmas, izotróp kontinuummechanikai modell kiterjesztésével? A *vékony filmek ráncosodása* részben egy tisztán rugalmas, ortotróp modell magyarázza az előfeszített filmeken végzett kísérleti eredményeket, majd a következő, *a Mullins-hatás a ráncosodási folyamatban* című rész a feszítés során bekövetkező károsodást is beépíti a modellbe. Az anyagi nemlinearitást is tartalmazó leírás a teljes terhelési folyamatot és a kísérletekben tapasztalt érdekes viselkedést is magyarázza (1.4.(b) ábra).



1.4. ábra. Az értekezésben érintett problémák képes összefoglalója. Kavicsok egyedi és kollektív kopása (a), vékony filmek ráncosodása (b), puha robotkarok maximális kinyúlása (c), korlátozott húzószilárdságú ívek formája (d) és (e), ooid részecskék alakja (f).

A második fejezet utolsó, *Falazott ívek alakja* című része az anyagi nemlinearitás formát meghatározó szerepére mutat rá. Egy klasszikus mérnöki problémát, az önsúlyával terhelt falazott ív viselkedését vizsgálja. Fő kérdése, hogy *maximálisan hány darab csukló alakulhat ki egy körívekből szerkesztett, szimmetrikus csúcsívben*, illetve *tetszőleges, előre rögzített C csuklószámhoz létezik-e ív, amelynek tönkremenetele során pontosan C csukló alakul ki?* (1.4.(e) és (g) ábrák).

A 3. és 4. fejezetek tárgyalják a természeti morfológia területére eső problémákat. A 3. fejezet az egyedi *kopási folyamat* görbület-vezérelt modelljeire összpontosít. A *Síkgörbe görbület-vezérelt kopásáról* című rész fő kérdése, hogy a *sima, konvex görbék görbület függvényének szélsőérték száma milyen módon változik a kopási folyamat során?* Ez a rész egyben összegzi a síkbeli kopás analitikus leírásának lehetőségeit. A következő rész egy síkbeli kopásmodellel magyarázza meleg, telített tengervízben képződő, ún. *ooid* részecskék alakfejlődését. Fő kérdései, hogy az *egyszerű fizikai alapvetésen alapuló modell alkalmas-e a természetben megfigyelt részecskék szimmetriájának magyarázatára*, illetve *igazolható-e a modellben a megoldások unicitása?* (1.4.(d) és (f) ábrák). A 3. fejezet utolsó része a görbület-vezérelt kopás egy, váratlan tulajdonságát illusztrálja és egy új, sztochasztikus algoritmust mutat be a Bloore-féle kopási folyamat numerikus számítására.

Amíg a 3. fejezet az egyedi kopásra összpontosít, addig a kollektív tömegfejlődésnek szentelt 4. fejezet rámutat arra, hogy az egy részecske szintjén determinisztikus modellek szükségszerűen részlegesek, az alakfejlődés megértéséhez valószínűségi alapvetés szükséges. Itt a fő kérdés arra vonatkozik, hogy *magyarázható-e a részecskék kollektív kopásával az a megfigyelés, hogy míg egyes geológiai helyszíneken a kavicsok mérete (közel) azonos, addig más helyszíneken a kavicsok mérete nagy változatosságot mutat?* (1.4.(a) ábra).

A disszertációban összegzett kutatásokat 2012 és 2022 között végeztem, többekkel együttműködve (*Várkonyi Péter* - 2.1. rész, *Fehér Eszter* és *Timothy J. Healey* - 2.2 és 2.3. részek, *Gáspár Orsolya* és *Sajtos István* - 2.4. rész, *Domokos Gábor* - 3. és 4. fejezetek és *Török János* - 4.1. rész). Az értekezést egyes szám első személyben írom, azonban a tézisek megfogalmazásánál a többes számú alany minden esetben a közös munkára utal. A téziseket alátámasztó publikációk mindegyike angolul jelent meg. Abban az esetben, ha a magyar terminológia még nem egységes a szakirodalomban széles körben használt szakkifejezésre, az angol eredetit zárójelben, *dőlt* betűvel rögzítem.

A dolgozatban alkalmazott jelölésekről

A dolgozatban a mérnöki szakirodalomban elterjedt jelöléseket használom. Így a skalár mennyiségeket és skalármezőket dőlt kisbetű (pl.: v), a vektorokat vastagon szedett kisbetű (pl.: $\mathbf{v}$), a tenzorokat és mátrixokat vastagon szedett nagybetű (pl.: $\mathbf{A}$) jelöli. A $||\mathbf{v}||$ jelű vektor norma $\mathbf{v}$ euklideszi normáját jelöli. Két vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ skaláris szorzata $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, vektoriális szorzatuk $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. A $(.)^T$ jelölés a transzponáltra utal.

Az Einstein-féle összegkonvenciót

használom, azaz

$$a_{ij}b_{ik} = (ab)_{jk} = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}b_{ik}. \tag{1.5}$$

A (parciális) deriváltakra az alsó indexbe, vessző után írtak utalnak, azaz például az $f_1(x,y)$, elegendően reguláris függvény x és y szerinti deriváltja

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{1,xy} \tag{1.6}$$

alakú.

A dolgozatban többször szerepel sorfejtés. A becslés jellemzésére a *nagy ordó* jelölést használom. Ha f és g valós számokon értelmezett függvények $f(x) = O(g(x))$ amennyiben alkalmas K konstansra $|f(x)| < Kg(x)$ teljesül az értelmezési tartományon.

Elemi differenciálgeometriából jól ismert, hogy egy Γ görbe parametrizálása a valós számegyenes egy szakasza és a görbe pontjai között létesített bijektív kapcsolatot jelent, egy görbének számtalan paraméterezése lehetséges. Az is ismert, hogy a különböző paraméterezések egymással ekvivalensek. A görbe ívhossza szerinti paraméterezést *természetesnek* nevezem. A dolgozat modelljeinek levezetésekor és a bizonyításokban rendre más-más paraméterezés bizonyul célravezetőnek.

A dolgozatban gyakran használt jelölések

κ – görbe görbülete
ν – Poisson tényező
s – ívhossz paraméter
A – terület
B_1, B_2 – hajlító merevség($B_i = EI_i$)
B_3 – csavaró merevség
E – rugalmassági (Young) modulus
H – átlag görbület
I – inercia
K – Gauss görbület
S – görbe ívhossza
V – térfogat
$\mathbf{d}_i$ – direktor bázisvektorai
$\mathbf{e}$ – linearizált nyúlási tenzor
$\mathbf{g}_i$ – globális koordináta-rendszer bázisvektorai
$\mathbf{p}$ – belső erők vektora
$\mathbf{q}$ – tehervektor
$\mathbf{r}$ – deformált alak
$\mathbf{u}$ – elmozdulás mező
$\mathbf{n}$ – görbe, vagy felület normálvektora
$\mathbf{t}$ – görbe, vagy felület érintővektora
Ψ – energiasűrűség
$\mathrm{Tr}(.)$ – trace operátor
$\det(.)$ – determináns

2. fejezet

Formák és mintázatok mechanikai rendszerekben

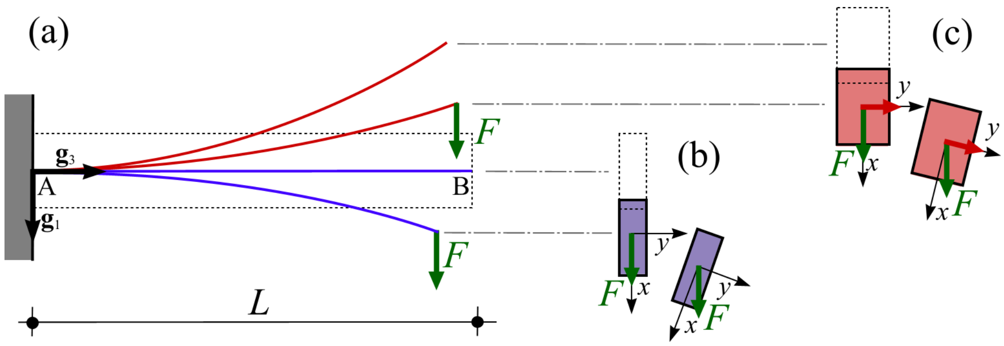
2.1 Puha robotkar maximális kinyúlása

A szerkezeti mechanikában az anyagtakarékosság (és gyakran az esztétikai igény) *karcsú*, de egyben *instabilitásra érzékeny* szerkezeteket eredményez: az instabilitás határozza meg a szerkezet még megengedhető karcsúságát (Gajewski & Zyczkowski, 2012; Banichuk, 2013). A tartószerkezeti mechanika számtalan kérdése mellett ide tartozik a robotika területén felvetett probléma, nevezetesen a *szabályozható kezdeti görbülettel rendelkező robotkar maximális hosszúságú, stabil alakjának* meghatározása.

Alacsony tömegük mellett a *puha robotkarok* további előnye az, hogy rugalmasságuk révén összetett geometriájú környezetben is képesek operálni (gondoljunk az űrkutatásban, egyes mentési feladatokban és a sebészetben használt robotkarokra (Burgner-Kahrs *et al.*, 2015)). A puha robotkarok, vagy akár a természeti inspirációként vizsgált octopus karja (Yekutieli *et al.*, 2005) jellemzően terheletlen esetben is görbültek, a külső erők hatására pedig nagy alakváltozásokon mennek keresztül. A robotkar kezdeti görbületének szabályozását jellemzően pneumatikus aktuátorokkal, dielektrikus elasztomerekkel vagy alakemlékező ötvözetekkel oldják meg.

A robotkar mechanikai modelljeként vegyünk egy, a végén a tengely felett működő, rögzített, függőleges F erővel terhelt, L hosszúságú befogott konzolt (2.1.(a) ábra)! A következőkben egy geometriailag egzakt, nyírásmentes és összenyomhatatlan rúdmodellt társítunk a konzolhoz, amelynek függőleges és vízszintes keresztmetszeti tengelyei körüli hajlító- és csavarómerevségét rendre B_1, B_2 és B_3 jelöli. Jól ismert, hogy a konzol stabilitásvesztése *kifordulás* miatt következik be. Vízszintes konzolt kifordulási ellenállását vizsgálva először S. Timoshenko határozta meg a konzol hosszának kritikus értékét a $B_2 \to \infty$ határátmenet mellett:

$$L \leq R_{\mathrm{ltb}} := \chi (B_1 B_3)^{1/4} / F^{1/2}, \qquad (2.1)$$



2.1. ábra. (a) A befogott, L hosszúságú, végponti F koncentrált erővel terhelt konzol, az A befogásnál vízszintes érintővel ábrázolva. (b) Elegendően nagy teherre karcsú keresztmetszet esetén ($B_2 > B_1$) klasszikus kifordulás következik be, a végkeresztmetszet elfordulása miatt a teher függőleges elmozdulása nő. A konzol vége egyidejűleg harántirányban is elmozdul, a rúdtengely alakja térgörbe. (c) Kezdeti görbülettel rendelkező konzol kifordulása esetén a kezdeti görbület kompenzálja a teher okozta lehajlást. A deformáció csavarási komponense a kezdeti görbületet vektorát is elfordítja, növelve ezzel a végpont függőleges elmozdulását (a síkbeli deformált alakhoz képest). A kezdeti görbület mellett a kifordulás a B_2/B_1 aránytól függetlenül bekövetkezik.

ahol $\chi \approx 2.003$ (Timoshenko & Gere, 1963). A kritikus hossz növekszik, amennyiben B_2 értékét csökkentjük. Amennyiben $B_2 < B_1$ (vízszintesen elnyúlt téglalap) a kifordulás nem lehetséges (2.1.(b) ábra).

Természetesen a robotkar kinyúlását nem csak a kifordulás korlátozza. A konzol maximális síkbeli kinyúlásával több, közelmúltban megjelent publikáció (Wang, 2015; Plaut & Virgin, 2017; Armanini *et al.*, 2017) is foglalkozott. Ezen munkák eredményei akkor alkalmazhatóak, ha B_2 véges értéke mellett B_1 és B_3 elegendően nagy a kifordulás elkerülésére. Céljuk elsősorban a kinyúlás, azaz a végpontok távolságának felső korlátjának meghatározása volt. Mivel a síkbeli deformációk jelentősek, ezért a kinyúlás maximuma szignifikánsan kisebb a konzol L hosszánál. Azt találták, hogy vízszintes irányban a végpontok maximális Z távolságának felső korlátja

$$|Z| \leq R_{\mathrm{def}} := 2\sqrt{\frac{B_2}{F}}. \tag{2.2}$$

Amennyiben előírjuk, hogy a végpontok egyben azonos magasságban is legyenek, egy valamivel szigorúbb feltétel adódik:

$$|Z| \leq R^*_{\mathrm{def}} := \mu\sqrt{\frac{B_2}{F}}, \tag{2.3}$$

ahol $\mu \approx 1.81$. A síkbeli modell kiterjesztésével célom a maximális kinyúlás meghatározása

(i) térbeli deformációk és

(ii) előírt kezdeti görbület mellett.

A puha robotkart egy rugalmas konzollal modellezem, a konzol érintőjének iránya a befogásnál és a konzol kezdeti görbülete változtatható. Célom rögzített teher mellett a szabad vég kinyúlásának, azaz a szabad vég és a befogás adott irányú távolságának maximalizálása. Naiv módon gondolhatnánk azt, hogy megfelelő kezdeti görbület függvény választásával a maximális kinyúlást csak a konzol L fizikai hossza fogja korlátozni, azonban hiába kompenzáljuk a rugalmas deformációkat, a kifordulás-veszély szerepe jelentős, még akkor is, ha B_1 és B_3 paraméterek értéke nagy (2.1.(c) ábra). Ez a megfigyelés indokolja az alábbi vizsgálatot, amelyben térbeli rúdmodell segítségével határozom meg a maximálisan elérhető kinyúlást. A következő részben a stabilitásvizsgálathoz szükséges részleteket ismertetem.

2.1.1. A modell

A maximális kinyúlás vizsgálatához egy geometriai egyszerűsítésektől mentes (*geometrically exact*), a kezdeti görbületet tartalmazó, térbeli rúdmodellt vezetek be. A modell közel kör alakú keresztmetszetet feltételez, ezért az öblösödés jelenségét nem veszi figyelembe. Legyen $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\} \in \mathbb{R}^3$ egy rögzített, jobb-sodrású, ortonormált bázis. A továbbiakban $\mathbf{g}_1$ irányt *függőlegesnek* nevezem. A terheletlen középvonalat a természetes paraméterezéssel látom el, az ívhossz paraméter legyen $s \in [0, L]$. A középvonalat leíró helyvektor legyen $\mathbf{r}(s)$! A rúd keresztmetszetéhez rögzített, ($\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$) ortonormált bázis bázisvektorait *direktoroknak* nevezem. A *speciális Cosserat-féle rúdelméletet* (Antman, 2005) követve az $\mathbf{R}(s)$ forgatómátrix segítségével a globális és lokális rendszer kapcsolata:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{R}(s)\mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Megmutatható (Healey & Mehta, 2005), hogy létezik egy, és csakis egy $\boldsymbol{\kappa}$ vektormező, amire teljesülnek a következő összefüggések:

$$\mathbf{d}_{i,s} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_i \mathbf{d}_i, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{r}_{,s} = \lambda_i \mathbf{d}_i. \tag{2.7}$$

Itt λ_i és κ_i jelöli az elmélet nyúlás- és görbületi mezőit. (Healey & Mehta, 2005) alapján egy 13 egyenletből álló, elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer származtatható az alak és a belső erő függvények számítására. A robotkar vizsgálatához a rúd nyírási és összenyomódási deformációit elhanyagoljuk, azaz a nyúlásmezőket posztuláljuk: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 1$. Ezen feltevéssel ekvivalens a skalár értékű, nem-negatív, legalább C^2 simaságú $\Psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, \infty)$ energiasűrűség függvény feltételezése, amely függvény argumentumában a görbületek szerepelnek. Vegyük észre, hogy amennyiben a Ψ energiasűrűséget a κ_1,κ_2,κ_3 mezők függvényében írjuk fel, akkor a (2.5) összefüggést Lagrange-multiplikátorok bevezetésével lehet előírni. Egyszerűbbnek tűnik a görbületek kifejezése (2.5) és (2.6) egyenletek alapján:

$$\kappa_1 = \mathbf{d}_{2,s} \cdot \mathbf{d}_3 = -\mathbf{d}_{3,s} \cdot \mathbf{d}_2, \tag{2.8}$$

$$\kappa_2 = \mathbf{d}_{3,s} \cdot \mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_{1,s} \cdot \mathbf{d}_3, \tag{2.9}$$

$$\kappa_3 = \mathbf{d}_{1,s} \cdot \mathbf{d}_2 = -\mathbf{d}_{2,s} \cdot \mathbf{d}_1. \tag{2.10}$$

Kihasználva a direktorok ortogonalitását ($\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$), az energiasűrűség felírható a

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \Psi(\kappa_1(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2), \kappa_2(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2), \kappa_3(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)) \tag{2.11}$$

alakban. A $\mathcal{L}$ potenciális energia funkcionál tehát

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \int_0^L \{\tilde{\Psi}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) - F(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_3^0 \cdot \mathbf{g}_1)\}\,\mathrm{d}s, \tag{2.12}$$

ahol a második tag az F erő külső munkája és $\mathbf{d}_3^0$ a középvonal érintője a referencia (kezdeti, azaz feszültségmentes) állapotban. Az ismeretlenek a $\mathbf{d}_1$ és $\mathbf{d}_2$ vektormezők.

A feladatot peremfeltételekkel tudjuk egyértelművé tenni. Az $s = 0$ paraméternél befogást feltételezünk, ami a direktor-mezők kezdeti értékeire a $\mathbf{d}_1(0) = p_1\mathbf{g}_1 + p_2\mathbf{g}_3$ és $\mathbf{d}_2(0) = \mathbf{g}_2$ összefüggéseket adja, ahol a p_1 és p_2 paraméterekre $p_1^2 + p_2^2 = 1$ teljesül.

Jelölje $\boldsymbol{\eta}_1$ és $\boldsymbol{\eta}_2$ a $\mathbf{d}_1$ és $\mathbf{d}_2$ direktor mezők tesztfüggvényeit! $\mathbf{d}_1$ és $\mathbf{d}_2$ mezők ortonormalitásából következik, hogy

$$\boldsymbol{\eta}_1(s) = \chi(s)\mathbf{d}_2 + \zeta(s)\mathbf{d}_3, \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(s) = -\chi(s)\mathbf{d}_1 + \psi(s)\mathbf{d}_3, \tag{2.14}$$

ahol a $\chi(s), \zeta(s), \psi(s)$ tesztfüggvények tetszőleges $C^1([0, L] \to \mathbb{R})$ függvények olyan módon, hogy $\chi(0) = \zeta(0) = \psi(0) = 0$ rögzített. Legyen továbbá $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ és

$$\boldsymbol{\omega}(s) := [\chi(s), \zeta(s), \psi(s)]^T. \tag{2.15}$$

Ezen kifejezések segítségével a potenciális energia $\delta\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)[\boldsymbol{\omega}]$ első variációja viszonylag rövid alakban írható fel:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)[\boldsymbol{\omega}] = \int_0^L \{&\Psi_{,\kappa_1}(\mathbf{d}_{2,s} \cdot (\boldsymbol{\eta}_1 \times \mathbf{d}_2) + \boldsymbol{\eta}_{2,s} \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) + \mathbf{d}_{2,s} \cdot (\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\eta}_2)) + \\ &\Psi_{,\kappa_2}((\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)_{,s} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 + (\boldsymbol{\eta}_1 \times \mathbf{d}_2)_{,s} \cdot \mathbf{d}_1 + (\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\eta}_2)_{,s} \cdot \mathbf{d}_1) + \\ &\Psi_{,\kappa_3}(\boldsymbol{\eta}_{1,s} \cdot \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_{1,s} \cdot \boldsymbol{\eta}_2) - F\mathbf{d}_2 \times \mathbf{g}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1 - F\boldsymbol{\eta}_2 \times \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_1\}\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.16}$$

A $\boldsymbol{\eta}_1(s)$ és $\boldsymbol{\eta}_2(s)$ tesztfüggvények behelyettesítése után a (2.8)-(2.10) egyenletekből a görbületek is behelyettesíthetőek. Egyensúly esetén az első variáció zérus, így

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)[\boldsymbol{\omega}] = \\ \int_0^L \{&\Psi_{,\kappa_1}(\zeta\kappa_3 + \chi\kappa_2 + \psi_{,s}) + \\ &\Psi_{,\kappa_2}(-\chi\kappa_1 - \zeta_{,s} + \psi\kappa_3) + \\ &\Psi_{,\kappa_3}(\chi_{,s} - \zeta\kappa_1 - \psi\kappa_2) + \\ &\zeta F\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \psi F\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_2\}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned} \tag{2.17}$$

A parciális integrálás elvégzése után a tesztfüggvények tetszőlegességéből az Euler-Lagrange (egyensúlyi) egyenleteket kapjuk:

$$(\Psi_{,\kappa_1})_{,s} = F\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_2 + \kappa_3\Psi_{,\kappa_2} - \kappa_2\Psi_{,\kappa_3}, \tag{2.18}$$

$$(\Psi_{,\kappa_2})_{,s} = -F\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \kappa_3\Psi_{,\kappa_1} + \kappa_1\Psi_{,\kappa_3}, \tag{2.19}$$

$$(\Psi_{,\kappa_3})_{,s} = -\kappa_1\Psi_{,\kappa_2} + \kappa_2\Psi_{,\kappa_1}. \tag{2.20}$$

A parciális integrálás során a következő, természetes peremfeltételek adódnak:

$$\Psi_{,\kappa_1}(L) = \Psi_{,\kappa_2}(L) = \Psi_{,\kappa_3}(L) = 0. \tag{2.21}$$

Bármely egyensúlyi megoldás kielégíti a (2.18-2.20) egyenleteket, a (2.21) peremfeltételeket és a (2.5) egyenleteket ($i \in \{1, 2\}$ választásával). Azt találtuk, hogy összesen kilenc, elsőrendű közönséges differenciálegyenletből álló egyenletrendszer írja le a térbeli konzol alakját. A potenciális energia második variációját az egyensúlyi megoldást jellemző $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s)$ görbületmezők és $\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)$ direktor mezők behelyettesítésével értékeljük ki. A $\delta^2\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}]$ második variáció tehát

$$\begin{aligned}
\delta^2\mathcal{L}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] = \int_0^L &\left\{\Psi_{,\kappa_1\kappa_1} (\zeta\kappa_3 + \chi\kappa_2 + \psi_{,s})^2 + \Psi_{,\kappa_2\kappa_2} (-\chi\kappa_1 - \zeta_{,s} + \psi\kappa_3)^2 + \right. \\
&\Psi_{,\kappa_3\kappa_3} (\chi_{,s} - \zeta\kappa_1 - \psi\kappa_2)^2 + F\mathbf{g}_1 \cdot (\zeta\chi\mathbf{d}_2 - \psi\chi\mathbf{d}_1 + \zeta^2\mathbf{d}_3 + \psi^2\mathbf{d}_3) + \\
&\Psi_{,\kappa_1} \left(\zeta\chi_{,s} - \chi\zeta_{,s} - \psi\zeta\kappa_2 - \zeta^2\kappa_1 - \chi^2\kappa_1 + \chi\psi\kappa_3\right) + \\
&\Psi_{,\kappa_2} \left(\psi\chi_{,s} - \chi\psi_{,s} - \chi\zeta\kappa_3 - \psi^2\kappa_2 + \chi^2\kappa_2 - \psi\zeta\kappa_1\right) + \\
&\left.\Psi_{,\kappa_2} \left(\psi\zeta_{,s} - \zeta\psi_{,s} + \psi\chi\kappa_1 - \psi^2\kappa_3 - \zeta^2\kappa_3 - \chi\zeta\kappa_2\right)\right\} \mathrm{d}s. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Az egyensúlyi egyenletek lineárisan rugalmas anyag esetén

Jelölje $\kappa_i^0(s), i \in \{1, 2, 3\}$ a feszültségmentes alak kezdeti görbület mezőit! Ezek segítségével a lineárisan rugalmas anyagú, B_1, B_2 hajlítási merevségekkel rendelkező és B_3 csavarási merevségű rúd Ψ energiasűrűsége:

$$\Psi(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} B_i(\kappa_i - \kappa_i^0)^2. \qquad (2.23)$$

Ekkor a (2.5), (2.18), (2.19) és (2.20) egyenletek felhasználásával a rúd egyensúlyi alakját meghatározó, elsőrendű közönséges differenciálegyenletek:

$$\mathbf{d}_{1,s} = \kappa_2(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_1) + \kappa_3\mathbf{d}_2, \qquad (2.24)$$

$$\mathbf{d}_{2,s} = \kappa_1(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2) - \kappa_3\mathbf{d}_1, \qquad (2.25)$$

$$\begin{aligned} B_1\kappa_{1,s} = &F\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_2 + B_2\kappa_3(\kappa_2 - \kappa_2^0) - \\ &B_3\kappa_2(\kappa_3 - \kappa_3^0) + B_1\kappa_{1,s}^0, \qquad (2.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2\kappa_{2,s} = &- F\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - B_1\kappa_3(\kappa_1 - \kappa_1^0) + \\ &B_3\kappa_1(\kappa_3 - \kappa_3^0) + B_2\kappa_{2,s}^0, \qquad (2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3\kappa_{3,s} = &- B_2\kappa_1(\kappa_2 - \kappa_2^0) + \\ &B_1\kappa_2(\kappa_1 - \kappa_1^0) + B_3\kappa_{3,s}^0. \qquad (2.28) \end{aligned}$$

A síkbeli rúd egyenletei

A síkbeli eset egyenleteit a térbeli egyenletekből származtatjuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{d}_2 \equiv \mathbf{g}_2$ és $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$. Ekkor $\kappa_1^0 \equiv 0$ és $\kappa_3^0 \equiv 0$ teljesül. Az alakot leíró függvényhármas $(x(s), y(s), z(s))$ komponensei közül $y(s) \equiv 0$ mindaddig, amíg az alak síkbeli. (lásd a 2.1. ábrán). Térbeli deformációk hiányában a (2.25), (2.26) és (2.28) egyenletek jobb oldala azonosan zérus. A jelölés egyszerűsítése miatt az $\mathbf{d}_1$ vektormezőt a következő alakban reprezentálom:

$$\mathbf{d}_1 = [\cos(\phi), 0, -\sin(\phi)]^T, \qquad (2.29)$$

ahol a $\phi(s)$ szög az $\mathbf{d}_3$ érintő és a $\mathbf{g}_3$ bázisvektor közötti szöget jelöli. A $\phi(s)$ skalármező egyértelműen meghatározza $x(s)$ és $z(s)$ függvényeket. Ezen megfontolások és a (2.29) kifejezés behelyettesítése a (2.24) és (2.27) egyenletekbe vezet a következő egyenletrendszerre:

$$x_{,s} = \sin(\phi), \tag{2.30}$$

$$z_{,s} = \cos(\phi), \tag{2.31}$$

$$\phi_{,s} = \kappa_2, \tag{2.32}$$

$$\kappa_{2,s} = -\frac{F}{B_2}\cos\phi + \kappa^0_{2,s}. \tag{2.33}$$

Az egyenletrendszerhez a következő peremfeltételek tartoznak:

$$\begin{aligned} x(0) = z(0) &= 0, \\ \mathrm{angle}(x(L), z(L)) &= \alpha, \\ \kappa_2(L) &= \kappa_2^0(L), \end{aligned} \tag{2.34}$$

ahol az angle(ξ,ζ) függvény az (ξ,ζ) és a $[0,1]$ vektorok közötti szöget jelöli; α pedig egy előre rögzített szám. Az első két peremfeltétel a befogott vég helyét rögzíti, a harmadik adja meg a kinyúlás irányát, az utolsó pedig a (2.21) egyenletből származó természetes peremfeltétel. A $\phi(0)$ szöget a befogásnál nem írtam elő, hiszen azt a harmadik peremfeltétel implicit módon meghatározza.

Dimenziótlanított egyenletek

Legyen $\bar{L} := 1$! A következő mennyiségeket vezetjük be:

$$\bar{s} := sL^{-1}, \bar{x} := xL^{-1}, \bar{z} := zL^{-1}, \tag{2.35}$$

$$\bar{\phi}(s) := \phi(s), \bar{\kappa}_i := \kappa_i L, \tag{2.36}$$

$$\delta\bar{\mathcal{L}} := \delta\mathcal{L}L, \delta^2\bar{\mathcal{L}} := \delta^2\mathcal{L}L, \tag{2.37}$$

$$\bar{B}_1 := B_1/B_2, \bar{B}_3 := B_3/B_2. \tag{2.38}$$

Továbbá legyen

$$\gamma := \frac{FL^2}{B_2}. \tag{2.39}$$

Értelemszerűen $\bar{s} \in [0,1]$. A (2.30)-(2.33) egyenletek dimenziótlanított alakja

$$\bar{x}_{,\bar{s}} = \sin(\bar{\phi}), \tag{2.40}$$

$$\bar{z}_{,\bar{s}} = \cos(\bar{\phi}), \tag{2.41}$$

$$\bar{\phi}_{,\bar{s}} = \bar{\kappa}_2, \tag{2.42}$$

$$\bar{\kappa}_{2,\bar{s}} = -\gamma\cos\bar{\phi} + \bar{\kappa}^0_{2,\bar{s}}, \tag{2.43}$$

és a peremfeltételek:

$$\begin{aligned} \bar{x}(0) = \bar{z}(0) &= 0, \\ \mathrm{angle}(\bar{x}(1), \bar{z}(1)) &= \alpha, \\ \bar{\kappa}_2(1) &= \bar{\kappa}_2^0(1). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Végül a dimenziótlanított második variáció:

$$\delta^2\bar{\mathcal{L}} = \tag{2.45}$$

$$\int_0^1 \Big\{\bar{B}_1\left(\chi\bar{\kappa}_2 + \psi_{,s}\right)^2 + \bar{B}_3\left(\chi_{,s} - \psi\bar{\kappa}_2\right)^2 + \zeta^2_{,s} + \gamma(-\psi\chi\cos\bar{\phi} + \zeta^2\sin\bar{\phi} + \psi^2\sin\bar{\phi}) + (\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}^0_2)\left(\psi\chi_{,s} - \chi\psi_{,s} - \psi^2\bar{\kappa}_2 + \chi^2\bar{\kappa}_2\right)\Big\}\, L\,\mathrm{d}\bar{s}.$$

2.1.2. A síkbeli alakok stabilitásáról

A terhelt rúdalak stabilitásának szükséges feltétele a (2.45) kifejezés pozitivitása.

2.1. Lemma. *Létezik egy, és csakis egy $\gamma = \gamma_{\mathrm{crit}}$ érték, ahol a (2.45) kifejezéssel adott második variáció egyensúlyi rúdalakok mellett pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a $\phi(s) = \bar{\phi}(s)$ egyértelműen meghatározza a $\bar{\kappa}_2(s)$ és $\bar{\kappa}^0_2(s)$ függvények különbségét:

$$\bar{\kappa}_2(s) - \bar{\kappa}^0_2(s) = -\gamma\int_0^s \cos\bar{\phi}(t)\,\mathrm{d}t + \gamma\int_0^1\cos\bar{\phi}(t)\,\mathrm{d}t = \gamma(-\bar{z}(s) + \bar{z}(1)), \tag{2.46}$$

ami a (2.43) kifejezés ívhossz szerinti integrálásából és a $\bar{\kappa}_2(1) = \bar{\kappa}_2^0(1)$ természetes peremfeltételből adódik. A (2.46) kifejezést a (2.45) összefüggésbe helyettesítve látható, hogy a potenciális energia második variációja a γ paraméter lineáris függvénye. Mivel $\bar{B}_1$ és $\bar{B}_3$ pozitív számok, következik, hogy

$$\lim_{\gamma\to 0} \delta^2\bar{\mathcal{L}} > 0 \qquad (2.47)$$

minden lehetséges teszt függvény esetén és

$$\lim_{\gamma\to \infty} \delta^2\bar{\mathcal{L}} < 0 \qquad (2.48)$$

egyes teszt függvényekre. A γ paraméter szerinti linearitásból következik $\gamma = \gamma_{\rm crit}$ létezése, amelynél van olyan teszt függvény, amelyre $\delta^2\bar{\mathcal{L}}$ zérus. □

2.2. Tétel. *A síkbeli rúdmodell stabilitás alapján meghatározott maximális kinyúlása a térbeli modell maximális kinyúlásának felső korlátja.*

Bizonyítás. Jelölje

$$\delta^2\bar{\mathcal{L}}_p := \int_0^1 \{(\zeta_{,s})^2 + \gamma\zeta^2 \sin\bar{\phi}\} L\,\mathrm{d}\bar{s}, \qquad (2.49)$$

$$\delta^2\bar{\mathcal{L}}_s := \int_0^1 \Big\{\bar{B}_1 \left(\chi\bar{\kappa}_2 + \psi_{,s}\right)^2 + \bar{B}_3 \left(\chi_{,s} - \psi\bar{\kappa}_2\right)^2 + \gamma\left(-\psi\chi\cos\bar{\phi} + \psi^2\sin\bar{\phi} + (\bar{z}(1)-\bar{z})\cdot \left(\psi\chi_{,s} - \chi\psi_{,s} - \psi^2\bar{\kappa}_2 + \chi^2\bar{\kappa}_2\right)\right)\Big\} L\,\mathrm{d}\bar{s}. \qquad (2.50)$$

Értelemszerűen $\delta^2\bar{\mathcal{L}} = \delta^2\bar{\mathcal{L}}_p + \delta^2\bar{\mathcal{L}}_s$. Itt az első tag, $\delta^2\bar{\mathcal{L}}_p$ kizárólag a ζ tesztfüggvénytől függ, ugyanakkor $\delta^2\bar{\mathcal{L}}_s$ független tőle. Ezek szerint $\delta^2\bar{\mathcal{L}}$ bármely diszkretizálása hipermátrixot eredményez. Mivel ζ a rúdalak a $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_3$ bázisvektorok síkjában értelmezett variációját jelöli, következik, hogy a $\delta^2\bar{\mathcal{L}}_p$ taghoz tartozó blokk felel meg a síkbeli perturbációnak. Hasonlóan, $\delta^2\bar{\mathcal{L}}_s$ diszkretizációjához tartozó blokk vonatkozik a síkból kitérő perturbációkhoz. Mivel egy hipermátrix sajátértékeinek halmaza az egyes blokkok sajátértékeinek uniójaként áll elő (Rózsa, 1991), következik, hogy a síkbeli modell az egyensúlyi rúdalak stabilitásának felső korlátját adja. □

2.3. Következmény. *Amennyiben a rúd* $\mathbf{g}_2$ *irányú, folytonos megtámasztása nem biztosított, akkor az irodalomban bemutatott, síkbeli modellel számolt maximális kinyúlás érték a biztonság kárára téved.*

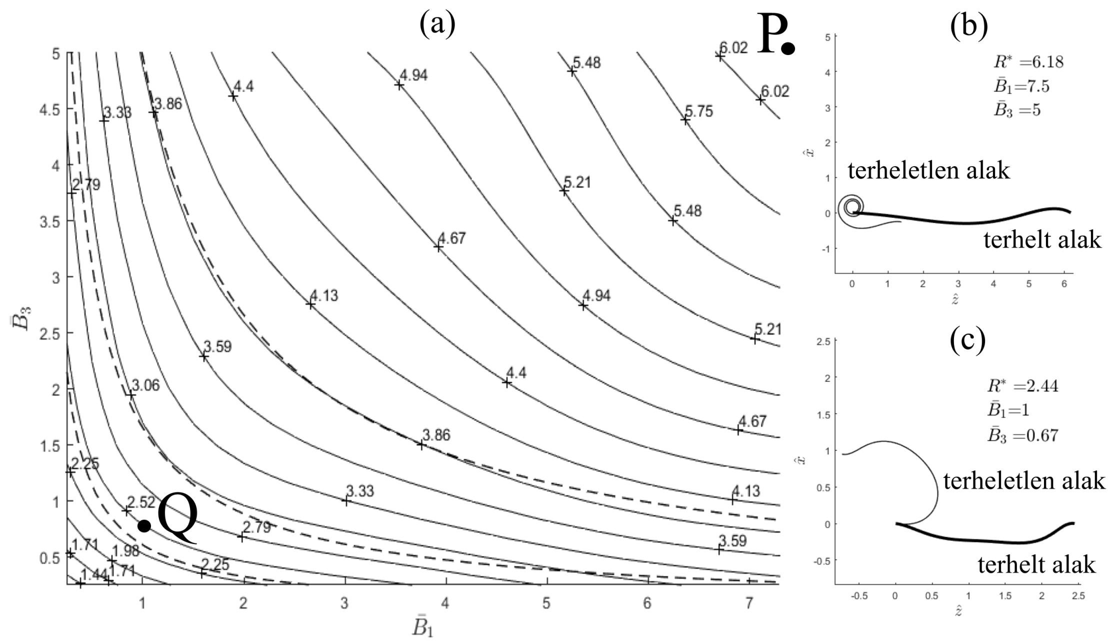
Az (2.42)-(2.43) egyenletek rögzített γ paraméter és $\bar{\phi}(s)$ alak mellett megadják a kezdeti és végleges görbület függvényeket, és a $\delta^2\bar{\mathcal{L}}$ második variáció előjelét. A modell lehetővé teszi kezdeti görbülettel rendelkező, síkbeli alakok stabilitásának számítását, erre kerül sor a következő részben.

2.1.3. Numerikus eredmények

A rúdalakok számítását az (2.40)-(2.43) dimenziótlanított egyenletek alkalmazásával hajtottuk végre, kihasználva a modell két fontos tulajdonságát:

(i) Egy rögzített, dimenziótlan terhelt alakhoz (azaz $\bar{\phi}(s)$ függvényhez) és rögzített γ paraméterhez a kezdeti görbület függvény $\bar{\kappa}_2^0$ egyedi, hiszen a (2.43) egyenlet elsőrendű KDE a $\bar{\kappa}_2^0$ változóra.

(ii) Azt is láttuk, hogy a $\bar{\phi}(s)$ alakhoz létezik az egyértelmű $\gamma = \gamma_{\rm crit}$ érték, amelynél γ növelésénél a szerkezet elveszti a stabilitását. Tehát bármely $\bar{\phi}(s)$ alakhoz hatékonyan tudjuk számítani a maximális kinyúlás mértékét.



2.2. ábra. Kezdeti görbülettel rendelkező konzol végpontjainak maximális vízszintes R^*_{def} távolsága a rúd stabilitása alapján számítva az (a) A $\bar{B}_1$-$\bar{B}_3$ merevségek függvényében. (b) a számítási tartomány maximumhoz közeli alakot (az (a) panelen P, $\bar{B}_1 = 7,5$ és $\bar{B}_3 = 5,0$), a (c) egy kör keresztmetszetű konzol (az (a) panelen Q) alakját mutatja be. Vegyük észre, hogy az optimális alakok közel egyenesek, és terheletlenül jelentős kezdeti görbülettel rendelkeznek.

Az alkalmazott numerikus eljárását részletesen ismerteti (Sipos & Várkonyi, 2020). Jelölje R^* a numerikusan számított maximális kinyúlás vízszintes mértékét. A dimenziótlanított merevségek terében a globális optimumot és két rúdalakot mutat a 2.2. ábra. Vegyük észre, hogy a terheletlen alakok jelentősen görbültek, a teher közvetlen alkalmazásával a maximális kinyúlást jelentő alak nem érhető el. Azonban a terhelés alapján kontrollált kezdeti görbületszabályozással a stabil konfiguráció megvalósítható. A számítási eredmények alapján a kezdeti görbület szabályozása jelentősen növeli a konzol maximális kinyúlását. Például, egy *lapos*, ellipszis alakú cső keresztmetszetet ($t = 0.15, a = 1.0$ és $b = 2.50$) esetén $B_1 \approx 4.00, B_2 \approx 1.0$ és $B_3 = 1.27$. A 2.2. ábra alapján ekkor $R^* \approx 3.70$, ami több, mint a duplája a szabályozás nélkül, a (2.3) összefüggés alapján várt $R^*_{\text{def}} \approx 1.81$ értéknek.

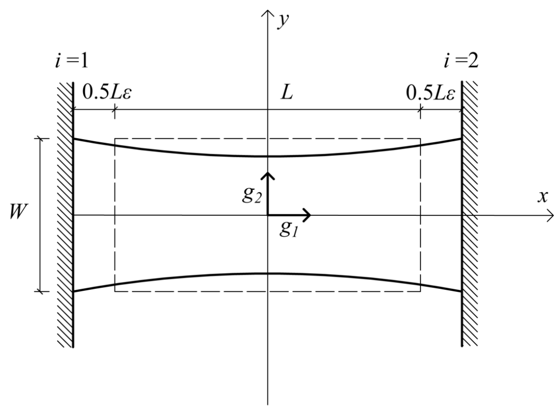
Ebben a fejezetben a (stabilitásvesztést megelőző) nagy deformációk határozták meg a szerkezet alakját. A következő fejezet egy mechanikai rendszerben a posztkritikus állapotban kialakuló formát mutat be.

2.2 Vékony filmek ráncosodása

Rugalmas, vékony filmek ráncosodásának keletkezése, a ráncosodást befolyásoló tényezők azonosítása, a ráncosodás mérséklése az ipari alkalmazás jelentősége miatt jelentős kutatási témává vált az elmúlt években. A vékony lemezek nyomás hatására ráncosodása egy klasszikus stabilitásvesztési probléma (Timoshenko & Gere, 1963; Antman, 2005), a domináns húzás hatására kialakuló ráncok vizsgálata 2000 körül kezdődött (Friedl *et al.*, 2000; Cerda *et al.*, 2002; Cerda & Mahadevan, 2003). A jelenség mechanikai okait jól magyarázata az ún. *feszültségmező elmélet* (*tension field theory*) (Reissner, 1938; Coman, 2007). Az elmélet a síkbeli feszültségek vizsgálatára összpontosít, a lemez hajlítószilárdságát elhanyagolja. Az $\mathbf{N}$ feszültségtenzor n^- számú negatív sajátértéke alapján a felületi pontokat *feszes* ($n^- = 0$), *ráncos* ($n^- = 1$) és *megereszkedett* ($n^- = 2$) kategóriák valamelyikébe sorolja.

Szemléletesen a húzott, téglalap alakú, egymással szemben lévő két éle mentén befogott (a másik két oldal szabad), vékony film ráncosodása a befogások által gátolt rövidülés következtében fellépő, keresztirányú nyomófeszültség miatt jön létre. Elegendően vékony film esetében ezen, kismértékű nyomófeszültség is elegendő a horpadás bekövetkeztéhez és a ráncos alak megjelenéséhez. A feszültségmező elmélet kiválóan használható arra, hogy meghatározzuk a ráncosodással érintett felületi régiók kiterjedésének egy felső korlátját, de alkalmatlan arra, hogy a ráncos mintázatot (pl.: ráncok száma és alakja) leírja. Ebben az elméletben a maximális sajátértékez tartozó sajátvektor az egyetlen információ, ami az alakra enged következtetni, hiszen ez a deformált alak hullámhegyeinek irányába mutat. Matematikai megközelítésben érvelhetünk olyan módon, hogy a feszültségmező elmélet a véges vastagságú lemezek elméletének zérus vastagsághoz tartozó limese, azonban mind a precíz határátmenet, mind a kísérleti eredményekkel való összevetése óvatosságra int.

A kicsiny, de véges vastagságú film ráncos alakjának számítására az irodalomban Kármán Tódor *nagy lehajlású vékony lemezek elmélete* (von Kármán, 1910) kézenfekvő modell. Az angol nyelvű szakirodalomban ez az elmélet a Föppl-von Kármán-féle lemezelméletként (*Föppl-von Kármán plate theory*) ismert. Geometriai szempontból ez egy nemlineáris elmélet, amelyben a síkra merőleges deformációk véges nagyságúak lehetnek mindaddig, amíg a síkbeli nyúlásokat infinitezimálisnak lehet tekinteni. Az elmélet, a klasszikus rúdkihajlási problémához hasonló elágazási jelenséget jósol: az imperfekció nélküli filmek a végekre kényszerített ε *makroszkopikus nyúlás* kicsiny értékénél (jóval 1% alatt) ráncossá válnak. Ez azt jelenti, hogy a nagy lehajlású vékony lemezek elméletének kiindulási feltételei jó közelítéssel teljesülnek ebben az első bifurkációs pontban, ahol a sík alak elveszti a stabilitását. A bifurkáció elmélet szóhasználatát követve a sík megoldást a továbbiakban *triviálisnak* nevezem függetlenül attól, hogy ez az alak is deformált a harántkontrakció miatt (2.3. ábra). A bifurkációs pontban induló posztkritikus ágakat a ráncos megoldások jelölik ki. A nagy lehajlású vékony lemezek elmélete szerint ezek az ágak stabilak a fajlagos megnyúlás tetszőleges további növelése esetén, míg a triviális megoldás végig instabil marad (Healey *et al.*, 2013).



2.3. ábra. A ε makroszkopikus nyúlásra kényszerített, harántkontrakciót mutató vékony film. A W szélességű és L hosszúságú téglalap alakú film két, egymással szemben lévő oldala ($i = 1, 2$) befogott, a másik két széle szabadon mozoghat. A terheletlen, referencia konfigurációt a szaggatott téglalap jelöli.

Azonban az egyre növekvő megnyújtás mellett a nagy lehajlású vékony lemezek elméletének kiindulási feltételei egyre inkább sérülnek. (Healey *et al.*, 2013) ezen hiba kiküszöbölésére az elméletet véges síkbeli nyúlások esetére terjesztette ki. A bifurkációs probléma precíz elemzése rávilágított, hogy az infinitezimális síkbeli nyúlások feltételezése nem csak kvantitatív hibát eredményez, a két modell között *kvalitatív* különbséget lehet kimutatni. A véges nyúlások feltételezése esetén létezik egy második bifurkációs pont, ahol a ráncos mintázatokat tartalmazó posztkritikus ágak "visszatérnek" a triviális ágba, azaz a sík, ráncmentes alak ismét stabillá válik. A második bifurkációhoz tartozó ε_2 makroszkopikus nyúlásparaméter természetesen meghaladja az első bifurkáció ε_1 paraméterértékét. Továbbá, azt is megmutatták, hogy a ráncosodás csak bizonyos oldalarányú téglalapok esetében következik be, ezen tartományon túl az elegendően keskeny, illetve elegendően széles sík alakok minden nyúlásérték mellett stabilak. A leírt viselkedése egyértelműen az ún. *izola-központ elágazásra* (*isola-center bifurcation*) utal. Célunk ezen, elméleti előrejelzés kísérleti igazolása és a modell szükséges finomításainak elvégzése volt.

A kísérleti igazolás egyik nehézsége, hogy alig létezik olyan anyag, ami a jelenség bemutatásához szükséges, nagyságrendben 10% − 50%-os nyúlás mellett lineárisan rugalmasan viselkedne. Az irodalom jellemzően numerikus szimulációk ismertetésére szorítkozik (Davidovitch *et al.*, 2011; Puntel *et al.*, 2011; Taylor *et al.*, 2014) anélkül, hogy a felhasznált numerikus eljárás alkalmazhatóságát elemezné. A kísérleti munkák vagy a képlékenyedés figyelembevételével elemzik a jelenséget (Wong &

Pellegrino, 2006; Nayyar *et al.*, 2014) vagy a lineáris rugalmasságtanra építenek és valamely elasztomert használnak (Zheng, 2009). Nem meglepő, hogy a jól detektálható ráncos mintázat megjelenéséhez szükséges makroszkopikus nyúlás (kb. $10-25\%$) már nem elhanyagolható mértékben befolyásolja az anyagi paramétereket, a kísérlethez használható anyagok jellemzően jelentős nemlineáris és irreverzibilis változáson mennek keresztül (pl.: plasztifikáció). Egyes elasztomerek (pl.: poliuretán film) a megcélzott nyúlási tartományban *hiperelasztikusak*, de semmiképpen sem lineárisan rugalmasak. Megmutatjuk, hogy előfeszítéssel közel lineárisan rugalmas viselkedés érhető el, azonban ennek hatására az anyag *ortotróppá* válik. Ez alapján (Healey *et al.*, 2013) izotróp modelljét általánosítottuk ortotróp filmekre, így az elméleti és kísérleti eredmények ténylegesen összehasonlíthatóvá váltak. A modell levezetésekor a referencia-állapotot az előfeszítés után vesszük fel, azaz rögzített ortotrópia paraméterekkel dolgozunk. A következő, 2.3. rész a teljes terhelési folyamatot leíró modellt mutat be.

A síkbeli feszültségek elemzése alátámasztja az ortotróp modell szükségességét: az alkalmazott megnyújtás irányában a normál feszültség abszolút értéke legalább egy nagyságrenddel meghaladja a keresztirányú nyomófeszültség abszolút értékét, ami arra utal, hogy az anyagi paraméterek változása elsősorban hosszirányban következhet be. Kísérleti eredményeink alátámasztják, hogy a poliuretán film jelentős mértékben ortotróppá válik az első megnyújtás folyamán. Az előfeszítést követő tehermentesítés után ismételt húzási kísérletek tanulsága szerint az anyag továbbra is dominánsan rugalmas, ráadásul ekkor további változást az anyagi paraméterekben nem tapasztalunk, akár több, mint 10 terhelési ciklus is kivitelezhető. Tudatában vagyunk, hogy a ráncosodást nem kizárólag a gátolt Poisson hatás okozza, például a nyírási deformációknak is van szerepe (Silvestre, 2015). Munkánkban ennek ellenére az ortotrópia szerepére és a ráncok eltűnésének kísérleti igazolására szorítkozunk. Ugyan az irodalomban találunk néhány, összetett kísérleti módszert alkalmazó munkát (Davidovitch *et al.*, 2011; Flores-Johnson *et al.*, 2015), de ezek egyike sem igazolja a második bifurkációs pont létét és a sík megoldás stabilizációját. Az általunk javasolt kísérleti eljárás az irodalomban használt módszereknél egyszerűbb, azonban a megfelelő anyag és az előfeszítés alkalmazásával mégis alkalmas az elméleti előrejelzés igazolására.

2.2.1. Elmélet vékony, ortotróp lemezek véges deformációinak számítására

Egy, állandó h vastagságú, téglalap alakú, vékony lemez egyensúlyi állapotait vizsgáljuk. A lemez anyaga homogén. A rögzített, ortonormált $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ bázist úgy vesszük fel, hogy $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ a lemez síkjába esik a referencia állapotban (2.3. ábra). A paraméterezéshez $\mathbb{R}^2$ egy zárt Ω tartományát jelöljük ki. A terheletlen film szélességét jelölje W, hosszúságát pedig L! Az irodalmi összehasonlíthatóság végett a téglalap *elnyúltságát* jellemezze a következő paraméter:

$$\beta = \frac{L}{2W}. \tag{2.51}$$

A film deformációja során a középfelület referencia állapotban vett normálisai a deformált középfelület normálisaiba képződnek. Továbbá, (geometriai) nemlinearitásként csak a hajlítás és a síkbeli nyúlások kölcsönhatását vesszük figyelembe. Ezen feltételezések birtokában a lemez alakváltozása egyértelműen megadható a középfelület alakváltozásaként. A $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ elmozdulásmező:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

ahol $u(x,y)$ és $v(x,y)$ a síkbeli, és $w(x,y)$ a síkra merőleges elmozdulásokat jelöli. Ezen függvényekről feltesszük, hogy elegendően regulárisak. A klasszikus nagy lehajlású, vékony lemezek elméletében a $\Psi(\mathbf{u})$ energiasűrűség a síkbeli deformációk $\Psi_m(\mathbf{e})$, és a hajlítási $\Psi_b(\mathbf{k})$ energiasűrűségek összegeként áll elő:

$$\Psi(\mathbf{u}) = \Psi_m(\mathbf{e}) + \Psi_b(\mathbf{k}), \tag{2.53}$$

ahol $\mathbf{e} \in L(\mathbb{R}^2)$ jelöli a linearizált síkbeli nyúlási tenzort és $\mathbf{k} \in L(\mathbb{R}^2)$ a linearizált hajlítási tenzort. Ezen tenzorok az elmozdulásmező függvényeként fejezhetőek ki:

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2u_{,x} + w_{,x}^2 & u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} & 2v_{,y} + w_{,y}^2 \end{bmatrix}, \tag{2.54}$$

$$\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) = -\begin{bmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,xy} & w_{,yy} \end{bmatrix} z = -\mathbf{k}(\mathbf{u})z. \tag{2.55}$$

Izotróp anyagok esetén az E rugalmassági modulus és a ν Poisson tényező $(0 \le \nu \le 0.5)$ bevezetésével az elmélet a háromdimenziós kontinuum kétdimenziós approximációjának tekinthető (Steigmann, 2008), amennyiben a kontinuum anyagmodellje a *Saint-Venant Kirchhoff anyaggal* azonos:

$$\Psi_m = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[\nu(\operatorname{Tr}\mathbf{e})^2 + (1-\nu)\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}\right], \tag{2.56}$$

$$\Psi_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[\nu(\operatorname{Tr}\mathbf{k})^2 + (1-\nu)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\right]. \tag{2.57}$$

Feltételezzük, hogy a terhelés a befogott oldalak egymáshoz mért távolságának növelésével valósul meg, azaz a tartomány határának egy $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$, $(i > 0)$ részhalmazán az elmozdulást előírjuk:

$$\mathbf{u}^i = \varepsilon\mathbf{u}_0^i = \varepsilon\begin{bmatrix} u_0^i \\ v_0^i \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.58}$$

ahol u_0^i és v_0^i rögzített, elegendően reguláris függvények és az ε skalár, amit a továbbiakban *makroszkopikus nyúlásnak* nevezek. Esetünkben $i \in \{1,2\}$ és

$$u_0^1(-L/2,y) = -L/2, \tag{2.59}$$

$$u_0^2(L/2,y) = L/2, \tag{2.60}$$

$$v_0^1(-L/2,y) = v_0^2(L/2,y) = 0, \tag{2.61}$$

a 2.3. ábra szerint. Kizárva külső terhek jelenlétét a rendszer $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ potenciális energiája:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \Psi \,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.62}$$

Egyensúlyi, az $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ funkcionált minimalizáló megoldásokat keresünk, amelyek egyben kielégítik a (2.58) peremfeltételeket. A véges nyúlásokat tartalmazó modellben a nyúlási tenzor az $\mathbf{E} \in L(\mathbb{R}^2)$ *Green-Lagrange nyúlási tenzor*, részletezve:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{11} &= u_{,x} + \frac{1}{2}\left(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2\right), \\
\mathbf{E}_{12} &= \frac{1}{2}\left(u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}\right), \\
\mathbf{E}_{21} &= \mathbf{E}_{12}, \\
\mathbf{E}_{22} &= v_{y} + \frac{1}{2}\left(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2\right). \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

Az energiasűrűség alakja:

$$\Psi(\mathbf{u}) = \Psi_m(\mathbf{E}) + \Psi_b(\mathbf{k}). \qquad (2.64)$$

A fenti, közel sem triviális helyettesítés (azaz $\mathbf{E}$ használata $\mathbf{e}$ helyett) matematikai alátámasztását adja (Healey *et al.*, 2013). A (2.62) funkcionál $\mathbf{u}$ komponensei szerinti első variációjának számításával, parciális integrálás után kapjuk az egyensúlyi (Euler-Lagrange) egyenleteket:

$$\nabla \cdot \left[\left(\mathbf{I} + \mathbf{g}_1 \otimes \nabla u + \mathbf{g}_2 \otimes \nabla v\right)\mathbf{N}\right] = \mathbf{0}, \qquad (2.65)$$

$$h^2 \Delta^2 w - \nabla \cdot (\mathbf{N} \nabla w) = 0, \qquad (2.66)$$

ahol $\mathbf{I}$ az identitás tenzor és $\otimes$ a tenzorszorzat. $\Delta(.)$ és $\Delta^2(.)$ jelöli a *Laplace* és *biharmonikus* operátorokat. Az egyensúlyi egyenletekben az $\mathbf{N}$ feszültségtenzor a membrán viselkedést leíró második Piola-Kirchhoff feszültséget jelöli. Kiírva:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}\mathbf{E}} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[\nu \operatorname{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + (1-\nu)\mathbf{E}\right]. \qquad (2.67)$$

Az ortotróp modell potenciális energia funkcionálját az izotróp eset általánosításaként írjuk fel (Libai & Simmonds, 1998). Feltesszük, hogy az anyagi ortotrópia főirányai egybeesnek az $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ bázis vektorokkal. Jelölje E_0 és E_{90} az $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ irányú rugalmassági modulusok értékét. Jelölje

$$r := \frac{E_{90}}{E_0} \qquad (2.68)$$

az *ortotrópia mértékét* jellemző hányadost! A rugalmas merevségi mátrix szimmetriájából következik, hogy a főirányokhoz rendelhető Poisson tényezőkre teljesül a $\nu_{[xy]} = r\nu_{[yx]}$ összefüggés (Howell *et al.*, 2009). A G nyírási modulust a következő alakban adjuk meg

$$G = qE_0, \qquad (2.69)$$

ahol q egy rögzített, pozitív paraméter. A kétdimenziós, ortotróp médium $\mathbf{C}$ negyedrendű rugalmas merevségi tenzorra a fentiek segítségével a következő alakban írható:

$$\mathbf{C} = \frac{E_0}{1 - r\nu_{[xy]}^2}\widetilde{\mathbf{C}}, \qquad (2.70)$$

ahol $\widetilde{\mathbf{C}}$ mátrix reprezentációjának nem zérus elemei csak a bevezetett dimenziótlanított paramétereket tartalmazzák: $\widetilde{\mathbf{C}}_{1111} = 1$, $\widetilde{\mathbf{C}}_{1122} = \widetilde{\mathbf{C}}_{2211} = r\nu_{[xy]}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_{2222} = r$ és végül $\widetilde{\mathbf{C}}_{1212} = q(r\nu_{[xy]}^2 - 1)$. A Ψ_m és Ψ_b energiasűrűségek felírásához a linearizált hajlítási tenzort (2.55) és a véges síkbeli nyúlási tenzort (2.63) használjuk. A film vastagsága mentén integrálva

$$\Psi_m(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2} \{\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}\}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{E_0 h}{1 - r\nu_{[xy]}^2}\mathbf{E} \cdot \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{E}, \qquad (2.71)$$

$$\Psi_b(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{24}\frac{E_0h^3}{1-r\nu_{[xy]}^2}\mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{k}. \tag{2.72}$$

A teljes szerkezet rugalmas energiasűrűségét a (2.71) és (2.72) kifejezések (2.64) egyenletbe történő behelyettesítésével kapjuk. Átskálázás után (azaz $24(1-r\nu_{[xy]}^2)/(E_0h^3)$ mennyiséggel szorozva), továbbá bevezetve a $\xi = h^{-2}$ paramétert kapjuk:

$$I(\mathbf{u}) = \int_\Omega \{\Psi_m(\mathbf{E}) + \Psi_b(\mathbf{k})\}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left\{12\xi\mathbf{E}\cdot\widetilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{k}\cdot\widetilde{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{k}\right\}\mathrm{d}\Omega. \tag{2.73}$$

A második Piola-Kirchhoff feszültségtenzor alakja:

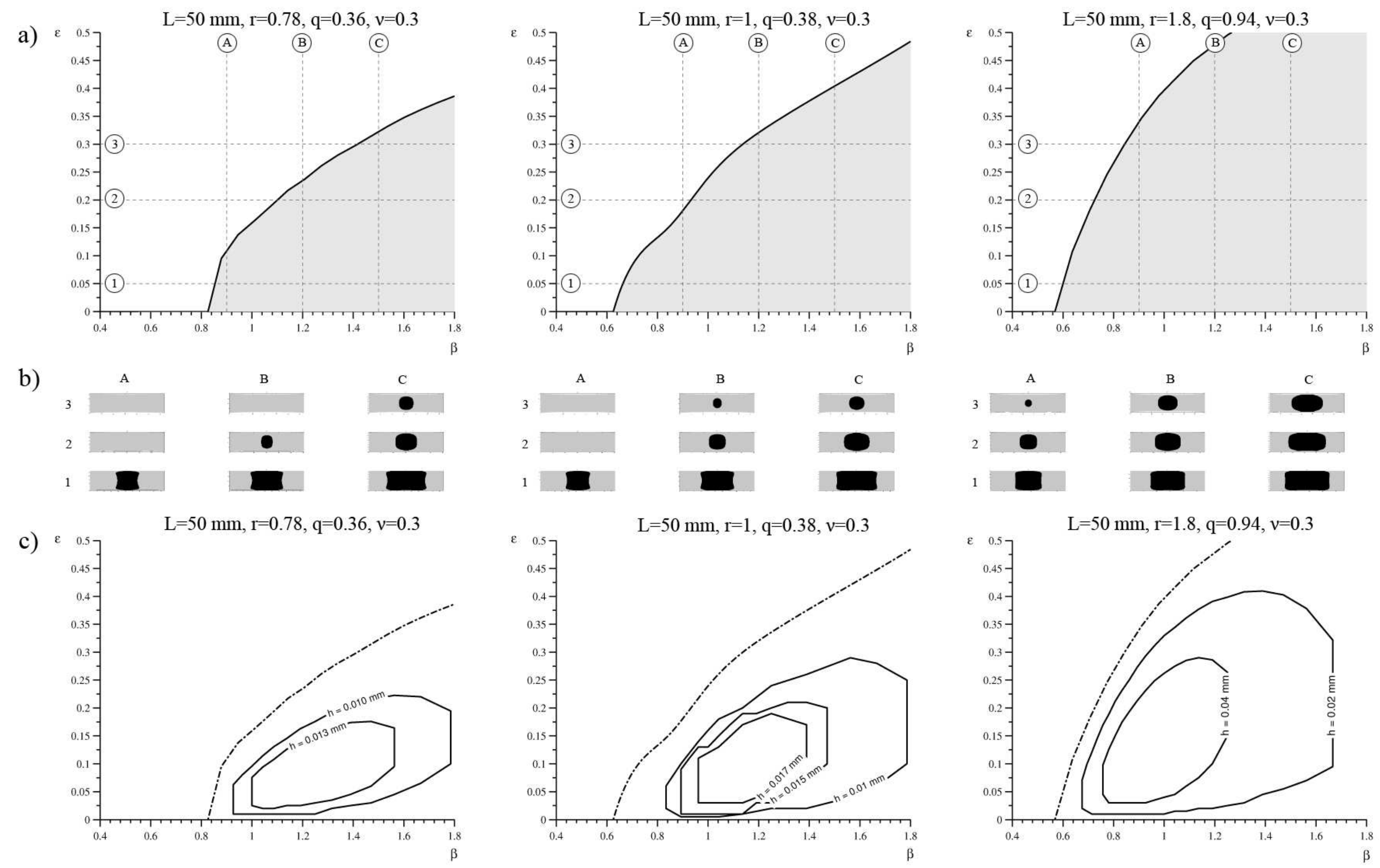
$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}\mathbf{E}} = 12\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{11} + r\nu_{[xy]}\mathbf{E}_{22} & 2q(1-r\nu_{[xy]}^2)\mathbf{E}_{12} \\ 2q(1-r\nu_{[xy]}^2)\mathbf{E}_{12} & r\mathbf{E}_{22} + r\nu_{[xy]}\mathbf{E}_{11}\end{bmatrix}. \tag{2.74}$$

ami $r = 1$ és $q = 0.5(1+\nu)^{-1}$ választásával az izotróp esettel (2.67) egyezik meg (konstans szorzó erejéig). Az egyensúlyi egyenletek formálisan a (2.65-2.66) egyenletekkel azonosak, természetesen az ortotróp modellben az $\mathbf{N}$ feszültségtenzort (2.74) szolgáltatja.

Numerikus módszer

Az egyensúlyi megoldások számításához használt numerikus eljárás (lényegében a Ritz módszer) a (2.73) funkcionál minimumát approximálja a (2.58) peremfeltételek teljesítése mellett, végeselemes diszkretizálás alkalmazásával. Egy reguláris, téglalap osztású végeselem hálót használunk (Reddy, 2008), a szokványos C_0 regulairtású bázis függvényekkel az u és v mezők, és C_1 bázisfüggvényeket a w mező közelítéséhez. A numerikus modellben minden belső csomópont 6 szabadságfokú, az eredményül adódó nemlineáris egyenletrendszer az (2.73) Euler-Lagrange egyenletek diszkrét változata (Fehér & Sipos, 2014).

Vegyük észre, hogy a $h^2 \ll 1$ következtében a hajlítómerevség közel zérus, ez a numerikus módszer részletes vizsgálatát igényli (hiszen feladatunk felfogható egy szinguláris perturbációt tartalmazó problémának is), ezért kommerciális végeselemes megoldások problémánk esetén kerülendőek. (Healey *et al.*, 2013; Li & Healey, 2016) alapján szisztematikus útkövetés és a bifurkációk precíz detektálása szükséges a konzisztens eredmények eléréséhez. Mivel munkánk elsősorban a triviális ág bifurkációinak azonosítását célozza, elegendő a triviális megoldás stabilitásának alapos vizsgálata. Célunk annak demonstrálása, hogy elegendően nagy, rögzített β paraméterhez léteznek a $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \infty$ *kritikus makroszkopikus megnyúlás értékek* olyan módon, hogy a triviális megoldás instabil a $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ halmazon, és stabil egyébként. Ennek igazolásához a feladat egyensúlyi megoldásaihoz tartozó diszkrét $\mathbf{J}$ Jacobi mátrix (ami nem más, mint az (2.73) energia funkcionál második variációjának diszkrét approximációja) $\lambda_{\min}$ legkisebb sajátértékének előjelét számítjuk. A triviális, síkbeli ($w \equiv 0$) megoldás instabil, ha $\lambda_{\min} < 0$, egyébként stabil. Amennyiben a posztkritikus tartományban, ráncos alak számítása a célunk, azt rögzített paraméterek mellett, véletlenszerű perturbációt követően Broyden-módszert alkalmazva állítjuk elő.



2.4. ábra. A paramétertér numerikus vizsgálata különböző nagyságú r ortotrópia mérték mellett. (a) Szürke ponthalmaz jelöli azon $\beta - \varepsilon$ párokat, ahol a $\mathbf{N}$ feszültségtenzor a triviális megoldás valamely pontjában negatív. (b) A film felülete a feszültségtenzornak megfelelően színezve: a fekete pontokban $n^- = 1$, a szürkékben $n^- = 0$, az (a) részben jelölt paraméterértékeknél. (c) Bifurkációk: rögzített h vastagság mellett a $\mathbf{J}$ Jacobi mátrix legkisebb sajátértékének számításával a $\lambda_{\min} = 0$ ponthalmaz az ún. stabilitási határ. A zárt görbén belül a legkisebb sajátérték negatív, a triviális megoldás instabil. Ezen pontokban a stabil megoldás ráncos alakot jelent. A pont-szaggatott vonal az (a) részben bemutatott görbe, amely a negatív feszültségtenzort jellemzi.

2.2.2. A paramétertér vizsgálata

Rögzített anyagi paraméterek esetén (azaz r, q és ν állandó) a feladat három bifurkációs paraméterrel bír: a film h vastagsága, a β oldalarány (2.51) és az ε teherparaméter tartozik ide. A triviális, sík megoldás stabilitásveszésének *szükséges feltétele* a második Piola-Kirchhoff feszültségtenzor negativitása az Ω tartomány egy nem zérus mértékű részhalmazán (Healey *et al.*, 2013). Ez a feltétel ortotróp anyag esetén is szükséges a bifurkációhoz. Sík megoldás esetén a (2.66) egyenlet bal oldala azonosan zérus bármely h és $\mathbf{N}$ esetén, ezért (2.65) a film vastagságától független. Azt találjuk tehát, hogy a triviális megoldáshoz számított $\mathbf{N}$ legkisebb sajátértéke Ω felett meghatározza a bifurkációs pontok lehetséges halmazát (2.4.(a) ábrák).

Az elágazási pontok lehetséges helyének ábrázolása megmutatja, hogy $\varepsilon \to \infty$ irányban a feszültségtenzor pozitívvá válik, ami azt jelenti, hogy tetszőlegesen kicsiny h érték esetén is teljesül, hogy ε_2 értéke véges. Ez a megfigyelés nem pusztán numerikus: tekintsük az egyensúlyi egyenleteket rögzített β mellett! Alkalmazzunk tetszőlegesen nagy megnyújtást. Homogén peremfeltételek érdekében a következő változócserét alkalmazzuk:

$$u(x, y) = \varepsilon x + \bar{u}(x, y). \tag{2.75}$$

Behelyettesítve (2.75) tartalmát a Green-Lagrange (2.63) feszültségtenzorba és alkalmazva a (2.74) összefüggést, a (2.65) egyensúlyi egyenlet két sorát a következő alakra lehet hozni:

$$\left(18\bar{u}_{,xx} + 6r\nu\bar{u}_{,yy} - 12qr\nu^2\bar{u}_{,yy} + 12q\bar{u}_{,yy}\right)\varepsilon^2 + f_1(.)\,\varepsilon + g_1(.) = 0, \tag{2.76}$$

$$\left(6v_{,xx} + 6r\nu v_{,yy}\right)\varepsilon^2 + f_2(.)\,\varepsilon + g_2(.) = 0, \tag{2.77}$$

ahol $f_1(.)$, $f_2(.)$, $g_1(.)$ és $g_2(.)$ mindegyike $\bar{u}$ és v első és második parciális deriváltjaitól függ. Mindkét egyenletet ε^2-tel osztva és elvégezve a $\varepsilon \to \infty$ határátmenetet két, független egyenletet kapunk:

$$\left(18\bar{u}_{,xx} + 6r\nu\bar{u}_{,yy} - 12qr\nu^2\bar{u}_{,yy} + 12q\bar{u}_{,yy}\right) = 0, \tag{2.78}$$

$$\left(6v_{,xx} + 6r\nu v_{,yy}\right) = 0. \tag{2.79}$$

Figyelembe véve a peremfeltételeket, és a tükrözési szimmetriát a koordinátatengelyek mentén (azaz $\bar{u} = 0$ ha $x = 0$ és $v = 0$ ha $y = 0$), a fenti PDE-k megoldásai a következő alakúak:

$$\bar{u}(x, y) = 2b\cosh(ay)\sin\left(a\frac{\sqrt{6q - 6qr\nu^2 + 3r\nu x}}{3}\right), \tag{2.80}$$

$$v(x, y) = -2c\sinh(dy)\cos\left(d\sqrt{r\nu}x\right), \tag{2.81}$$

ahol a, b, c és d valós konstansok. Ekkor a és d úgy választandó meg, hogy a befogott élek mentén a peremfeltételek teljesüljenek. Mivel ezek egyike sem $O(\varepsilon)$ rendű, a (2.63) és (2.74) egyenletek alkalmazásával kapjuk, hogy:

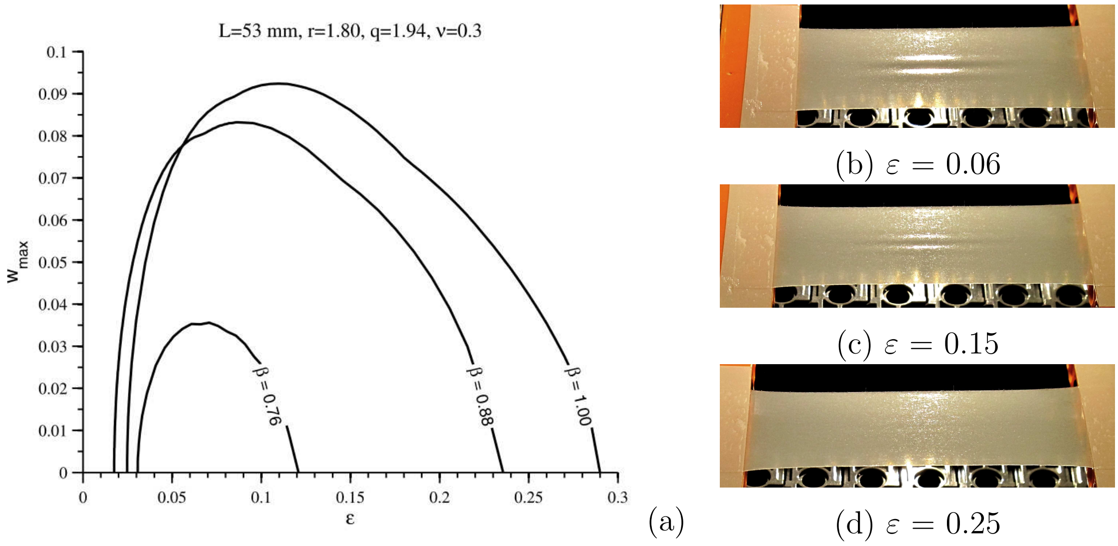
$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{N} = 6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r\nu\end{bmatrix} > 0. \tag{2.82}$$

A feszültségtenzor negatív sajátértékének numerikus számítása azt is igazolja, hogy rögzített véges makroszkopikus megnyúlás mellett a negatív sajátérték tetszőlegesen nagy β paraméterérték mellett létezik (2.4.(a) ábra), ugyanakkor a nyomófeszültség maximum értéke monoton csökken ahogy β értékét növeljük. Ez azt jelenti, hogy a nagy elnyúltságú filmek érzékenyek az anyagi és geometriai imperfekciókra: hiszen a kicsiny nyomófeszültség létrehozhatja a ráncos felületet. A 2.4. ábrán különböző mértékű ortotrópia mellett közlöm a numerikus számítás eredményeit: a középső oszlop tartozik az izotróp anyaghoz, a bal oldali a kicsiny, a jobb oldali a jelentős ortotrópia esetét mutatja be. Különböző, rögzített h vastagságok mellett meghatároztuk a bifurkációs pontok helyzetét, az ilyen módon kapott görbéket *stabilitási határnak* nevezem, a vizsgált problémában ezen görbék zárt, egyszerű görbék. Nem meglepő, hogy h növelésével ezen görbék által körbezárt terület csökken. Egy kritikus h vastagság felett pedig egyáltalán nem létezik stabil ráncos megoldás.

2.2.3. Kísérleti vizsgálatok

A ráncosodás kísérleti vizsgálata, annak ellenére hogy egy alapvetően rugalmas jelenségről van szó, nem triviális: a peremfeltételek és a megnyújtás megfelelő alkalmazása speciális, egyedi mérőeszközt igényelhet (Jenkins *et al.*, 1998; Géminard *et al.*, 2004). Az húzott, téglalap alakú film vizsgálata hasonlatos a klasszikus húzási kísérletekhez, és mivel a perem elmozdításával idézzük elő a jelenséget, az erő mérése az elmozdulás során nem szükségszerű. Ezért az anyagi paramétereket a ráncosodási kísérletektől függetlenül, külön méréssorozatban határoztuk meg. A ráncosodás vizsgálatára *Fehér Eszter* egy szervo-motoros eszközt épített. A megnyújtás sebességét 120 mm/perc értéken rögzítettük. A ráncok megjelenését és eltűnését vizuálisan figyeltük meg, továbbá a mintadarabot súrolófényben fényképeztük (Géminard *et al.*, 2004) a kísérlet folyamán (2.5. ábra). A vizuális megfigyelésből a ráncok eltűnéséhez tartozó kritikus ε_2 paraméterérték közvetlenül nem határozható meg. Helyette meghatároztuk azt a ε_{21} makroszkopikus nyújtásértéket, amely mellett a ráncok még egyértelműen kivehetőek és azt a ε_{22} értéket, ahol a felület sík, árnyékoktól mentes. Természetesen $\varepsilon_{21} < \varepsilon_2 < \varepsilon_{22}$ teljesül. Pontosabb képalkotó eljárásokkal (pl.: a felület háromdimenziós szkennelése) ezen alsó és felső korlátok közötti különbség csökkenthető. Munkánkban a $\varepsilon_2 = 0.5(\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})$ képlet szerint *becsültük* a kritikus paraméterértéket.

Az anyag tekintetében több, különböző elasztomer kipróbálását követően a Paul Hartmann AG gyártó Hydrofilm Roll termékét használtuk a kísérletekhez. A felhasznált film nominális vastagsága 20 µm. A polimerekre jellemző módon, a terheletlen film a gyártási technológia következtében kismértékben ortotróp (Ward, 1997). Az első megnyújtás folyamán a film ortotrópia tulajdonságai jelentősen módosulnak. Az első ciklust követően az újabb terhelési ciklusok anyagi paraméterekre kifejtett hatása elhanyagolható, 8-10 terhelési ciklus folyamán az anyag hiperelasztikus, sőt, közel lineárisan rugalmas viselkedést mutatott.



(a) (b) $\varepsilon = 0.06$ (c) $\varepsilon = 0.15$ (d) $\varepsilon = 0.25$

2.5. ábra. A megnyújtás növelésével a ráncok eltűnnek. (a) A ráncok $w_{\max}$ maximális amplitúdója az ortortóp modellel számítva, különböző oldalarányok mellett. A ráncok kis makroszkopikus nyúlás esetén megjelennek, ($\varepsilon < 0.05$) és különböző oldalarányokra eltérő nyúlásértéknél tűnnek el (pl.: $\beta = 1.00$ esetén a triviális megoldás kb. $\varepsilon = 0.29$ esetén válik újra stabillá. A (b), (c) és (d) részek egy $L = 53$mm és $W = 25$mm geometriájú ($\beta = 1.06$), az (a) részhez közeli anyagi paraméterekkel rendelkező mintadarab kísérleti felvételei.

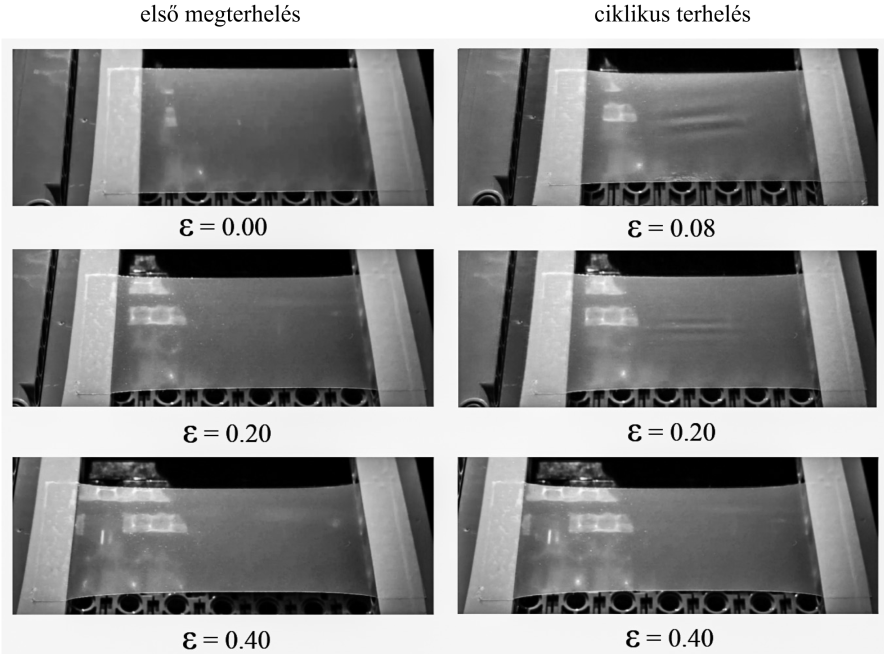
A kísérletekben tehát minden mintadarabot előfeszítéssel készítettünk elő, az előfeszítés mértéke minden kísérlethez $\varepsilon_0 = 0.66$ volt. A számításokban az előfeszítés utáni anyagi paramétereket használtuk. Ezen paramétereket három, eltérő eszközöket felhasználó kísérletsorozatban határoztuk meg (Sipos & Fehér, 2016). Az eredményeket a 2.1. táblázatban foglaltam össze.

Az elvégzett kísérletek igazolták a ráncos mintázat eltűnését a második bifurkációs pontban és a triviális, sík alak újbóli stabilizációját. Az ortotróp modell és a kísérleti eredmények egyezése meggyőző (Sipos & Fehér, 2016). Említettem, hogy az előfeszítés alatt az anyagtulajdonságok jelentősen módosulnak. A következő rész az előfeszítés során bekövetkező károsodást is tartalmazó modellt mutat be.

	Előfeszítés előtt	Előfeszítés után
E_0	48.45 N/mm^2	15.36 N/mm^2
E_{90}	37.75 N/mm^2	27.69 N/mm^2
E_{45}	44.23 N/mm^2	28.66 N/mm^2
G	17.41 N/mm^2	14.55 N/mm^2
r	**0.78**	**1.80**
q	**0.36**	**0.94**
ν	0.3	0.3

2.1. táblázat. Az előfeszítés előtt és után mért anyagi paraméterek. Kiemelendő az ortotrópia mértékének jelentősen változása.

2.3 A Mullins-hatás a ráncosodási feladatban



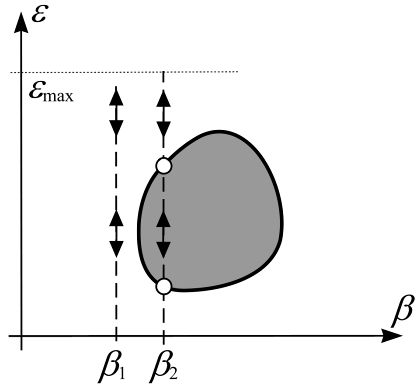
2.6. ábra. A húzott, vékony film rugalmatlan viselkedése: az első megnyújtás során az $L = 50$mm hosszú és $W = 35$mm széles ($\beta = 0.71$) film ráncmentes (bal oldali képsorozat), de a leterhelés (és az ezt követő ciklikus terhelés) folyamán a ráncok megjelennek, illetve eltűnnek a megnyújtás mértékének függvényében (jobb oldali képsorozat). A kísérletben megfigyelt maradó nyúlás mintegy $\varepsilon = 0.08$. Vegyük észre, hogy a maradó nyúlás értékénél (azaz az első megterhelés utáni teljes tehermentesítésnél) a felület ráncos (jobb felső kép).

Az előző részben a vékony filmek ráncosodását egy tisztán rugalmas modellel magyaráztam. Az ott ismertetett kísérletek mellett (Zhu *et al.*, 2018) is felveti azt a kérdést, hogy milyen módon lehet a teljes, az előfeszítést is tartalmazó folyamatot modellezni.

A jelenség teljes vizsgálata végett újabb kísérletsorozatot hajtottunk végre elegendően vékony, poliuretán filmeken, előfeszítés nélkül. A mintadarab első megnyújtását ebben a részben *első megterhelésnek* nevezem. Az első tehermentesítés és a további terhelési és tehermentesítési lépéseket együttesen *ciklikus terhelésnek* hívom. A modell kiterjesztése mellett munkánkat a következő, a kísérletekben megfigyelt viselkedés motiválta: bizonyos oldalarányú téglalapok esetében az első megterhelés alatt nem észleltünk ráncosodást, azonban a ciklikus terhelésben (beleértve az első tehermentesítést) minden esetben ráncosodott a felület (2.6. ábra). Összhangban az előző fejezet megállításaival, a ciklikus terhelés alatt rugalmas viselkedést tapasztaltunk. Ez, a ráncosodási viselkedéstől függetlenül, az elasztomerekre jellemző *Mullins-hatás* (Dorfman & Ogden, 2004; Ogden & Roxburgh, 1999) jelenlétére utal.

A megfigyelés heurisztikus módon magyarázható a következővel: a tisztán rugalmas modellben a $\beta - \varepsilon$ síkon a stabilitási határ egy zárt görbe (lásd az előző rész 2.4. ábráját). A 2.7. ábra szerint alkalmasan választott, rögzített oldalarány esetén a megnyújtást jelképező megfelelő egyenes ezt a görbét a kísérlet folyamán két ponton metszi: a kisebb makroszkopikus nyúláshoz tartozó pont a ráncok megjelenésének, a másik az eltűnésének felel meg. A zárt görbét nem metsző oldalarányok esetében nem tapasztalunk ráncosodást. Vegyünk egy olyan, β_1 arányú téglalapot, ami a stabilitási határt jelentő görbén kívül, de ahhoz közel eső evolúciót valósít meg: ekkor az első megnyújtás során végig a triviális, ráncmentes állapotot látjuk. Tegyük fel, hogy az első megnyújtás során keletkező, *maradó alakváltozás* miatt a téglalap oldalaránya β_2-re nő. Ekkor a leterhelés folyamán ráncosodást tapasztalunk. Ha a további ciklikusokban az anyagi paraméterek érdemben már nem változnak, akkor a ráncok menetrendszerűen jelennek meg és tűnnek el a kísérlet folyamán.

Az iménti értelmezés természetesen leegyszerűsítő. Nem veszi figyelembe a kialakuló ortotrópiát (azaz a stabilitási határ már tárgyalt áthelyeződését), és figyelmen kívül hagyja, hogy az anyag maradó nyúlása belső károsodásra utal. A kísérletekben az is szembeötlő, hogy a tehermentesítés során a maradó nyúlás szintjén, körülbelül $\varepsilon = 0.08$ értéknél, a felület ráncos, ahogy azt a 2.6. ábra jobb felső fényképe mutatja. Célunk egy olyan, *pszeudoelasztikus* (*pseudoelastic*) modell bevezetése, amely a maradó nyúlás mellett a kísérletekben megfigyelt ráncosodási jelenséget is helyesen írja le. Ide tartozik, hogy egyes oldalarányok esetén elvárjuk, hogy a ráncosodás csak a ciklikus terhelés idején jelentkezzen, azonban az első terhelés ráncmentes legyen.



2.7. ábra. Két, különböző oldalarányú film terhelése és a rugalmas alapon számított stabilitási határ viszonya a $\beta - \varepsilon$ síkon. A β_1 oldalarányú film nem ráncosodik, β_2 oldalarány esetén a ráncok mindkét terhelési irányban megjelennek, illetve eltűnnek a fehér karikákkal jelezett pontokban.

2.3.1. A modellről

Továbbra is a 2.2. rész jelöléseit használom, és bevezetem a síkbeli alakváltozási mezőt: $\hat{\mathbf{u}} : \Omega \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, azaz $\hat{\mathbf{u}} := [u(x,y), v(x,y), 0]^T$. Továbbá, legyen $\tilde{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. A terhelés és a h vastagságú, téglalap alakú film peremfeltételei megegyeznek a 2.2. részben írtakkal. A Ψ rugalmas energiasűrűség a Ψ_m membrán és a Ψ_b hajlítási energiasűrűségek összegeként áll elő, a (2.64) egyenletnek megfelelő módon. A Ψ_m energiasűrűséget a $\mathbf{C}$ jobboldali Cauchy-Green alakváltozási tenzor függvényében fogom megadni. (Nem összetévesztendő a 2.2. rész (2.70) összefüggésével adott rugalmas merevségi tenzorával.) Ismert, hogy az $\mathbf{F}$ deformációs gradiens tenzor ismeretében $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Esetünkben

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{g}_3 \otimes \nabla w, \tag{2.83}$$

ahol $\mathbf{I} \in L(\mathbb{R}^2, \tilde{\mathbb{R}}^2)$ izomorf $\mathbb{R}^2$ identitásával és $\mathbf{g}_3$ a film referencia síkjára merőleges bázisvektor. Tehát $\mathbf{F} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ és $\mathbf{C} \in L(\mathbb{R}^2)$.

A 2.2. rész szerint az E rugalmassági modulus csökkenése mind a hossz-, mind a keresztirányban jelentős, a csökkenés mértéke nem meglepő módon a terheléssel párhuzamos $\mathbf{g}_1$ irányban nagyobb. Ennek megfelelően egy darab, anizotróp módon ható állapotváltozó bevezetését célozzuk meg. Ezen állapotváltozó, vagy más néven *károsodási mező* hatása az $\mathbf{g}_1$ irányban jelentősebb. Ez a megközelítés egyben alkalmas lesz a kísérletekben megfigyelt maradó alakváltozás leírására is. A Mullins-hatás klasszikus modelljét (Dorfman & Ogden, 2004; Ogden & Roxburgh, 1999) alapul véve, az energiasűrűséget a

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{k}, \eta) = \Psi_m(\mathbf{C}, \eta) + \Psi_b(\mathbf{k}) + \Phi(\eta), \tag{2.84}$$

alakban vesszem fel, ahol η a $0 \leq \eta \leq 1$ egyenlőtlenséget kielégítő, már említett állapotváltozó és Φ az ún. *disszipációs függvény.* A modellben $\eta = 1$ felel meg a károsodásmentes állapotnak. Szemben a 2.2. résszel, itt a membrán energiasűrűség felírásánál a klasszikus Mooney-Rivlin anyagmodellből indulunk ki. Ennek oka, hogy a 2.2. részben az előfeszítés mérésével és illesztésével nem foglalkoztunk, ugyanakkor a teljes modellnek ezt a fázist is magában kell foglalnia. Előzetes kísérleteink alapján a (Li & Healey, 2016) publikációban számított, különböző hiperelasztikus anyagmodellek közül a Mooney-Rivlin állt legközelebb a mért adatokhoz. Ennek megfelelően a membrán részhez tartozó rugalmas energiasűrűség

$$\begin{aligned}\Psi_m(\mathbf{C}, \eta) :=& h\alpha_1 \left[((1+d)\eta - d)\,(\mathbf{C}_{11} - 1)\right] + \\ & h\alpha_1 \left[\eta(\mathbf{C}_{22} - 1) + \frac{1}{\det \mathbf{C}} - 1\right] + \\ & h\alpha_2\eta \left[\frac{\operatorname{Tr}\mathbf{C}}{\det \mathbf{C}} + \det \mathbf{C} - 3\right],\end{aligned} \tag{2.85}$$

ahol α_1 és α_2 rögzített anyagi paraméterek és $d > 0$ egy rögzített skalár a károsodás anizotrópiájának kontrollálására (itt $d = 0$ felel meg az izotróp károsodásnak). Teljes mértékben károsodott anyagi pontban $\eta = d/(1+d)$. Tekintve, hogy a megnyújtás az $\mathbf{g}_1$ iránnyal párhuzamos, a (2.85) kifejezésben a $\mathbf{C}_{11}$ és $\mathbf{C}_{22}$ tenzorkomponensek a $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ irányokban értelmezett nyújtások (*stretch*) függvényei. A fejezet végén megmutatom, hogy az ismertetett modell a Dorfman és Ogden által leírt, általános modellosztály (Dorfman & Ogden, 2004) egy speciális esete.

Érdemes kiemelni, hogy a (2.85) kifejezés

$\eta \equiv 1$ választása mellett nem más, mint a Mooney-Rivlin rugalmasságú test approximációja vékony lemezekre. Ekkor egy vékony, három dimenziós testet feltételezve, az összenyomhatatlanságot kihasználva a vastagságirányú nyúlás a síkbeli főnyúlások szorzatának reciprokaként adódik (Treloar, 1948; Müller & Strehlow, 2004). Továbbá vegyük észre, hogy a (2.85) energiasűrűségre teljesül, hogy $\Psi_m \to \infty$ amint $\det \mathbf{C} \to 0$. Összességében megállapítható, hogy (2.85) egy fizikai elvárásokat kielégítő anyagmodell.

Követve (Li & Healey, 2016) érvelését, a $\Psi_b(\mathbf{k})$ hajlítási energiasűrűséget egyszerűsítve, az izotróp modellnek megfelelően, a (2.57) kifejezéssel vesszem számításba. A membrán rész összenyomhatatlansági feltételezésével összhangban a hajlítási tagban a rugalmassági modulus $E = 6(\alpha_1 + \alpha_2)$ és $\nu = 0.5$. Kiemelendő, hogy sem az ortotrópia, sem a Mullins-hatás modellünkben nem érinti a hajlítási viselkedést. A teljes alakváltozási mező kísérleti illesztése a modell ilyen irányú finomítását vonhatja maga után. Ψ_b egyszerűségével arra mutatunk rá, hogy a kísérletekben megfigyelt jelenségeket a film membrán viselkedése határozza meg, ezért a modell lényegi eleme a (2.85) kifejezés.

Szükséges még a (2.84) kifejezés utolsó, disszipációs tagjának megadása. A $\Phi(\eta)$ disszipációs függvényt implicit módon,

$$\Psi_{,\eta} = \Psi_{m,\eta} + \Phi_{,\eta} = 0 \tag{2.86}$$

alakban veszem fel. Továbbá felételezem, hogy az első leterhelés kezdetekor $\eta = 1$. Szükséges még a $\Phi(1) = 0$ és a $\Phi_{\eta\eta}(\eta) < 0$ feltételek teljesítése (Dorfman & Ogden, 2004). Legyenek $c_1 > 0$ és $c_2 > 0$ rögzített anyagi paraméterek. Az állapotváltozót határozza meg a következő, az említett feltételeket kielégítő kifejezés:

$$\eta := 1 - c_1 \tanh\left(c_2(W_{\max} - W_i)\right). \tag{2.87}$$

A (2.86) összefüggés nyomán

$$W_i := -\Phi_{,\eta} = \Psi_{m,\eta}, \tag{2.88}$$

$$W_{\max} := -\Phi_{,\eta}\big|_{\varepsilon=\varepsilon_{\max}} = \Psi_{m,\eta}\big|_{\varepsilon=\varepsilon_{\max}}. \tag{2.89}$$

Itt $\varepsilon_{\max}$ jelöli a terhelési történet során alkalmazott maximális fajlagos megnyúlást. A fenti formában megadott károsodási mezőre teljesül, hogy az első megterhelés folyamán $\eta \equiv 1$, hiszen ekkor $W_i = W_{\max}$. Külső teher hiányában a potenciális energia:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \eta) = \int_\Omega \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{K}, \eta)\,\mathrm{d}\Omega = \tag{2.90}$$
$$\int_\Omega \Psi_m(\mathbf{C}, \eta)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \Psi_b(\mathbf{K})\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \Phi(\eta)\,\mathrm{d}\Omega.$$

Jelölje $\mathbf{N}$ a (második Piola-Kirchhoff) síkbeli feszültséget:

$$\mathbf{N}(\mathbf{C}) = 2\Psi_{m,\mathbf{C}}. \tag{2.91}$$

A potenciális energia első variációja az $\mathbf{u}$ elmozdulásmező szerint az Euler-Lagrange egyenletek gyenge alakját adja:

$$\int_\Omega (\mathbf{I} + \nabla\hat{\mathbf{u}})\,\mathbf{N}(\mathbf{C}) \cdot \nabla\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\Omega = 0, \tag{2.92}$$

$$\int_\Omega \left\{(\alpha_1 + \alpha_2)h^3(\Delta w \Delta\zeta + \nabla^2 w \cdot \nabla^2\zeta) + 3\,(\mathbf{N}(\mathbf{C})\nabla w) \cdot \nabla\zeta\right\}\mathrm{d}\Omega = 0, \tag{2.93}$$

$\mathbf{u} = (\hat{\mathbf{u}}, w)$ minden $(\boldsymbol{\xi}, \zeta)$ tesztfüggvényére. A (2.86) egyenlet garantálja, hogy az $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \eta)$ energia η mező szerinti variációja azonosan zérus. Az η károsodási mező fejlődését a (2.87)-(2.89) összefüggések határozzák meg.

A károsodási modellről

(Dorfman & Ogden, 2004) egy általános modellosztályt mutat be pszeudoelasztikus, összenyomhatatlan anyagok leírására, amelyek anyagtörvénye felpuhuló és a kísérletekben maradó nyúlással rendelkeznek. Az említett publikációban a (41). egyenlet a Ψ energiasűrűséget adja meg. Ez, a jelen írás jelöléseivel,

$$\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\eta_1,\eta_2)=\eta_1\Psi_0(\lambda_1,\lambda_2)+ (1-\eta_2)N(\lambda_1,\lambda_2)+\hat{\Phi}(\eta_1,\eta_2), \tag{2.94}$$

alakú, ahol $\Psi_0(\lambda_1,\lambda_2)$ az összenyomhatatlan, hiperelasztikus, kétdimenziós anyag rugalmas energiasűrűsége, λ_1, λ_2 a főnyúlások, az N függvény a maradó nyúlás számbavételére szolgál és $\hat{\Phi}(\eta_1,\eta_2)$ a disszipációs függvény. Rögzítem, hogy az η_1 és η_2 állapotváltozók értéke a leterhelés megkezdése előtt egységnyi, és ekkor $\Psi(\lambda_1,\lambda_2,1,1)=\Psi_0(\lambda_1,\lambda_2)$ teljesül, továbbá $\hat{\Phi}(1,1)=0$ kifejezve, hogy az első terhelés alatt károsodás még nem következik be. A növekvő károsodást az η_1 és η_2 mezők csökkenése mutatja a leterhelés folyamán. A bemutatott károsodási modell (2.85) ezen modellosztályba tartozik. Ennek igazolásához először csökkentem a disszipációs mezők a számát a következő módon:

$$\eta_2:=(1+o)\eta_1-o, \tag{2.95}$$

ahol o egy rögzített paraméter. Ekkor $\eta_1=1 \Leftrightarrow \eta_2=1$ teljesül. Továbbá, $\hat{\Phi}(\eta_1,\eta_2)$ a $\Phi(\eta_1)$ alakra egyszerűsödik. Tartozzon Ψ_0 az izotróp, összenyomhatatlan Mooney-Rivlin anyaghoz, a modell állandó paraméterei α_1 és α_2. Végül, N legyen az összenyomhatatlan, módosított Mooney-Rivlin anyag $\alpha_1,\alpha_2,v_1,v_2,v_3$ paraméterekkel. Képlet formájában:

$$\Psi_0:=\alpha_1\left[\operatorname{Tr}\mathbf{C}+\frac{1}{\det\mathbf{C}}-3\right]+ \alpha_2\left[\frac{\operatorname{Tr}\mathbf{C}}{\det\mathbf{C}}+\det\mathbf{C}-3\right], \tag{2.96}$$

$$N:=\alpha_1\left[v_1(C_{11}-1)+v_2(C_{22}-1)+ v_3\left(\frac{1}{\det\mathbf{C}}-1\right)\right]+ \alpha_2 v_2\left[\frac{\operatorname{Tr}\mathbf{C}}{\det\mathbf{C}}+\det\mathbf{C}-3\right]. \tag{2.97}$$

Legyen $v_1=1$, $v_2\neq 1$ és $v_3=(1+o)^{-1}$ és

$$o:=\frac{1+d-v_2-dv_2}{v_2+dv_2-1}, \tag{2.98}$$

$$\eta_1:=\eta-\frac{dv_2(1-\eta)}{v_2-1}, \tag{2.99}$$

ahol d és η rendre a (2.85) összefüggésben megjelenő anizotrópia paraméter és károsodási mező. Így (2.95) a következő alakra hozható:

$$\eta_2=1-d\frac{1-\eta}{v_2-1}. \tag{2.100}$$

Itt $\eta=1 \Leftrightarrow \eta_1=1$ és $\eta=1 \Leftrightarrow \eta_2=1$ teljesül. η_1, η_2, Ψ_0 és N kifejezéseit behelyettesítése a (2.94) összefüggésbe adja a (2.85) membrán energiát és a $\Phi(\eta)$ disszipációs függvényt a (2.84) összefüggésben.

2.3.2. A modell és a kísérleti eredmények összevetése

Hasonlóan a 2.2. részhez, a rugalmatlan ráncosodási problémában is két $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$

elágazási pontot várunk: az első a ráncok megjelenését, a második azok eltűnését jelzi. A 32 µm vastag poliuretán mintadarabokon két kísérleti sorozatot hajtottunk végre:

(i) Elmozdulás-vezérlet húzás az anyag makroszkopikus feszültség-nyúlás diagramjának meghatározásához.

(ii) Különböző oldalarányú mintadarabok ciklikus terhelése, ahol az ε_2, eltűnéshez tartozó teherparaméter mértéket vizuálisan határoztuk meg.

A maximális makroszkopikus nyúlás minden mintadarab esetében $\varepsilon_{\max} = 0.66$ volt.

Tekintve, hogy a probléma alapvetően egytengelyű, az α_1, α_2, c_1 és c_2 anyagi paraméterek a húzási kísérletek eredményeiből meghatározhatóak. Bevezetem a $\mathbf{g}_1$ bázisvektor irányú, $\lambda := 1 + \varepsilon$ *makroszkopikus nyújtást* (*stretch*) és a $\mathbf{C}$ alakváltozási tenzor következő approximációját a felület minden pontjában:

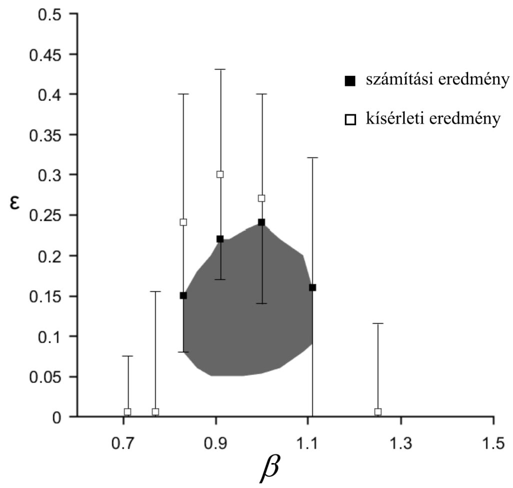
$$\mathbf{C} :\cong \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.101}$$

Ezen egyszerűsítés lehetővé teszi, hogy a $\mathbf{g}_1$ irányú, T_0 jelű *mérnöki feszültséget* (erő egységnyi referencia felületen) becsüljük (2.85) alapján:

$$T_0(\lambda) = 2\alpha_1(d + \eta - d\eta)\lambda\eta + 2\alpha_2\lambda\eta + \frac{-\alpha_1(1+\eta)\lambda + -2\alpha_2\eta}{\lambda^3}. \tag{2.102}$$

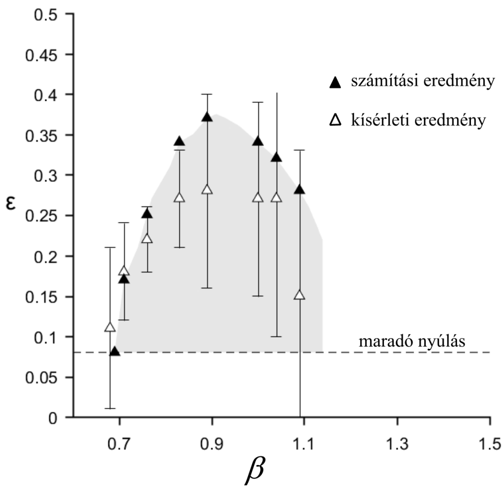
α_1	α_2	c_1	c_2
2.00	0.45	0.12	0.80

2.2. táblázat. A kísérleti eredményekre illesztett modell paraméterek.



2.8. ábra. A stabilitási határ az első megterhelés folyamán: a kísérleti eredmények átlaga és szórása, továbbá az illesztett paraméterekkel számított görbe (sötétszürke poligon)

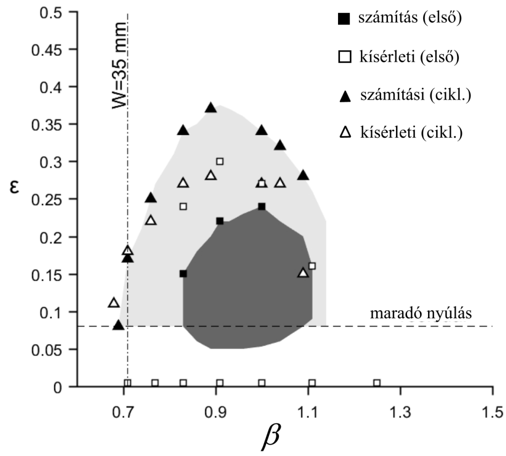
Az első megterhelés idején $\eta \equiv 1$, ezért c_1 és c_2 paraméterek ekkor inaktívak. Az első megterhelés makroszkopikus feszültség-nyúlás eredményeit tehát az α_1 és α_2 paraméterek illesztésére használtam fel. c_1 és c_2 meghatározásához a ciklikus terhelés adatait használtam. A modell és a mérések közötti legkisebb négyzetes hibát a 2.2. táblázatban szereplő értékeknél kaptam. Az α_1 és α_2 állandókra kapott értékek összhangban vannak poliuretán filmek irodalmi értékeivel (Spathis, 1991; Destrade *et al.*, 2017). A kapott paraméterértékek esetén a modell a kísérletekkel egyező, 8% nagyságú maradó nyúlást jósol. A modell károsodási mezője a felület nagy részén körülbelül $\eta = 0.88$ értéket vesz fel. A károsodás anizotrópiáját jellemző d paramétert a ε_2 bifurkációs pontok mért helye alapján $d = 1.25$ értéken rögzítettem.



2.9. ábra. A stabilitási határ a ciklikus terhelés folyamán: a kísérleti eredmények átlaga és szórása, továbbá az illesztett paraméterekkel számított görbe (világosszürke poligon)

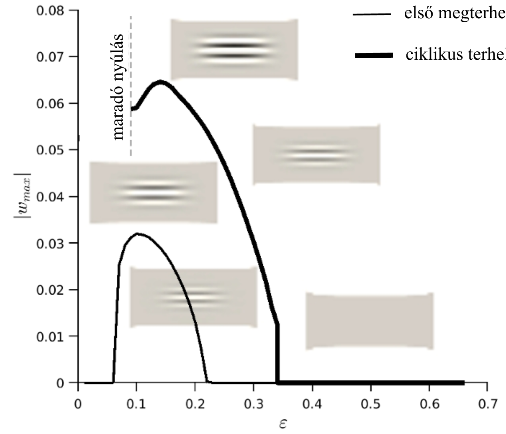
A fentiek alapján a modell minden anyagi paraméterét meghatároztuk. Ezek felhasználásával a végeselem alapú megoldó, a FEniCS 1.6.0 C++ (Logg. *et al.*, 2012) könyvtárakat használva, az egyensúlyi egyenletek gyenge alakjának diszkretizálásával végeztük el a numerikus számításokat (Fehér *et al.*, 2018). A stabilitási határt a triviális, síkbeli megoldáshoz számított diszkrét $\mathbf{J}$ Jacobi mátrix $\lambda_{\min}$ legkisebb sajátértékének segítségével kerestük: amennyiben $\mathbf{J}$ pozitív-definit, a síkbeli megoldás stabil. Ez alapján, rögzített β mellett a ráncok eltűnésének $\varepsilon = \varepsilon_2$ helyét a legkisebb sajátérték zérus volta alapján határoztuk meg.

A numerikusan számított és a mért kritikus ε_2 értékeket mutatják a 2.8. és 2.9 ábrák az első megterheléshez és a ciklikus terheléshez. A 2.10. ábrán a számított stabilitás határ látszik, mind az első, mind a további megterhelésekhez. Ez utóbbi ábrán jelöltem, hogy a kísérleti megfigyeléssel összhangban, a $W = 35$ mm széles film terhelési útja csak a ciklikus terheléshez tartozó stabilitási határt metszi.



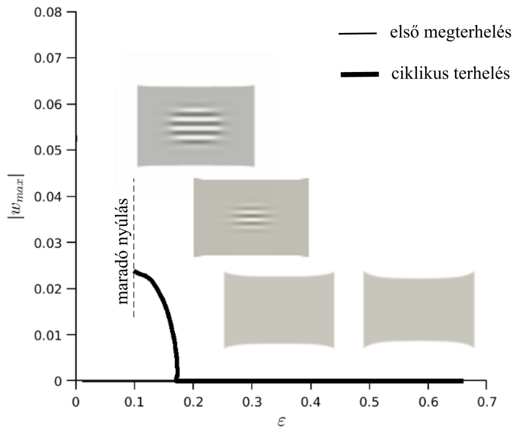
2.10. ábra. A számított stabilitási határ az első megterhelés (sötétszürke) és a ciklikus terhelés (világosszürke) folyamán. A stabilitási határ az anyagi paraméterek első terhelés során bekövetkező megváltozása miatt jelentősen kiterjed.

Két bifurkációs diagramon is ábrázoljuk eredményeinket. A 2.11. ábra a $W = 25$ mm széles ($\beta = 1.00$) film, a 2.12. ábra a $W = 35$ mm széles ($\beta = 0.71$) film viselkedését ábrázolja, bemutatva a számított ráncos alakokat is. Megállapítható, hogy az új modell a 2.6. ábrán megörökített jelenséget adja vissza, a maradó nyúlás mértékénél mindkét esetben ráncos a felület (a modell a leterhelés folyamán a maradó feszültségig használható, megereszkedett felület vizsgálatára nem alkalmas). Az is megállapítható, hogy $\beta = 0.71$ esetében az első terhelés során végig ráncmenetes a felület, és a ráncok a leterhelés folyamán jelentkeznek először.



2.11. ábra. A ráncok $|w_{\max}|$ abszolút amplitúdó maximuma a ε makroszkopikus nyúlás függvényében $\beta = 1.00$ oldalarányú mintadarab esetében.

Végezetül megmutatom, hogy a javasolt modell a 2.2.3. részben már tárgyalt jelenséget, nevezetesen az ortotróp viselkedés megjelenését is tartalmazza. Ahogy korábban, r továbbra is az ortotrópia mértékét jellemző paraméter a (2.68) egyenlet szerint. Az elvégzett kísérletekben, maximális $\varepsilon_{\max} = 0.66$ makroszkopikus nyúlás mellett az ortotrópia mértéke elérte a $r \cong 1.80$ értéket (2.1. táblázat). Kiemelendő, hogy r meghatározásához a mintadarabokat teljes tehermentesítés után vetettük alá $\mathbf{g}_1$ avagy $\mathbf{g}_2$ irányú klasszikus húzókísérletnek. Az r paraméter értékét az érintő rugalmassági modulusok segítségével számítottuk. (Továbbá néhány mintadarabot 45°-os irányban is kiértékeltünk a nyírási modulus meghatározásához (Sipos & Fehér, 2016).)



2.12. ábra. A ráncok $|w_{\max}|$ abszolút amplitúdó maximuma a ε makroszkopikus nyúlás függvényében $\beta = 0.71$ oldalarányú mintadarab esetében.

A numerikus modellben a $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ irányú mérnöki feszültség deriváltjaként, azaz a $E_0 = T_{0,\lambda_1}$ és $E_{90} = T_{90,\lambda_2}$ összefüggések segítségével becsültem a rugalmassági modulusok értékét és ebből $r \approx E_{90}E_0^{-1}$ adta az ortotrópia paraméter becslését. A számítás részleteit (Fehér *et al.*, 2018) cikk foglalja össze. Az új modellben $r = 1.40$ érték adódik az ortotrópia mértékére, ami elfogadható egyezést mutat r mért értékével.

A geometriai és anyagai nemlinearitást tartalmazó modell tehát a disszipáció helyes figyelembevételével magyarázza

(i) az egyes kísérletekben az első terheléskor megfigyelt ráncmentes, majd a ciklikus terhelés során látott ráncos viselkedést,

(ii) a maradó nyúlásnál megfigyelhető ráncos alakokat,

(iii) az első megterhelés során kialakuló ortotrópiát.

2.4 Falazott ívek alakja

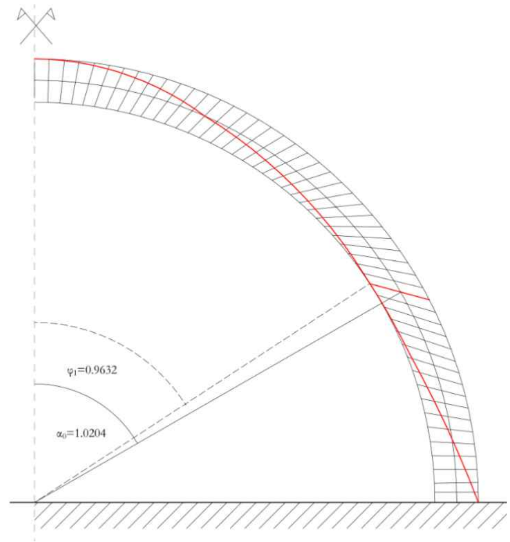
Ez a rész falazott ívek alakjával, az építőelemek geometriai elrendezését megadó sztereotómia és az ívhez rendelhető *nyomásvonal* kapcsolatával foglalkozik. Az *anyagi nemlinearitás*, tekintve hogy építőelemek közötti kapcsolatot húzószilárdság nélküli anyagmodellel közelítem, az adott teher alatt állékony ív lehetséges alakját jelentősen befolyásolja. Az építőelemeket merevnek tekintem és a kapcsolat anyagjellemzőit a J. Heyman által javasolt feltételekkel közelítem (Heyman, 1969). Ezek szerint

(i) a kapcsolatban a nyomószilárdság tetszőlegesen nagynak tekinthető,

(ii) a húzószilárdság zérus,

(iii) az elemek között nem lép fel elcsúszás (elegendő súrlódási ellenállás).

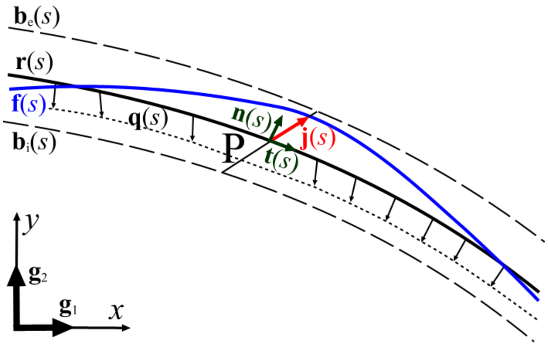
Az (i)-(iii) feltételek teljesülése esetén az ív tönkremenetele mechanizmusként következik be. Amennyiben a külső terhek hatására a kapcsolatban működő külpontos nyomóerő a keresztmetszet szélére kerül, csukló keletkezik. Elemi statikai és kinematikai megfontolásokból következik, hogy a szerkezet tönkremenetelhez tartozó csuklóinak száma felülről korlátos, adott csuklószám felett a szerkezet mechanizmussá alakul. A klasszikus, a terhek hatását a szerkezetben a nyomásvonallal jellemző (és az esetek túlnyomó többségében radiális sztereotómiát feltételező) geometriai megközelítés segítségével az adott teherelrendezésre kialakuló csuklók száma és helye vizsgálható (Cocchetti *et al.*, 2012; Alexakis & Makris, 2013). Továbbá J. Heyman módszert adott az ív *biztonságának* nyomásvonal szerinti, geometriai meghatározására.



2.13. ábra. $\mu = 1$ tapadási súrlódási együttható mellett minimális vastagságú, önsúlyával terhelt félkörív és sztereotómiája (Gáspár *et al.*, 2021). Pirossal a nyomásvonal.

A (Gáspár *et al.*, 2018) cikkben rámutattunk arra, hogy az önsúlyával terhelt, falazott ív biztonsága, illetve az önsúlyra még éppen állékony ív minimális vastagsága függ a sztereotómiától. Megmutattuk, hogy a minimális vastagság számítása egy optimalizálási problémára vezet, feltétel nélküli esetben létezik olyan sztereotómia, amelyre az ív minimális vastagsága zérus. Mérnöki megfontolások alapján (pl.: a kapcsolatos metsződésének kizárása az íven belül) a probléma *feltételes optimalizálási feladatként* is megfogalmazható. Ebben az esetben a minimális vastagság véges. A feltételek halmaza kiterjeszthető véges súrlódás esetére (Gáspár *et al.*, 2021), ekkor plauzibilis súrlódási együttható esetén a (közel) radiális sztereotómiával rendelkező ív marad állékony (2.13. ábra).

Ebben a részben néhány állítást gyűjtök össze a falazott ívek nyomásvonalával, illetve az ívben kialakuló csuklók számával kapcsolatban. A következőkben a sztereotómia szerepének vizsgálatát a 2.1. részben már használt, geometriailag egzakt rúdelmélet egyensúlyi egyenleteit általánosítva hajtom végre. Szemben a klasszikus, nagy elmozdulásokra épített rúdelmélettel, ahol egy görbén, a rúd tengelyén értelmezzük a külső hatásokat, és a belső erőket, a klasszikus nyomásvonal elmélet lényegében két görbe, a rúd tengelye és a nyomásvonal egyidejű számítása. A módszer a nyomásvonal és az ív határainak (*extrados* és *intardos*) helyzete alapján von le következtetéseket az ív állékonyságára vonatkozóan. A nyomásvonal a szerkezethez rendelhető *nyomatékmentes görbe*, a belső erők vektorának szeterotómia által meghatározott síkokkal vett döféspontjainak halmaza. Fontos aláhúzni, hogy amíg a rúdelméletben egy referencia állapothoz képesti deformációkat számítjuk, addig jelen feladatban a referencia-vonal helye rögzített, a különböző terhek hatására a nyomásvonal helyzete változik. Kiemelendő még, hogy az építőelemekből készített ívben a kapcsolatok elhelyezkedése diszkrét kiosztású, azonban a modell ezt nem veszi figyelembe, az ív mentén végig megköveteljük a nyomásvonal elhelyezkedését a szerkezet kontúrján belül (folytonosan változó irányú repedések *elkent repedésképe*).



2.14. ábra. Az alkalmazott jelölések. Az $\mathbf{r}$ vezérgörbével adott ív P pontjában a sztereotómia iránya $\mathbf{j}$. Az $\mathbf{f}$ görbe nyomásvonal a $\mathbf{q}$ megoszló teher alatt.

Jelölje $\mathbf{r}$ a *referencia görbét* leíró vektormezőt. A referenciagörbét az s ívhossz szerint parametrizálom, általános térgörbét feltételezve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, vizsgálatunkban legalább C^2 folytonossággal. Az $\mathbf{f}$ *nyomásvonalra* $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, minimálisan C^2 függvény, azonban nem természetes paraméterezésű, hiszen paraméterezésnek ebben az esetben is az $\mathbf{r}$ görbe s ívhosszát használom. A modellben a sztereotómia nem más, mint a két görbe *bijektív* megfeleltetése. Vezessük be a sztereotómiát jellemző

$$\mathbf{j}(s) := \mathbf{f}(s) - \mathbf{r}(s) \tag{2.103}$$

vektormezőt (2.14. ábra) és a

$$\mathbf{j}_0 := \frac{\mathbf{j}}{||\mathbf{j}||} \tag{2.104}$$

egységvektort! A referencia-vonal és a

nyomásvonal $d(s)$ *távolságfüggvényét* a

$$\mathbf{j}(s) = d(s)\mathbf{j}_0(s) \tag{2.105}$$

összefüggés definiálja. A definíció következménye, hogy $d(s) \geq 0$. Ezt a megközelítést *pozitív távolságfüggvényű leírásnak* nevezem a továbbiakban.

radiális sztereotómia	$\mathbf{r}_{,s} \cdot \mathbf{j}_0 = 0$ (vagy: $\mathbf{j}_0 = \mathbf{n}$)
függőleges sztereotómia	$\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{g}_1 = 0$
kötélgörbe nyomásvonal	$\mathbf{f}_{,s} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$
nyírásmentes nyomásvonal	$\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}$
láncgörbe	$\mathbf{f} \equiv \mathbf{r}$ és $\mathbf{r}_{,s} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$

2.3. táblázat. Nevezetes elrendezések. A láncgörbe alakú tartó *nyomásvonal alakú tartóként* is ismert

A következő levezetésekben több is található, amikor a sztereotómiát jellemző $\mathbf{j}_0$ vektor irányváltakozását (az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{r}$ görbék egymást követő metszéspontjai között) nem az $\mathbf{j}_0$ irányával, hanem $d(s)$ előjelével érdemes kezelni. Ekkor a sztereotómia irányát a következő szabály szerint veszem figyelembe:

$$\mathbf{j}_0 := \begin{cases} +\mathbf{j}_0 & \text{ha} \quad \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ -\mathbf{j}_0 & \text{ha} \quad \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases}, \tag{2.106}$$

és természetesen ezen előjelszabály miatt $d(s)$ előjele tetszőleges lehet és a továbbiakban *tetszőleges távolságfüggvényű leírásként* hivatkozom rá. Jelölje a referencia vonalon értelmezett megoszló terhet $\mathbf{q}(s)$ és a nyomásvonalon értelmezett belső erőket $\mathbf{p}(s)$! Önsúly esetén a teher iránya függőleges ($-\mathbf{g}_2$) irányú. Néhány, az irodalomban (részletesen lásd: (Gáspár *et al.*, 2019)) használt, nevezetes elrendezést mutat a 2.3. táblázat.

A *geometriailag egzakt* rúd egyensúlyi egyenleteiből indulok ki (Antman, 2005):

$$\mathbf{p}_s + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{2.107}$$

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{r}_{,s} \times \mathbf{p} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \tag{2.108}$$

ahol $\mathbf{q}$ és $\mathbf{g}$ az $\mathbf{r}$ rúdtengelyen működő megoszló teher, és megoszló nyomaték vektormezői, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{m}$ pedig a belső erő és belső nyomaték vektorai. Az egyenletben szereplő függvények értelmezési tartománya egységesen $s \in [s_1, s_2]$, ahol $s_1 < s_2$ és s az ívhosszparaméter. Az ív egyenleteinek felírásakor kihasználom hogy az $\mathbf{f}$ nyomásvonal nyomatékmentes, továbbá felteszem, hogy az $\mathbf{q}$ megoszló teherrel terhelt $\mathbf{r}$ referencia vonalon nem működik sem megoszló nyomatéki teher (beleértve a csavarónyomatékot), sem koncentrált erő, vagy nyomaték. Ekkor, kihasználva hogy $\mathbf{m} = \mathbf{j} \times \mathbf{p}$ és $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ az egyensúlyi egyenletrendszer a következő alakú:

$$\mathbf{p}_s + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{2.109}$$

$$(\mathbf{r}_{,s} + \mathbf{j}_{,s}) \times \mathbf{p} + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_{,s} = \mathbf{0}. \tag{2.110}$$

Ezen egyenletek $\mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$ esetében visszaadják egy olyan, klasszikus térbeli rúd egyenleteit, amelynek a tengelyében a nyomaték a nullvektor ($\mathbf{q}$ teher alatti nyomásvonal alakú tartó). Vegyük észre, hogy a (2.110) egyenlet

$$\mathbf{f}_{,s} \times \mathbf{p} + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_{,s} = \mathbf{0}, \tag{2.111}$$

azaz egy olyan, $\mathbf{f}$ vezérgörbéjű, nyomatékmentes rúd nyomatéki egyenlete, amelyen $\mathbf{q}$ megoszló teher és $\mathbf{j} \times \mathbf{p}_{,s} = -\mathbf{j} \times \mathbf{q}$ megoszló nyomatéki teher is működik. Általános esetben tehát térgörbe referencia vonalhoz keressük az $\mathbf{f} = \mathbf{r} + \mathbf{j}$ térgörbével jellemzett nyomásvonalat. Mechanikai megfontolás miatt elvárjuk továbbá, hogy az $\mathbf{p} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ feltétel is teljesüljön (a szerkezet metszetein keletkezzen normálerő).

A feltételek teljesülése esetén akkor beszélhetünk nyomásvonalról, ha a $\mathbf{p}$ belső erő a $\mathbf{j} \times \mathbf{f}_s$ és a $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra merőleges komponense nyomás, és ez a komponens a szerkezet belsejében döfi az említett síkot. Ilyen módon az egyenletrendszer általános, térbeli alakok vizsgálatára használható, azonban a falazott ívek esetében jellemzően síkbeli megoldásait keressük.

2.4.1. Síkbeli ívek

Az egyensúlyi egyenletek síkban

Az egyensúlyi egyenleteket síkban kétféle módon is megadhatjuk. Feltesszük, hogy az ív az $[xy]$ síkban helyezkedik el. Az egyik lehetőség, hogy minden $\mathbf{a}$ vektort $\mathbf{a} = a_1\mathbf{g}_1 + a_2\mathbf{g}_2$ alakban veszünk fel, ahol $\mathbf{g}_1$ és $\mathbf{g}_2$ az x és y irányú bázisvektorok (2.14. ábra). Ekkor a (2.109) egyenlet első két komponensét kiírva és a (2.110) egyenletet a z irányú $\mathbf{g}_3$ bázisvektorral skalárisan szorozva és a skaláris három-szorzatra vonatkozó összefüggést alkalmazva kapjuk a síkbeli ív egyenleteit

$$p_{1,s} = -q_1, \tag{2.112}$$

$$p_{2,s} = -q_2, \tag{2.113}$$

$$(\mathbf{r}_s + \mathbf{j}_s) \cdot (p_2\mathbf{g}_1 - p_1\mathbf{g}_2) + \mathbf{j} \cdot (p_{2,s}\mathbf{g}_1 - p_{1,s}\mathbf{g}_2) = 0. \tag{2.114}$$

Megadhatók a síkbeli egyenletek az $\mathbf{r}$ görbéhez csatolt $\mathbf{t}$ érintő és $\mathbf{n}$ normálvektorok terében is (ahol a természetes paraméterezés miatt $\mathbf{r}_{,s} = \mathbf{t}$). Ekkor a terheket és a sztereotómiát $\mathbf{a} = a_n\mathbf{n} + a_t\mathbf{t}$ alakban bontom fel, és kihasználom a Frenet-Serret formulákat az egyenletek felírásakor. (A 2.14. ábra irányait használva ebben a fejezetben $\mathbf{n}_{,s} = \kappa\mathbf{t}$ és $\mathbf{t}_{,s} = -\kappa\mathbf{n}$ teljesül, ahol κ a referenciavonal görbülete a vizsgált pontban). A számolás eredménye:

$$p_{n,s} - \kappa p_t = -q_n, \tag{2.115}$$

$$p_{t,s} + \kappa p_n = -q_t, \tag{2.116}$$

$$p_n + (j_t p_n - j_n p_t)_{,s} = 0. \tag{2.117}$$

Az ív határainak leírása

Jelölje $\bar{\mathbf{n}}$ az $\mathbf{r}$ referencia vonal P pontbéli simulókörének középpontjából a P pontba mutató egységvektort! Legyen

$$\xi := \operatorname{sign}(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}_0). \tag{2.118}$$

A $2v$ vastagságú ív $\mathbf{b}_e$ *extradosát* és $\mathbf{b}_i$ *intradosát* a következő egyenletekkel definiálom:

$$\mathbf{b}_e := \mathbf{r} + v(s)\xi\mathbf{j}_0, \tag{2.119}$$

$$\mathbf{b}_i := \mathbf{r} - v(s)\xi\mathbf{j}_0, \tag{2.120}$$

ahol $v(s) > 0$ rögzített, pozitív értékű függvény. A további levezetést egyszerűsíti, ha az extrados és az intrados helyett az ív nyomásvonal irányú $\mathbf{h}$ határológörbéjét is bevezetem:

$$\mathbf{h} := \mathbf{r} + v\mathbf{j}_0. \tag{2.121}$$

Ez a nyomásvonal szomszédos zéruspontjai szerint, váltakozva halad az extradoson és az intradoson, $\mathbf{j}_0 = \mathbf{0}$ esetén pedig a referenciavonalra esik.

2.1. Definíció. A $v(s) \equiv v$ konstans függvénnyel jellemezhető ívet *sztereotómia irányban állandó vastagságú* ívnek nevezem.

2.4. Lemma. *A $2v$, sztereotómia irányban állandó vastagságú ívben a sztereotómia önátmetszés nélküli, ha $v||\mathbf{j}_{0,s}|| < 1$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen ds rögzített, kicsiny skalár. Tegyük fel, hogy az íven az s és $s + \mathrm{d}s$ pontokhoz tartozó sztereotómia vonalak az intradoson metszik egymást. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\xi = 1$. Ekkor

$$\mathbf{r}(s) + v\mathbf{j}_0(s) = \mathbf{r}(s + \mathrm{d}s) + v\mathbf{j}_0(s + \mathrm{d}s). \tag{2.122}$$

A ds = 0 körüli sorfejtést elvégezve, a lineáris tagokat megtartva és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk, hogy $v\mathbf{j}_{0,s}(s) = -\mathbf{r}_s = -\mathbf{t}$, amely egyenletet önmagával skalárisan szorozva és kihasználva a természetes paraméterezésből adódó $||\mathbf{t}|| = 1$ összefüggést kapjuk, hogy határhelyzetben $v||\mathbf{j}_{0,s}|| = 1$. Ebből elemi geometriai megfontolásból következik a lemma állítása. Az extrados irányába történő önátmetszés analóg érveléssel látható be. □

A (Gáspár *et al.*, 2018) cikk egyik, mérnöki feltétele az imént említett önátmetszés kizárása. Ez egyfajta *gyenge regularitási feltétel* (*mild regualrity condition*) a sztereotómia függvényre.

A szerkezet csuklói

2.2. Definíció. Az ív $\mathbf{f}$ nyomásvonalának $\mathbf{b}_e$ és $\mathbf{b}_i$ görbékkel közös, végponttól különböző érintési pontjait *belső csuklónak* nevezzem.

2.5. Lemma. *Sztereotómia irányában állandó vastagságú szerkezetben kialakuló belső csukló szükséges feltétele, hogy (a sztereotómia irányától függetlenül) $d_s = 0$ teljesüljön.*

Bizonyítás. A definíció szerinti csukló helyén teljesül a $d = v$ összefüggés. A nyomásvonal nem léphet ki a szerkezetből, tehát a határvonalon lévő csukló esetében $\mathbf{h}_s \times \mathbf{f}_s = \mathbf{0}$ összefüggés áll fent. Az (2.121) és (2.103) összefüggések alapján:

$$(\mathbf{r}_{,s} + v\mathbf{j}_{0,s}) \times (\mathbf{r}_{,s} + d_{,s}\mathbf{j}_0 + d\mathbf{j}_{0,s}) = \mathbf{0}, \tag{2.123}$$

ami egyszerűsítések után (és $d = v$ miatt)

$$d_{,s}(\mathbf{r}_s \times \mathbf{j}_0 + v\mathbf{j}_{0,s} \times \mathbf{j}_0) = \mathbf{0} \tag{2.124}$$

alakú. A 2.4. Lemmából következik, hogy a zárójelben lévő keresztszorzatok összege nem lehet zérus vektor. Tehát szükséges hogy $d_{,s} = 0$ teljesüljön a belső csuklókban. □

2.6. Következmény. *A tétel általánosítható változó vastagságú ívekre. Amennyiben az extrados és az intrados a $v(s)$ függvénynek megfelelő vastagságot követi, akkor a belső csukló szükséges feltétele $d_{,s} = v_{,s}$.*

Az (2.109)-(2.110) egyensúlyi egyenletek összesen négy vektormezőt tartalmaznak, azt várjuk, hogy két mező ismeretében a maradék kettő mező számítható. Jellemző alkalmazás az ismert referencia görbéjű, sztereotómiájú és terhelésű ív esetében a nyomásvonal meghatározása, ez síkbeli feladatnál $d(s)$ számítását jelenti. A (Gáspár *et al.*, 2018; Gáspár *et al.*, 2021) cikkekben részletesen foglalkoztunk az ív szükséges *minimális vastagságával*, illetve a szterotómia szerint a minimális vastagság alsó korlátjával. A minimális vastagság az adott referencia-vonal és terhelés mellett azon vastagság, amely mellet a nyomásvonal (megfelelő támaszreakciók választása esetén) nem lép ki az ív határain (mint a 2.13. ábrán bemutatott példa). Rámutattunk arra, hogy a minimális vastagságot a szteretotómia érdemben befolyásolja.

Ebbe a körbe tartozik az a kérdés, hogy adott terhelés és ív esetén hány csukló alakul ki egy, statikailag túlhatározottá váló ívben. A bevezetett jelölésekkel a kérdés a $d(s)$ függvény extradoson és intradoson található kritikus pontjainak számára irányul, a 2.5. Lemma szerint a maximális csuklószám felülről becsülhető $d(s)$ kritikus pontjainak számával.

Az említett probléma inverz kérdése, hogy rögzített $C \geq 1$, v vastagság és q teher esetén létezik-e olyan ív, amelyben pontosan C csukló alakul ki? A (Gáspár *et al.*, 2022) publikációban egy, a reguláris perturbáción alapuló megoldást adtam az C csuklót tartalmazó, függőleges sztereotómiájú, síkbeli ív megkonstruálására. Megmutattam, hogy tetszőlegesen vékony ív készíthető olyan módon, hogy az önsúly alatt kialakuló csuklók száma tetszőlegesen nagy. Elegendő regularitást feltételezve az eredmény a fenti egyensúlyi egyenletből következik. Rögzítsük az ív S ívhosszát, legyen $s \in [0, S]$. Az $\mathbf{p}$ belsőerő függvényt az $\mathbf{q}$ teher konstans erejéig meghatározza. Az előírt nyomásvonal szabadon felvehető, konkrétan $\mathbf{j} = \hat{\mathbf{j}} = d_1(s)\mathbf{g}_1 + d_2(s)\mathbf{g}_2$ is adott. Tetszőleges távolságfüggvényű leírást alkalmazok, azaz $d_1(s)$ és $d_2(s)$ előjele tetszőleges. (Fontos, hogy $\hat{\mathbf{j}}$ az ív geometriájától *független* sztereotómia legyen. Például ebben a vizsgálatban radiális sztereotómiát nem írhatunk elő. Az előírt $\hat{\mathbf{j}}$ sztereotóminának az említett mérnöki feltételeket érdemes kielégítenie, de ezek az alábbi tételnek nem szükséges feltételei, és jelen megközelítésben csak *posteriori* ellenőrizhetőek.)

2.7. Tétel. *Önsúlyával terhelt ívre, rögzített, legalább C^1 regularitású $\hat{\mathbf{j}}$ sztereotómia függvény mellett létezik olyan $\mathbf{r}$ referencia vonal, amelyre az $\mathbf{r} + \hat{\mathbf{j}}$ függvény a szerkezet nyomásvonala.*

Bizonyítás. Az ív fajlagos súlyát jelölje q! A függőleges önsúly $\mathbf{q} = -q\mathbf{g}_2$ alakú. Ekkor a belső erő a (2.112)-(2.113) vetületi egyenletek alapján $\mathbf{p} = -H\mathbf{g}_1 + (F + qs)\mathbf{g}_2$. A sztereotómia $\hat{\mathbf{j}} = d_1(s)\mathbf{g}_1 + d_2(s)\mathbf{g}_2$ alakban adott. A tétel állítása egyenértékű azzal, hogy a (2.114) nyomán a következő egyenletrendszernek létezik $\mathbf{r}$ megoldása:

$$\left(\mathbf{r} + \hat{\mathbf{j}}\right)_{,s} \cdot ((F + qs)\mathbf{g}_1 + H\mathbf{g}_2) + q\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{g}_1 = 0, \tag{2.125}$$

$$||\mathbf{r}_{,s}|| = 1, \tag{2.126}$$

ahol a második összefüggés $\mathbf{r}$ természetes paraméterezettségének következménye. Tekintve, hogy az $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ referencia rendszerben dolgozunk, $\mathbf{r} = r_1\mathbf{g}_1 + r_2\mathbf{g}_2$ alakban bontható komponensekre. A második egyenletből $r_{2,s} = (1 - r_{1,s}^2)^{1/2}$. Így a következő egyenlet vezethető le:

$$\begin{aligned}(r_{1,s} + d_{1,s})\,(F + qs) + qd_1 + \\ H\sqrt{1 - (r_{1,s})^2} + Hd_{2,s} = 0.\end{aligned} \tag{2.127}$$

Ez az egyenlet $r_{1,s}$ kifejezésben másodfokú, tetszőleges F, H konstansok, $d_1(s)$ és $d_2(s)$ függvények és $r_1(0) = r_0$ kezdeti feltétel mellett kezdeti érték feladatként megoldható. □

2.1. Megjegyzés. Mivel $d_1(s)$ és $d_2(s)$ felvehető olyan módon, hogy a $[0, S]$ intervallumon $||\hat{\mathbf{j}}|| \leq v$ és az egyenlőség pontosan C helyen teljesül, ezért a tételből következik, hogy tetszőleges C csuklószámhoz létezik ív. Következik továbbá, hogy az $\mathbf{r}$ referencia vonalú szerkezet vastagsága tetszőlegesen kicsiny lehet, hiszen a rögzített v nagysága nem befolyásolja a fenti érvelést. Elemi statikai megfontolás következtében a tönkremenetel szükséges feltétele $C > 3$ választása.

2.8. Következmény. *Az önsúlyával terhelt nyomásvonal alakú, állandó keresztmetszetű ív alakját természetes paraméterezés mellett a*

$$r_1 = \pm\frac{H}{q}\ln\left(qs + \sqrt{H^2 + q^2 s^2}\right) + C_1, \tag{2.128}$$

$$r_2 = \pm\frac{\sqrt{H^2 + q^2 s^2}}{q} + C_2, \tag{2.129}$$

függvények adják meg, ahol C_1 és C_2 rögzített konstansok.

Bizonyítás. A láncgörbét $d_1 = d_2 \equiv 0$ jellemzi, tiszta önsúly teher esetén $F = 0$. A (2.127) egyenlet ekkor

$$r_{1,s} qs + H\sqrt{1 - (r_{1,s})^2} = 0 \tag{2.130}$$

alakra egyszerűsödik. Ennek megoldása és r_2 számítása az egységnyi norma alapján adja a keresett függvényeket. A C_1 és C_2 konstansok például az $s = 0$ pont térbeli helyzete alapján vehetőek fel. □

2.4.2. Körív és csúcsív

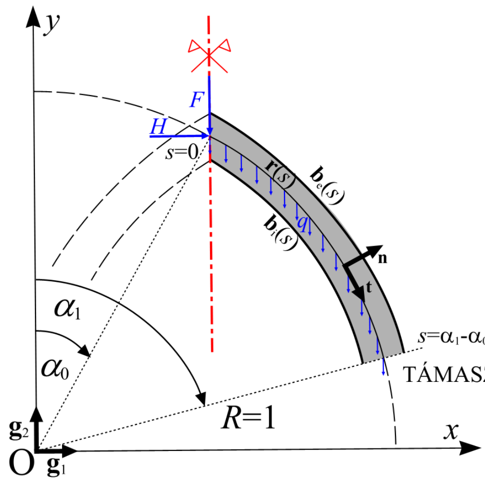
A 2.15. ábra jelöléseit használom. Ebben a részben igazolom, hogy szimmetrikus, állandó keresztmetszetű, önsúlyával terhelt csúcsívben összesen maximum hét csukló keletkezhet. Ez a tény numerikus vizsgálatok alapján ismert (Nikolić, 2017), azonban legjobb tudásunk szerint a (Gáspár *et al.*, 2022) publikáció az első, ami ezt bizonyítja. Az itt közölt bizonyítás az említett bizonyítás általánosítása. Tegyük fel, hogy

(i) a szerkezet és a megtámasztási viszonyok szimmetrikusak,

(ii) a körív felét vizsgáljuk, az $s = 0$ pont nyílásszöge α_0,

(iii) a támasz nyílásszöge α_1,

(iv) a körív sugara $R = 1$.



2.15. ábra. A körív vizsgálatához használt jelölések

2.9. Lemma. *Önsúlyával terhelt, félkörív belső erő függvényének $\mathbf{p} = p_n\mathbf{n} + p_t\mathbf{t}$ alakú felbontás esetén érvényes komponensei:*

$$p_n = (F + qs)\cos(\alpha_0 + s) - H\sin(\alpha_0 + s), \tag{2.131}$$

$$p_t = -(F + qs)\sin(\alpha_0 + s) - H\cos(\alpha_0 + s). \tag{2.132}$$

A p_n függvénynek pozitív q és α_0, továbbá nemnegatív H és F paraméterek esetén legfeljebb egy darab maximumpontja van az $s \in [0, \pi/2 - \alpha_0]$ intervallumon.

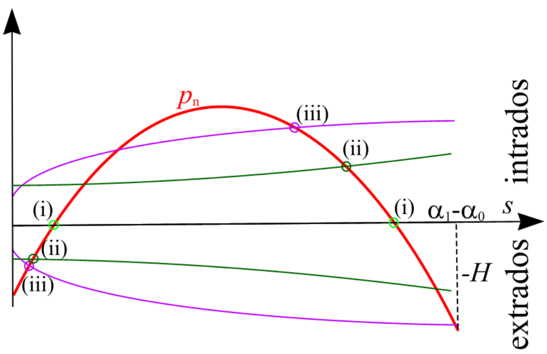
Bizonyítás. A teherfüggvény a lokális rendszerben: $\mathbf{q} = -q\cos(\alpha_0 + s)\mathbf{n} + q\sin(\alpha_0 + s)\mathbf{t}$. A (2.115)-(2.116) vetületi egyenletekből a keresett függvények következnek, az integrálási állandók F és H. A

p_n függvény deriváltja a következő alakra egyszerűsíthető:

$$p_{n,s} = \cos(\alpha_0 + s)(q - (F + qs)\tan(\alpha_0 + s) - H), \quad (2.133)$$

amely kifejezés a $s \mapsto qs$ és a $s \mapsto \tan(\alpha_0 + s)$ függvények szigorú monotonitása miatt maximum egy $s = \hat{s}$ helyen lehet zérus. Tekintve, hogy $\lim_{s \to (\pi/2 - \alpha_0)} p_{n,s} = -(F + q(\pi/2 - \alpha_0))$, következik, hogy a kritikus pont csak maximum lehet. □

2.2. Megjegyzés. Szimmetrikus, önsúlyával terhelt, oldalanként b belső csuklóval rendelkező ív maximális csuklószáma $C = 2b + 3$. Ennek oka, hogy a szimmetriatengelyben és a támaszoknál a nyomásvonal nem érintő helyzetben is képezhet csuklót (lásd: 2.13. ábra).



2.16. ábra. A 2.10. Tétel (i), (ii) és (iii) részbizonyításaiban azonosított csuklóhelyek.

2.10. Tétel. *Körív magasabbik végpontján áthaladó, függőleges tengelyre történő tükrözéssel nyert csúcsívben önsúly teher hatására maximum $C = 7$ csukló keletkezhet, azaz a nyomásvonalnak maximum ennyi helyen van közös pontja az ív határával, feltéve hogy a sztereotómia*

(i) függőleges, az ív a sztereotómia irányában állandó vastagságú,

(ii) függőleges, az ív normális irányban állandó vastagságú,

(iii) radiális, állandó vastagságú ív.

Bizonyítás. A 2.6. Következmény szerint belső csukló helyén a nyomásvonal első rendben az extrados, vagy az intrados görbéjével kell, hogy megegyezzen. Ezért elegendő annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy a (2.115)-(2.116) vetületi egyenletek teljesülése és rögzített extrados és intrados esetén hány megoldása van a (2.117) nyomatéki egyenletnek. A (2.117) egyenletben a zárójeles kifejezés, azaz $j_n p_t - j_t p_n$ nem más, mint a skalár $m(s)$ nyomaték függvény (a korábban bevezetett $\mathbf{m}(s)$ nyomatékvektor hossza a forgatás irányának megfelelő előjellel). Az állítást a tétel részeire külön-külön látom be:

(i) *Függőleges sztereotómia, $\mathbf{j}_0 = \mathbf{g}_2$ irányában állandó v vastagsággal*: Ekkor, felhasználva, hogy a $\mathbf{p}$ belsőerő függvény vízszintes komponense $-H$ minden szeleten, következik, hogy a belső nyomaték $m(s) = -Hv$ az extradoson és $m(s) = Hv$ az intradoson. Tehát a (2.117) nyomatéki egyenlet:

$$p_n \pm (Hv)_s = p_n = 0. \quad (2.134)$$

Tehát csak p_n zérushelyeinél alakulhat ki csukló. Tekintve, hogy a 2.9. Lemma szerint a p_n függvénynek egy szélsőértéke van az értelmezési tartományán, következik, hogy maximum két zérushelye lehet (2.16. ábra). Tehát $b \leq 2$, és így a 2.2. Megjegyzés szerint a csuklók száma ebben az esetben maximum $C = 7$.

(ii) *Függőleges sztereotómia,* **n** *irányában állandó v vastagsággal*: A sztereotómia irányában az ív vastagsága változik, a $v(s)$ függvény az ív szimmetriatengelyétől a támaszok irányában monoton nő. Ekkor a belső nyomaték függvény az extrados esetében $m(s) = -Hv(s)$ és az intradoson $m(s) = Hv(s)$ alakú, a

$$p_n \pm (v(s)H)_{,s} = p_n \pm Hv_{,s} = 0 \qquad (2.135)$$

egyenletek zérushelyeit keresem. A $v(s)$ függvény monotonitásából és a 2.9. Lemmából következik, hogy mind az extrados, mind az intradoson maximum 2-2 belső csukló alakulhat ki. A (2.117) nyomatéki egyenletet az **f** nyomásvonalra felírva, deriválás után az ív minden pontjában érvényes,

$$p_{n,s} + Hd_{,ss} = 0 \qquad (2.136)$$

összefüggés adódik. Ez tehát az érintési pontokban is teljesül. Azonban az extradoson lévő érintési pontban a $d(s)$ függvénnyek maximuma, az intradoson lévő érintési pontban minimuma van. Tehát az etradoson $d_{,ss} < 0$, az intradoson $d_{,ss} > 0$. A (2.136) összefüggésből következik, hogy maximum csak akkor lehet, ha $p_{n,s} > 0$, minimum csak akkor, ha $p_{n,s} < 0$ (2.16. ábra).

Azt találtam, hogy a p_n függvény tulajdonságai miatt a szimmetriatengelyhez közelebb az extradoson, attól távolabb az intradoson alakulhat ki csukló. Azaz ebben az esetben is $b \leq 2$. A 2.2. Megjegyzés szerint a maximális csuklószám $C = 7$.

(iii) *Radiális sztereotómia*: A belső nyomaték $m(s) = p_t(s)v$ az extradoson és $m(s) = -p_t(s)v$ az intradoson, ahol $v > 0$ az ív normális irányú, állandó vastagsága. Így a

$$p_n \mp (p_t v)_{,s} = p_n \mp v p_{t,s} = 0 \qquad (2.137)$$

egyenletek zérushelyeinek száma a kérdés. Felhasználva a (2.116) vetületi egyenletet ($\kappa = 1$ és $q_t = q\sin(\alpha_0 + s)$ helyettesítéssel) átrendezés után kapjuk, hogy

$$p_n \pm \frac{v}{1 \pm v} q \sin(\alpha_0 + s) = 0. \qquad (2.138)$$

Ez utóbbi egyenleteknek, tekintve hogy $s \in [0, \pi/2 - \alpha_0]$ maximum két-két zérushelye lehet a 2.9. Lemma miatt (2.16. ábra). Ezek a potenciális csuklók helyén a nyomatéki egyenlet teljesül, azonban kérdés, hogy haladhat-e itt a nyomásvonal. A nyomatéki egyenlet a nyomásvonal minden pontjára teljesül, így deriválás után:

$$p_{n,s} - (p_t d)_{,ss} = 0. \qquad (2.139)$$

Mivel a nyomásvonal érintő helyzetben van a határvonalon ($d = \pm v$ és $d_{,s} = 0$), a következő egyenletre jutunk

$$p_{n,s} - (v p_{t,ss} + d_{,ss} p_t) = 0. \qquad (2.140)$$

A (2.116) vetületi egyenletet deriválva $p_{t,ss} = -p_{n,s} - q_{n,s}$, így

$$(1 + v)p_{n,s} - vq\sin(\alpha_0 + s) - d_{,ss}p_t = 0. \qquad (2.141)$$

Az íven $p_t < 0$ minden pontban, továbbá $1 + v > 0$ is teljesül. Az extradoson a $d(s)$ függvénynek maximuma van, azaz $d_{,ss} < 0$, így az egyenlet második és harmadik tagja negatív, csak akkor lehet megoldása, ha

$p_{n,s} > 0$. Az intradoson $v < 0$ és $d_{,ss} > 0$, tehát a megoldás szükséges feltétele $p_{n,s} < 0$. A p_n függvény tulajdonságai miatt a szimmetriatengelyhez közelebb az extradoson, attól távolabb az intradoson alakulhat ki csukló. Azaz $b \leq 2$ és a 2.2. Megjegyzés szerint a maximális csuklószám: $C = 7$.

□

2.3. Megjegyzés. A tétel bizonyítása nemnegatív F és α_0 paramétereket tételezett fel. $F = 0$ és $\alpha_0 = 0$ paramétereket feltételezve (félkör ív, koncentrált teher nélkül) a (2.131) egyenlettel adott p_n függvény egyik zérushelye az $s = 0$ helyre esik. Ekkor, összhangban (Gáspár *et al.*, 2022) eredményével, az önsúlyával terhelt félkörív alakú boltív maximális csuklószáma $C = 5$.

2.5 Kitekintés

A fejezet tanulmányai rámutattak arra, hogy az alak meghatározásánál kiemelten fontos a *megoldások stabilitásának* precíz vizsgálata. Egy korábbi publikációban (Healey & Sipos, 2013) az alakemlékező fémötvözetek mikroszerkezetének egy egyszerű modellje kapcsán mutattam rá arra, hogy a nemlineáris egyensúlyi egyenletrendszer linearizálásával nyert merevségi mátrix akár jelentős numerikus hibákat is tartalmazhat. A probléma gyökerét egy egyszerű, egydimenziós példán mutatom be.

Tegyük fel, hogy az elegendően sima $f(x)$ függvény második deriváltját szeretnénk numerikusan számítani a rögzített $\Omega = (0, 1)$, tartományon, ahol a peremeken $f(0) = f(1) = 0$. A tartományt egyenletesen, N darab belső ponttal diszkretizáljuk, így a *rácsállandó* $h = 1/(N+1)$. Legyen az i. rácspont jele x_i. A véges differencia módszer másodrendű, centrális sémáját használva az első és a második derivált az i. rácspontban a következő képletekkel becsülhető:

$$f_{,x} =: f_1(x_i) + O\left(h^2\right) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O\left(h^2\right), \qquad (2.142)$$

$$f_{,xx} =: f_2(x_i) + O\left(h^2\right) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O\left(h^2\right), \qquad (2.143)$$

ahol $i = 1, ..., N$. Az (2.142) összefüggés szintén használható $f(x)$ második deriváltjának becsléséhez, nevezetesen

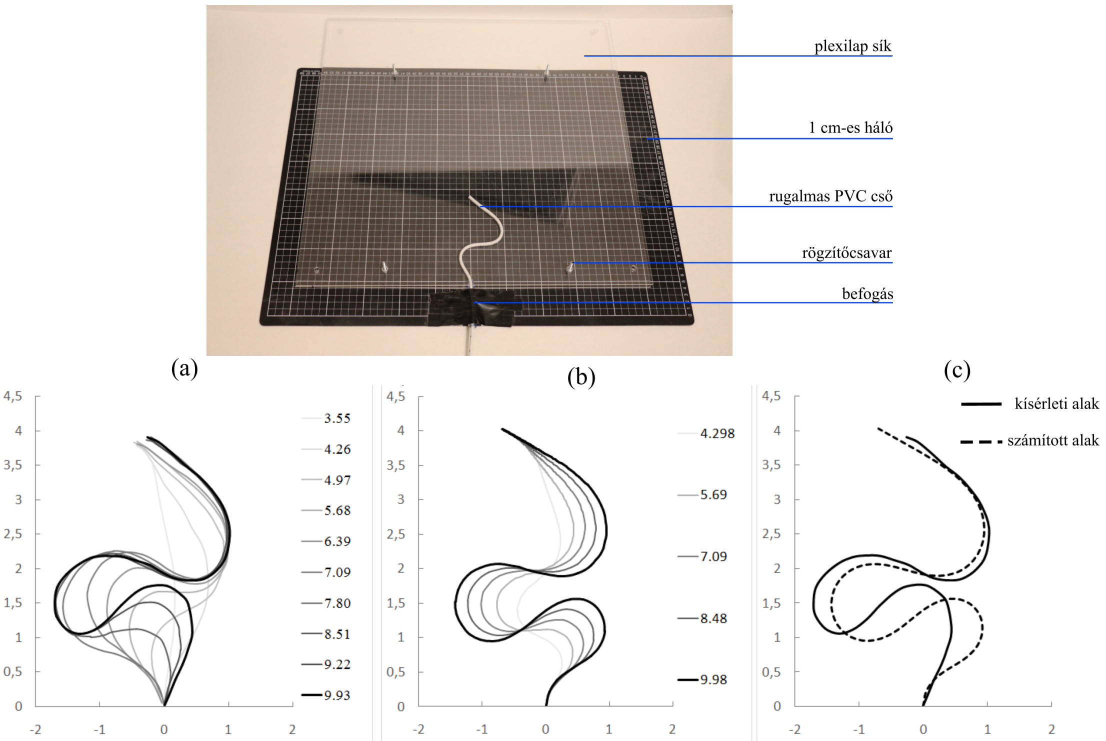
$$f_{,xx} = (f_{,x})_{,x} \approx \frac{f_1(x_{i+1}) - f_1(x_{i-1})}{2h} = \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_i)}{2h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-2})}{2h}}{2h} = \\ = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{(2h)^2} \neq f_2(x_i). \qquad (2.144)$$

A (2.144) szerinti módszer pontossága nyilvánvalóan $O(4h^2)$, azaz ebben az esetben a becslés olyan, mintha minden rácspontban a második deriváltat egy, felel olyan sűrűségű (tehát kétszer akkora rácsállandójú) rácson számítanánk. A mechanikai alkalmazásokban a (2.142)-(2.143) összefüggéseknek mátrix alakban adott, lineáris egyenletrendszerek felelnek meg, a vonatkozó mátrixokat jelölje $\mathbf{A}_x$ és $\mathbf{B}_x$! Ekkor az (2.144) utolsó egyenlőtlensége alapján

$$\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x \neq \mathbf{B}_x. \qquad (2.145)$$

Tehát az találjuk, hogy a $\mathbf{A}_x\mathbf{A}_x$ kevésbé pontos megoldás, mint $\mathbf{B}_x$. Ez a megfigyelés óvatosságra int a numerikusan számított Jacobi mátrix sajátértékeivel számított stabilitási eredményekkel kapcsolatban. A puha robotkar 2.2. Tételben megfogalmazott stabilitási eredménye, nevezetesen, hogy a második variációt a (2.45) analitikus alakban tudtam számítani, elkerüli az említett numerikus bizonytalanságot, azonban kivételnek tekinthető abban az értelemben, hogy hasonló, analitikus vizsgálatra összetettebb mechanikai rendszerek esetében ritkán adódik mód. Eredményeink a puha robotkarok tervezésénél (Raeisinezhad *et al.*, 2021) a gyakorlatban is felhasználhatóak.

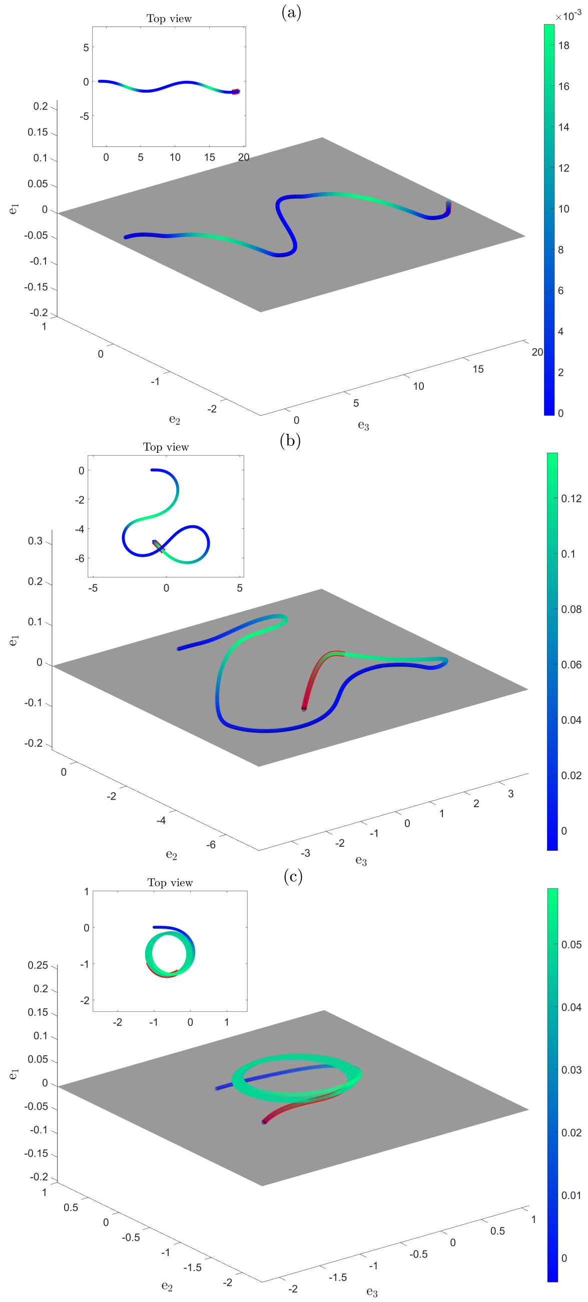
A vékony filmek ráncosodásának vizsgálatát Fehér Eszterrel közösen végezem. Az ortotrópia bevezetése a véges nyúlású modell több irányú továbbfejlesztéséhez vezetett, vizsgálták a peremek hatását (Huang *et al.*, 2020), a végeselemes formalizmus nehézségeit meghaladó numerikus eljárást adtak a tetszőlegesen vékony film számítására (Fu *et al.*, 2019), szálerősítésű filmekre írtak le modellt (Taylor *et al.*, 2019) és görbült, vékony filmek ráncosodásának vizsgálatát végezték el (Wang *et al.*, 2022).



2.17. ábra. A viszkózus súrlódás hatása a síkban növekvő, rugalmas rúd alakjára (Horváth *et al.*, 2019). Felül: a kísérleti elrendezés: a rúd pozíciójának pontos meghatározásához használt hálós lap és a felvételek készítését lehetővé tevő plexi lap távolsága rögzített. A rugalmas (fehér) PVC csövet fokozatosan toljuk a fix (fekete) gyűrűn keresztül a két lap közé. Alul: (a) kísérletekben mért és (b) numerikusan számított rúdalakok, fekete a végső alak. (c) a kísérleti és számított végső alakok.

A 2.3. részben példát mutattam az energia disszipáció mellett megvalósuló mintázatképződésre. Amennyiben a folyamat a dinamikai hatások mellőzését lehetővé teszi, a megoldásokat kvázi-statikus módon, a disszipációt is tartalmazó energia függvény minimumaként számíthatjuk. Várkonyi Péterrel először Horváth Marcell TDK dolgozatát tovább fejlesztve, súrlódó közegben növekvő, síkbeli rúd alakját írtuk le (Horváth *et al.*, 2019). A modellben geometriailag egzakt, rugalmas rúdmodellt a rúd és a talaj közötti *viszkózus súrlódással* egészítettünk ki. A 2.17. ábra mutatja, hogy a számított alakok és a TDK munkában nyert kísérleti eredmények egyezése meggyőző. Az elegendően rövid rúd esetében a görbületmentes, egyenes alak stabil, a rúd hosszát növelve az egyenes megoldás elveszti stabilitását, az ábrán látható *meanderező* alak bizonyul stabilnak.

Később a súrlódó közegben növekvő rúd modelljét térbeli rúdmodellé általánosítottuk, és különböző, a rúd kezdeti görbületét (a növekedés során folyamatosan módosító) szabályozó mechanizmusokkal (circumnutáció, gravitropizmus és thigmotrpoizmus) egészítettük ki. Az új modell növényi gyökerek *morfoelasztikus* (*morphoelastic*) leírását tette lehetővé (Sipos & Várkonyi, 2022). A modellel számított alakok (2.18. ábra) jó egyezést mutatnak különböző hajlásszögű lejtőkön növesztett gyökerek alakjaival.



2.18. ábra. 30°-os lejtő hajlásszögnél számított gyökér alakok axonometrikus és felülnézeti képei (Sipos & Várkonyi, 2022). A szürke sík a talaj síkja, a lejtő a bal irányban emelkedik. A kezdeti görbületet csak az ún. *circumnutáció* befolyásolja, ennek erőssége az (a) esetben kicsiny, a (b) esetben közepes, a (c) esetben nagy.

A kísérletekben megfigyelt jelenséget, nevezetesen, hogy kis hajlású lejtőn a gyökér feltekeredik (felülnézetben körhöz közelítő alak), egy kritikus lejtőszög felett azonban hullámossá válik, a számítás hűen reprodukálja. Célunk a jövőben a modell további finomítása, illetve sztochasztikus kiegészítése a gyökerek tápanyag-felderítésének és penetrációjának vizsgálatához.

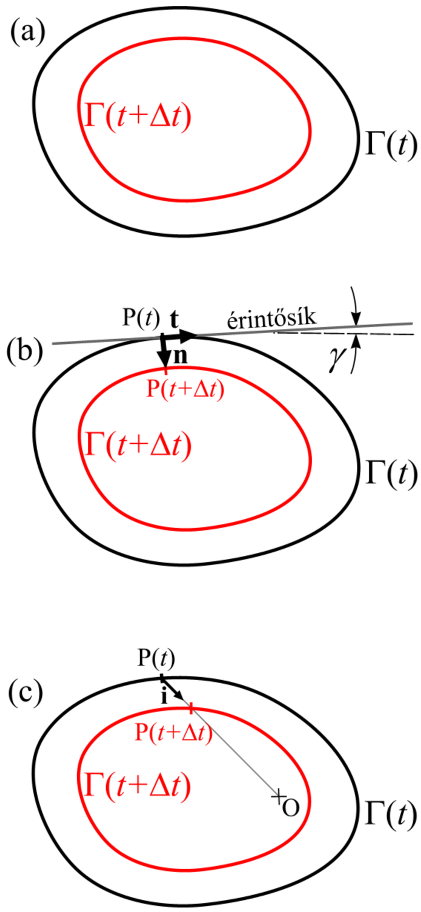
A fejezet 2.4. részében a sztereotómia és a falazott ív alakjának kapcsolatát mutattam be. A természetben a sztereotómiának a terhelés miatt kialakuló repedéskép felel meg. A repedési mintázat kialakulása szintén magyarázható disszipatív tagokat is tartalmazó potenciális energia függvénnyel. A jövőben reális cél a rúdszerű, íves és vékony, görbült héjszerkezetekben kialakuló repedéskép evolúciójának elméleti és numerikus elemzése.

3. fejezet

Geometriai parciális differenciálegyenletekkel vezérelt alakfejlődéséről

Ebben a fejezetben konvex testek (pl.: kavicsok, ooidok, stb.) egyedi alakfejlődését vizsgálom, az azt kiváltó fizikai, kémiai folyamatok (pl.: ütközés, növekedés stb.) bonyolult összefüggései geometriai szabályként jelennek meg a modellekben. Amennyiben célunk az időben változó alak tanulmányozása, a tapasztalatok szerint ezen helyettesítés a fizikai folyamat lényegét ragadja meg. A tisztán geometriai szabályokkal meghatározott alakfejlődést (megfelelő regularitás mellett) az ún. *geometriai parciális differenciálegyenletekkel* írhatjuk le.

Síkban értelmezett, kezdetben sima Jordan görbék evolúcióját vizsgálom (a görbe zárt és önátmetszés nélküli). A görbéről felteszem, hogy görbületfüggvénye *generikus*, azaz minden kritikus pontja vagy maximum, vagy minimum. Ámbár a fejezetben bemutatásra kerülő eredmények közül több általánosítható konkáv, illetve konvex görbékre, az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy a görbe *szigorúan konvex.*



3.1. ábra. (a) A $\Gamma(t)$ konvex Jordan görbe leképzése. (b) Az $\mathbf{n}$ normális irányú alakfejlődés. (c) Sugárirányú alakfejlődés

Az alakfejlődés a 3.1.(a) ábra szerint a t időpontban $\Gamma(t)$ görbéjéhez a $t + \Delta t$ időpont $\Gamma(t + \Delta t)$ görbéjét rendeli hozzá. Az alakfejlődés mindaddig *jól definiált*, amíg ez a hozzárendelés (elegendően kicsiny) $\Delta t > 0$ választása mellett egyértelmű, azaz a $\Gamma(t)$ minden pontjához $\Gamma(t + \Delta t)$ pontosan egy pontját társítja. Az evolúció során létrejövő görbéket ábrázolni könnyű, azonban az evolúció ebben az általánosságban rigorózus matematikai elmélet hiányában nem elemezhető. Az irodalomban különböző eljárások léteznek az említett hozzárendelés megadására, a három, leginkább használt megközelítés a következő:

(i) *normális irányú alakfejlődés*: amennyiben Γ sima görbe, az $\mathbf{n}$ normál egységvektor minden P pontban a P-beli érintőegyenesre merőleges. Megadva az $\mathbf{n}$ normális irányú v kopási sebességet, a P pont képe, és így $\Gamma(t + \Delta t)$ meghatározható (3.1.(b) ábra).

(ii) *sugárirányú alakfejlődés*: a P pont képét rögzített, vagy időben változó helyzetű O pont (pl: a Γ határolta síkidom súlypontja) irányában, adott v sebességű mozgás állítja elő (3.1.(c) ábra).

(iii) *rögzített érintőirányú alakfejlődés*: szigorúan konvex és elegendően sima görbe pontját a pont érintője (vagy normálisa) egyértelműen azonosítja (a görbéhez rendelhető Gauss-kör és a görbe közötti megfeleltetés bijektív). Tehát az evolúció során az azonos érintőirányú pontok felelnek meg egymásnak.

Fontos kiemelni, hogy a hozzárendelés egyértelműsége függ a Γ görbe tulajdonságaitól. Például amíg csúcsos (azaz érintő irány tekintetében nem folytonos) görbék esetén a sugárirányú kopás jól definiált, addig ugyanezen görbére normális irányú kopás esetén ez nem teljesül.

A következőkben először a síkbeli görbület-vezérelt kopási folyamatról látok be néhány állítást, utána megmutatom, hogy Γ görbületfüggvényének kritikus pontjainak száma monoton csökken. Ezután egy konkrét geológiai alkalmazást, az ún. ooid részecskék alakját magyarázó alakfejlődési modellt elemzek. Végül a görbület-vezérelt kopás sík és térbeli változatait egyaránt szimuláló, sztochasztikus algoritmust ismertetek. Az eljárás segítségével megmutatom, hogy a görbület-függő kopási sebességre az alakfejlődés két fázisa azonosítható, poliéder kezdeti alak esetén.

3.1 Síkgörbe görbület-vezérelt kopásáról

Ahogy a bevezetőben említettem, a görbület-vezérelt kopás egyenletének vizsgálta Firey (Firey, 1974) munkásságával kezdődött. Az egyenlet a normális irányú kopásmodellek közé tartozik, a (1.3) egyenletet általánosítva mostantól *görbület-vezérelt kopásnak* nevezem a

$$v^{2D} = f(\kappa) \tag{3.1}$$

egyenlettel leírható alakfejlődési modellek *családját*. Itt κ a Γ síkgörbe görbületét jelöli. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *görbület-függő kopási törvénynek* nevezzem. Néhány nevezetes kopási törvényt tüntet fel a 3.1. táblázat.

Eikonal	$f(\kappa) = 1$
Firey	$f(\kappa) = \kappa$
Bloore	$f(\kappa) = 1 + c\kappa$
	$f(\kappa) = \kappa^{\xi}$

3.1. táblázat. Nevezetes kopási törvények, c és ξ rögzített paraméterek.

A soron következő levezetésekben a görbe parametrizálását többször változtatom, ezért ebben a részben a paramétertől való függést explicit módon jelzem, azaz a Γ görbe p paraméternek megfelelő pontjába t időpontban mutató helyvektor $\mathbf{r}(p, t)$. Formálisan, legyenek $I_p \subset \mathbb{R}$ és $I_t \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ intervallumok. Ekkor $\mathbf{r} : C^2(I_p \times I_t \to \mathbb{R}^2)$ differenciálható leképzés. A Γ görbe a $t \in I_t$ időpontban *parametrizált görbe* amennyiben minden $p \in I_p$-re $\mathbf{r}_{,p} \neq \mathbf{0}$ (*immerzió*). Hasonlóan, a görbét jellemző mennyiségek a p paraméter és a t idő függvényei (pl.: $\kappa(p, t)$ a görbület). A $p = s$ ívhossz szerinti paraméterezést *természetes paraméterezésnek* hívom.

Az időben változó görbe miatt a paraméterezéssel kapcsolatban két megközelítéssel élhetünk:

(i) *rögzített paraméterezésű alakfejlődés*: A kiinduló görbe paraméterezését használjuk az evolúció során, azaz a $t = 0$ időpillanatban $p = \hat{p}$ paraméterű P pont képeinek paramétere is $\hat{p}$,

(ii) *időfüggő paraméterezéses alakfejlődés*: a paraméterezést a görbe valamely geometriai jellemzőjéhez kötjük (pl.: ívhossz szerinti paraméterezés). Ekkor az evolúció során figyelembe kell venni az alakfejlődés paraméterezésre vonatkozó hatását (pl.: a görbe ívhossza megváltozik).

Jelölje $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ a Frenet-féle háromél két egységvektorát: $\mathbf{t}$ az érintővektor és $\mathbf{n}$ a zárt görbe belső tartománya felé mutató normális. Továbbá az érintő vízszintessel bezárt szöge legyen γ (3.1(b) ábra)! Rögzítem, hogy a γ szög az óramutató járásával ellentétes irányban növekszik. A w *pályasebességet* a szokásos módon definiáljuk: $w := ||\mathbf{r}_{,p}||$. Definíció szerint a parametrizált görbe pályasebessége $w \neq 0$. Ismert, hogy

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_{,p}}{w}. \tag{3.2}$$

Vektoros formában a (3.1) egyenlet alakja:

$$\mathbf{r}_{,t} = f(\kappa)\mathbf{n}. \tag{3.3}$$

3.1.1. Egyenletek rögzített paraméterezésnél

3.1. Lemma. *A $w(p,t)$ pályasebesség, az $\mathbf{t}(p,t)$ és $\mathbf{n}(p,t)$ vektormezők és a görbe vízszintessel bezárt $\gamma(p,t)$ szögének időfejlődését a* (3.3) *alakfejlődés és rögzített paraméterezés esetében a következő összefüggések adják meg:*

$$w_{,t} = -f(\kappa)w\kappa, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{t}_{,t} = +\gamma_{,t}\mathbf{n} = +\frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}}{w}\mathbf{n}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{n}_{,t} = -\gamma_{,t}\mathbf{t} = -\frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}}{w}\mathbf{t}, \tag{3.6}$$

$$\gamma_{,t} = -\frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}}{w}. \tag{3.7}$$

Bizonyítás. Kihasználom, hogy $\mathbf{r}(p,t)$ függvény elegendően reguláris (a második parciális deriváltak folytonossága teljesül), és így $\mathbf{r}_{,pt} = \mathbf{r}_{,tp}$. A pályasebesség négyzetének $w^2 = \mathbf{r}_{,p} \cdot \mathbf{r}_{,p}$ idő szerinti első deriváltjából indulok ki és azonos átalakításokkal, az általános paraméterezésű görbére vonatkozó Frenet-Serret formulákat használva írható:

$$2ww_{,t} = 2\mathbf{r}_{,p} \cdot \mathbf{r}_{,pt} \tag{3.8}$$

$$w_{,t} = \mathbf{t} \cdot \left(f(\kappa)\mathbf{n}\right)_{,p} \tag{3.9}$$

$$w_{,t} = \mathbf{t} \cdot \left(-f(\kappa)w\kappa\mathbf{t} + f(\kappa)_{,p}\mathbf{n}\right). \tag{3.10}$$

Az utolsó egyenletben a skaláris szorzatok a kívánt eredményt adják. A $\mathbf{t}$ érintőirány időfejlődését a (3.2) kifejezés deriválása után egyszerű átalakításokkal kapjuk:

$$\mathbf{t}_{,t} = \frac{\mathbf{r}_{,pt}w - w_{,t}\mathbf{r}_p}{w^2} =$$

$$\frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}\mathbf{n}w - f(\kappa)\kappa w^2\mathbf{t} + f(\kappa)\kappa w^2\mathbf{t}}{w^2}, \tag{3.11}$$

amiből egyszerűsítés után (3.5) következik. A normális irány evolúciója hasonló módon igazolható. Tekintve $\mathbf{n}$ és $\mathbf{t}$ ortogonalitását, a γ szög időfejlődését leíró (3.7) egyenlet szintén (3.5) következménye. □

Elegendően sima görbét feltételezve a fenti egyenletekből levezethetőek a görbület, a támaszfüggvény és a görbe evolútájának időfejlődését megadó PDE-k. A következőkben ezeket ismertetem.

3.2. Tétel. *A $f(\kappa)$ kopási törvénnyel adott, normális irányú kopás alatt rögzített paraméterezés esetén a görbület időfejlődését a*

$$\kappa_{,t} = \frac{f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,p}^2}{w^2} + \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,pp}}{w^2} - \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}w_{,p}}{w^3} + f\kappa^2. \tag{3.12}$$

egyenlet határozza meg.

Bizonyítás. A t idő szerint deriválva a $\mathbf{n}_{,p} = -\kappa w\mathbf{t}$ formulát, a 3.1. Lemma egyenleteit használva és mindkét oldalt az $\mathbf{t}$ érintővektorral skalárisan szorozva a tétel állítása következik. □

3.1. Megjegyzés. Az (3.3) egyenlet helyett az (3.4) és (3.12) egyenletek alkotta egyenletrendszer is egyértelműen meghatározza a Γ görbe időfejlődését.

A görbület időfejlődése mellett egy alakfejlődési modell vizsgálatának alkalmas eszköze a *támaszfüggvény evolúciója.*

3.1. Definíció. A Γ görbe *támaszfüggvényét* a p paraméterrel jellemzett pontban a $h(p,t) := -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ összefüggés adja meg.

A támaszfüggvény alkalmas a kopás alatt *önhasonló alakzatok* keresésére, hiszen az önhasonló alakzatra teljesül a

$$h_{,t} = ch \tag{3.13}$$

összefüggés, ahol $c \neq 0$ rögzített konstans.

3.3. Tétel. *A $h(p,t)$ támaszfüggvény időfejlődése normális irányú kopás és rögzített paraméterezés esetén*

$$h_{,t} = \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}}{w}\mathbf{r}\cdot\mathbf{t} - f(\kappa). \tag{3.14}$$

Bizonyítás. A támaszfüggvényt megadó kifejezést t-szerint deriválva:

$$h_{,t} = -\mathbf{n}_{,t}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{,t}. \tag{3.15}$$

A megfelelő deriváltakat behelyettesítve következik a tétel állítása. □

3.2. Definíció. Egy $\mathbf{r}(p)$ síkgörbe simulóköreinek (görbületi) középpontjainak mértani helyét *evolútának* nevezzük.

Ismert, hogy a Γ görbe $\kappa(p,t)$ görbületfüggvényének p szerinti kritikus pontjai között a $\mathbf{q}(p,t)$ evolúta paraméterezett görbe, definíció szerint

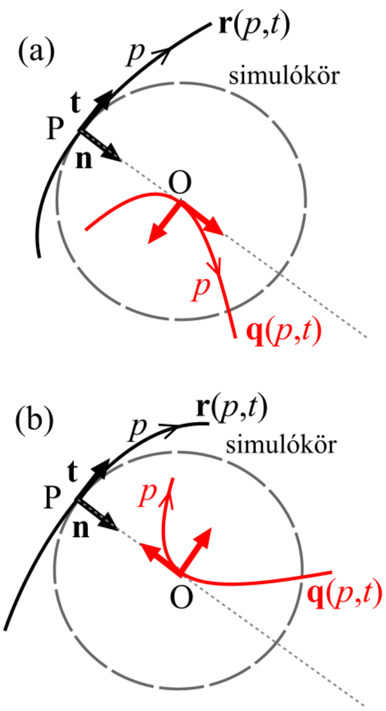
$$\mathbf{q}(p,t) := \mathbf{r}(p,t) + \frac{1}{\kappa(p,t)}\mathbf{n}(p,t). \tag{3.16}$$

3.3. Definíció. Jelölje az $\mathbf{r}$ görbe nem eltűnő görbületű p paraméterű pontjának simulókörének O középpontjából a pontba mutató vektort $\mathbf{o}(p,t)$! Az $\mathbf{o}(p,t)$ vektor irányát *konvex iránynak* nevezzem.

3.4. Definíció. Legyen $\bar{\mathbf{q}}(p,t)$ a p szerint parametrizált, egymással nem metsződő görbék egy olyan családja, ahol a görbület egyik pontban sem tűnik el. A görbék *mozgása a t időpontban konvex irányú*, amennyiben $\bar{\mathbf{o}}\cdot\bar{\mathbf{q}}_{,t} \geq 0$ teljesül.

3.2. Megjegyzés. Konvex Jordan görbék esetén a konvex irány a *kifelé* mutató iránnyal egyezik meg.

3.4. Lemma. *Az $\mathbf{r}(p,.)$ görbe $\mathbf{t}(p,.)$ érintővektora a $\mathbf{q}(p,.)$ evolúta normálvektorával párhuzamos. Az $\mathbf{q}(p,.)$ evolúta konvex iránnyal ellentétes irányú normálvektora a $sign(\kappa_{,p})\mathbf{t}(p,.)$ vektor.*



3.2. ábra. A Γ görbe és az evolúta Frenet vektorainak kapcsolata. (a) $\kappa_p < 0$ és (b) $\kappa_p > 0$.

Bizonyítás. A 3.16 egyenlet p szerinti deriváltja a Frenet-Serret formulák adta egyszerűsítés után

$$\mathbf{q}_{,p} = -\frac{\kappa_{,p}}{\kappa^2}\mathbf{n}, \tag{3.17}$$

azaz, az evolúta érintője a Γ görbe normálvektorával párhuzamos, irányát κ görbe menti változása dönti el (3.2. ábra):

(i) $\kappa_{,p} < 0$ esetén az $\mathbf{n}$ normálvektor $\mathbf{q}$ érintővektora. Az érintővektor és a normálvektor definíciójából következik, hogy $\mathbf{t}$ az evolúta konvex irányú normálvektora (3.2.(a) ábra).

(ii) $\kappa_{,p} > 0$, esetén az $\mathbf{n}$ normálvektor ellentettje $\mathbf{q}$ érintővektora, és ekkor $-\mathbf{t}$ az evolúta konvex irányú normálvektora (3.2.(b) ábra).

$\square$

3.5. Tétel. *Bármely olyan kopási törvény mellett, amelyre $f_{,\kappa}(\kappa) > 0$ teljesül, a Γ görbe $\mathbf{q}(p,t)$ evolútája konvex irányban mozog.*

Bizonyítás. A görbesereg rögzített paraméterezését használom. A (3.16) összefüggés t szerinti parciális deriváltját előállítva és felhasználva (3.3) és (3.5) egyenleteket, egyszerűsítés után az evolúta időfejlődését leíró egyenlet a következő alakot ölti:

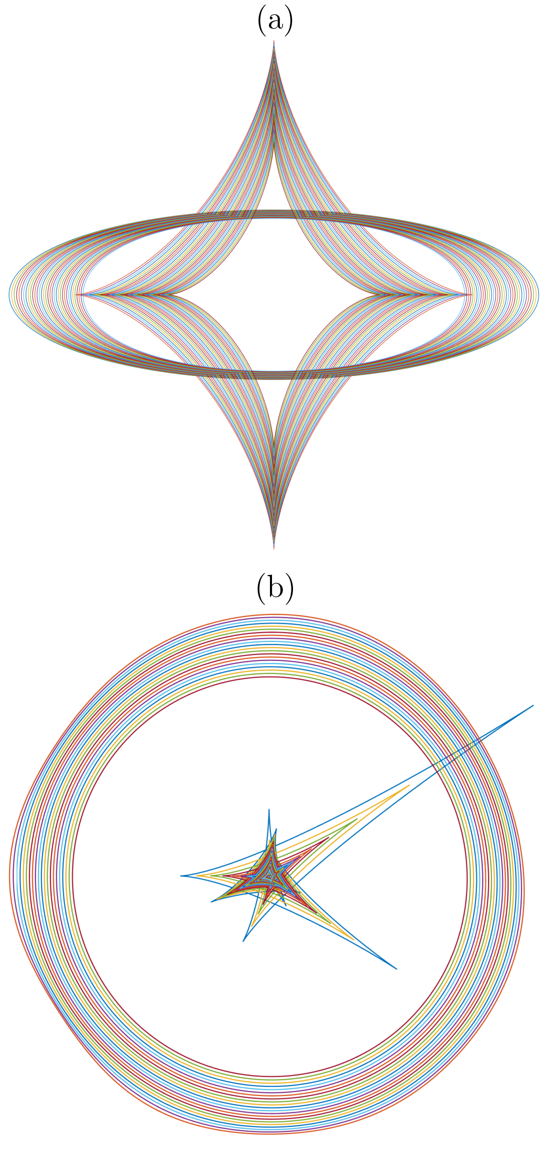
$$\mathbf{q}_t = -\frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}}{w\kappa}\mathbf{t} - \left(\frac{f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,p}^2}{w^2\kappa^2} + \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,pp}}{w^2\kappa^2} - \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,p}w_{,p}}{w^3\kappa^2}\right)\mathbf{n}. \quad (3.18)$$

A 3.4. Lemma szerint a fenti egyenletben a zárójeles mennyiség az evolúta érintő irányú mozgását adja meg, ez mindenképpen az evolúta konvex irányába mutató vektor (3.2. ábra). Az $\mathbf{t}$ vektort tartalmazó tag esetében két eset lehetséges (mivel a $\kappa_{,p} = 0$ esetet kizártam):

(i) $\kappa_{,p} < 0$: ekkor $f_{,\kappa}$, w és κ szigorú pozitivitásából következik, hogy a (3.18) egyenlet első tagjának együtthatója pozitív. A 3.4. Lemma alapján $\kappa_{,p} < 0$ esetén $\mathbf{t}$ a $\mathbf{q}$ evolúta konvex irányába mutató normálisa.

(ii) $\kappa_{,p} > 0$: az (i) rész alapján következik, hogy a (3.18) egyenlet első tagjának együtthatója negatív. A 3.4. Lemma alapján $\kappa_{,p} > 0$ esetén $-\mathbf{t}$ a $\mathbf{q}$ evolúta konvex irányba mutató normálisa.

Tehát mindkét esetben a normális irányú mozgáskomponens az evolúta konvex irányába történik. $\square$



3.3. ábra. Zárt görbe és evolútájának időfejlődése numerikus szimulációban két, különböző kiinduló alakzat esetén az $f(\kappa) = \kappa$ kopási törvény mellett. (a) ellipszis (b) véletlenszerű görbe. Az evolúció a külső alakzatnál kezdődik.

A bizonyítás alapján egy nem-konvex Γ görbe evolútája a konvex iránnyal ellentétes irányban mozog a görbe minden konkáv pontjában. Az evolúta időfejlődésére mutat (numerikusan számított) példát a 3.3. ábra.

Ismert, hogy konvex Jordan görbék fix O ponttól mért $||\mathbf{r}||_p = 0$ feltétellel jellemzett *statikus egyensúlyi pontjainak* száma a kopási folyamatban monoton módon csökken (Domokos, 2015). Az evolútára kapott eredmény következménye, hogy ugyan az evolúta gyakran több, önátmetszéssel rendelkező, csúcsos, zárt görbe, az általa lefedett terület a kopási folyamatban csökken. Tekintve, hogy az egyensúlyi pontok számának csökkenésének szükséges feltétele, hogy az evolúta az O ponton áthaladjon az evolúció során (Domokos & Lángi, 2014), az evolútára kapott eredmény alapján az egyensúlyi pontok monoton csökkenésének alternatív bizonyítása származtatható.

3.1.2. Egyenletek rögzített érintőirányú paraméterezésénél

Láttuk, hogy szigorúan konvex görbék esetén lehetséges az érintő irány szerint parametrizálni a görbesereget. Ebben az esetben a görbület időfejlődése felírható egyetlen, nemlineáris PDE formájában. Továbbra is γ jelöli a görbe pontjának vízszintessel bezárt szögét, azonban ez most a görbe paramétere, azaz a továbbiakban $p = \gamma$.

3.6. Lemma. *Az érintőirány szerint paraméterezett görbére*

$$w\kappa = 1 \tag{3.19}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az összefüggés a természetes paraméterezésnél érvényes, az érintőirány és a görbület között fennálló

$$\gamma_{,s} = \kappa \tag{3.20}$$

összefüggés segítségével igazolható. Természetes paraméterezés esetén $\mathbf{r}_{,s} \cdot \mathbf{r}_{,s} = 1$ teljesül. A lánc szabály alkalmazásával írhatjuk

$$\mathbf{r}_{,\gamma}\gamma_s \cdot \mathbf{r}_{,\gamma}\gamma_s = 1 \tag{3.21}$$

$$\kappa^2 \mathbf{r}_{,\gamma} \cdot \mathbf{r}_{,\gamma} = 1 \tag{3.22}$$

$$\kappa^2 w^2 = 1. \tag{3.23}$$

w és κ pozitivitásából az állítás következik. □

3.7. Lemma. *Az $f(\kappa)$ normális irányú kopási törvény ismeretében érintőirány szerint paraméterezett görbe időfejlődését a*

$$\mathbf{r}_{,t} = f(\kappa)\mathbf{n} - f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma}\mathbf{t} \tag{3.24}$$

egyenlet adja meg.

Bizonyítás. Felhasználva az érintőirány evolúcióját leíró (3.7) egyenletet és a (3.20) összefüggést, a választott paraméterezés mellett a görbe pontjának időfejlődését számíthatjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{,t} =& f(\kappa)\mathbf{n} - \gamma_{,t}\frac{1}{\kappa}\mathbf{t} = \\ & f(\kappa)\mathbf{n} - \frac{f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma}}{w\kappa}\mathbf{t}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

ahol a (3.19) összefüggés miatt az állítás következik. □

A 3.1. Megjegyzés szerint tetszőleges paraméterezésnél a w pályasebesség és a κ görbület időfejlődése csatolt egyenletrendszerként határozza meg a görbe időfejlődését. A 3.6. Lemma következtében az érintőirányú paraméterezés esetén a görbület időfejlődése egy darab, egyváltozós, autonóm differenciálegyenletként írható fel.

3.8. Lemma. *A w pályasebesség érintőirányú paraméterezésnél kielégíti a*

$$w_{,t} = -f - f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma}^2 - f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma} \qquad (3.26)$$

egyenletet.

Bizonyítás. Hasonlóan a rögzített paraméterezés levezetéséhez és a 3.7. Lemma felhasználásával:

$$ww_{,t} = \mathbf{r}_{,\gamma} \cdot \mathbf{r}_{,\gamma t} \qquad (3.27)$$

$$w_{,t} = \mathbf{t} \cdot (f\mathbf{n} - f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma}\mathbf{t})_{,\gamma}, \qquad (3.28)$$

a műveleteket elvégezve, kihasználva $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ ortogonalitását és a 3.6. Lemmát az állítás következik. □

3.9. Tétel. *A görbület időfejlődése érintőirányban paraméterezett görbe esetén eleget tesz a*

$$\kappa_{,t} = \kappa^2\left(f + f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma}^2 + f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma}\right) \qquad (3.29)$$

egyenletnek.

Bizonyítás. A (3.19) összefüggés idő szerinti deriváltjából, és a 3.8. Lemmából következik, hogy

$$\kappa_{,t} = \frac{w_{,t}\kappa}{w} = (-f - f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma}^2 - f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma})\kappa^2. \qquad (3.30)$$

□

Az (3.29) egyenlet a

$$\kappa(\gamma, 0) = \kappa_0(\gamma) \qquad (3.31)$$

kezdeti feltétellel egy Cauchy-problémát határoz meg. Megmutatható, hogy zárt görbe esetén a $\int_0^{2\pi} \sin\gamma\kappa^{-1} = 0$ és a $\int_0^{2\pi} \cos\gamma\kappa^{-1} = 0$ feltételek végig érvényben vannak az evolúció folyamán, azaz a zárt görbéből indított időfejlődés zárt görbéket eredményez tetszőleges későbbi időpontban. A 3.2. táblázat néhány jellemző kopástörvényre mutatja be a görbület időfejlődését meghatározó egyenletet az γ szerinti paraméterezés mellett.

$f(\kappa)$	$\kappa_{,t}$
1	κ^2
κ	$\kappa^2(\kappa + \kappa_{\gamma\gamma})$
$1 + q\kappa$	$\kappa^2(1 + q\kappa + q\kappa_{\gamma\gamma})$

3.2. táblázat. A görbület időfejlődése néhány jellemző kopási törvény esetén.

Végül, a $h(p, t)$ támaszfüggvény időfejlődését érintő irányú paraméterezés esetén a következő tétel adja meg.

3.10. Tétel. *A $h(p, t)$ támaszfüggvény időfejlődése érintő irányú paraméterezés esetén*

$$h_{,t} = -f(\kappa). \qquad (3.32)$$

Bizonyítás. A támaszfüggvény 3.1 Definícióban szereplő kifejezését a t idő szerint deriválva és kihasználva, hogy a választott paraméterezés mellet $\mathbf{n}_{,t} \equiv 0$ az állítás következik. □

3.1.3. A görbületi maximumok monotonitása görbület-vezérelt kopási folyamatban

Az görbület-vezérelt folyamatoknál, mint általában a sima függvénytér felett értelmezett PDE-k esetében, fontos kérdés a megoldások kritikus pontjainak időbeni fejlődése, különösen a számosságuk evolúciója. Korábban már említettem, hogy a görbe egyensúlyi pontjainak monoton csökkenését igazolja (Domokos, 2015). Most a kopás (3.29) egyenlettel adott modelljében vizsgálom a görbületi szélsőértékek számának változását. Az előző részben közölt bizonyításokból következik, hogy egy zárt görbe evolútájának csúcsainak száma megegyezik a görbületfüggvény szélsőértékeinek számával, ezért a vizsgálat egyben ezen csúcsok számára is vonatkozik.

Jelölje $N_\kappa(t)$ a $\Gamma(t)$ görbe $\kappa(p,t)$ görbület függvényének kritikus pontjainak számát! Az evolúció kezdődjön a $t=0$ és fejeződjön be $t=T$ időpontban! Alapvetésként idézzük fel a négy-csúcspont tételt:

3.5. Definíció. Egy síkgörbe *csúcspontja* olyan pont, ahol $\kappa_{,p}=0$ teljesül.

3.11. Tétel. *Egy egyszerű, zárt, konvex görbének van legalább 4 csúcspontja.*

A bizonyítást a tétel közismertsége (DeTruck *et al.*, 2007) miatt mellőzöm. A tétel alapján

$$\min_{t\in[0,T]} N_\kappa(t)=4. \tag{3.33}$$

Tegyük fel, hogy $N_\kappa(0)>4$ teljesül. Mivel zárt, sima, generikus görbéket vizsgálok, ezért $N_\kappa(t)$ minden t időpontban a $\kappa(p,.)$ függvény maximumainak és minimumainak összege, páros szám. A következő tétel $N_\kappa(t)$ időfejlődését rögzíti.

3.12. Tétel. *Bármely olyan, görbület-függő kopási törvény mellett, amelyre $f_\kappa(\kappa)>0$ teljesül, a szigorúan konvex Γ görbe κ görbület függvényének kritikus pontjainak $N(\kappa)$ száma monoton módon csökken az evolúció folyamán.*

Bizonyítás. A görbe érintő szerinti paraméterezését használom és vizsgálom a $\kappa(\gamma,t)$ görbület kritikus pontjainak keletkezését és eltűnését az alakfejlődés folyamán. Tekintve, hogy egy sima függvényről van szó, a bifurkációelmélet eszközei alkalmasak a kritikus pontok $N_\kappa(t)$ számának leírására. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezem, hogy a görbület (3.29) egyenletet követő időfejlődése során *egy kodimenziós, nyereg-csomó bifurkációk* következnek be. A kritikus pontok bifurkációjának helyén és idejében a görbület függvényre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\kappa_{,\gamma}=\kappa_{,\gamma\gamma}&=0,\\ \kappa_{,\gamma\gamma\gamma}&\neq 0.\end{aligned} \tag{3.34}$$

A görbületfüggvény csonkolt Taylor-sora segítségével írható:

$$\begin{aligned}&\kappa(\gamma+\Delta\gamma,t+\Delta t)-\kappa(\gamma,t+\Delta t)=\\ &\kappa(\gamma+\Delta\gamma,t)+\kappa_{,t}(\gamma+\Delta\gamma,t)\Delta t-\\ &\kappa(\gamma,t)-\kappa_{,t}(\gamma,t)\Delta t+O(\Delta t^2)=\\ &\kappa(\gamma,t)+\frac{1}{6}\kappa_{,\gamma\gamma\gamma}(\gamma,t)\Delta\gamma^3+\\ &\kappa_{,t}(\gamma,t)\Delta t+\kappa_{,t\gamma}(\gamma,t)\Delta\gamma\Delta t-\\ &\kappa(\gamma,t)-\kappa_{,t}(\gamma,t)\Delta t+\\ &O(\max(\Delta\gamma^2,\Delta t^2))=\\ &\frac{1}{6}\kappa_{,\gamma\gamma\gamma}(\gamma,t)\Delta\gamma^3+\kappa_{,t\gamma}(\gamma,t)\Delta\gamma\Delta t+\\ &O(\max(\Delta\gamma^2,\Delta t^2)),\end{aligned} \tag{3.35}$$

tehát a bifurkációk helyén és idejében $\kappa(\gamma,t)$ diffeomorf az $\gamma^3\pm\gamma t$ kifejezéssel, a kifejezésben az előjelet a $\kappa_{,t\gamma}$ és $\kappa_{,\gamma\gamma\gamma}$ deriváltak előjele dönti el. Amennyiben a két kifejezés azonos előjelű, akkor $\Delta t>0$ esetén két kritikus pont összeolvadása és eltűnése (*annihiláció*) következik be. Ellentétes előjel esetén pedig kritikus pontok keletkeznek. Az annihiláció feltétele tehát

$$\frac{\kappa_{,t\gamma}}{\kappa_{,\gamma\gamma\gamma}}>0. \tag{3.36}$$

A vizsgált problémában a $\kappa_{,t\gamma}$ kifejezés előjele közvetlenül számítható a (3.29) egyenletből:

$$\begin{aligned}\kappa_{,t\gamma} =& 2\kappa\kappa_{,\gamma}\left(f + f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma} + f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma}^2\right) + \\ &+ \kappa^2 f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma\gamma} + \kappa^2 f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma} + \\ &\kappa^2\kappa_{,\gamma}\left(f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma} + f_{,\kappa\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma} + 2f_{,\kappa\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma}\right),\end{aligned} \tag{3.37}$$

amely kifejezés, kihasználva hogy a bifurkáció helyén a (3.34) feltételek teljesülnek, a következő alakra egyszerűsödik:

$$\kappa_{,t\gamma} = \kappa^2 f_{,\kappa}\kappa_{,\gamma\gamma\gamma} \tag{3.38}$$

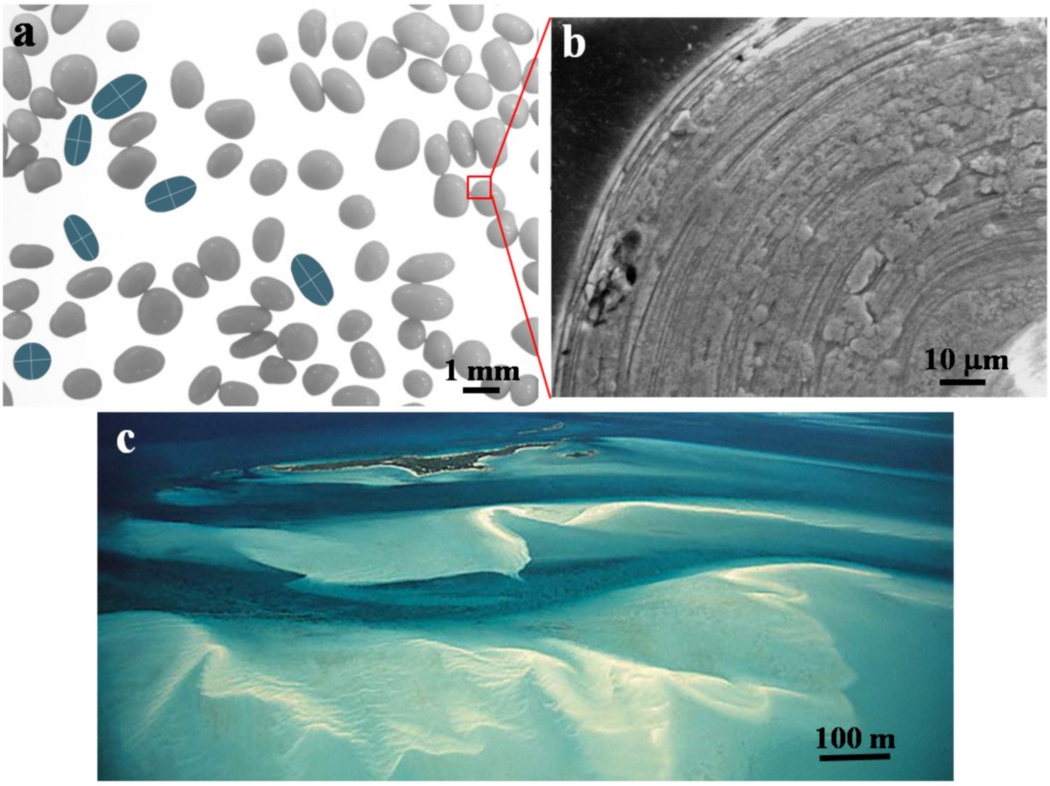
Azt találjuk tehát, hogy

$$\frac{\kappa_{,t\gamma}}{\kappa_{,\gamma\gamma\gamma}} = \kappa^2 f_{,\kappa} > 0, \tag{3.39}$$

ami a kopási törvény deriváltjának pozitivitását kihasználva igazolja a tételt. □

3.3. Megjegyzés. A négy-csúcspont tétel miatt a $N(\kappa) = 4$ érték elérését követően a görbe szélsőértékeinek száma állandó.

3.2 Ooid részecskék alakfejlődése

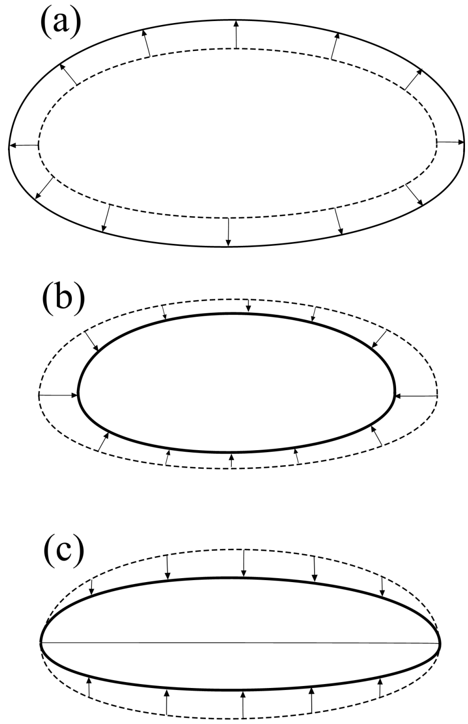


3.4. ábra. Ooidok természetes környezetükben. (a) A Joulters Keys (Bahama szigetek) homokparton gyűjtött ooidok. Az alakok többsége tengelyesen szimmetrikus forma, ahogy ezt a kékkel megjelölt esetek mutatják. (b) Közelfelvétel egy ősi ooid keresztmetszetéről. Jól kivehető a koncentrikusan rétegezett felépítés. (c) Ooidal telített homokpart a Bahama szigeteken.

Bizonyos esetekben a síkbeli alakfejlődési modell alkalmas egyes természeti formák magyarázatára, erre mutat példát ez a rész. Az ún. *ooid* részecskék alakját magyarázó, a görbület-vezérelt alakfejlődésnél összetettebb modell elemzésével foglalkozom.

Az ooidok homokszem méretű kalcium-karbonát részecskék. Jellemzően meleg és sekély, part közeli tengerekben keletkeznek, az oldott anyag kiválása révén, látványos tengerpartokat hozva létre, például a Bahama szigetek térségében (Rankey *et al.*, 2006; Rankey & Reeder, 2011). Mivel csak bizonyos tengerpartokon képződnek, ezért a geológiai múlt feltárásában kiemelkedő szerepük van (Beaupré *et al.*, 2015; Edgcomb *et al.*, 2013). Meglepő tulajdonságuk, hogy a növekedés történetét megőrzik, hiszen a fák évgyűrűihez hasonlóan a metszetükön megfigyelhető koncentrikus görbék a részecske korábbi alakjának kontúrvonalai (3.4. ábra). Azonban szemben az évgyűrűkkel, ezen *rétegek* pontos kialakulása máig nyitott kérdés (Li *et al.*, 2014). Ennek ellenére a részecske kialakulásának meghatározó fizikai folyamatai jól ismertek kísérleti és terepi mérések alapján. Amennyiben a részecske nem ütközik más részecskékkel, akkor a növekedés során gömb alakúvá válik akkor is, ha a kezdeti alak távol van a gömbtől (Li *et al.*, 2014). Ez a természetben például akkor fordulhat elő, ha a részecske elegendően kicsiny ahhoz, hogy a hullámzás következtében lebegjen a vízben. Az ütközésnek kitett ooidok ezzel szemben nem gömbszerűek, és gyakran jól kivehető rétegekkel rendelkeznek. A részecskék növekedése a tengervíz túltelítettsége miatt következik be, egyes elméletek szerint a fejlődésben biológiai folyamatok is szerepet játszanak (Davies *et al.*, 1978).

A kémiai kiválás következtében kialakuló növekedés által létrehozott formák (Ii & Goldenfeld, 2008; Meakin & Jamtveit, 2010), hasonlóan a kopás alatt keletkező alakzatokkal (Bloore, 1977; Firey, 1974), jól ismertek. Azonban ezen folyamatok együttes hatása kevésbé kutatott. (Trower *et al.*, 2017) eredménye szerint az ooidok *mérete* a növekedési és eróziós folyamatok egyensúlyaként adódik. A bemutatásra kerülő modell ezt az eredményt terjeszti ki a részecske alakjára, és a domináns fizikai folyamatok beépítésével határozza meg az egyensúlyi alakot.



3.5. ábra. Az ooidok alakfejlődését leíró síkbeli modell összetevői: növekedés (a), az ütközéses kopás (b) és a súrlódás keltette kopás (c).

Magas koncentrációjú oldatba részecskét mártva az ásványok kiválnak a részecske felszínén. Ezt a jelenség a felület (kifelé mutató) normálisának irányába bekövetkező növekedést (3.5.(a) ábra) eredményez (Meakin & Jamtveit, 2010). Kopás hiányában a növekedési folyamat gömb alakú formához vezet (Li *et al.*, 2014). A sekély tengerparti környezetben a kopás két, jellemző módon valósulhat meg: a korábban bár bemutatott, ütközések miatt bekövetkező kopás (3.5.(b) ábra) a formát gömbszerűvé teszi, a súrlódás miatt bekövetkező kopás (3.5.(c) ábra) ezzel szemben elnyújtott alakot eredményez (Domokos & Gibbons, 2012). A kopási folyamathoz szükséges, hogy a részecske tömege egy adott küszöb felett legyen (Jerolmack & Brzinski, 2010), ezen küszöb felett a kopás sebessége arányos a részecske tömegével.

Jelenleg nem ismert, hogy a növekedés és a kopás váltakozva, vagy egyidejűleg történik. A modell ez utóbbit tételezi, *folytonos evolúciót* ír le. Tekintve hogy a növekedés és a kopás ellentétes irányba mozgatja a részecske felszínét, intuitívan arra számítunk, hogy létezhet valamiféle egyensúlyi helyzet a két irányú mozgás között. Ennek létét kísérletileg igazolta (Trower *et al.*, 2017), egyben rámutatott arra, hogy az ooid méretét a meglepően gyors növekedés és kopás dinamikus egyensúlya határozza meg. Az, hogy ez vajon egy *állandósult (invariáns) alak* meglétét is jelenti, egy összetett kérdés, hiszen egy skalár mennyiség (pl.: méret, felület, tömeg stb.) állandósága mellett fluktuáló formákat széles körben tanulmányoztak, a rugalmas membránoktól a pulzáló csillagokig bezárólag (Monzel & Sengupta, 2016; Cox, 1980). Ezen eredmények mutatják, hogy az állandó méretből nem következik az állandósult alak. A bemutatásra kerülő alakfejlődési modell szerint az ooidok esetében az invariáns alak léte igazolható.

Néhány, a modellalkotáshoz hasznos, az ooidok alakjával kapcsolatos irodalmi megfigyelés:

1. Az egy helyszínen gyűjtött ooidok maximális mérete közel megegyezik (Trower *et al.*, 2017), ugyanez igaz az alakjukra is (Rankey & Reeder, 2011).
2. Az ooidok alakja a gömbszerűtől az elnyúlt formákig terjed.
3. Az ooidok alakja jellemzően a nagytengely körüli forgásszimmetriát mutat (3.4. ábra), (Heller *et al.*, 1980).
4. Az ooidok nagytengelyre merőleges vetületei jellemzően két, egymásra merőleges szimmetriatengellyel rendelkeznek (3.4. ábra).

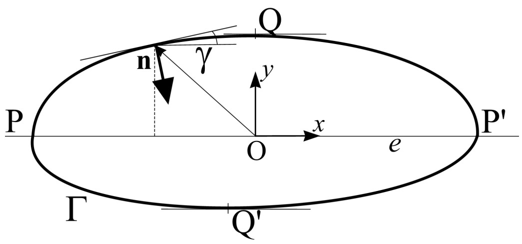
Ezen megfigyelések csak szabadon formálódó részecskékre teljesülnek, azaz amikor sem a növekedés, sem a kopás nem gátolt más részecskék közelsége miatt. Kihasználva a forgási szimmetriát, az alakfejlődést síkbeli modellel írom le.

3.2.1. Az alakfejlődési modell

A fejezet elején szereplő terminológia szerint normális irányú modellt javasoltunk az ooid részecskék alakfejlődésének leírására (Sipos *et al.*, 2018b):

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}_{,t} = c_3\left(-1 + c_1 A\kappa + c_2 Ay\cos\gamma\right)\mathbf{n}, \tag{3.40}$$

ahol A a Γ görbe által körbezárt (időfüggő) terület. κ és γ jelölik a *görbületet* és az érintősík vízszintessel bezárt *szögét*. Felteszem, hogy a Γ görbének létezik egy maximális átmérője (ez az e jelű egyeneses P és P' pontok között a 3.6. ábrán.). Az $[xy]$ koordináta-rendszer az e egyenes felezőpontjában helyezkedik el olyan módon, hogy az x tengely egybeesik az e egyenessel. Az e létezésére vonatkozó feltevés a súrlódás egyszerű (és egyértelmű) leírásához szükséges: a (3.40) egyenlet jobb oldalának harmadik tagjában szereplő affin tag a dominánsan e-vel párhuzamos csúszásból eredő kopást írja le, az egyenletben az y a felületi pont és az e egyenes távolsága. A súrlódás leírására természetesen más formalizmus is alkalmazható, lényege, hogy a testet a stabil egyensúlyi pontjainak környezetében erősebb koptató hatás érje. A modell a terület beemelésével (az egyenlet második és harmadik tagja) a térfogatcsökkenés másodrendű approximációját adja (Sipos *et al.*, 2018b).



3.6. ábra. Jelölések

A c_1, c_2 és c_3 paraméterek időben állandó, pozitív valós számok, amelyek a fizikai környezetnek feleltethetőek meg. Mértékegységeik rendre hossz^{-1}, hossz^{-3} és hossz/idő alakúak. A modellben a fizikai folyamatok hatása additív, az egyes folyamatok könnyen felismerhetőek: a zárójelben az első, negatív előjelű tag felel meg a *növekedésnek*, a második, görbület-vezérelt tag felel meg az *ütközéses kopásnak* és a már említett affin tag írja le a *súrlódást*. A kopás és a súrlódás a homogénnek feltételezett részecske tömegével, azaz geometriai szempontból a Γ által körbezárt területtel arányos. Tekintettel a tagok előjelére, célunk a Γ^* jelű kompakt, invaráns alakok meghatározása, azaz a következő, közönséges, nemlineáris differenciálegyenlet megoldásainak számítása

$$-1 + c_1 A\kappa + c_2 A y \cos\gamma = 0, \qquad \forall \mathbf{r} \in \Gamma^*. \tag{3.41}$$

Vegyük észre, hogy Γ^* nem függ a c_3 paramétertől, hiszen ez utóbbi kizárólag az időt skálázza a modellben, és az egyensúlyi alak megfigyeléséből nem rekonstruálható. Mivel $c_2 > 0$ esetén a súrlódási tag merőleges affinitás, azt gondolhatnánk, hogy az ellipszis a modell invariáns alakja. A következő tétel ezt cáfolja.

3.13. Tétel. *Az* (3.41) *egyenlet által meghatározott invariáns alakok nem ellipszisek, kivéve a súrlódásmentes* ($c_2 = 0$) *esetet, amikor az invariáns alak kör.*

Bizonyítás. Kezdjük a súrlódásmentes eset vizsgálatával! Ekkor a

$$-1 + c_1 A\kappa = 0 \tag{3.42}$$

egyenletből következik, hogy $\kappa \equiv \text{const}$ a görbe minden pontjában. Tehát $c_2 = 0$ esetén kizárólag *körök* lehetnek invariáns megoldások. Az általános, $c_2 \neq 0$ esetet *indirekt úton* látom be. Tegyük fel, hogy egy ellipszis $a > b$ féltengelyekkel egyensúlyi megoldás. Legyen $0 \leq \zeta \leq \pi/2$, a P és Q közötti (jelen esetben elliptikus) ívet a jól ismert módon paraméterezem:

$$x(\zeta) = a\cos\zeta, \tag{3.43}$$

$$y(\zeta) = b\sin\zeta. \tag{3.44}$$

Az ív görbülete:

$$\kappa(\zeta) = \frac{|x_{,\zeta}y_{,\zeta\zeta} - x_{,\zeta\zeta}y_{,\zeta}|}{(x_{,\zeta}^2 + y_{,\zeta}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2\zeta + b^2\cos^2\zeta)^{3/2}}. \tag{3.45}$$

Tekintve, hogy az ellipszis területe $A = ab\pi$ és $\cos\gamma = \cos(\arctan(y_{,\zeta}/x_{,\zeta}))$, a (3.41) egyenlet alakja

$$-1 + c_1 \frac{a^2 b^2 \pi}{(b^2 \cos^2 \zeta + a^2 \sin^2 \zeta)^{3/2}} + c_2 \frac{a b^2 \pi \sin \zeta}{\sqrt{1 + \frac{b^2 \cos^2 \zeta}{a^2 \sin^2 \zeta}}} = 0. \quad (3.46)$$

A nagytengely végén $\zeta = 0$, tehát

$$c_1 = \frac{b}{a^2 \pi}. \quad (3.47)$$

Hasonlóan, a kistengely végén $\zeta = \pi/2$ és felhasználva az imént kapott eredményt c_1-re, c_2 számítható:

$$c_2 = \frac{a^3 - b^3}{a^4 b^2 \pi}. \quad (3.48)$$

Végül, vegyünk egy harmadik, köztes értéket a ζ paraméterre. Például, c_1, c_2 és $\zeta = \pi/4$ behelyettesítését követően egyszerűsítés után a

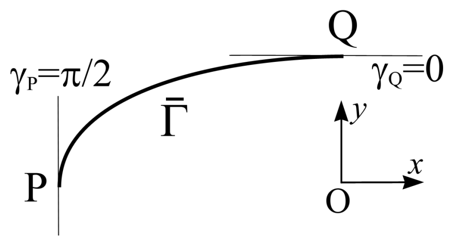
$$-1 + \frac{b^3}{(0.5a^2 + 0.5b^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a^3 - b^3}{a^3 \sqrt{1 + b^2/a^2}} \neq 0 \quad (3.49)$$

eredmény mutatja, hogy a kopási sebesség nem zérus, az ellipszis nem lehet invariáns alak. Az $a = b$ körüli sorfejtés mutatja, hogy csak $a = b$ esetén teljesülhet az azonosság, ez éppen a bizonyítás elején tárgyalt súrlódásmentes esettel azonos. □

A következőkben először igazolom, hogy a sima, konvex görbék körében az egyensúlyi megoldás szükségszerűen a D_2 *szimmetriacsoportba* tartozik. A soron következő, 3.2.2. részben felteszem, hogy a körbezárt A terület *a-priori* ismert. Ezt az esetet a *lokális egyenlet* vizsgálatának nevezem, megkülönböztetve az általános, *nemlokális* esettől. Ez utóbbit a 3.2.3. részben vizsgálom és bizonyítom a (c_1, c_2) paraméterpárhoz tartozó egyensúlyi alak *unicitását.*

3.2.2. Az egyensúlyi megoldás szimmetriája

Elsőként az egyensúlyi megoldás szimmetriájával kapcsolatos vizsgálatot végezem el. Tegyük fel, hogy a görbe által körülzárt terület mérőszámát *a-priori* ismerjük! Az általánosság megszorítása nélkül a továbbiakban a Γ görbe P és Q pontok közötti szakaszát vizsgálom (3.7. ábra). A levezetésben a görbe többféle paraméterezését is használom (ívhossz szerinti természetes, az y koordináta szerinti és a γ szög szerinti paraméterezések).



3.7. ábra. A bizonyítás során használt negyedgörbe

Mivel az A terület rögzített, érdemes bevezetni $\hat{c}_1 := c_1 A$ és $\hat{c}_2 := c_2 A$ mennyiségeket, így (3.41) a következő alakban írható

$$-1 + \hat{c}_1 \kappa + \hat{c}_2 y \cos \gamma = 0. \quad (3.50)$$

3.14. Lemma. *Rögzített* $\hat{c}_1$ *és* $\hat{c}_2$ *paraméterekhez létezik* $\bar{\Gamma}$ *görbe szakasz, amely minden belső pontjában kielégíti a* (3.50) *egyenletet.*

Bizonyítás. Tekintsük $\bar{\Gamma}$ görbe s szerinti természetes paraméterezését! Ha s az óramutató járásával megegyező irányban növekszik, akkor $x_{,s} = \cos\gamma$ és $y_{,s} = \sin\gamma$. Az érintő irányának ívhossz szerinti deriváltja a görbület. A láncszabály segítségével

$$\kappa(y) = -\gamma_{,s} = -\gamma_{,y} y_{,s} = \\ -\gamma_{,y}\sin\gamma = (\cos\gamma)_{,y}, \qquad (3.51)$$

ahol a negatív előjel arra utal, hogy $\gamma(y)$ értéke csökken a P és Q pontok között (3.7. ábra). Legyen

$$q := \frac{\hat{c}_2}{2\hat{c}_1}. \qquad (3.52)$$

Vezessük be a $\phi(y) := \hat{c}_1\cos(\gamma(y))$ mennyiséget, helyettesítsük a (3.51) kifejezést a (3.50) egyenletbe és alkalmazzuk a (3.52) definíciót. Így

$$-1 - \hat{c}_1\gamma_{,y}\sin\gamma + \hat{c}_2 y\cos\gamma = \\ -1 + \phi_{,y} + 2qy\phi = 0, \qquad (3.53)$$

ami egy elsőrendű, lineáris közönséges differenciálegyenlet. Klasszikus eredmények alapján a $\phi(y)$ megoldás létezik és egyértelmű, azaz $\kappa = \hat{c}_1^{-1}\phi_{,y}$. Legyen

$$u(y) := \exp\int 2qy\,\mathrm{d}y = \exp qy^2. \qquad (3.54)$$

A modellben $\gamma(0) = \pi/2$, következik tehát hogy $\phi(0) = 0$. Az (3.53) egyenlet a $\phi(0) = 0$ kezdeti feltétellel egy jól-definiált Cauchy-feladat. A megoldást (3.54) segítségével a következő alakban írhatjuk:

$$\phi(y) = \frac{\int_0^y u(\eta)\,\mathrm{d}\eta}{u(y)} = \\ \int_0^y \exp\left(q(\eta^2 - y^2)\right)\mathrm{d}\eta. \qquad (3.55)$$

A (3.51) egyenlet felhasználásával a görbületre a

$$\kappa(y) = \frac{1}{\hat{c}_1}\phi_y = \\ \frac{1}{\hat{c}_1}\left(1 - 2qy\int_0^y \exp\left(q(\eta^2 - y^2)\right)\mathrm{d}\eta\right) \qquad (3.56)$$

kifejezés adódik eredményül.

A későbbiekhez szükségünk lesz a $\kappa(y)$ függvény egyes tulajdonságaira. A (3.53) egyenlet jobb oldalának felhasználásával $\phi(y)$ első három deriváltja a következő:

$$\phi_{,y} = -2qy\phi + 1, \qquad (3.57)$$

$$\phi_{,yy} = -2qy\phi_{,y} - 2q\phi, \qquad (3.58)$$

$$\phi_{,yyy} = -2qy\phi_{,yy} - 4q\phi_{,y}. \qquad (3.59)$$

A deriváltak felhasználásával $\kappa(y)$ következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\phi(y)$ és ennek következtében $\kappa(y)$ C^∞ függvények, ami nyilvánvaló (3.55) és (3.56) alapján.

2. $\kappa(0)$ pozitív és értéke $\hat{c}_1^{-1}$. Ez a $\kappa(0) = \hat{c}_1^{-1}\phi_{,y}(0)$ alapján következik.

3. $\kappa(y)$ lokális maximummal rendelkezik az $y = 0$ helyen. Először, $\kappa_{,y}(0) = \hat{c}_1^{-1}\phi_{,yy}(0) = -2\hat{c}_1^{-1}q\phi(0) = 0$ mutatja, hogy $y = 0$ a függvény kritikus pontja. Továbbá, $\kappa_{,yy}(0) = \hat{c}_1^{-1}\phi_{,yyy}(0) = -\hat{c}_1^{-1}4q\phi_{,y}(0) = -4\hat{c}_1^{-1}q < 0$, ami igazolja, hogy a kritikus pont az $y = 0$ helyen maximum.

4. $\kappa(y) \to 0$ amint $y \to \infty$. A l'Hopital's szabály alkalmazásával

$$\lim_{y\to\infty} y\phi(y) = \lim_{y\to\infty}\frac{y\int_0^y \exp(q\eta^2)\,\mathrm{d}\eta}{\exp(qy^2)} = \\ \lim_{y\to\infty}\frac{(1 + 2qy^2)\exp(qy^2)}{(2q + 4q^2y^2)\exp(qy^2)} = \frac{1}{2q}.$$

Ez, a (3.57), egyenlet, és a tény, hogy $\hat{c}_1$ és q rögzített paraméterek adják a kíván eredményt, hiszen

$$\lim_{y\to\infty} \kappa(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\hat{c}_1}\left(-2qy\phi + 1\right) = 0.$$

5. A $\kappa(y)$ görbületfüggvénynek egy, és csakis egy zérushelye van, amit $y = y_0$ jelöl. y_0 értéke kizárólag a q paraméter nagyságától függ. Definíció szerint $\phi(y) \geq 0$ ahol $\phi(0) = 0$. A fenti (4) ponthoz hasonló érvelés adja, hogy $\lim_{y\to\infty} \phi(y) = 0$. $\phi(y)$ és q pozitivitásából következik, hogy a (3.58) egyenletben $\phi_{,yy}$ negatív előjelű bármely $0 < y < \infty$ kritikus pontban. Mivel $\phi(y)$ sima, következik, hogy egy, és csakis egy pont létezhet, ahol $\phi_{,y} = 0$. Tehát $\kappa(y)$ y_0 zérushelye létezik és egyértelmű.

6. A $\kappa(y)$ függvénynek nincs szélsőértéke $0 < y < y_0$ tartományon, azaz monoton ezen a szakaszon. Az igazoláshoz felhasználjuk a fenti (2) és (5) jelű pontokat, amelyekből következik, hogy $\kappa(y) > 0$ és $\phi_{,y} > 0$ bármely $0 < y < y_0$. Mivel $\phi(y)$ pozitív, (3.58) mutatja, hogy $\phi_{yy} < 0$, ha $0 < y < y_0$. Így $\kappa_{,y} = \hat{c}_1^{-1}\phi_{,yy}$ szigorúan negatív, ami kizárja a kritikus pont lehetőségét ezen a szakaszon.

Az egyensúlyi alak Γ^* megrajzolásához a $\gamma(y)$ függvényt kell előállítani. Az (3.51) egyenletből

$$\gamma(y) = \arccos\left(\int_0^y \kappa(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right). \tag{3.60}$$

Mivel az arccos(.) függvény a $[0, 1]$ szakaszon monoton csökken, a $\kappa(y)$ függvény alatti terület egyértelműen meghatározza $\gamma(y)$ értékét. Ebből következik, hogy (3.50) egyensúlyi megoldása rögzített $\hat{c}_1$ és q (vagy $\hat{c}_1$ és $\hat{c}_2$) paraméterek esetén egyértelmű és egyedi. Célom a paraméterek azon tartományának meghatározása, ahol az egyensúlyi megoldás sima. Vegyük észre, hogy ha a $\kappa(y)$ függvény alatti terület a $0 \leq y \leq y_0$ szakaszon meghaladja az 1-et, akkor a megoldás sima lesz, hiszen létezik és egyértelmű $\bar{y} < y_0$ érték, ahol a $\kappa(y)$ alatti terület éppen 1. Ez felel meg 3.7. ábrán Q-val jelölt pontnak, ahol a görbe érintője vízszintes. Az találjuk tehát, hogy a sima megoldás feltétele:

$$\int_0^{y_0} \kappa(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\hat{c}_1}\phi(y_0) \geq 1. \tag{3.61}$$

Vezessük be $\zeta := \sqrt{q}\eta$ és $z := \sqrt{q}y$ mennyiségeket! A változócsere után (3.61) alakja

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\hat{c}_1\hat{c}_2}}\int_0^z \exp(\zeta^2 - z^2)\,\mathrm{d}\zeta \geq 1, \tag{3.62}$$

vagyis a rögzített paramétereknek ki kell elégítenie a következő egyenlőtlenséget

$$\sqrt{\hat{c}_1\hat{c}_2} \leq \sqrt{2}\max_{z\geq 0}\int_0^z \exp(\zeta^2 - z^2) =: \Sigma, \tag{3.63}$$

ahol a Σ felső korlát numerikusan becsült értéke $\Sigma \approx 0.765$. Ha a (3.63) szerinti feltétel teljesül, akkor (3.61) összefüggésből következik $\phi(\bar{y}) = \hat{c}_1$.

Mivel a $0 \leq y \leq \bar{y}$ tartományon γ és y között bijektív kapcsolat áll fent, a görbe *alakja* megrajzolható. Ha a (3.61) feltétel nem teljesül, akkor az eredményül kapott görbe nem-sima (ráadásul konkávvá is válik, hiszen y_0 felett a görbület negatív és $\kappa(y)$ nem rendelkezik más zérushellyel). Ahogy láttuk, $\kappa(0)$ kizárólag $\hat{c}_1$ paramétertől függ és rögzített q értékre y_0 is rögzített. A (3.52) szerinti definíció és a megoldhatósági feltétel (3.63) vezetnek oda, hogy bármely rögzített q paraméterhez létezik a $\hat{c}_{1,\mathrm{crit}} := \Sigma\sqrt{2q}$ kritikus érték. A $0 < \hat{c}_1 \leq \hat{c}_{1,\mathrm{crit}}$ az egyensúlyi görbe $\bar{\Gamma}^*$ sima és egyértelmű, ezen kívül nem létezik sima megoldás. □

Rögzített q paraméterértékhez bevezetem a következő halmazt:

$$\chi_q : \{\hat{c}_1 \quad | \quad 0 < \hat{c}_1 \leq \hat{c}_{1,\mathrm{crit}}\} . \qquad (3.64)$$

Itt χ_q akkor nem nullmértékű halmaz, ha $\hat{c}_{1,\mathrm{crit}} > 0$. Következik, hogy ha $\hat{c}_1 > \hat{c}_{1,\mathrm{crit}}$ az integrál a (3.61) bal oldalán kisebb, mint egy, azaz a görbének ebben az esetben nincs vízszintes érintőjű pontja. Mivel konvex, sima megoldásokat vizsgálok, a paraméterek ezen értékei érdektelenek. Tehát $\hat{c}_1 \in \chi_q$ esetén a megoldásgörbe megrajzolható.

3.15. Lemma. *A zárt, önátmetszést nem tartalmazó Γ^* görbe amit a $\bar{\Gamma}^*$ görbeszakaszok x és y tengelyekre történő tükrözésével áll elő, egy C^∞ görbe.*

Bizonyítás. A $\kappa(y)$ görbületfüggvény sima, így a $\bar{\Gamma}^*$ görbedarab is sima a belső pontjaiban. Igazolnunk kell, hogy a Γ^* görbe C^∞ a P, P', Q és Q' pontjaiban. Az általánosság megszorítása nélkül, a simaságot a P és Q pontokban látjuk be, a szimmetria miatt ekkor P' és Q' pontokra is teljesül. A P esetében vegyük észre, hogy (3.55) miatt $\phi(y) = -\phi(-y)$, azaz $\phi(y)$ páratlan függvény. (3.57)-(3.59) összefüggések miatt következik, hogy, ϕ y szerinti deriváltjai az $y = 0$ helyen:

(i) a páratlan rendű deriváltak értéke véges,

(ii) a páros rendű deriváltak zérus értékűek.

Tehát $\phi(y)$ C^∞ függvény az $y = 0$ helyen, ami igazolja, hogy a görbe a P pontban sima.

A Q pont vizsgálatához szükséges Γ^* átparaméterezése, hiszen az y szerinti paraméterezés Γ^* végpontjában nem egyértelmű. Tekintsük a görbe s ívhossz szerinti paraméterezését, ahol a Q pont paramétere $s = 0$ és s az óramutató járásával megegyező módon nő. Tengelyes tükrözéssel $y(s) = y(-s)$. Legyen $\tilde{\phi}(s)$ a $\phi(y)$ kiterjesztése Γ^* átparaméterezése után. Így

$$\tilde{\phi}(s) = \phi(y(s)) = \phi(y(-s)) = \tilde{\phi}(-s), \qquad (3.65)$$

tehát $\tilde{\phi}$ páros függvény a Q pontban. Kifejtve, a Q pontban $\tilde{\phi}(0) = \phi(\bar{y}) = \hat{c}_1$ teljesül. Alkalmazva a (3.57)-(3.59) egyenleteket és a lánc szabályt, azt találjuk hogy a $\tilde{\phi}$ függvény s szerinti deriváltjai az $s = 0$ helyen a következő mintát követik:

(i) a páratlan rendű deriváltak értéke zérus,

(ii) a páros rendű deriváltak értéke véges.

Hasonlóan a korábbiakhoz, $\tilde{\phi}(s) \in C^\infty$ az $s = 0$ helyen igazolva, hogy a görbe a Q pontban sima. □

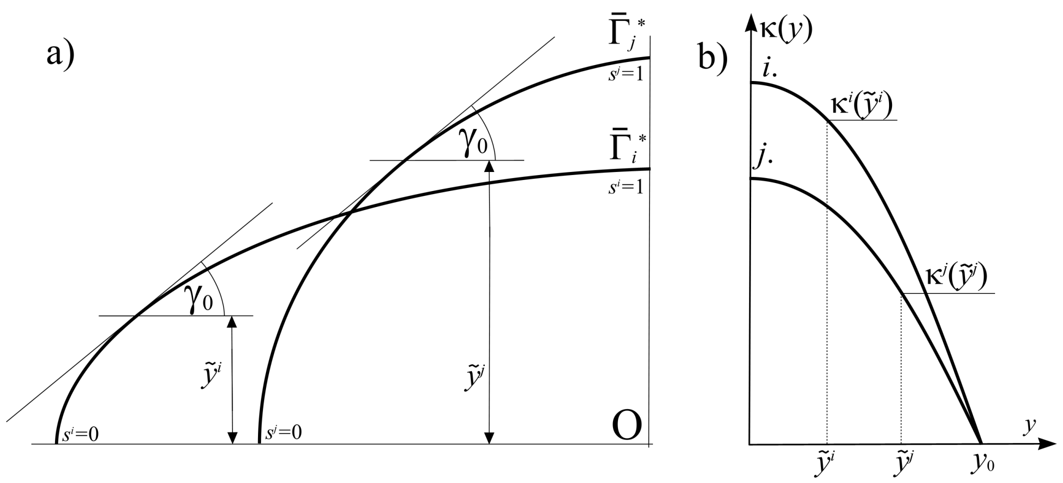
3.16. Tétel. *Legyenek* (3.41) *paraméterei* $c_1 > 0$ *és* $c_2 \geq 0$. *Ekkor bármely síkbeli, sima, konvex egyensúlyi* Γ^* *görbe, ami minden pontjában kielégíti a* (3.41) *egyenletet* D_2 *szimmetriával rendelkezik.*

Bizonyítás. Az 3.14. Lemma szerint a $\hat{c}_1$ és $\hat{c}_2$ (pozitív) paraméterpárhoz egy és csakis egy egyensúlyi $\bar{\Gamma}^*$ görbe tartozik, amelynek érintője a P pontban függőleges és a Q pontban vízszintes, feltéve hogy $0 <$

$\hat{c}_1 \leq \hat{c}_{1,\text{crit}}$. A 3.15. Lemma alapján $\bar{\Gamma}^*$ x, majd y tengelyekre történő tükrözéseivel előálló görbe zárt, konvex és sima. Végül, a maximális e átmérő létezésére vonatkozó feltételezésünkből következik a Γ^* görbe unicitása.

A lokális egyenlet megoldás egyben a (3.41) nemlokális egyenlet megoldását is megadja: rögzítsük a $\hat{c}_1$ és $\hat{c}_2$ paramétereket és ezen fejezet alapján határozzuk meg az egyensúlyi Γ^* alakot. Ha a megoldás létezik, akkor az általa körbezárt A terület megmérhető. Így a megoldás a $c_1 = \hat{c}_1/A$ és $c_2 = \hat{c}_2/A$ paraméterű, nemlokális feladatot is kielégíti. Visszafele, ha ismert a nemlokális egyenlet egy megoldása, abból az azonos megoldású lokális feladat paramétereinek számítása nyilvánvaló. Azt találjuk tehát, hogy a nemlokális feladat megoldásai is szükségszerűen a D_2 szimmetriacsoportba tartoznak. □

3.4. Megjegyzés. $\hat{c}_2 = 0$ esetén $q = 0$ és így $\kappa(y) \equiv 1/(\hat{c}_1) = \kappa(0)$, azaz az egyensúlyi alak egy kör. Továbbá, mivel a súrlódásos tag (azaz a $\hat{c}_2$ paramétertől függő tag) affin mozgást jellemez, az általános feladatban (amikor $\hat{c}_2 \neq 0$) $\kappa(0)$ adja a görbe maximális görbületét.



3.8. ábra. Két, állandósult görbe-szegmens összehasonlítása: mindkettő, $\bar{\Gamma}_i^*$ és $\bar{\Gamma}_j^*$ rögzített q mellett. Az (a) panel egy rögzített γ_0-hoz tartozó pont párat mutat, amelyeket a görbe alatti területek összehasonlítására használok. (b) $\bar{\Gamma}_i^*$ és $\bar{\Gamma}_j^*$ görbékhez tartozó $\kappa(y)$ görbület függvényeket mutatja.

3.2.3. A megoldások unicitása

Mostantól a (3.41) nemlokális egyenlet egyensúlyi megoldásait vizsgálom. Mivel fentebb igazoltam, hogy az egyensúlyi megoldás a D_2 szimmetria csoportba tartozik, továbbra is a $\bar{\Gamma}$ görberészt tekintem (lásd 3.7. ábrán). A megoldások unicitásának vizsgálatához a $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)$ paraméterpárhoz hozzárendelem a (c_1, c_2) paraméterpárt, ha azonos egyensúlyi rúdalakok tartoznak hozzájuk a megfelelő modellben. Más szavakkal, egy leképzést definiálok a lokális és globális egyenletek paraméterterei között. Vegyük észre, hogy (3.52) szerinti q

értéke invariáns a leképzés alatt, hiszen

$$\frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2} = \frac{Ac_1}{Ac_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{3.66}$$

Ezen megfigyelést érdemes olyan módon kihasználni, hogy az alábbi levezetésben a $\hat{c}_2$ és c_2 paraméterek helyett a q paramétert tekintjük adottnak. A (3.63) és (3.64) összefüggések alapján a lokális modellben kizárólag $\hat{c}_1 \in \chi_q$ esetén létezik sima megoldás. q rögzített értéke mellett definiálom az M leképzést:

$$M : \begin{cases} \chi_q \to \mathbb{R}^+ \\ \hat{c}_1 \mapsto c_1. \end{cases} \tag{3.67}$$

Megmutatom, hogy M injektív és szürjektív, tehát bijektív. Ez igazolja a nemlokális egyenlet sima megoldásainak unicitását, hasonlóan a (3.53) egyenlet megoldásainak unicitásához.

3.17. Lemma. *Az M leképzés injektív.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\hat{c}_1 \in \chi_q$ esetén az egyensúlyi megoldás sima, az általa körbezárt A terület pozitív. Ekkor a $c_1(\hat{c}_1) := \hat{c}_1 A^{-1}$ számítható. Ez azt jelenti, hogy M injektivitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a $c_1(\hat{c}_1)$ függvény a χ_q értelmezési tartományán szigorúan monoton legyen. Ennek bizonyításához (rögzített q mellett) tekintsük a (3.53) lokális egyenlet két, különböző megoldását, jelölje ezeket i és j! A paramétereik kapcsolata legyen

$$\hat{c}_1^j = (1+\varepsilon)\hat{c}_1^i, \tag{3.68}$$

ahol (az általánosság megszorítása nélkül) $\varepsilon > 0$. A (3.56) egyenlet alapján következik, hogy a $\bar{\Gamma}_i^*$ és $\bar{\Gamma}_j^*$ alakok $\kappa(y)$ görbület függvényeire teljesül, hogy

$$\kappa^j(y) = \frac{1}{1+\varepsilon}\kappa^i(y) \qquad \forall y : \int_0^y \kappa\eta \,\mathrm{d}\eta \leq 1. \tag{3.69}$$

Válasszunk egy-egy pontot $\bar{\Gamma}_i^*$ és $\bar{\Gamma}_j^*$ mentén olyan módon, hogy érintőirányuk megegyezzen (3.8. ábra)! A közös érintőirányt jelölje γ_0 és a $\tilde{(.)}$ jel mostantól arra utal, hogy ezen pontokhoz tartozó értékről van szó (pl. $\tilde{y}^i$ a $\bar{\Gamma}_i^*$ görbe y koordinátája ott, ahol az érintő iránya γ_0). Mivel $\gamma(y)$ monoton $\bar{\Gamma}$ mentén, az i és j pontok helyzete jól definiált. Korábban láttuk, hogy , $\kappa(y)$ és $\gamma(y)$ kapcsolatát (3.60) adja meg, ez alapján írható, hogy

$$\int_0^{\tilde{y}^i} \kappa^i(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \cos(\gamma_0) = \int_0^{\tilde{y}^j} \kappa^j(\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{3.70}$$

ami (3.69) miatt azt jelenti, hogy $\tilde{y}^i < \tilde{y}^j$ teljesül. $\kappa(y)$ tulajdonságai és (3.69) alapján következik, hogy a görbületekre

$$\kappa^i(\tilde{y}^i) > (1+\varepsilon)\kappa^j(\tilde{y}^j), \tag{3.71}$$

hiszen $\tilde{y}^i < \tilde{y}^j$. Mivel minden mennyiség pozitív előjelű, következik, hogy

$$\frac{\tilde{y}^j}{(1+\varepsilon)\kappa^j(\tilde{y}^j)} > \frac{\tilde{y}^i}{\kappa^j(\tilde{y}^i)}. \tag{3.72}$$

Tekintsük $\bar{\Gamma}$ érintőirány γ szerinti paraméterezését! Alkalmazzuk az (3.51) egyenletre a láncszabályt, így a $\bar{\Gamma}$ görbe alatti $\bar{A}$ terület a következő módon számítható

$$\bar{A} = \int_P^Q y\cos\gamma\,\mathrm{d}s = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{y}{\kappa}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma. \tag{3.73}$$

A (3.72) egyenlőtlenség alapján (3.73) jobb oldalán szereplő mennyiség kisebb $\bar{\Gamma}_i^*$, mint $\bar{\Gamma}_j^*$ esetén. Ez bármely $\gamma \in (0, \pi/2)$

szög esetén fennáll, így

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\bar{A}^j = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{y^j}{(1+\varepsilon)\kappa^j}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma > \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{y^i}{\kappa^i}\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma = \bar{A}^i. \tag{3.74}$$

Végezetül, (3.68) segítségével kapjuk, hogy

$$\frac{\bar{A}^j}{\hat{c}_1^j} > \frac{\bar{A}^i}{\hat{c}_1^i}. \tag{3.75}$$

Mivel az egyensúlyi megoldás, a Γ^* görbe D_2 szimmetriával bír, következik, hogy $A = 4\bar{A}$, tehát

$$\frac{\hat{c}_1^i}{A^i} > \frac{\hat{c}_1^j}{A^j}, \tag{3.76}$$

ami nem más, mint a $c_1(\hat{c}_1)$ függvény szigorú monotonitása. Beláttuk, hogy az M leképzés injektív, χ_q különböző elemeihez nem tartozhat azonos megoldás. Vegyük észre, hogy bármely $\hat{c}_1 \in \chi_q$ paraméterre a görbe által bezárt terület pozitív, azaz $c_1(\hat{c}_1)$ egy pozitív, szigorúan monoton, folytonos függvény. □

3.18. Lemma. *Az M leképzés szürjektív.*

Bizonyítás. A szürjektivitás igazolásához $c_1(\hat{c}_1)$ határértékeit kell vizsgálnunk. Először a $\hat{c}_1 \to 0$ irányt vizsgáljuk (továbbra is rögzített q mellett). A korábbiak alapján tudjuk, hogy $\bar{\Gamma}$ görbülete a P pontban maximális $\kappa(0) = \hat{c}_1^{-1}$ értékkel és a Q pontban minimális $\kappa(\bar{y}) = \hat{c}_1^{-1}(1 - 2q\bar{y}\phi(\bar{y})) = \hat{c}_1^{-1}(1 - 2q\bar{y}\hat{c}_1)$ értékkel. Bármely síkgörbe görbülete a simulókör r sugarának reciproka. Ennek segítségével a görbe alatti területre $r_{\min}^2\pi < A < r_{\max}^2\pi$, ahol $r_{\min}$ és $r_{\max}$ a görbe mentén a simulókörök sugarának minimumát és maximumát jelölik. Így a következő egyenlőtlenség fogalmazható meg

$$\frac{\hat{c}_1}{\pi}\left(\frac{\hat{c}_1}{1-2q\bar{y}\hat{c}_1}\right)^{-2} < \frac{\hat{c}_1}{A(\hat{c}_1)} < \frac{\hat{c}_1}{\pi}\hat{c}_1^{-2}. \tag{3.77}$$

Mivel $\bar{y} \leq y_0$, a 3.14. Lemma alapján (rögzített q esetén) $\bar{y}$ értéke véges. Ez azt jelenti, hogy a fenti egyenlőtlenség-lánc bal és jobb oldali kifejezése egyaránt $+\infty$-hez tart, ha $\hat{c}_1 \to 0$. A rendőr-elvet használva

$$\lim_{\hat{c}_1\to 0} \frac{\hat{c}_1}{A(\hat{c}_1)} = +\infty. \tag{3.78}$$

Végül vizsgáljuk meg a $\hat{c}_1 \to \hat{c}_{\text{crit}}$ határátmenetet! Mivel $\hat{c}_{\text{crit}}$ véges, ezért elegendő a $\bar{A}(\hat{c}_1)$ terület számítása. Felhasználjuk a korábban már alkalmazott összefüggést a görbület és az ívhossz között. Újra a γ szerinti parametrizálását használva írhatjuk

$$\kappa(\gamma) = -S_{,\gamma}^{-1}, \tag{3.79}$$

ahol $S(\gamma)$ a P és a γ szöggel jellemezhető pontok közötti görbe ívhossza. Mivel $\hat{c}_1 = \hat{c}_{\text{crit}}$ értéknél a Q pontban a görbület zérus, a következő eredményre jutunk

$$\lim_{\gamma\to 0} -S_{,\gamma} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\kappa(\gamma)} = \infty. \tag{3.80}$$

Tehát a görbe nem korlátos. Mivel a $\bar{\Gamma}$ görbe alatti terület $\bar{A}$ az ívhosszból számítható (hiszen y véges), következik, hogy

$$\lim_{\hat{c}_1\to\hat{c}_{1,\text{crit}}} S = \lim_{\hat{c}_1\to\hat{c}_{1,\text{crit}}} A = \infty, \tag{3.81}$$

ami a keresett határértéket adja, hiszen

$$\lim_{\hat{c}_1\to\hat{c}_{\text{crit}}} \frac{\hat{c}_1}{A(\hat{c}_1)} = 0. \tag{3.82}$$

Ez azt jelenti, hogy M értékkészlete valóban $\mathbb{R}^+$ és az injektivitást kimondó 3.17. Lemma alapján az őskép pontosan a χ_q halmaz. □

3.5. Megjegyzés. A fenti levezetés azt is mutatja, hogy a Γ görbe bármely $0 < \hat{c}_1 < \hat{c}_{1,\text{crit}}$ és $0 \leq \hat{c}_2 < \infty$ esetén kompakt. Felhasználva a (3.63) összefüggést, látható, hogy a kompaktság a $\sqrt{\hat{c}_1 \hat{c}_2} < \Sigma$ paraméterekre fennáll. A Γ görbe pontosan akkor nem kompakt, ha $\sqrt{\hat{c}_1 \hat{c}_2} = \Sigma$.

3.19. Tétel. *Az (3.41) egyenlettel adott kopásmodell sima, konvex megoldásait a c_1 és c_2 paraméterek egyértelműen meghatározzák, és ezen paraméterek $c_1 \geq 0$ és $c_2 > 0$ tartományában minden ponthoz létezik az Γ^* görbe.*

Bizonyítás. Mivel M injektív és szürjektív, tehát *bijektív* leképzés. Ebből a tétel állítása következik. A megoldás kompakt és sima. □

3.6. Megjegyzés. Megmutattam, hogy a (3.40) egyenlet egyensúlyi megoldása egy sima görbe, amit a c_1 és c_2 paraméterek egyértelműen meghatároznak. A megoldások szimmetriacsoportja D_2. Vegyük észre, hogy az unicitás azzal függ össze, hogy a $\cos\gamma(y)$-ra felírható egy lineáris közönséges differenciálegyenlet, ami egyben a $\kappa(y)$ görbület függvény unicitását is biztosítja. Vélhetően más kopási, vagy súrlódási törvények az említett linearitást megszüntetnék. Hasonlóan, a nemlokális egyenletben az A területtől eltérő nemlokális mennyiségek esetén az M leképzés szürjektivitása és/vagy injektivitása erősen kérdéses.

3.2.4. Önhasonló megoldások növekedés hiányában

Az ooidok alakfejlődésére bemutatott modellben a növekedés miatt lehetőségem volt az invariáns alak vizsgálatára. Felmerül a kérdés, hogy a *növekedési tag hiányában* létezik-e önhasonló megoldása a kopási és súrlódási tagokat tartalmazó modellnek. A növekedési tag hiányában a területfüggés elhagyható. Így a normális irányú kopási sebesség

$$v = c_1\kappa + c_2 y \cos\gamma \tag{3.83}$$

alakú. A 3.10. Tétel görbület-függő kopási törvényre adja meg a h támaszfüggvény időfejlődését, érintőirányú paraméterezés esetén. Azonban az ott közölt bizonyítás tetszőleges, normális irányú kopási sebesség esetén igaz, így a (3.83) egyenlettel adott modellre $h_{,t} = -v$. Láttuk, hogy az önhasonló alakzat feltétele $h_{,t} = ch$ teljesülése minden kerületi pontban, zsugorodó alakzat esetén $c < 0$. A γ érintőszög definíciója alapján a befelé mutató normális $\mathbf{n} = [\sin\gamma, -\cos\gamma]$ alakú, az $[x, y]$ koordinátájú görbepont támaszfüggvénye definíció szerint $h = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = -x\sin\gamma + y\cos\gamma$. Keressük tehát a

$$\begin{aligned} &-c_1\kappa - c_2 y\cos\gamma = \\ &c\left(-x\sin\gamma + y\cos\gamma\right) \end{aligned} \tag{3.84}$$

egyenletet kielégítő alakot.

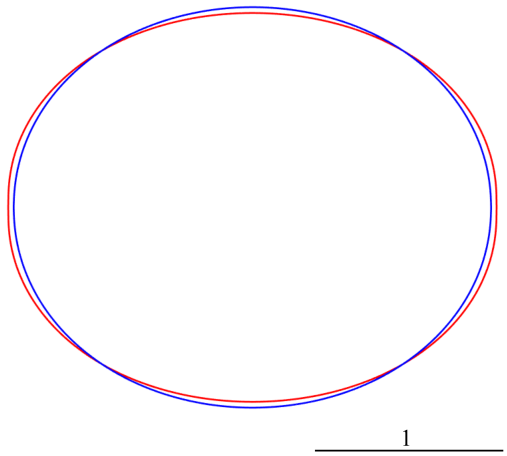
Az egyenletet x szerinti paraméterezés mellett vizsgáljuk tovább, a görbét leíró függvény $y(x)$. Az $y(x)$ függvény görbületét behelyettesítve kapjuk

$$\begin{aligned} &c_1\frac{y_{,xx}}{(1+y_{,xx}^2)^{3/2}} = \\ &(-cx\sin\gamma + (c+c_2)y\cos\gamma)\,. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Tekintve, hogy $y_{,x} = \tan\gamma$, a következő kapcsolt kezdeti érték feladatot kapjuk eredményül:

$$\begin{cases} \gamma_{,x} & = \dfrac{-cx\tan\gamma + (c+c_2)y}{c_1} \\ y_{,x} & = \tan\gamma \\ \gamma(0) & = 0, \\ y(0) & = y_0. \end{cases} \tag{3.86}$$

Az egyenletrendszer numerikus megoldásával nyert önhasonló alakzatot mutat a 3.9. ábra. Jól látható, hogy a növekedést mellőző modell önhasonló alakzata nem esik egybe a részben tárgyalt, növekedést is tartalmazó modell invariáns alakjával. A következő részben visszatérek a görbület-vezérelt kopási törvények további vizsgálatához.



3.9. ábra. Növekedési tag nélküli önhasonló alakzat (piros), és a növekedést is tartalmazó modell invariáns megoldása (kék). A görbék által közrezárt terület azonos. A szimulációs paraméterek: $c_1 = 0.86, c_2 = 0.43, c = -0.92$.

3.3 A görbület-vezérelt kopás két fázisa

Jól ismert, hogy a lineáris PDE-k elméletében a parabolikus egyenletek bevezető példája a *hővezetési egyenlet* (Evans, 2010). Tekintsük az n dimenziós valós térben értelmezett kezdeti érték feladatot:

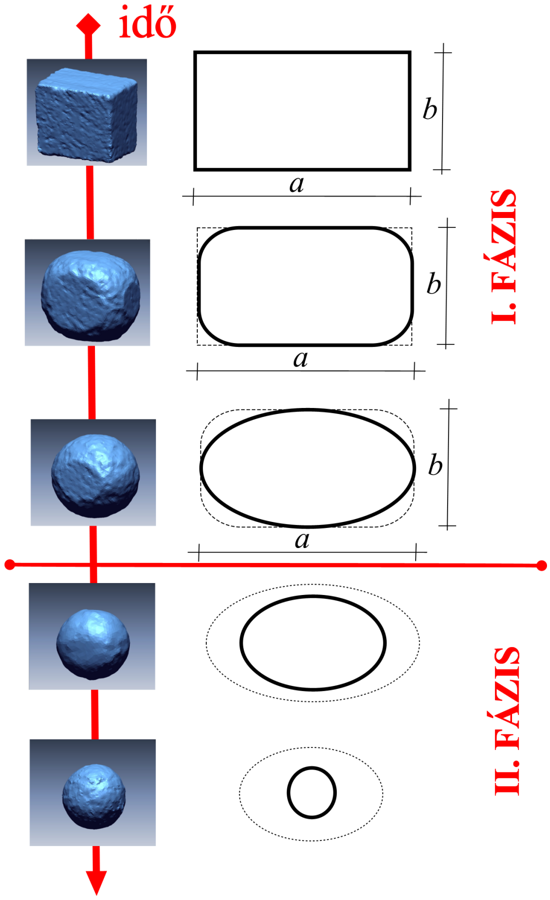
$$\begin{cases} z_{,t} &= \Delta z, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty), \\ z(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.87}$$

alakú, ahol $\Delta(.)$ jelöli a Laplace operátort. Ismert (Evans, 2010), hogy a feladat megoldása bármely $t > 0$ időpontra

$$z(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{3.88}$$

Látható, hogy $g(\mathbf{y})$ az $\mathbb{R}^n$ tér minden pontjában felvett értéke hatással van a $z(\mathbf{x}, t)$ megoldás értékére. Azaz, kompakt tartójú g függvény hatása a teljes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ térre kiterjed, tetszőleges $t > 0$ időpontban. Ez a jelenség *végtelen sebességű hatásterjedésként* ismert. Másrészről, nem folytonos $g(\mathbf{x})$ kezdeti függvény esetén is $z(\mathbf{x}, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R})$. Ezt a jelenséget a hővezetési kernel *simító hatásának* nevezik.

A bevezetőben szereplő (1.3) és (1.4) görbület-vezérelt alakfejlődést leíró, nemlineáris geometriai PDE-k rokonságot mutatnak a *hővezetési egyenlettel* (Grayson, 1987). Azt várnánk, hogy a végtelen sebességű hatásterjedés görbület-vezérelt modellekben is megjelenik. A hővezetési egyenlet esetében a hatás végtelen sebességű terjedése Dirac-delta kezdeti feltétel mellett is fennáll.



3.10. ábra. A kétfázisú kopás jelensége.

Analógiaként következne, hogy egy élekkel, csúcsokkal és sík (zérus H és K görbületű) lapokkal rendelkező poliéder, mint kezdeti feltétel a görbület-vezérelt kopási folyamatban tetszőlegesen kicsiny idő után minden pontjában $K \neq 0$ és $H \neq 0$ alakra módosul. Ezzel szemben a görbület-vezérelt kopási folyamatban a kopás *két fázisú* (Hamilton, 1994; Domokos *et al.*, 2014b): az első, *véges idejű fázisban* a test felületi pontjainak egy nem nullmértékű halmazán nem érvényesül a kopás hatása, itt a pontok megőrzik zérus H és K görbületüket. A *második fázisban* a folyamat hatása minden felületi pontot érint (3.10. ábra).

Az ún. *kétfázisú* kopás jelenségét a bevezetőben említett Bloore modellben mutatom meg, a kopási törvény c_0, c_1, c_2 rögzített paraméterek mellett:

$$v^{3D} = c_0 + c_1 H + c_2 K, \tag{3.89}$$

ahol bináris kopást feltételezve c_1 és c_2 a koptató részecske átlaggörbületének és felületének integráljaként vezethető le (Várkonyi & Domokos, 2011). A Bloore egyenlet egyes tagjaihoz a következő fizikai megfontolások társíthatók:

(i) $c_0 > 0, c_1 = c_2 = 0$: a kopó testnél sokkal kisebb koptató részecskék esete, a felület önmagával párhuzamosan felületbe képződik. Az irodalomban *Eikonal-folyamként* ismert. Poliéder koptatása esetén a lapokat önmagukkal párhuzamos lapokba képzi.

(ii) $c_1 > 0, c_0 = c_2 = 0$: a kopó test egy elnyúlt, tűszerű részecskékkel ütközik. A felület a bevezetőben említett *átlaggörbület-folyam* alatt fejlődik. Poliéder koptatása esetén az élekkel párhuzamos síkkal történő metszéssel reprezentálható.

(iii) $c_2 > 0, c_0 = c_1 = 0$: a testet a méretnél jóval nagyobb kiterjedésű testek koptatják. A felület a *Gauss görbületi-folyam* alatt fejlődik. Poliédernél a csúcsok lemetszésével reprezentálható.

A kísérleti munka egyszerűsítése miatt a kiindulási alak téglatest $a \geq b \geq c$ oldalhosszakkal. A numerikus és mérési eredmények értelmezéséhez bevezetem a β *felületi konvexitást*:

$$\beta = \frac{A_C}{A_H}, \tag{3.90}$$

ahol A_C a szigorúan konvex régiók területe, A_H pedig a konvex burok felülete. Értelemszerűen $0 \leq \beta \leq 1$. A két fázis jelenlétét kísérleti vizsgálatokkal és numerikus szimulációkkal mutatom be.

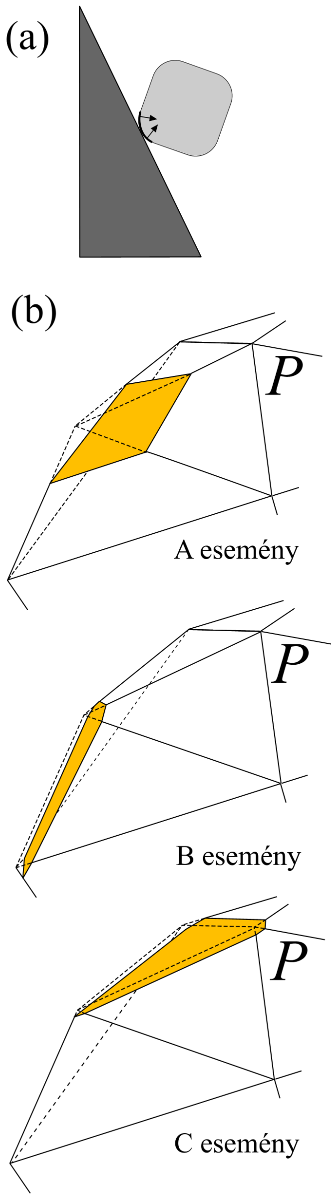
3.3.1. Numerikus eljárások

A görbület-vezérelt kopás numerikus modellezésének lehetőségei:

(i) a PDE közvetlen szimulációja alkalmas numerikus eljárással,

(ii) alakfejlődés sztochasztikus síkmetszések sorozataként.

A parabolikus PDE közvetlen szimulációjára több, széles körben elterjedt algoritmus (pl.: véges differencia módszer, kollokációs eljárások, végeselem módszer) létezik, azonban a görbület elegendően pontos becslése az evolúció folyamán precízen kontrollált numerikus megoldásokat igényel (Fehér *et al.*, 2021). A level-set eljárás a három dimenziós euklideszi térbe ágyazott felületet egy 4 dimenziós hiperfelület szintfelületeként reprezentálja (Giga, 1997). A görbület-vezérelt kopás szimulációja a felületet második gradiensének approximációját igényli, ezért a P poliéder, mint kiinduló alak a módszer számára szingularitást jelent, ezért itt csak a sztochasztikus eljárás eredményeit közlöm. Természetesen simított kezdeti feltétellel a kétfázisú kopás vizsgálható, ennek részleteit tartalmazza (Domokos *et al.*, 2014b).



3.11. ábra. (a) A kopás ütközési események sorozata. (b) Kopási események a sztochasztikus numerikus eljárásban. Az S síkkal vett metszés eredményét mutatják a sárga poligonok.

A sztochasztikus síkmetszésekre épülő módszer kétdimenziós változatát a (Sipos *et al.*, 2011) publikációban adtam meg, a kétfázisú kopás vizsgálatához az általános háromdimenziós megoldást használtuk (Domokos *et al.*, 2014b). A sztochasztikus megoldás nem közvetlenül a PDE-t diszkretizálja, hanem az említett fizikai megfontolások alapján származtat egy numerikus algoritmust. Természetesen az, hogy a kopó testet egy poliéderrel reprezentálom, tekinthető egyfajta diszkretizációnak, azonban szemben a klasszikus PDE megoldó numerikus módszerekkel (pl.: végesdifferencia, vagy a végeselem módszer), a modellben a diszkretizáció mértéke nem *a-priori* rögzített, az függ a fizikai paraméterek értékétől. Az eljárás a kopást ütközési sorozatok eredményének tekinti (3.11.(a) ábra). A P poliéderként reprezentált kopó testet egy véletlen helyzetű S síkkal metszi olyan módon, hogy a leeső darab $\Delta V \sim \mathrm{LogNorm}(\Delta_0, \sigma_1)$ térfogata egy adott, Δ_0 és σ_1 paraméterű lognormális eloszlásból sorsolt térfogattal egyezzen meg. Az elvárt térfogathoz tartozó sík helyét a numerikus kód *inverz iterációval* határozza meg. A síkmetszést végző algoritmus, szemben az irodalomban található megoldással, nem csak P egy csúcsát, vagy élét metszi, hanem szükség esetén több csúcsot, élet vagy lapot is eltávolít. Az eljárásban a 3.11. ábra (b) része szerinti három esemény következhet be: (A) a P poliéder egy csúcsának környezetét szeljük le, (B) P egy élének környezetét vágjuk le, vagy (C) P egy véletlen lapját önmagával párhuzamosan eltoljuk. A p valószínűséggel bekövetkező (A) esemény a Gauss-görbülettel vezérelt kopásnak feleltethető meg (egy végtelen, véletlen helyzetű síkkal ütköző poliédernek valamely csúcsát érinti az ütközés). Hasonlóan, a q valószínűségű (B) esemény az átlaggörbületi-folyamnak felel meg. Szükséges, hogy $p+q \leq 1$ teljesüljön. Az $1-p-q$ valószínűségű C esemény az Eikonal-folyamot reprezentálja.

Amennyiben a lemetszett térfogat ΔV elegendően kicsiny, és az ütközések (a modellben: véletlen sorsolások) száma elegendőn nagy, akkor a sztochasztikus modell a

$$v^{3D,r} \approx (1-p-q) + qH + pK, \qquad (3.91)$$

folytonos PDE szerinti kopásnak megfelelő. A folytonos modellből a sztochasztikus valószínűségek a

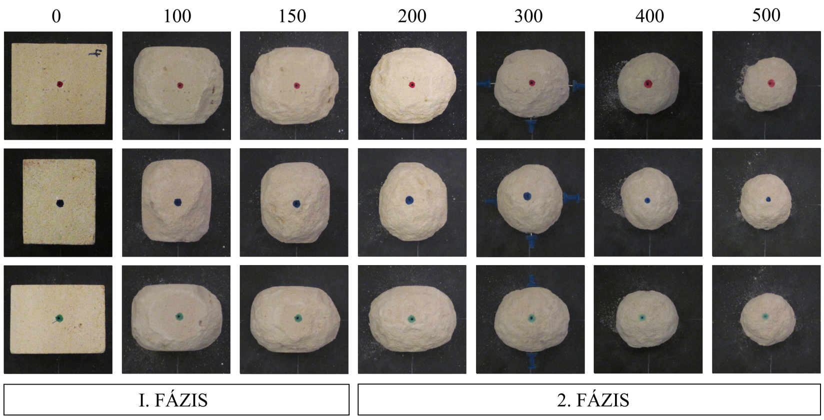
$$p = \frac{c_2}{c_0+c_1+c_2}, \qquad (3.92)$$

$$q = \frac{c_1}{c_0+c_1+c_2}, \qquad (3.93)$$

összefüggésekkel határozhatók meg.

3.3.2. Kísérleti vizsgálatok

A laboratóriumi kísérleteket mészkő, $V_0 = 217.456 \pm 10000$ mm^3 kezdeti térfogatú, 3.3. táblázat szerinti oldalhosszúságú téglatesteken hajtottuk végre. A mintadarabokat egyesével, egy 1 méter átmérőjű forgó dobban koptattuk. A dobban egy terelőlemez emelte fel a mintadarabot, ami a felső holtponthoz közel leesett a dob aljára. A kopás elsősorban az ütközés miatt következett be, a súrlódás hozzájárulása elhanyagolhatónak tekinthető. Előre rögzített fordulatszámok megtétele után a mintadarabról a kiindulási test szimmetria tengelyeinek irányából felvételeket készítettünk és megmértük a mintatest tömegét. A tömeg mért exponenciális lecsengése az előzetes elvárásoknak megfelelő volt, hiszen az ütközés kinetikus energiájának, azaz magának a tömegnek a függvénye. Egy mintadarabról készült felvételsorozatot mutat be a 3.12. ábra.



3.12. ábra. Kísérleti fényképek a kopási folyamatról. A három sor a mészkő téglatest három nézetének fejlődését mutatja. Az oszlopok az időt jelzik, a dob megtett fordulatszáma alapján. Az első és második fázis elkülönülése szabad szemmel is jól látható.

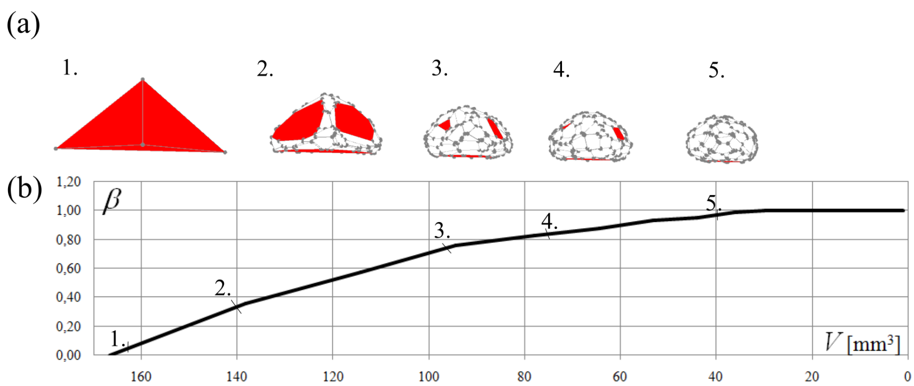
oldal	méret [mm]
a_0	$70,8 \pm 0,8$
b_0	$60,7 \pm 0,7$
c_0	$50,6 \pm 1,2$

3.3. táblázat. A kísérleti téglatest méretei.

3.3.3. Eredmények

Az ütközés a mintadarabnál lényegesen nagyobb objektummal (dob) következett be, ezért a numerikus számítást a Gauss-görbülettel vezérelt kopással, azaz a Firey-féle modell diszklét approximációjával végeztem ($(p,q) = (1,0)$). Mind a numerikus, mind a kísérleti eredmények a két fázis egyértelmű jelenlétére utalnak: az első fázisban az b/a és c/a tengelyarányok állandóak, a második fázisban konvergálnak az egységhez. A numerikus eredmények jó egyezést mutatnak a kísérletben mért alakjellemzőkkel (Domokos *et al.*, 2014b). A két fázisú kopás természetesen tetszőleges kiindulási alaknál megjelenik. Ekkor a két fázis leginkább az (3.90) egyenlettel adott konvexitási indexszel követhető. Erre mutat példát egy tetraéderen a 3.13. ábra. Az első fázist (kb. $V = 40\text{mm}^3$ térfogatig) $\beta < 1$ jellemzi, β szigorúan monoton nő. A második fázisban $\beta = 1$, állandó értékű. Kísérleti és elméleti megfontolások (Kuenen, 1956; Domokos *et al.*, 2009) egyaránt arra utalnak, hogy kavicsok (akár kollektív) kopása esetén a Bloore-féle modellben a görbületfüggő tagok dominálnak, ezért a kétfázisú kopás gyakorlati szempontból is lényeges.

A kétfázisú kopás fontos következménye, hogy az első fázisban jelentős, az eredeti tömeg 50%-át elérő tömegveszteség is bekövetkezhet. Ez óvatosságra int azzal a széles körű gyakorlattal szemben, amikor a kopó részecske térfogatát a részecskére illesztett ellipszoid segítségével becslik. Láttuk, hogy a téglatest kopása esetén az első fázisban az illesztett ellipszoid nagytengelyei nem változnak, ezekből a tömeg csak nagy hibával becsülhető.



3.13. ábra. Tetraéder kétfázisú kopása a Firey-féle alakfejlődésben. (a) a piros felület mutatja a kopással még nem érintett felületi pontok halmazát. (b) A β konvexitási index változása a V térfogat függvényében.

3.4 Kitekintés

A fejezetben bemutatott, az ooidok alakfejlődését leíró síkbeli modell a köztes rétegek további vizsgálatát inspirálta és a Utah állambeli Nagy-sóstó (*Great Salt Lake*) üledékeiben található ooidok mérési eredményeinek diszkussziójához járult hozzá (Trower *et al.*, 2020). A modell kémiai és fizikai komponensekkel magyarázza az ooidok alakját, azonban az irodalomban rendre felmerül a kérdés, hogy valamely biológiai folyamatnak nincs-e szerepe a részecske formálódásában. Ez a kérdés különösen kiemeli a téma fontosságát, hiszen karbonátos Marsi üledékek lezajlott és tervezett vizsgálata (Horgan *et al.*, 2020) szerint egyenlőre nyitott kérdés, hogy találhatók-e ooid részecskék a Marson. Az említett Eikonal kopási modell a kisbolygó kutatás területén nyert alkalmazást: az első, bizonyítottan csillagközi aszteroida, az *'Oumuamua* szélsőségesen elnyúlt alakját magyarázza (Domokos *et al.*, 2009; Domokos *et al.*, 2017).

Az említett, változatos alkalmazás miatt felmerül a kérdés, hogy a fejezetben bemutatott síkbeli görbék időfejlődésére vonatkozó analitikus eredmények milyen mértékben általánosíthatók a három dimenziós euklideszi térbe beágyazott felületek időfejlődésére? Milyen további alkalmazások következnek az analitikus eredményekből? Ezzel kapcsolatban eddig részleges eredmények születtek:

(i) A 3.9. Tétel szerint a görbe időfejlődése megragadható egyetlen, nemlineáris geometriai PDE segítségével. Egyrészről, a kétfázisú kopás analitikus vizsgálatára ezen PDE további elemzésével kerülhet sor. Másrészről kérdés, hogy lehet-e hasonló megközelítéssel a térbeli eset fejlődését is egyetlen geometriai PDE segítségével leírni.

(ii) A kopó testet poliéderként reprezentálva, a poliéder lapsíkjait pedig egyenlőtlenséggel megadva az egyenlőtlenség egyik oldalán a támaszfüggvény szerepel. A 3.10. Tétel alapján a támaszfüggény időfejlődése ismert. Ilyen módon egy új, a test minden lapját egyidőben fejlesztő, új numerikus algoritmus származtatható a kopás szimulációjára.

(iii) A térbeli esetben a görbület függvény kritikus pontjainak száma, hasonlóan az egyensúlyi pontok számához (Domokos, 2015), numerikus szimulációk alapján statisztikai értelemben csökkenő, de a síkbeli esethez hasonló monotonitás igazolása várhatóan nem lehetséges. Az egyensúlyi pontok számának változása a sima felületet kísérő diszkrét felületen számított ún. képzetes egyensúlyi pontok számának megugrása előre jelzi (Domokos *et al.*, 2022), ennek a jelenségnek a görbületfüggvényre vonatkozó analógiája nyitott kérdés.

(iv) Az ooidokra leírt síkbeli modell, több környezeti paraméterrel, de általánosítható három dimenziós alakokra. Tekintettel a közelmúltban publikált, ooidok 3D szkennelésével nyert adathalmazra (Howes *et al.*, 2021), a térbeli modell kidolgozásához és a paraméterek illesztéséhez minden feltétel adott.

(v) Fontos, további kutatási munkát igénylő kérdés az első fázis időtartamának becslése. Tekintve, hogy a kopás (természetes folyamatok, például aprózódás) révén képződő fragmenseken kezdődik (Domokos *et al.*, 2015), a két fázis elkülönítése a geológiai gyakorlat számára lényeges (Novák-Szabó *et al.*, 2018). Továbbá, a megközelítés általánosítható fragmensek sík lapjainak élettartamának becslésére. Itt a súrlódás, vagy kis koptató részecskék ($c_0 > 0$) érdemi hatása esetén az első fázis időbeni elnyúlását várjuk, hiszen mind a súrlódás, mind az Eikonal-folyam a sík lapok zérus görbületét megőrzi. Továbbá, ide tartozik a bináris, vagy kollektív folyamatban a részecskék egyidejű kopása, amit a PDE modellben az eddig konstansnak tekintett együtthatók időfüggő reprezentációja ragadhat meg helyesen.

4. fejezet

Az alakfejlődés statisztikai jellemzése

4.1 Kavics populációk kollektív tömegfejlődése

A bemutatásra kerülő modell elméleti hátteret ad a kopás miatt bekövetkező kollektív tömegfejlődés értelmezéséhez. A bevezetésben említett és a 3. fejezetben bemutatott*egyedi kopás modellek* a statisztikus fizika átlagtér elméleteivel mutatnak rokonságot. A 3. fejezetben vázolt geometriai elmélet az ütközés alatt kopó üledékrészecskék alakjának időfejlődését a kísérleti és terepi mérésekkel (Szabó *et al.*, 2013; Novák-Szabó *et al.*, 2018) összhangban írja le. Ugyanakkor az is ismert (Domokos & Gibbons, 2018), hogy a Firey-Bloore geometriai elmélet nem alkalmas a tömegfejlődés modellezésére, hiszen a geológiai megfigyeléseket összegző, *exponenciális lecsengést* és végtelen élettartamot jósoló Sternberg törvénnyel (Sternberg, 1875) szemben *véges élettartamot* ad minden részecskére. A széles körben elfogadott Sternberg-féle elméletnek ugyanakkor nincs mondandója az alakfejlődésről. Ezek alapján a két részecske időfejlődését megadó *bináris modellekkel* kapcsolatban a következő elvárások fogalmazhatóak meg:

(i) a tömegfejlődés kövesse a Sternberg törvényt,

(ii) az ütközés tömegvesztesége az ütközési energia monoton növekvő függvénye legyen,

(iii) a modell legyen összhangban a kopás (egyedi) geometriai modelljével.

Az elvárásoknak megfelelő, ún. *térfogattal súlyozott alakfejlődési modellt* ír le (Domokos & Gibbons, 2018), amely egyrészről a Firey-Bloore geometriai elmélettel megegyező alakokat, másrészről a Sternberg törvénynek megfelelő tömegfejlődést jósol. A modell két, adott esetben eltérő anyagú, ütköző részecske $X(t)$ és $Y(t)$-vel jelölt tömegének időfejlődését a következő módon adja meg:

$$X_{,t} = -c_{12}\frac{XY}{X+Y}, \tag{4.1}$$

$$Y_{,t} = -c_{21}\frac{YX}{X+Y}, \tag{4.2}$$

ahol a rögzített c_{12} és c_{21} skalárokat *bináris ütközési paramétereknek* nevezem. Ezek értéke az ütköző részecskék anyagjellemzőitől függnek, azonban ezt a függést nem részletezem, a c_{12} és c_{21} paramétereket ismert anyagjellemzőknek tekintem. A bináris modell egyenleteiről könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét tömeg követi Sternberg törvényét, azaz exponenciális lecsengésűek. A bináris leírás kiterjesztése kettőnél több, potenciálisan ütköző testre vezet el az alkalmazás szempontjából is érdeklődésre számot tartó kollektív modellhez.

4.1.1. A kollektív modell

Célom N darab részecske kölcsönös ütközésének (1.3(c). ábra) vizsgálata. Hasonló problémákat tárgyalnak az ún. koagulációs (da Costa, 2015) és dinamikus fragmentációt leíró (Cheng & Redner, 1988) matematikai és statisztikus fizikai elméletek. Ezen, *kollektív evolúciós modellekben* elsősorban arra keresnek választ, hogy miként fejlődik a méreteloszlás egy adott kezdeti eloszlásból kiindulva, feltéve hogy azt a récskepárok közötti *ütközési események* határozzák meg. Ezen modellek az ütközést leíró természeti törvényt *ütközési kernelnek* nevezik. Általánosabb modellekben (ahol a részecskék méretfejlődését nem csak az ütközés határozza meg), a természeti törvényt szokták *interakciós kernelnek* is hívni. Az első elnevezést használom, hiszen feladatunkban tényleges, fizikai ütközések miatt következik be a kopás. A kollektív modellben rögzített, véges elemszámú *populációt* tételezek fel.

Az ütközési kernel a bináris modellből levezethető olyan módon, hogy számításba vesszük a részecske sebességétől és tömegétől függő *ütközési valószínűséget*. Azt is várjuk, hogy a kollektív modell $N = 2$ választással visszaadja a bináris modellt. Egy lehetséges ütközési kernelt mutat be (Domokos & Gibbons, 2018), ami a (4.1) és (4.2) bináris modellt egy r skalár paraméterrel egészíti ki. Ezt a paramétert *környezeti paraméternek* fogom nevezni. A modell két feltételezésen alapul: egyrészről az ütközési valószínűség a részecske méretétől függ, másrészről az ütközési sebesség független a tömegtől. Ekkor:

$$X_{,t} = -c_{12}\frac{X^{1+r}Y^{1-r}}{X+Y}, \tag{4.3}$$

$$Y_{,t} = -c_{21}\frac{Y^{1+r}X^{1-r}}{X+Y}. \tag{4.4}$$

Fontos kiemelni, hogy a Sternberg törvényt a kollektív modellben elsősorban nem az egyes részecskéknek, hanem a populáció átlagos tömegének kell követnie.

Az r paraméter más értelmezése is lehetséges, ezt a későbbiekben részletesen is tárgyalom. Felteszem, hogy minden kavics anyaga azonos, más szavakkal a kavicspopuláció *homogén*, és így $c := c_{12} = c_{21}$ teljesül. Ekkor a c konstans kizárólag a modell idejének skálázására szolgál, így a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül $c \equiv 1$. A heterogén kavicspopuláció esetét a 4.1.3. rész tárgyalja.

A kollektív viselkedésről felteszem, hogy N elegendően nagy értéke mellett a sztochasztikus folyamatot a részecskék között zajló, nagy számú bináris ütközés valósítja meg, így például *spontán fragmentáció* nem játszik szerepet a tömegfejlődésben. Más sztochasztikus folyamatokhoz hasonlóan, a modell vizsgálatának meghatározó eszköze az ún. *Fokker-Planck egyenlet* (vagy más néven *mester egyenlet*). Ez egy, az eloszlás időfejlődését determinisztikus módon megadó PDE. Célom a folyamathoz rendelhető Fokker-Planck egyenlet meghatározása és alkalmazása a kollektív viselkedés megértésére.

Kapcsolat korábbi modellekkel

Az eddig ismertetett hipotézisek az ún. *koagulációs-fragmentációs* modellekre jellemzőek, (da Costa, 2015), különösen a nem-lineáris fragmentációhoz hasonlítanak, ami az ütközés következtében fellépő fragmentáció leírására szolgál. Modellünk akár a nem-lineáris fragmentáció (Cheng & Redner, 1988) egy speciális esetének is tekinthető. Érdemes megjegyezni, hogy az említett modellcsalád a szilárd testek törésénél általánosabb, természeti jelenségek tág körét (pl.: aeroszolok, polimerek vagy akár csillagködök időbeni változásai) vizsgálja. Mivel célom a kopási folyamat elemzése, két, az említett modellekben jellemzően nem szereplő feltételt is posztulálok:

1. felteszem, hogy az ütközések folyamán a relatív tömegveszteség kicsiny, az ütköző részecskék tömegük kis hányadát veszítik el,

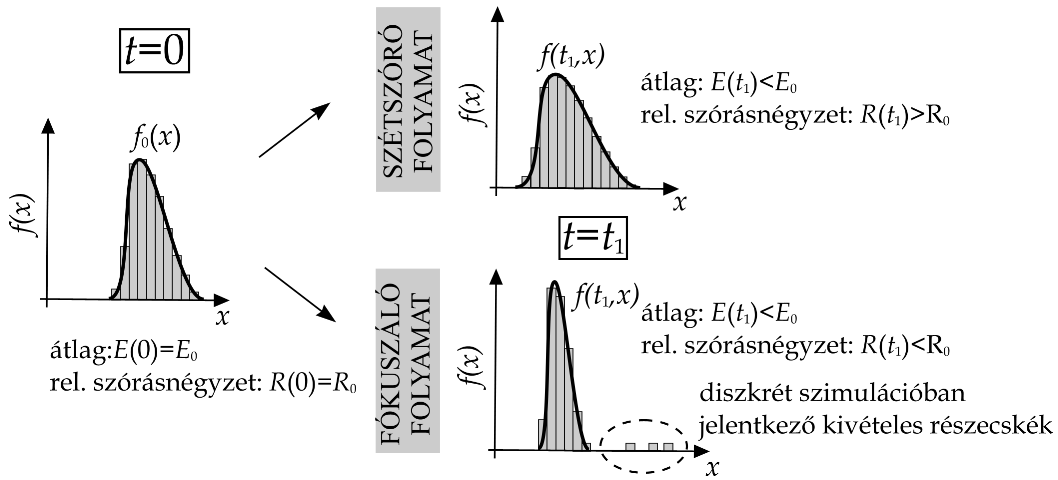
2. ezen, az ütközés során leváló kicsiny tömeget a továbbiakban figyelemen kivül hagyom.

Ez a megközelítés több előnyös tulajdonsággal rendelkezik. Egyrészről, a (4.3)-(4.4) kernel, mint ütközési kernel használata miatt a modell kompatibilis lesz a Sternberg törvénnyel, legalábbis statisztikai értelemben. Másrészről, arra számítunk, hogy a későbbiekben kiterjeszthető olyan módon, hogy statisztikai értelemben az elvárt geometriai viselkedés is teljesüljön. A kísérleti verifikáció lehetséges stratégiáit a fejezet végén tárgyalom.

Jelölések

Amint láttuk, a modell egyszerre tartalmazza az egyes részecskék méretfejlődését (tömegfejlődését) és a méreteloszlás evolúcióját. Mindkét esetben a méretről van szó, emiatt fontos, hogy ezek a jelölésben is tisztán elkülönüljenek: az egyes részecskék esetén maga a *méret* változik az időben, a kollektív modellben a *méreteloszlás változása* szerepel. A továbbiakban X és Y jelöli az egyes részecskék méretét (azaz tömegét), míg x és y az eloszlásfüggvények argumentumát jelöli. A részecskék időfejlődését tehát az $X(t), Y(t)$ függvények írják le, ezek idő szerinti deriváltjai rendre $X_{,t}(t), Y_{,t}(t)$. Az időfüggő méreteloszlást $f(x,t), f(y,t)$ jelöli, ahol az idő szerinti parciális derivált $f_{,t}(x,t), f_{,t}(y,t)$, és a méret szerinti parciális derivált pedig $f_{,x}(x,t), f_{,y}(y,t)$. A méreteloszlást dimenziótlanított formában számítom, tehát $f(x,t)$ egy *valószínűségi eloszlás* *sűrűségfüggvénye* és minden időpillanatban teljesíti a $\int_0^\infty f(x,.)\,\mathrm{d}x = 1$ feltételt. Az eloszlás várható értéke és szórásnégyzete rendre $E(t)$ és $W(t)$. A kollektív modellek jellemzésére elsősorban a $R(t) := W(t)/E(t)^2$ *relatív szórásnégyzetet* fogom használni. A relatív szórásnégyzet használatára a várható érték monoton csökkenése miatt van szükség, $W(t)$ idősora az eloszlás jellemzésére kevéssé használható.

A relatív szórásnégyzet segítségével definiálom a fókuszáló és a szétszóró folyamatot. Amennyiben egy kollektív folyamatban $f(x,t)$ időfejlődése olyan, hogy az $R(t)$ relatív szórásnégyzet az idő előrehaladtával csökken (nő), akkor a folyamatot *fókuszálónak* (*szétszórónak*) nevezem (4.1. ábra). Diszkrét populációkban megfigyelhető jelenség az ún. *kivételes ('outlier') részecskék megjelenése*, amelyek a populációtól leszakadva, lényegesen nagyobb tömegűek. Erről a 4.1.2. fejezetben írok részletesen.



4.1. ábra. A kavicspopuláció tömegfejlődése: egy *szétszóró folyamatban* a tömegeloszlás $R(t)$ relatív szórásnégyzete, akár empirikus hisztogramot (Carr, 1969), akár az $f(x,t)$ folytonos függvényt vizsgáljuk, nő. A folytonos modellben egy *fókuszáló folyamatot* csökkenő $R(t)$ jellemez, ugyanakkor egy diszkrét modellben, véges számú részecske esetén, megjelenhetnek az ún. *kivételes részecskék*, amelyek tömege jelentősen meghaladja a populáció tipikus tagjának méretét. Ezeket az ábrán a szaggatott ellipszis jelzi. A leszakadók nélküli sokaság relatív szórásnégyzete a folytonos modellhez hasonlóan csökken az idő előrehaladtával.

Az ütközési kernel általános alakja

Ahogy erre korábban utaltam, a kis tömegveszteségre vonatkozó feltételezésünk következménye, hogy az ütközési kernel megadható egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerként (Ernst & Pagonabarraga, 2007). Formálisan az $X(t)$ és $Y(t)$

tömegű, ütköző részecskék tömegére

$$-X_t = \psi^1(X,Y), \qquad (4.5)$$

$$-Y_t = \psi^2(X,Y), \qquad (4.6)$$

ahol $\psi^1(X,Y)$ és $\psi^2(X,Y)$ differenciálható, $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvények. A bináris folyamat szimmetriájából következik, hogy $\psi^1(X,Y) = \psi^2(Y,X)$, így a megkülönböztető jelölés elhagyható, és a kernelre a $\psi(.,.)$ jelölést használom a továbbiakban.

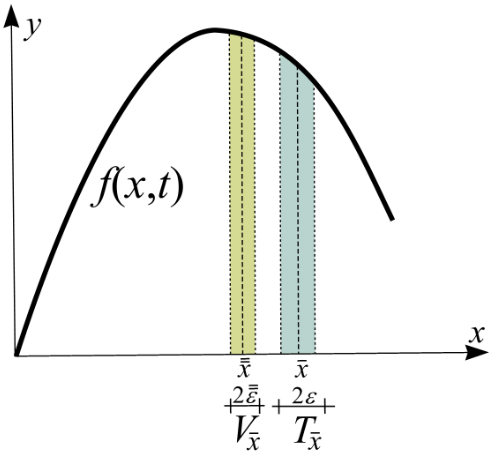
A Fokker-Planck egyenlet

A modell eddig ismertetett tulajdonságai lehetővé teszik a Fokker-Planck egyenlet felírását az ütközési kernelből (tehát nem szükséges további tagok bevezetése, amelyek a lekopott anyag szerepét tisztázzák). Egyben ez azt is jelenti, hogy a kollektív modell nem egy általános nemlineáris fragmentációs modell: míg az utóbbiakban állandó tömeg mellett vizsgálják a részecskék számának időfejlődését, addig az itt bemutatásra kerülő modellben a részecskék száma állandó és a (csökkenő) össztömeg időfejlődését számítom.

4.1. Tétel. *A $\psi(x,y)$ ütközési kernellel rendelkező kollektív kopási modellben az $f(x,t)$ tömegeloszlás függvénye a*

$$f_{,t}(x,t) = \left(f(x,t) \int_0^\infty f(y,t)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right)_{,x} = $$
$$f_{,x}(x,t) \int_0^\infty f(y,t)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y +$$
$$f(x,t) \int_0^\infty f(y,t)\psi_{,x}(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (4.7)$$

Fokker-Planck egyenletet követi.



4.2. ábra. A 4.1. Tétel bizonyításának jelölései

Bizonyítás. Tekintsünk az $f(x,t)$ tömegeloszlást az $x = \bar{x}$ helyen (4.2. ábra). A $\bar{x}$ tömegű részecske ütközés során bekövetkező tömegvesztéségének $m_1(\bar{x})$ várható értéke

$$m_1(\bar{x}) := -\int_0^\infty f(y,t)\psi(\bar{x},y)\,\mathrm{d}y. \qquad (4.8)$$

Hasonlóan, definiáljuk a

$$m_2(\bar{x}) := -\int_0^\infty f(y,t)\psi_{,x}(\bar{x},y)\,\mathrm{d}y \qquad (4.9)$$

mennyiséget. Legyenek ε és Δt rögzített, kicsiny, pozitív számok. A $\bar{x}$ tömeg képe a kernel egyenlet alatt:

$$\bar{\bar{x}} := \bar{x} + m_1(\bar{x})\Delta t. \qquad (4.10)$$

Tekintsük a $x = \bar{x}$ körüli $T_{\bar{x}} : [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$ tartományt! A $T_{\bar{x}}$ tartomány szélei a következő kifejezés szerint képződnek le a kernel egyenlet alatt:

$$\bar{x} \pm \varepsilon + \int_0^\infty f(y,t)\psi(\bar{x} \pm \varepsilon, y)\,\mathrm{d}y\Delta t =$$
$$\bar{x} \pm \varepsilon + m_1(\bar{x})\delta t \pm m_2(\bar{x})\varepsilon\Delta t + O(\varepsilon^2). \qquad (4.11)$$

A leképzett tartományt jelölje $V_{\bar{x}}$! A $T_{\bar{x}}$ tartomány mértéke 2ε, a $V_{\bar{x}}$ tartomány pedig

$$2\bar{\bar{\varepsilon}} := 2\varepsilon + 2\varepsilon m_2(\bar{x})\Delta t + O(\varepsilon^2) \qquad (4.12)$$

széles. Az $f(x,t)$ függvény egy valószínűségi sűrűségfüggvény, ezért a $T_{\bar{x}}$ tartomány felett vett integrálja megegyezik a $V_{\bar{x}}$ tartomány felett vett integráljával. Mivel ε tetszőlegesen kicsiny, írható:

$$f(\bar{x}, t)2\varepsilon = f(\bar{\bar{x}}, t + \Delta t)2\bar{\bar{\varepsilon}}. \tag{4.13}$$

Egyszerűsítve 2ε számmal, sorfejtést végezve $x = \bar{x}$ körül és Δt szerint, továbbá ε szerint csak az elsőrendű tagokat megtartva írhatjuk

$$f(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t + \Delta t)+$$
$$f(\bar{x}, t)m_2(\bar{x})\Delta t + f_{,x}(\bar{x}, t)m_1(\bar{x})\Delta t. \tag{4.14}$$

Algebrai átalakítások után a $\Delta t \to 0$ határátmenetet elvégezve, $\bar{x}$ tetszőleges volta és az (4.8)-(4.9) egyenletekből a tétel állítása következik. □

Az általánosság megszorítása nélkül az időfejlődés a $t = 0$ időpontban kezdődik és feltesszük, hogy a $f(x, 0) \equiv f_0(x)$, a $[0, \infty]$ tartományon legalább C^1 simaságú kezdeti tömegeloszlás ismert. Ekkor (4.7) a kezdeti feltétellel együtt egy jól definiált Cauchy-feladatot határoz meg. Jelölje E_0, W_0 és R_0 rendre a kezdeti eloszlás várható értékét, szórásnégyzetét és relatív szórásnégyzetét! A várható érték és a szórásnégyzet időfejlődése a Fokker-Planck egyenlet segítségével könnyen számítható, amennyiben a kezdeti eloszlásra $\lim_{x\to\infty} f_0(x) = 0$ teljesül. A várható érték esetében

$$E_{,t} = \int_0^\infty f_{,t} x \,\mathrm{d}x =$$
$$-\int_0^\infty f(x, t) \int_0^\infty f(y, t)\psi(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

Itt az első egyenlőség az $f(x, t)$ függvényre tett regularitási feltevések miatt teljesül, a második parciális integrálás következménye. A szórásnégyzet időfejlődése analóg módon írható fel.

Érdemes megfigyelni, hogy szemben a Fokker-Planck egyenletek többségével, esetünkben (4.7) csak az *advekciós tagot* tartalmazza (Risken & Frank, 1996). Ez a determinisztikus kernel következménye, sztochasztikus kernel esetén megjelenne a *diffúziós tag* is. Mivel egyelőre nem áll rendelkezésre részletes kísérleti eredmény, a determinisztikus kernellel nyert modellt vizsgálom, amely analitikusan egyszerűbben kezelhető.

A kernel egyenletekről

Már utaltam rá, de érdemes aláhúzni: az ütközési kernel fizikai alátámasztása összetett feladat. Az irodalomban javasolt kernel egyenletek nagy változatosságát mutatja be (Meyer & Deglon, 2011). Ezzel szemben a vonatkozó matematikai irodalom a $\psi(X, Y)$ függvényt egyszerű, a precíz, analitikus elemezést lehetővé tevő alakban veszi fel. Munkánkban egy olyan kernelt céloztunk meg, ami az analitikus vizsgálat lehetősége mellett valós, fizikai interpretációval rendelkezik.

Röviden bevezetek két, egyszerű kernelt, amelyekkel a Fokker-Planck egyenlet analitikusan megoldható. Az eredmények rámutatnak arra, hogy fizikai megalapozottságuk megkérdőjelezhető. Ezek után az (4.3)-(4.4) összefüggésekben bevezetett, ütközési kernel vizsgálatát végzem el.

Elsőként bevezetem az *összegzési kernelt*, az általa nyert mennyiségeket $\{.\}^+$ formában jelölöm. Ebben az esetben a tömegveszteség sebessége az ütköző tömegek összegével, azaz a teljes tömeggel arányos:

$$\psi^+(X,Y) := X + Y. \tag{4.16}$$

4.2. Lemma. *Az összeg kernellel meghatározott kollektív modellben a relatív szórásnégyzet a $R^+(t) = R_0 e^{2t}$ függvényt követi.*

Bizonyítás. Az eloszlás első és második momentumának időfejlődése a Fokker-Planck egyenlet ismeretében könnyen felírhatjuk. Követve (4.15) gondolatmenetét, a $E^+(t)$ átlag és a $W^+(t)$ szórásnégyzet időfejlődését meghatározó kezdeti érték feladatok a következők:

$$\begin{cases} E^+_{,t} & = -2E^+ \\ E^+(0) & = E_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} W^+_{,t} & = -2W^+ \\ W^+(0) & = W_0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Tehát mind a várható érték, mind a szórásnégyzet exponenciális lecsengést mutat ($E^+(t) = E_0 e^{-2t}$ és $W^+(t) = W_0 e^{-2t}$). Ebből az $R^+(t)$ relatív szórásnégyzet exponenciális növekedése adódik, hiszen

$$R^+(t) = \frac{W^+(t)}{E^+(t)^2} = \frac{W_0}{E_0^2} e^{2t} = R_0 e^{2t}. \tag{4.19}$$

□

4.1. Megjegyzés. Az összeg kernellel adott kollektív kopási modell szétszóró, függetlenül az f_0 kezdeti tömegeloszlástól.

Hasonlóan vizsgálható a *szorzat kernel*, amit a $\{.\}^*$ jel különböztet meg. Formálisan

$$\psi^*(X,Y) := XY. \tag{4.20}$$

4.3. Lemma. *A szorzat kernellel meghatározott kollektív modellben a relatív szórásnégyzet állandó, azaz $R^*(t) = R_0$ minden $t \geq 0$ időpontra.*

Bizonyítás. A szorzatkernel esetén $E^*(t)$ és $W^*(t)$ időfejlődésére a következő, kapcsolt kezdeti érték feladatokat kapjuk:

$$\begin{cases} E^*_{,t} & = -(E^*)^2 \\ W^*_{,t} & = -2W^* E^* \\ E^*(0) & = E_0 \\ W^*(0) & = W_0 \end{cases} \tag{4.21}$$

A megoldás szerint az átlag és a szórásnégyzet lecsengése polinomiális, hiszen az előzőek megoldása

$$E^*(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{E_0}} \tag{4.22}$$

$$W^*(t) = \frac{W_0}{E_0}^2 \left(t + \frac{1}{E_0}\right)^{-2}, \tag{4.23}$$

amely kifejezések időben állandó $R^*(t)$ relatív szórásnégyzetet határoznak meg:

$$R^*(t) = \frac{W^*(t)}{E^*(t)^2} = \frac{W_0}{E_0^2} = R_0. \tag{4.24}$$

□

4.2. Megjegyzés. A szorzat kernellel adott kollektív kopási modell se nem fókuszáló, se nem szétszóró. Azonban ez nem jelenti az $f(x,t)$ függvény időbeli állandóságát.

4.3. Megjegyzés. A szorzat kernellel adott kollektív kopási modellben a tömeg várható értékének lecsengése polinomiális ($E^*(t) = (t + E_0^{-1})^{-1}$), ami nem teljesíti a Sternberg-törvény (Sternberg, 1875) posztulátumát az exponenciális lecsengésre.

Az összetett kernel analitikus vizsgálata

A Sternberg törvénnyel és a bináris ütközések fizikájával összhangban lévő, a (4.3) és (4.4) egyenletekkel adott kernelt vizsgálom. A kernelt *összetett kernelnek* nevezem és a $\{.\}^c$ jellel különböztetem meg:

$$\psi^c(X,Y) := \frac{X^{1+r}Y^{1-r}}{X+Y}, \tag{4.25}$$

ahol $0 \leq r \leq 1$ a rögzített környezeti paraméter. Az összetett kernel esetében (a Fokker-Planck egyenletből származtatott), az átlag és a szórásnégyzet időfejlődését leíró egyenletek integro-differenciálegyenletek. Ezek analitikus megoldása nem ismert. Az analitikus elemzéshez a következő, egyszerűsített eseteket elemzem

(a) A (4.25) egyenletet a csonkolt Taylor-sorával helyettesítem, és egy tetszőleges kezdeti eloszlás időfejlődését vizsgálom a módosított modellben.

(b) A (4.25) kernel hatását vizsgálom egy speciális f_0 kezdeti eloszlás mellett. Tételezzük fel, hogy a kezdeti időpontban *minden* részecske pontosan azonos tömegű! Ekkor f_0 egy Dirac-delta-függvénnyel adható meg. Tekintve, hogy a (4.7) mester egyenlet nem tartalmaz diffúziós tagot, érdemes az egy pontra koncentrált tömeg viselkedését vizsgálni.

Az (a) egyszerűsítéshez az összetett kernel csonkolt Taylor-sorát az $y = x$ helyen állítom elő és a $\{.\}^{c,T}$ jelöléssel hivatkozom rá:

$$\psi^{c,T}(x,y) := \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{2}\right)(y-x) + O((y-x)^2). \tag{4.26}$$

4.4. Tétel. *A $\psi^{c,T}$ kernellel jellemzett modellben az $R(t)$ relatív szórásnégyzet $r > 1/2$ esetben exponenciálisan csökken, $r = 1/2$-re időben állandó és $r < 1/2$ esetben exponenciális növekedést mutat.*

Bizonyítás. Hasonlóan az összeg és szorzat kernelekhez, az átlag és a szórásnégyzet időfejlődését leíró kezdeti érték feladatok a (4.7) Fokker-Planck egyenletből származtathatóak:

$$\begin{cases} E^{c,T}_{,t} = -\frac{1}{2}E^{c,T} \\ E^{c,T}(0) = E_0 \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} W^{c,T}_{,t} = -\left(\frac{1}{2}+r\right)W^{c,T} \\ W^{c,T}(0) = W_0 \end{cases} \tag{4.28}$$

Ezen, közönséges differenciálegyenletek megoldásából a relatív szórásnégyzet időfejlődésére kapjuk:

$$R^{c,T}(t) = \frac{W^{c,T}(t)}{E^{c,T}(t)^2} = \frac{W_0}{E_0^2} e^{\left(\frac{1}{2}-r\right)t} = R_0 e^{\left(\frac{1}{2}-r\right)t}. \tag{4.29}$$

□

Tehát $r = 1/2$ kritikus, ennél nagyobb paraméter esetén exponenciális lecsengést, ennél kisebb paraméterre pedig exponenciális növekedést látunk. Vegyük észre, hogy a várható érték – Sternberg törvénnyel összhangban lévő exponenciális lecsengése – *független* a környezeti paraméter értékétől, a szórásnégyzet időfejlődése pedig függ tőle. A modell ezen tulajdonsága, nem meglepő módon, a teljes kernellel végzett szimulációkban is megjelenik. A jövőben elvégzendő kísérleti vizsgálatokban az egyik cél a modell ezen előrejelzésének kísérleti igazolása vagy megcáfolása. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy a csonkolt Taylor-sor magasabb rendig történő előállításával az eloszlás egyre magasabb momentumaira kapunk összetett differenciálegyenlet-rendszereket.

Az (b) egyszerűsítés esetében először megmutatom, hogy azonos méretű részecskékből álló populáció az összetett kernellel adott kollektív modellben végig azonos méretű részecskéket tartalmazó kavicspopulációt ad, függetlenül az r paraméter értékétől.

4.1. Definíció. Legyen $q \in \mathbb{R}$ rögzített. A Dirac-delta-függvény:

$$\delta_q(x) := \begin{cases} +\infty, & x = q \\ 0, & x \neq q \end{cases} \tag{4.30}$$

ahol $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_q(x)\,\mathrm{d}x = 1$ teljesül.

4.5. Tétel. *Az általánosság megszorítása nélkül legyen* $f_0 = \delta_1$. *Ekkor* $E_0 = 1$ *és* $W_0 = 0$. *Tetszőleges* $t > 0$ *időpontban* $f(x,t) = \delta_{c(t)}(x)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy bármely $t^* \geq 0$ időpontban a sűrűségfüggvény $f(x,t^*) = \delta_{c(t^*)}$ alakú. Ekkor $E^c(t^*) = c(t^*)$ és $W^c(t^*) = 0$ teljesül. Kihasználva a Dirac-delta-függvény tulajdonságait, következik hogy

$$\int_0^{\infty} f(y,t^*)\psi^c(x,y)\,\mathrm{d}y = \psi^c(x,c(t^*)). \tag{4.31}$$

A várható érték időfejlődését közvetlenül számíthatjuk:

$$E^c_{,t}(t^*) = \int_0^{\infty} f_{,t}(x,t^*)x\,\mathrm{d}x = \\ -\int_0^{\infty} f(x,t^*)\psi^c(x,c(t^*))\,\mathrm{d}x = \\ -\psi^c(c(t^*),c(t^*)) = -\frac{1}{2}c(t^*), \tag{4.32}$$

ahol felhasználtam a (4.7) összefüggés első egyenlőségét, majd parciális integrálást hajtottam végre. A szórásnégyzet időfejlődése hasonló módon adódik:

$$W^c_{,t}(t^*) = \\ \int_0^{\infty} f_{,t}(x,t^*)x^2\,\mathrm{d}x - 2E^c_{,t}(t^*)E^c(t^*) = \\ -2\int_0^{\infty} f(x,t^*)\psi^c(x,c(t^*))x\,\mathrm{d}x + c(t^*)^2 = \\ -c(t^*)^2 + c(t^*)^2 = 0. \tag{4.33}$$

Ez azt mutatja, hogy az eloszlás szórásnégyzete nem változik, végig a kezdeti $W_0 = 0$ értékű. Következik, hogy az eloszlást a teljes evolúcióban a Dirac-delta-függvény adja meg. □

4.4. Megjegyzés. Felhasználva az iménti (4.32) eredményt, a Dirac-delta nem zérus értékű helyét megadó $c(t)$ függvényre a $c_{,t}(t) = -\frac{1}{2}c(t)$ egyenlet adódik, $c(0) = 1$ kezdeti értékkel. Tehát $c(t) = \exp(-\frac{t}{2})$.

Maradva a (b) egyszerűsítés területén, a következőkben az imént vizsgált Dirac-delta eloszlást *stabilitását* vizsgálom. Megmutatom, hogy a Dirac-delta eloszlás az r paraméter függvényében lehet *stabil* és *instabil* is.

4.2. Definíció. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített kicsiny szám, és a $f_0(x) = \delta_1(x)$ eloszlás *per-*

turbált alakja legyen

$$\hat{f}_0(x) := (1-\varepsilon)\delta_1(x) + \frac{\varepsilon}{2}\delta_{1-\varepsilon}(x) + \frac{\varepsilon}{2}\delta_{1+\varepsilon}(x). \tag{4.34}$$

4.6. Tétel. *A kollektív kernellel adott modellben $f_0(x) = \delta_1(x)$ eloszlás lokálisan stabil, ha $r > 1/2$ és instabil, ha $r < 1/2$.*

Bizonyítás. Jelölje az eloszlás második momentumát M_2^c, azaz

$$M_2^c(t) := \int_0^\infty f(x,t)x^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.35}$$

Könnyű megmutatni, hogy

$$\int_0^\infty \hat{f}_0(y)\psi^c(x,y)\,\mathrm{d}y = \psi^c(x,1) + O(\varepsilon^3), \tag{4.36}$$

továbbá, hogy $E_0^c = 1$ és $M_2^c(0) = 1+\varepsilon^3$. Célunk $R_{,t}^c$ előjelének vizsgálata a $t = 0$ időpillanatban. Mivel

$$R^c(t) = \frac{M_2^c(t)}{E^c(t)^2} - 1, \tag{4.37}$$

elegendő a $E^c(0)M_{2,t}^c(0) - 2M_2^c(0)E_t^c(0)$ kifejezés előjelének számítása. Az (4.7) egyenletet, parciális integrálást és a (4.36) egyenlet alkalmazva

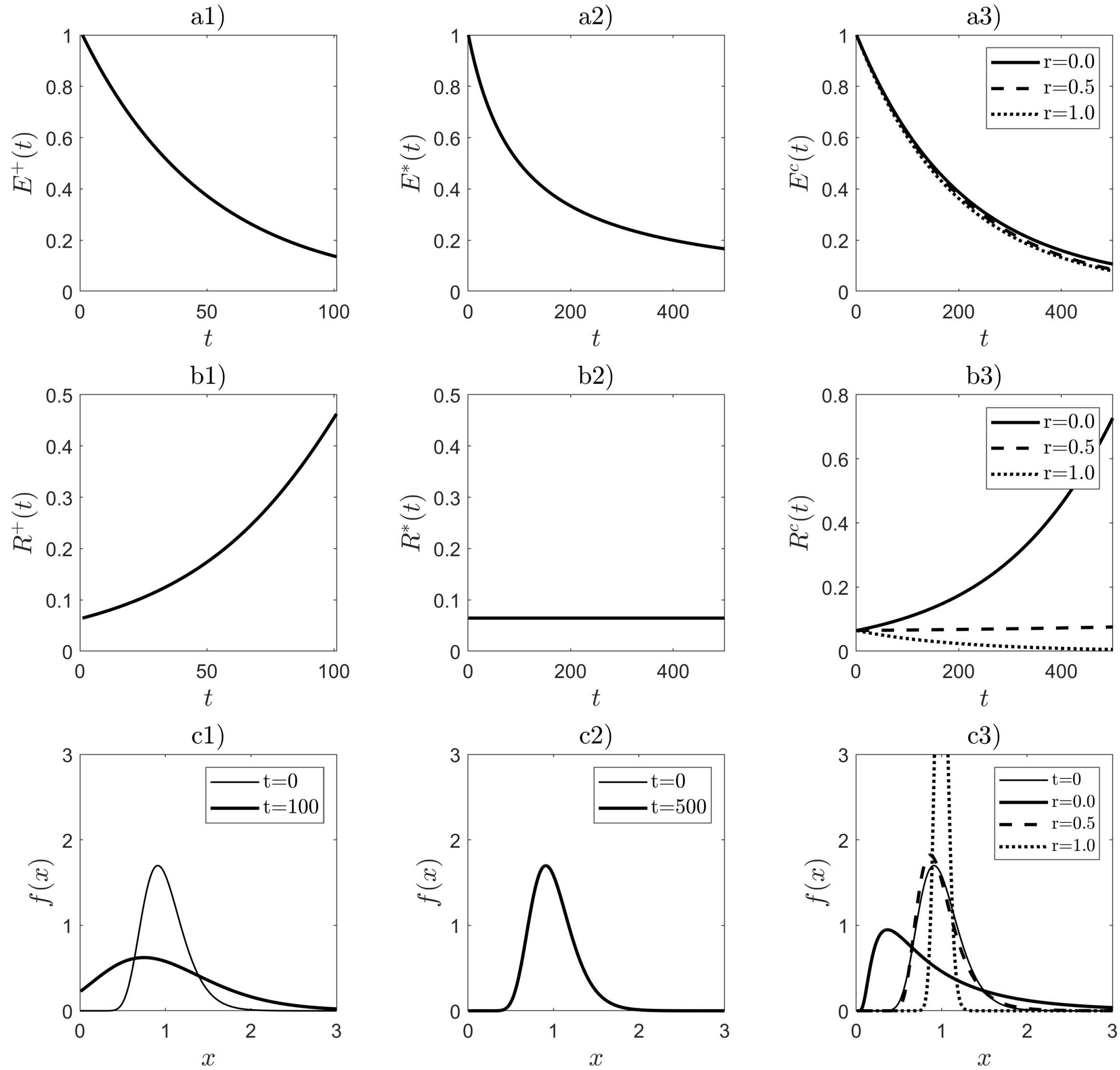
$$\begin{aligned} &E^c(0)M_{2,t}^c(0) - 2M_2^c(0)E_t^c(0) = \\ &-2\int_0^\infty \hat{f}_0(x)\psi^c(x,1)x\,\mathrm{d}x + \\ &2(1+\varepsilon^3)\int_0^\infty \hat{f}_0(x)\psi^c(x,1)\,\mathrm{d}x = \\ &\varepsilon^3\left(\frac{1}{2} - r\right) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \tag{4.38}$$

ahol az utolsó egyenlőséget elemi algebrai átalakításokkal kaptam. Elegendően kicsiny ε paraméterre a kifejezés előjele r-től függ, az $r = 1/2$ érték kritikus. $r < 1/2$ esetén $R_{,t}^c$ pozitív, tehát a relatív szórásnégyzet nő. Ez azt jelenti, hogy az azonos méretű részecskékből álló populáció *instabil*, perturbáció hatására szétszóró folyamatot látunk. $r > 1/2$ esetén $R_{,t}^c$ negatív, ami a Dirac-delta eloszlás *stabilitását* mutatja kis perturbációkkal szemben. □

A tetszőleges, folytonos eloszlásból indított, (4.25) kernellel adott modell viselkedését az alábbiakban ismertetendő numerikus eljárással vizsgáltam. Az ezen részben bemutatott összeg, szorzat és összetett kernellel adott modellek viselkedését összegzi az 4.3. ábra. Mielőtt rátérnék a numerikus vizsgálatok ismertetésére, szükséges a modell r paraméterének részletesebb értelmezése.

Az r paraméter lehetséges értelmezései

Természeti folyamatokban mind a sebesség, mind az ütközési valószínűség függhet a részecske méretétől: *lamináris áramlás* esetén a részecskék relatív sebessége és az ütközési valószínűség egyaránt a (lineáris) mérettel arányos. Ezzel szemben *turbulens áramlásban* a sebesség fordítottan arányos a lineáris mérettel, az ütközési valószínűség pedig az ütközési keresztmetszettel arányos. A (4.25) ütközési kernel r paramétere mind a sebesség, mind az ütközési valószínűség hatását tartalmazza, ezért a paraméter megválasztása többféle módon interpretálható. A modell a kimenetelek egy egyparaméteres családját határozza meg: ha a sebesség arányos X^a-val, és az ütközési valószínűség X^b-vel, akkor $r \simeq a+b$.



4.3. ábra. Egy kezdetben ($t = 0$) lognormális eloszlás sűrűségfüggvényének időfejlődése különböző kernel egyenletek esetén, a Fokker-Planck egyenlet alapján. Összegzési kernel: a1,b1,c1. Szorzat kernel: a2,b2,c2. Összetett kernel: a3,b3,c3. Első sor (a1,a2,a3): $E(t)$ várható érték. Második sor(b1,b2,b3): $R(t)$ relatív szórásnégyzet. Harmadik sor(c1,c2,c3): kezdeti ($t = 0$, vékony vonal) és végső sűrűségfüggvény $f(x,t)$ (vastag vonalak).

A fentiek alátámasztására, vizsgáljuk meg r realisztikus értékét két, szélsőséges esetben. A lamináris áramlást lineáris sebességprofil jellemzi. Két részecske ütközésének feltétele, hogy pályájuk metssze egymást. Gömb alakot feltételezve kapjuk, hogy az ütközési valószínűség $\sim X^{2/3}$ mennyiséggel arányos, azaz $r \simeq 2/3$. A másik határeset a turbulens áramlás, ahol ekvipartíciót vehetünk alapul, azaz a részecskék mozgási energiája méretüktől független (Uberoi, 1957). Ekkor a sebesség

$X^{-1/2}$ mennyiséggel arányos. Mivel a keresztmetszet $X^{2/3}$-mal arányos, az ütközési valószínűségre a $X^{1/6}$ adódik, azaz $r \simeq 1/6$. Látható, hogy a két extrém esethez becsült r érték a kritikus $r_{\text{crit}} = 1/2$ értéktől távol, annak két oldalán helyezkedik el. Ez alapján nyugodt, állandó környezeti feltételek mellett fókuszáló, turbulens helyzetben pedig szétszóró folyamatra számítunk. Az ismertetett becslés részletes diszkussziója (Sipos *et al.*, 2021) D mellékletében olvasható.

4.1.2. Numerikus eredmények

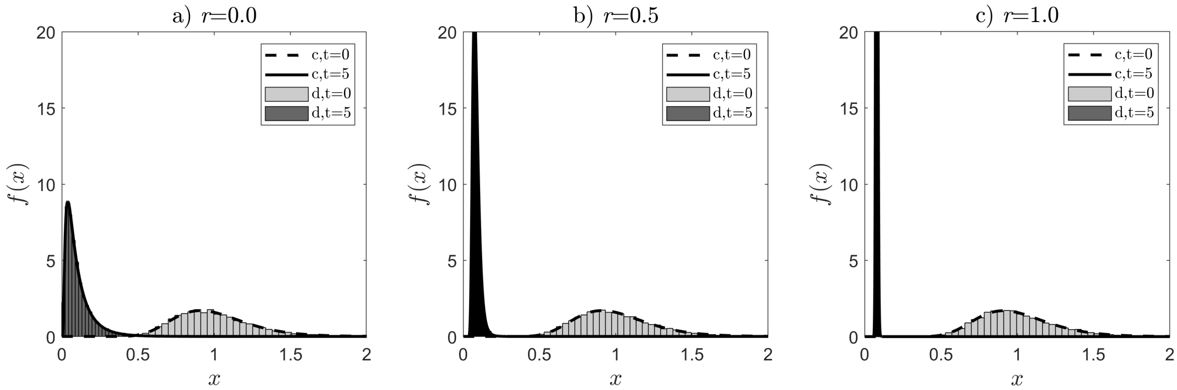
A kollektív modell numerikus vizsgálatára alapvetően két lehetőség kínálkozik:

1. Adott kernellel az (4.7) Fokker-Planck egyenlet segítségével az $f(x,t)$ függvény időfejlődésének közvetlen szimulációja. Ezt a továbbiakban *kontinuum megközelítésnek* nevezem. A szimulációhoz a Matlab környezethez fejlesztett Chebfun eszköztárat (Driscoll *et al.*, 2014) használtam, amely a függvényt Csebisev sorával reprezentálja és a szingularitás-mentes numerikus szimulációt az operátor exponenciálisának számításával hajtja végre.

2. A kernel egyenlet felhasználásával véges számú mintában nagy mennyiségű, véletlenszerű bináris ütközést végrehajtva. Ezt az eljárást *diszkrét* megközelítésnek nevezem. A szimulációkat saját készítésű Matlab kóddal hajtottam végre. Az N darab részecskéből álló populációban összesen $MN/2$ ütközés következik be, ahol M rögzített szám, továbbá a bináris ütközésben bekövetkező tömegveszteséget a diszkretizált kernel egyenlet alapján számítom. A számítás az f_0 kezdeti eloszlásból véletlenszerűen húzott N darab részecskével kezdődik. Az ütközésre kerülő pár mindkét tagját egyenletes valószínűséggel választjuk az N elemű populációból. A pár mindkét tagjának tömegveszteségét az (4.25) ψ^c ütközési kernellel, a klasszikus Euler sémát követve $\Delta t/M$ időlépéssel határozom meg. A tömegek csökkentése után a részecske párt visszahelyezem a populációba. A folytonos modellel történő összehasonlításhoz a szimulációkban $N = 5000$, $M = 10$ és $\Delta t = 0.01$ értékű volt.

Fókuszáló és szétszóró tartományok

Az összetett kernel viselkedését vizsgáltam mind a folytonos, mind a diszkrét numerikus megoldással. Az eredményeket a 4.4. ábra foglalja össze. A kezdeti f_0 eloszlás lognormális volt.



4.4. ábra. Lognormális eloszlás sűrűségfüggvényének időfejlődése az összetett kernellel, folytonos (jele: c) és diszkrét (jele: d) módon szimulálva. A kontroll-paraméter értékei rendre $r = 0.0$ (bal oldalon), $r = 0.5$ (középen) és $r = 1.0$ (jobb oldalon), a $t = 0$ és $t = 5.0$ közötti időintervallumban. A hisztogramok a diszkrét szimuláció eredményei, a szaggatott és folytonos vonallal jelzett függvények rendre a folytonos szimuláció kezdeti és végső eloszlásai. A diszkrét és a folytonos modellek eredménye jó egyezést mutat.

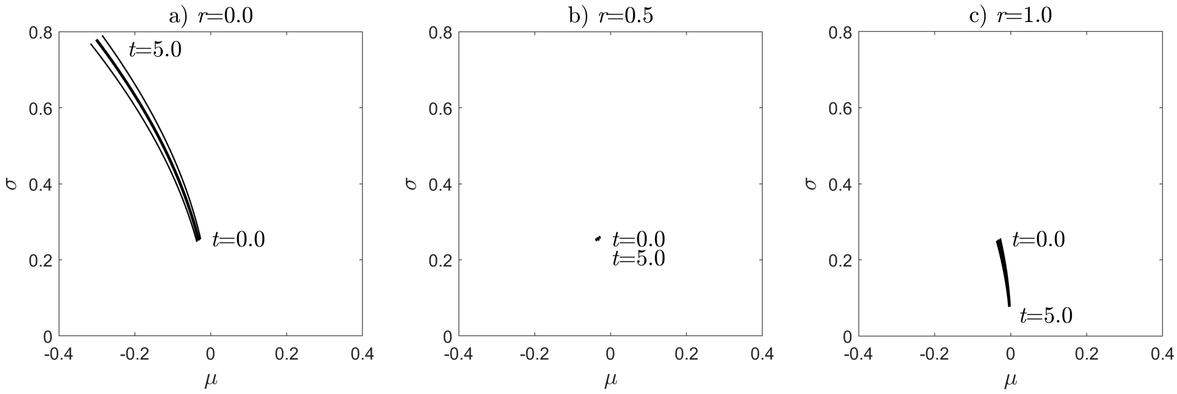
A Fokker-Planck egyenlet analitikus és numerikus elemzése során ugyanazt találtam: az $r = 0.5$ érték *kritikus*, a kollektív kopás két tartományát választja el, amelyekben az $R(t)$ relatív szórásnégyzet lefutása eltérő:

(i) $r > 0.5$ esetén a folyamat *fókuszáló*, $R(t)$ monoton csökken és aszimptotikusan megközelíti az $R(t) = 0$ értéket. Ekkor a tömegeloszlás egy Dirac-delta függvényhez tart. A paraméterérték alacsony energiájú környezetet ír le, amelyben a szelektív szállítás szegregáló hatását a kopás tovább erősíti.

(ii) $r < 0.5$ esetén *szétszóró* folyamatot látunk, $R(t)$ monoton nő. Ez a szelektív szállítás hatását gyengíti. A paraméter ezen értékeit magasabb energiaszintnek feleltethetjük meg.

Lognormális eloszlás illesztése

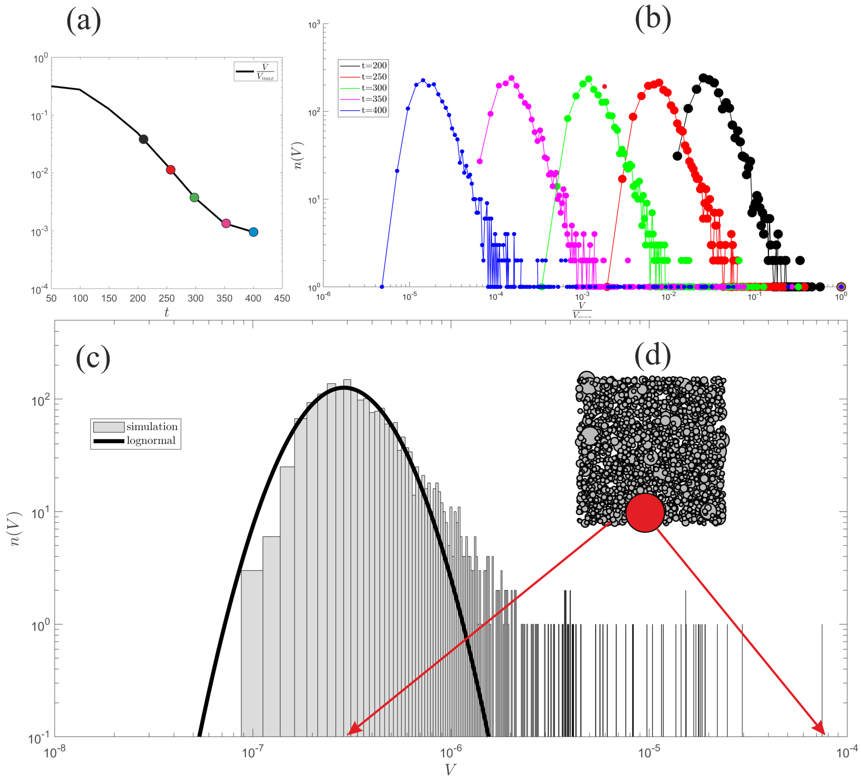
Egyszerű behelyettesítéssel igazolható, hogy a lognormális eloszlás a (4.7) Fokker-Planck egyenletnek nem invariáns megoldása (azaz egy kezdetben lognormális tömegeloszlás nem marad lognormális), azonban az evolúció során megfigyelhető tömegeloszlás görbéje emlékeztet a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényére. Ennek vizsgálatára a numerikusan kapott diszkrét eloszlásokra lognormális eloszlást illesztettem (legkisebb négyzetek módszerével). Az illesztett eloszlást meghatározó két paraméter, μ és σ időfejlődését mutatja a 4.5. ábra különböző, rögzített r értékek mellett. Az $r = 1/2$ kritikus volta itt is megfigyelhető: amíg az eredetileg lognormális eloszlás szinte invariáns $r = 1/2$ mellett, μ és σ időfejlődése ellentétes irányú $r = 0.0$ és $r = 1.0$ esetén. Az illesztés 95%-os konfidenciaintervallumának feltüntetése visszaigazolja az intuitív megfigyelést: az evolúcióban keletkező eloszlások közel vannak a lognormálishoz, gyakorlati munkában a tömegleoszlás lognormális approximációja elfogadható hiba mellett végezhető.



4.5. ábra. Az összetett kernellel számított eloszlásra illesztett lognormális eloszlás μ és σ paramétereinek időfejlődése. A környezeti paraméter értékei rendre $r = 0.0$ (bal oldalon), $r = 0.5$ (középen) és $r = 1.0$ (jobb oldalon), a $t = 0$ és $t = 5.0$ közötti időintervallumban. A vastag folytonos vonal jelzi a legjobb illesztést, a vékony vonalak a 95%-os konfidenciaintervallumot jelölik.

Kivételes részecskék: véges minták anomáliái

A diszkrét numerikus eljárásban (a fenti, $N = 5000$-es részecskeszámnál kisebb populációban) érdekes jelenséget figyelhetünk meg: ún. *kivételes részecskék* jelennek meg, amelyek tömege lényegesen meghaladja a populációt jellemző részecsketömeget. Erre a jelenségre utal a 4.1. ábra. A kontinuum megközelítés a modell viselkedését mutatja be sima $f_0(x)$ kezdeti feltétel esetén. A 4.6. ábrán a tömegeloszlás időfejlődése szerepel $r = 0.6$ és $N = 2000$ paraméterértékek mellett. A hisztogram meghatározó részére jól illeszthető lognormális eloszlás. Azonban, van 12 részecske, amelyek tömege érdemben nagyobb a lognormális eloszlás alapján várhatónál, és közülük egy tömege az eloszlás medián értékének 150-szerese (azaz átmérője kb. 5.3-szoros). Ez alapján fókuszáló paramétertartományban előfordul, hogy ámbár a részecskék nagy többségére teljesül a fókuszáló jelleg, lesz néhány, ami "lemarad" az eloszlástól, tömegük érdemben nagyobb marad. A megfigyelt jelenség még $r{\simeq}0.7$ paraméternél is könnyen reprodukálható a diszkrét szimuláció segítségével. Megfigyelhető, hogy a kivételes részecskéktől eltekintve a populáció tömegeloszlása a folytonos modellhez közeli evolúciót mutat. A kivételes részecskék eltávolításával nyert, csonkított tömegeloszlást jelölje $f^{\star}(x, t_1)$! Az $f^{\star}(x, t_1)$ eloszlás $R^{\star}$ relatív szórásnégyzete a korábbiakban bemutatott módon viselkedik, jól elkülöníthető a fókuszáló és a szétszóró paramétertartomány.



4.6. ábra. $N = 2000$ részecskét tartalmazó minta szimulációs eredménye. (a) az átlagos térfogat maximális térfogattal normált időfejlődése, (b) az $f(x,t)$ tömegeloszlás időfejlődése. A zöld görbét ($t = 300$) mutatja kinagyítva a (c) panel. Az ábrázolt eloszlás eléréséhez minden részecske átlagosan 300 ütközési eseményben vett részt. A logaritmikus skálán felvett hisztogram a numerikus eredmény, a vastag fekete görbe az adatokra illesztett lognormális eloszlás. A jobb oldalon jól megfigyelhetőek a kivételes részecskék. Az ábra (d) része a részecskéket véletlenszerűen, de méretarányosan egy négyzetbe rajzolva mutatja. Egy nagy és egy kis részecske hisztogramon vett elhelyezkedését mutatják a nyilak.

A jelenség robusztusságának vizsgálatához tegyük fel, hogy az N elemű mintában egy kivételével minden részecske tömege X, és a kivételes részecske tömege aX, ahol $a \gg 1$. A modellben kétfajta bináris ütközés következhet be:

(i) *A-típusú esemény*: két, X tömegű részecske ütközése,

(ii) *B-típusú esemény*: az ütközés egyik résztvevője a kivételes részecske.

Elemi diszkrét valószínűségi megfontolások alapján az A-típusú esemény valószínűsége $(N-2)/N$, a B-típusúé pedig $2/N$. Az A-típusú eseményben az X részecskék átlagos $\bar{X}$ tömege a Δt időtartamúnak feltételezett ütközés után:

$$\bar{X} = \frac{2(X - X/2\Delta t) + (N-3)X}{N-1} = X - \frac{X}{N-1}\Delta t. \tag{4.39}$$

Kiszámítva az $aX/\bar{X}$ kifejezést, majd a Δt szerinti csonkolt Taylor-sort $\Delta t = 0$ körül első rendig előállítva kaphatjuk az a paraméter A-típusú esemény esetén érvényes, $a^A_{,t}$ idő szerinti deriváltját:

$$a^A_{,t} = \frac{a}{N-1}. \tag{4.40}$$

A B-típusú esemény esetében mind a kivételes, mind az átlagos részecske az összetett kernel szerint kopik:

$$(aX)_{,t} = -\frac{a^{1+r}X}{1+a}, \tag{4.41}$$

$$X_{,t} = -\frac{a^{1-r}X}{1+a}. \tag{4.42}$$

A második összefüggés használható az X tömegű részecskét $\bar{X}$ átlagos tömegének számításához. Most a $\frac{aX-(aX)_{,t}\Delta t}{X-\bar{X}}$ kifejezés $\Delta t = 0$ körüli csonkolt Taylor-sorának segítségével, algebrai átalakításokat követően kapom az $a^B_{,t}$, B-típusú eseményhez tartozó deriváltat:

$$a^B_{,t} = -\frac{a^{1+r}}{1+a} + \frac{a^{2-r}}{(1+a)(N-1)}. \tag{4.43}$$

Hajtsunk végre N darab ütközést! Figyelembe véve A és B események valószínűségét, írható hogy

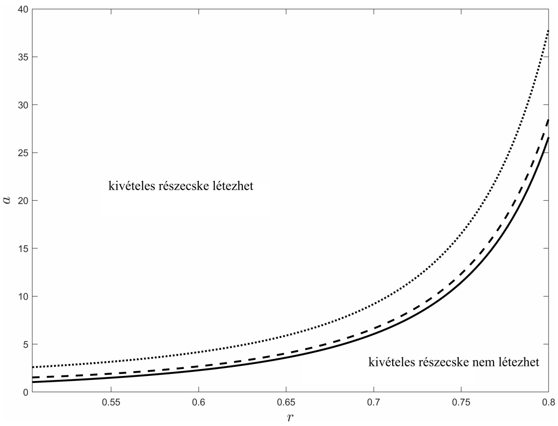
$$a_{,t} = a\frac{N-2}{N-1} - 2\left(\frac{a^{1+r}}{1+a} + \frac{a^{2-r}}{(1+a)(N-1)}\right). \tag{4.44}$$

$a_{,t} > 0$ esetén a kivételes részecske egyre távolabb kerül a populáció többi tagjától. Az $N \to \infty$ határátmenetben

$$a_{,t} = a\left(1 - \frac{2a^r}{1+a}\right). \tag{4.45}$$

Itt a derivált előjelét a zárójeles kifejezés határozza meg. Továbbá megmutatható, hogy ha létezik $a_{\mathrm{crit}} > 1$, ahol $a_{,t} = 0$, akkor $a_{,t} > 0$ minden $a > a_{\mathrm{crit}}$ értékre. Ezért $a_{\mathrm{crit}} > 1$ kritikus értéket a zárójeles kifejezés zérushelye alapján számíthatjuk. A kivételes részecske létezésének feltétele tehát a következő alakot ölti:

$$\frac{2a^r}{1+a} \leq 1. \tag{4.46}$$



4.7. ábra. Az $a_{\mathrm{crit}}(r)$ kritikus görbe az $[r, a]$ paraméter síkon. Olyan rendszerekben, ahol a (r, a) paraméterpár a görbe fölé esik, megjelennek a kivételes részecskék, a görbe alatt ez nem lehetséges. A folytonos vonal a $N \to \infty$ határátmenethez tartozik, a pontozott vonal $N = 20$, a szaggatott vonal $N = 100$ nagyságú populációhoz tartozik.

A (4.46) kifejezést egyenlőségként (numerikusan) megoldva kapható az $a_{\mathrm{crit}}(r)$ *kritikus görbe* az $[r, a]$ paramétersíkon (4.7. ábra). Ez a görbe választja el azon rendszereket, amelyben létezhet kivételes részecske azoktól, amelyekben ez nem fordulhat elő. Az $a_{\mathrm{crit}}(r)$ görbét a $N \to \infty$ határátmenet elvégzésével kaptuk, ezek alapján nagy mintákban is előfordulhatnak kivételes részecskék. Ez a következő módon magyarázható. Tegyük fel, hogy a folyamat közel azonos részecskéket jellemző, szűk tömegeloszlásból indul. A folyamat véletlenszerűsége miatt létrejön néhány részecske, nagy relatív tömeggel (más szavakkal: van néhány részecske, amit kevesebb ütközés kevésbé koptat, ezért esetükben az a paraméter értéke nagy). Amennyiben a fluktuációk ezen részecskékből néhányat az $a_{\mathrm{crit}}(r)$ a görbe fölé mozgatnak, akkor azok kivételes részecskékké válnak, és várhatóan hosszú távon is a populációtól leszakadva fejlődnek. A 4.7. ábra kritikus görbéje az r környezeti paraméter kritikus értékének ($r = 0.5$) környezetében szinte bármely részecske válhat kivételessé. r értékének növelésével ez egyre kevésbé fordulhat elő. Az is megfigyelhető, hogy ahogy a kivételes részecske létezésének valószínűsége csökken, a valószínűsíthető relatív tömegének nagysága nő, alátámasztva az intuíciót, nevezetesen, hogy minél nagyobb a kivételes részecske, annál ritkábban megfigyelhető. Azt is érdemes kiemelni, hogy amíg a kivételes részecske tömegfejlődését mind az a, mind az r környezeti paraméter befolyásolja, addig a minta sok, "kis" részecskéjének kollektív viselkedését kizárólag az r paraméter határozza meg. Azaz, egy, vagy néhány nagy részecskét adva egy nagy számosságú, kis tömegekből álló populációhoz a kis részecskéket tartalmazó populáció időfejlődése nem módosul, feltéve, hogy az ütköző párok kiválasztása továbbra is az egyenletes valószínűségi eloszlás szerint történik.

4.1.3. Homogén és heterogén populációk

A fejezet elején említettem, hogy jelenleg nem ismert olyan részletes adatsor, amelyhez a modell előjelzéseit hasonlíthatnánk. Ebben a részben röviden felvázolom, hogy milyen módon lehetne ezt megtenni.

Homogén kavicspopuláció kísérleti lehetőségei

A modell két lényeges komponenst tartalmaz: egyrészről az ütközési kernel (4.3)-(4.4) ragadja meg a részecskék ütközésének fizikai törvényszerűségeit, másrészről a (4.7) Fokker-Planck egyenlet írja le a kollektív időfejlődést. A modell mindkét komponens szerint tesztelhető a gyakorlatban. Homogén kavicspopulációk esetén a c anyagi paraméter és az r környezeti paraméter határozza meg a tömegfejlődés időbeni lefolyását:

(i) A (4.3)-(4.4) kernel egyenletek illeszthetőek olyan laboratóriumi kísérletekre, amelyekben a kopás sebességét a részecskék méretének függvényében ábrázolják. Ez a kísérlet alkalmas a c anyagi paraméter meghatározására, feltéve, hogy a minta homogén. Amennyiben a kísérleti elrendezés egyben egy természetes környezetet imitál, az r környezeti paraméter is becsülhető.

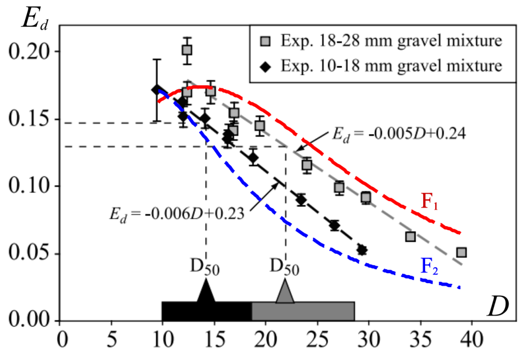
(ii) Kavicspopuláció teljes tömegeloszlásának rendszeres időközönként kivitelezett mérésével is vizsgálható a modell. Ekkor a c és r paraméterek az adathalmazra *posteriori* illeszthetőek. Ilyesfajta kísérlet laboratóriumi körülmények között is kivitelezhetőnek tűnik, terepi mérés esetén a kavicsok rádiós követése (Bertoni *et al.*, 2016) tűnik ígéretes megfigyelési technikának.

Ezen technikák csak homogén kavics populációra alkalmazhatóak. Azonban a modell kiterjesztése heterogén populációra kézenfekvő.

Heterogén kavicspopuláció: kísérlet és elmélet

A bináris alakfejlődés (4.1)-(4.2) egyenleteinek felírásakor az általános esethez a c_{12} és c_{21} anyagi paraméterek tartoztak, amit a homogenitás e miatt a $c_{12} = c_{21} = c$ feltételezéssel egyszerűsítettünk, és később ezt az egyszerűsített formát használtuk a kollektív modell kernel egyenleteként. A kollektív modellben a heterogenitás teljes általánosságban a következő módon vezethető be: tekintsünk egy N elemű populációt, ami $M \leq N$ különböző m_i, $(i = 1, 2, \dots M)$ anyagú kavicsot tartalmaz. (A bináris esetben $N = 2$, itt $M = 2$ felel meg két, különböző anyagú, és $M = 1$ az azonos anyagú részecskéknek.)

A kollektív esetben a bináris kopási paraméterek egy $M \times M$ méretű $\mathbf{M}$ mátrixba rendezhetőek, ahol a mátrix c_{ij}, $(i, j = 1, 2, \dots M)$ elemei az i. és j. részecske bináris ütközésének anyagi paraméterei a (4.3)-(4.4) ütközési kernelben. Az $\mathbf{M}$ mátrix általános esetben nem szimmetrikus, hiszen $c_{ij} \neq c_{ji}$. Amennyiben az m_i anyag lényegesen keményebb, mint az m_j anyag, várható, hogy $c_{ij} \ll c_{ji}$. Tehát a kollektív modell $M \times M = M^2$ darab anyagi és egy darab környezeti paramétert (r) tartalmaz. A kísérleti vizsgálat hasonlóan végezhető, mint a fentiekben leírt homogén esetben, azonban a több paraméter illesztése több megfigyelést igényel.



4.8. ábra. (a) Az E_d kopási ráta a (4.3) kernel mellett, (Attal & Lavé, 2009) mérési eredményeire illesztve. (Attal & Lavé, 2009) 9.a. jelű ábráján ábrázoljuk az F_1 (piros) és F_2 (kék), a kollektív modellel kapott illesztéseket. A tömeget az átmérő alapján, gömb alakot feltételezve becsültem. A legkisebb négyzetek módszerével a modell paraméterei: $r = 0.19$ és $c_{12} = 0.28$, mindkettő adatsorra.

A következőkben a kernel egyenlet illesztésére mutatunk példát. (Attal & Lavé, 2009) laboratóriumi körülmények között, csatornában koptatott kavicsok tömegfejlődését mutatja be. A 400 g, $10 - 18$ mm és 18-28 mm átmérőjű gránit kavics mellé

$D = 9$ és $D = 39$ mm közötti átmérővel bíró mészkő kavics E_d *kopási rátáját* (*abraison rate*) mérték. A fenti megközelítés szerint itt $M = 2$ (két, eltérő anyag). Jelölje m_1 a mészkövet és m_2 a gránitot. A heterogenitás miatt itt $M^2 = 4$ anyagi paraméter, c_{11}, c_{12}, c_{21} és c_{22} ismerete szükséges. A kísérletekben elsősorban a mészkő kavicsok kopási sebességére voltak kíváncsiak, és ezért ezen részecskékre állították elé $E_d(D)$ görbéket. Tekintve a két anyag keménységbeli különbségét, feltehetjük, hogy a mészkő kavicsokat kizárólag a gránit kavicsok koptatták (azaz figyelmen kívül hagyjuk a mészkő-mészkő ütközések hatását). A mészkő $X(t)$ tömegfejlődését a (4.3) egyenlet alapján vesszük fel, ahol az X és Y térfogatokat a mészkő és a gránit részecskék mérete alapján becsüljük. Ilyen módon az egyetlen lényeges anyagi paraméter a mészkő és a gránit ütközését jellemző c_{12}. (A kísérleti adatokból nem rekonstruálható, de vélhetően $c_{21} \ll c_{12}$ teljesül.) Amennyiben a gránit részecskék térfogatát a közölt mérettartomány átlagaként vesszük, a kopási ráta az átmérő függvényében modellünkkel numerikusan számítható. A kopási ráta, E_d, az általunk használt jelölésekkel a következő alakban írható:

$$E_d = -\frac{X_{,t}}{X}. \tag{4.47}$$

Munkámban az (4.3) egyenletet illesztettem a (Attal & Lavé, 2009) publikáció adatsorára. A paraméterek meghatározását a legkisebb négyzetek módszerével állítottam elő. A legjobb egyezést $r = 0.19, c_{12} = 0.28$ értékeknél találtam. Az eredményeket a 4.8. ábra szemlélteti: a kísérleti és számított értékek közelsége meggyőző. Az r környezeti paraméter értéke alapján szétszóró viselkedést várunk. Ez összhangban van a kísérlet céljával, ami gyors folyóvízi környezet vizsgálatát célozta. Érdemes kiemelni, hogy a $r = 0.19, c_{12} = 0.28$ paraméterpár tartozik mindkét, a cikkben közölt kísérleti programhoz. Azaz a paraméterek nem függnek a gránit részecskék méretétől, ami utólagosan alátámasztja a kollektív modell levezetése során tett feltételezéseket.

4.2 Kitekintés

Említettem, hogy a bemutatott modell kísérleti igazolása összetett laboratóriumi és terepmunkát igényel. A modell elméleti része további érdekes kérdéseket vet fel:

(i) A fragmentáció, nevezetesen, amikor egy részecske kettő darabba törik, a diszkrét modellbe könnyen beépíthető. Ismert, hogy a geomorfológiai folyamatokban (Novák-Szabó *et al.*, 2018) a fragmentáció és a kopás nem különöl el élesen, ezért például folyókban mért tömegeloszlás esetén vélhetően szükséges a modell kiegészítése a fragmentációval.

(ii) A modell bevezetésénél hangsúlyoztam, hogy a felvázolt tömegfejlődés összhangban van a kopás geometriai elméletével, azonban a bemutatott modell csak a tömegfejlődésre koncentrált.

Fontos továbbfejlesztési irány az alakjellemzők (pl.: tengelyarány, izoperimetrikus arány, mechanikai egyensúlyi pontok száma, stb.) időfejlődését leíró modell kifejlesztése, és ezen adatsorok összevetése a rendelkezésre álló mérési eredményekkel.

(iii) Az egyes geomorfológiai folyamatokhoz rendelhető kernelek fizikai, az ütközési valószínűséget a bemutatott egyparaméteres modellnél hűebben tükröző kernel (család) bevezetése.

A fizikai fragmentáció beépítése meghaladja ezen dolgozat kereteit, azonban egy érdekes lehetőséget érdemes megemlíteni. A fragmentációval kapcsolatban több évtizede ismert, hogy a fragmensek populációjának tömegeloszlása hatványtörvényt követ. A tömegre és az kezdeti eloszlásra megtartva az x és $f_0(x)$ jelöléseket írhatjuk, hogy

$$f_0(x) \approx x^{-\tau} \tag{4.48}$$

ahol a τ exponens értéke meglepően robusztus, kevéssé függ az anyagi jellemzőktől vagy a fragmentációt kiváltó fizikai folyamat jellegétől. A (Domokos *et al.*, 2015) cikkben ismertetett kísérletek alapján $\tau = 1.7 \pm 0.06$. Amennyiben a fragmentációhoz egy $x_{\min}$ minimális és $x_{\max}$ maximális kezdeti méretet rendelünk, az f_0 kezdeti eloszlás könnyen illeszthető. A kopási folyamatban, akár a terepen is mérhető $\bar{f}(x)$ eloszlást felhasználhatjuk arra, hogy meghatározzuk azt a t_1 időt, amelyre a modellben az $f_0(x)$ kezdeti eloszlásból számított $f(x, t_1)$ eloszlás és a mért $\bar{f}(x)$ eloszlást eltérése minimális. Azt várjuk, hogy a

$$\min_{t_1 \in [0,\infty]} ||f(x, t_1) - \bar{f}(x)|| \tag{4.49}$$

feladatnak egy, numerikusan egyszerűen becsülhető minimuma van. A minimum ismeretében a populáció tömegvesztesége is könnyen meghatározható, azaz modellünk alkalmas arra, hogy a mért eloszlás alapján következtessünk a kavicspopuláció teljes tömegveszteségére a fragmentáció kezdetétől. A (Domokos *et al.*, 2015) cikkben arra is rámutattunk, hogy az aprózódás során keletkező (jellemzően poliéderrel jól közelíthető) formák, mérettől és az aprózódást kiváltó folyamattól függetlenül univerzális alakjellemzőkkel rendelkeznek. Így az alakjellemzők kollektív fejlődését leíró modell kifejlesztésével arra számítunk, hogy a mért alakjellemzők eloszlásának ismerete egyben az alakfejlődési folyamat múltjára vonatkozó következtetések levonását teszi majd lehetővé.

5. fejezet

Összefoglalás és tézisek

5.1 Záró gondolatok

A disszertáció az elmúlt 12 évben végzett kutatómunkám egy szeletét mutatta be. Elsősorban a szilárdtest mechanika és a morfológia területén felmerült kérdésekre összpontosítottam. A vékony, rugalmas szerkezetek geometriai és anyagi nemlinearitás által meghatározott alakját tanulmányoztam. A szerkezet matematikai modelljének megoldásait analitikus és numerikus eszközökkel vizsgáltam, különös tekintettel a kísérletekben megfigyelhető, stabil alakokra. A modellek a karcsú szerkezetek gazdag ipari alkalmazása miatt gyakorlati jelentőséggel bírnak, akár a posztkritikus tartomány elkerülése (pl.: ráncosodás kizárása ipari és űrkutatási alkalmazásokban), vagy ellenkezőleg, a posztkritikus stabil megoldások elérése a cél (pl.: robotkarok alakja).

Az élettelen alakfejlődés vizsgálata rámutatott arra, hogy bonyolult fizikai jelenségek tisztán geometriai leírása a természeti formák alkalmas eszköze. A kopási modellek vizsgálata kiemelt kutatási téma az alkalmazott matematika, a mérnöki- és a földtudományok határterületén. Egy megfelelő részletezettségű modell nem kizárólag a természeti formák magyarázatát nyújtja: lehetővé teszi, hogy pusztán a forma megfigyelésével következtessünk az azt létrehozó folyamatra.

Néhány, az alkalmazott statisztikához (Sipos, 2013; Sipos *et al.*, 2018a), a dinamikához (Károlyi & Sipos, 2021), a kopásmodellek geológiai alkalmazásához (Domokos *et al.*, 2014a; Novák-Szabó *et al.*, 2018), továbbá a meglévő tartószerkezetek értékeléséhez (Armuth *et al.*, 2010) kötődő eredményt a dolgozat nem, vagy csak érintőlegesen tárgyalt. Hasonlóan, a jelenlegi doktorandusz hallgatóimmal közösen kutatott téma, a rideg anyagokban kialakuló repedésképpel kapcsolatos eredmények sem kerültek tárgyalásra (Cao & Sipos, 2022; Michel & Sipos, 2022). Ezeket a dolgozatban bemutatott eredmények ígéretes folytatásának tekintem, hasonlóan a csigahéjak geometriájának jelenleg is folyó, háromdimenziós elemzéséhez.

5.2 Tézisek

1. Tézis. Tisztán rugalmas anyagmodellel és geometriai nemlinearitással jellemezhető rugalmasságtani modellekben keletkező formákat és mintázatokat vizsgáltam (Sipos & Várkonyi, 2020; Sipos & Fehér, 2016).

(i) Vékony robotkarok maximális kinyúlását a deformáció és a rúdalak stabilitása együttesen határozza meg. A robotkarhoz rendelhető térbeli rúdmodellben, a potenciális energia második variációjának segítségével analitikusan igazoltam, hogy az irodalomban szereplő, síkbeli modellek által elhanyagolt kifordulás csökkenti a maximális kinyúlás értékét. Rámutattam arra, hogy a kezdeti görbület változtatásával a stabilitási kritérium alapján számított maximális kinyúlás növelhető. A modell alapján numerikus algoritmust adtam a robotkar maximális kinyúlásának meghatározására.

(ii) (**Fehér Eszterrel közös eredmény**) Két végén befogott, húzott, vékony filmek kísérletben megfigyelt ráncosodásának magyarázatára új, a klasszikus Kármán-féle nagy lehajlású, vékony lemezek elméletét véges membránnyúlásokra általánosító, ortotróp modellt írtunk le. Előfeszített mintadarabokon végrehajtott kísérletekkel összhangban a modell helyesen jósolja meg a ráncos mintázat megjelenését és eltűnését. Ezen jelenség magyarázható egy izola-központ bifurkációval. A modell alapján a sima és ráncos megoldásokat elválasztó stabilitási határ helye a β tengelyarány és a ε makroszkopikus nyúlás paraméterek terében jelentősen függ az ortotrópia mértékétől.

2. Tézis. A terhelés hatására kialakuló alak és az anyagi nemlinearitás kapcsolatát vizsgáltam (Fehér *et al.*, 2018; Gáspár *et al.*, 2022).

(i) (**Fehér Eszterrel és Timothy J. Healey-vel közös eredmény.**) A két végén befogott, húzott, vékony filmek ciklikus kísérletben megfigyelhető ráncosodásának megjelenését és eltűnését elemezve az első terhelés során eltérő ráncosodást a Mullins-hatással magyaráztuk. Új, a Mooney-Rivlin anyagmodellt károsodási állapotváltozóval (η) kiegészítő, pszeudoelasztikus modellt adtunk a jelenség magyarázatára.

(ii) Az (i) pontban említett modellről megmutattam, hogy az a Mullins-hatásra az irodalomban javasolt modellosztály egy speciális, egy állapotváltozót tartalmazó esete. Továbbá, módszert adtam az első nyújtás során kialakuló ortotrópia mértékének a kísérleti adatokból történő becslésére.

(iii) Húzószilárdság nélküli falazott ívek állékonysága függ az ívben természetesen kialakuló, vagy mesterségesen előírt repedésképétől (sztereotómia). Az adott terhelésű ív állékonyságának klasszikus geometriai feltételét (nyomásvonal elmélet) térgörbe referencia vonalú szerkezetre általánosítottam.

(iv) Igazoltam, hogy az előre rögzített $C > 3$ csuklószámhoz konstruálható olyan, síkbeli, önsúlyával terhelt, húzószilárdság nélküli ív, amelyben a tönkremenetel pillanatában kialakuló csuklók száma pontosan C.

(v) A síkbeli, önsúlyával terhelt, körívekből szerkesztett, állandó vastagságú, szimmetrikus csúcsívről bizonyítottam, hogy a szerkezetben radiális sztereotómia esetén kialakuló csuklók száma maximum $C = 7$.

3. Tézis. A körrel homeomorf, konvex görbék alakfejlődését leíró geometriai parciális differenciálegyenleteket vizsgáltam (Sipos *et al.*, 2018b; Sipos, 2020).

(i) Bizonyítottam, hogy a görbület-vezérelt kopási modellek körében az $f_{,\kappa}(\kappa) > 0$ feltételt kielégítő kopási törvénnyel rendelkező, a görbét a befele mutató normális irányába fejlesztő alakfejlődési modellben a görbületi szélsőértékek $N_\kappa(t)$ száma monoton csökken.

(ii) Az ooid részecskék növekedést, ütközéses és súrlódási kopást tartalmazó, két állandó paraméterrel adott modelljéről bizonyítottam, hogy a modellben szereplő affin tag ellenére az ellipszis nem invariáns megoldás, kivéve a súrlódásmentes esetet, amikor az invariáns alak kör.

(iii) Bizonyítottam, hogy a (ii) pontban említett modell sima, egyensúlyi megoldásai a D2 szimmetriacsoportba tartoznak.

(iv) Bizonyítottam, hogy a (ii) pontban említett modell két paramétere ($c_1 \geq 0$ és $c_2 > 0$) és a sima egyensúlyi alak kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

4. Tézis. A gömbbel homeomorf, konvex felületek alakfejlődését leíró, ún. Bloore-féle alakfejlődési modellt vizsgáltam (Sipos *et al.*, 2011; Domokos *et al.*, 2014b).

(i) A kopó testet poliéderrel reprezentáló, a testet sztochasztikusan felvett metsző síkokkal fejlesztő numerikus algoritmust írtam le a Bloore-féle alakfejlődési egyenlet approximációjára. Megadtam a sztochasztikus algoritmus esemény valószínűségei és a folytonos geometriai PDE állandói közötti kapcsolatot.

(ii) A sztochasztikus algoritmus felhasználásával numerikusan demonstráltam, hogy a Firey-féle alakfejlődési modellben poliéder kezdőfeltétel esetén két fázis különíthető el: az első fázisban a kopás által még nem érintett felület területe nem zérus. Ez a mérték fokozatosan csökken, a második fázisban pedig a test minden felületi pontja kopásnak kitett. A numerikus eredmények szerint az első fázisban a tömegveszteség az 50%-ot is elérheti.

5. Tézis. Statisztikai számosságú objektum tömegeloszlásának kopás miatt bekövetkező időfejlődését vizsgáltam (Sipos *et al.*, 2021).

(i) Megadtam a kavicspopulációk kollektív tömegeloszlásának időfejlődését leíró Fokker-Planck egyenletet.

(ii) Analitikusan igazoltam, hogy folytonos esetben a geometriai alakfejlődési egyenletekkel összhangban lévő, az r környezeti paramétertől függő, egyparaméteres ütközési kernel elsőrendű sorfejtéssel egyszerűsített formája a kollektív modellben $r > 1/2$ értékeinél fókuszáló, $r < 1/2$ esetén szétszóró viselkedésű.

(iii) Analitikusan igazoltam, hogy az említett egy paraméteres ütközési kernel alatt az azonos méretű részecskéknek megfelelő Dirac-δ tömegeloszlás invariáns. Továbbá $r > 1/2$ esetén a Dirac-δ tömegeloszlás stabil, $r < 1/2$ esetén instabil.

(iv) A Fokker-Planck egyenletet numerikus szimulációjával megmutattam, hogy valós kavicspopulációk esetében az $r = 1/2$ érték a teljes, nemlineáris modellben is kritikus.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom az értekezésben bemutatott kutatásokban részes kollégáknak és diákoknak. Különösen hálás vagyok Domokos Gábornak az inspiráló és lényeglátó kérdésekért és a sok éves együttműködésért. Köszönöm Fehér Eszternek, Gáspár Orsolyának, Sajtos Istvánnak és Várkonyi Péternek a kitartó és gyümölcsöző együttműködést. A mérnöki tudományok és a matematika határterületének művelésében nagy hatással volt rám posztdoktori témavezetőm, Timothy J. Healey. Az interdiszciplináris kutatás a különböző szakterületek eltérő attitűdje és szaknyelve miatt igen kihívásos vállalkozás, köszönöm Fodor László, Douglas J. Jerolmack, Lángi Zsolt, Károlyi György, Márton Péterné Szalay Emőke, Páll-Gergely Barna és Török János nyitottságát, türelmét és azt, hogy közös munkáinkban számomra ismeretlen, új világokba vezettek be.

Az értekezésben bemutatott kutatásokat a Budapesti és Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén, később a Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszékén, továbbá az MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport munkatársaként végeztem. Köszönöm a kollégák és az Építészmérnöki Kar vezetésének támogató hozzáállását. A kutatásokat a Műszaki Egyetemen túl az MTA, az EMMI, az NKFIH, a HAESF és az NSF pályázatai támogatták.

Hálás vagyok családomnak, feleségemnek és gyermekeimnek a meleg családi légkörért, ami lehetővé tette számomra az elmélyült kutatómunkát.

Irodalomjegyzék

Alexakis, H., & Makris, N. 2013. Minimum thickness of elliptical masonry arches. *Acta Mech.*, **224**, 2977–2991.

Antman, S.S. 2005. *Nonlinear Problems in Elasticity.* 2nd edn. Springer-Verlag, NY.

Armanini, C., Dal Corso, F., Misseroni, D., & Bigoni, D. 2017. From the elastica compass to the elastica catapult: an essay on the mechanics of soft robot arm. *Proc. R. Soc. A*, **473**(2198), 20160870.

Armuth, M., Hegyi, D., & Sipos, A. A. 2010. Structural analysis of the baroque parish church of Zsámbék. *Per. Polyt. Arch.*, **41**(2), 43–47.

Attal, M., & Lavé, J. 2009. Pebble abrasion during fluvial transport: Experimental results and implications for the evolution of the sediment load along rivers. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, **114**(F4).

Ball, P. 2016. *Patterns in Nature: Why the Natural World Looks the Way It Does.* University of Chicago Press, IL.

Banichuk, N. V. 2013. *Problems and methods of optimal structural design.* Vol. 26. Springer Science & Business Media.

Beaupré, R.S., Roberts, M.L., Burton, J.R., & Summons, R.E. 2015. Rapid, high-resolution 14C chronology of ooids. *Geoch. Cosmoch. Act.*, **189**(1), 126–138.

Bertoni, D., Sarti, G., Grottoli, E., Ciavola, P., Pozzebon, A., Domokos, G., & Novák-Szabó, T. 2016. Impressive abrasion rates of marked pebbles on a coarse-clastic beach within a 13-month timespan. *Marine Geo.*, **381**, 175 – 180.

Bloore, F. J. 1977. The Shape of Pebbles. *Math. Geol.*, **9**, 113–122.

Burgner-Kahrs, J., Rucker, D. C., & Choset, H. 2015. Continuum robots for medical applications: A survey. *IEEE Trans. Rob.*, **31**(6), 1261–1280.

Cao, S., & Sipos, A. A. 2022. Cracking Patterns of Brittle Hemispherical Domes: an Experimental Study. *Frattura ed Integrità Strutturale*, **16**(59), 265–310.

Carr, A. P. 1969. Size grading along a pebble beach; chesil beach, England. *J. Sedim. Res.*, **39**(1), 297–311.

Cerda, E., & Mahadevan, L. 2003. Geometry and physics of wrinkling. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 1–4.

Cerda, E., Ravi-Chandar, K., & Mahadevan, L. 2002. Wrinkling of an elastic sheet under tension. *Nature*, **419**, 579–580.

Chandraseker, K., Mukherjee, S., Paci, J. T., & Schatz, G. C. 2009. An atomistic-continuum Cosserat rod model of carbon nanotubes. *J. Mech. Phys. Sol.*, **57**(6), 932–958.

Cheng, Z., & Redner, S. 1988. Scaling Theory of Fragmentation. *Phys. Rev. Lett.*, **60**(24), 2450–2453.

Cocchetti, G., Colasante, G., & Rizzi, E. 2012. On the analysis of minimum thickness in circular masonry arches. *Appl. Mech. Rev.*, **64**(5), 050802.

Coman, C.D. 2007. On the applicability of tension field theory to a wrinkling instability problem. *Acta Mech.*, **190**, 57–72.

Cosserat, E., & Cosserat, F. 1909. *Théorie des Corps Déformables.* Hermann & Fils, Paris.

Cox, J.P. 1980. *Theory of Stellar Pulsation (PSA-2).* Princeton University Press.

da Costa, F. P. 2015. Mathematical Aspects of Coagulation-Fragmentation Equations. *Pages 83–162 of:* Bourguignon, Jean-Pierre, Jeltsch, Rolf, Pinto, Alberto Adrego, & Viana, Marcelo (eds), *Mathematics of Energy and Climate Change.* Springer International Publishing.

Davidovitch, B., Schroll, R. D., Vella, D., Adda-Bedia, M., & Cerda, E. 2011. Prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets. *PNAS*, **108(45)**, 18227–18232.

Davies, P.J., Bubela, B., & Ferguson, J. 1978. The formation of ooids. *Sedimentology*, **25**(5), 703–730.

Destrade, M., Saccomandi, G., & Sgura, I. 2017. Methodical fitting for mathematical models of ruber-like materials. *Proc. R. Soc A*, **473**, 20160811.

DeTruck, D., Gluck, H., Pomerleano, D., & Vick, D. S. 2007. The Four Vertex Theorem and Its Converse. *Not. AMS*, **54**(2), 192 –207.

Domokos, G. 2015. Monotonicity of Spatial Critical Points Evolving Under Curvature-Driven Flows. *J. Nonlin. Sci.*, **25**, 247 –275.

Domokos, G., & Gibbons, G. W. 2012. The evolution of pebble size and shape in space and time. *Proc. Roy. Soc. A.*, **468**, 3059–3079.

Domokos, G., & Gibbons, G. W. 2018. The Geometry of Abrasion. *Pages 125–153 of:* Ambrus, Gergely, Bárány, Imre, Böröczky, Károly J., Fejes Tóth, Gábor, & Pach, János (eds), *New Trends in Intuitive Geometry.* Springer Berlin.

Domokos, G., & Lángi, Zs. 2014. The robustness of equilibria on convex solids. *Mathematika*, **60**(1), 237–256.

Domokos, G., Sipos, A. A., Szabó, Gy. M., & Várkonyi, P. L. 2009. Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion. *Astrophys. J.*, **699**(1), L13–L16.

Domokos, G., Gibbons, G. W., & Sipos, A. A. 2014a. Circular, Stationary Profiles Emerging in Unidirectional Abrasion. *Math. Geosci.*, **46**, 483–491.

Domokos, G., Jerolmack, D. J., Sipos, A. A., & Török, Á. 2014b. How River Rocks Round: Resolving the Shape-Size Paradox. *PLoS ONE*, **9**(2), e88657.

Domokos, G., Kun, F., Sipos, A. A., & Szabó, T. 2015. Universality of Fragment Shapes. *Sci. Rep.*, **5**. Article number: 9147.

Domokos, G., Sipos, A. A., Szabó, Gy. M., & Várkonyi, P. L. 2017. Explaining the Elongated Shape of 'Oumuamua by the Eikonal Abrasion Model. *Res. Not. AAS*, **1**(50).

Domokos, G., Jerolmack, D. J., Kun, F., & Török, J. 2020. Plato's cube and the natural geometry of fragmentation. *PNAS*, **117**, 18178 –18185.

Domokos, G., Lángi, Zs., & Sipos, A. A. 2022. Tracking Critical Points on Evolving Curves and Surfaces. *Exp. Math.*, **31**(1), 1–20.

Dorfman, A., & Ogden, R.W. 2004. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. *Int. J. Solids & Struct.*, **41**, 1855–1878.

Driscoll, T. A., Hale, N., & Trefethen, L. N. 2014. *Chebfun Guide.* Pafnuty Publications, Oxford.

Edgcomb, V.P., Bernhard, J.M., Beaudoin, D., Pruss, S., Welander, P.V., Schubotz, F., Mehay, S., Gillespie, A.L., & Summons, R.E. 2013. Molecular indicators of microbial diversity in oolitic sands of Highborne Cay, Bahamas. *Geobiology*, **11**(3), 234–251.

Ernst, M. H., & Pagonabarraga, I. 2007. The Nonlinear Fragmentation Equation. *J. Physics A. Math. Theo.*, **40**(17), F331–F337.

Evans, L. C. 2010. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.

Fallacara, G., & Gadaleta, R. 2019. Stereotomy: Architecture and Mathematics. *Chap. Mathematics and Architecture, pages 1325–1344 of: Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*. Springer International Publishing.

Fehér, E., & Sipos, A. A. 2014. Húzott, vékony filmek ráncosodása: a ráncos mintázat keletkezése és eltűnése. *Építés- Építészettudomány*, **42**(1-2), 23–42.

Fehér, E., Domokos, G., & Krauskopf, B. 2021. Tracking the critical points of curves evolving under planar curvature flows. *J. Comp. Dyn.*, **8**(4), 447–494.

Fehér, E., Healey, T.J., & Sipos, A. A. 2018. The Mullins effct in the wrinkling behaviour of highly stretched thin films. *J. Mech. Phys. Solids*, **119**, 417–427.

Firey, W. J. 1974. Shapes of worn stones. *Mathematika*, **21**(1), 1–11.

Flores-Johnson, E. A., Rupert, T. J., Hemker, K. J., Gianola, D. S., & Gan, Y. 2015. Modelling wrinkling interactions produced by patterned defects in metal thin films. *Extr. Mech. Lett.*, **4**, 175–185.

Friedl, N., Rammerstorfer, F.G., & Fischer, F.D. 2000. Buckling of stretched strips. *Comp. & Struct.*, **78**, 185–190.

Fu, C., Wang, T., Xu, F., Huo, Y., & Potier-Ferry, M. 2019. A modeling and resolution framework for wrinkling in hyperelastic sheets at finite membrane strain. *J. Mech. Phys. Solids*, **124**, 446–470.

Gajewski, A., & Zyczkowski, M.l. 2012. *Optimal structural design under stability constraints*. Vol. 13. Springer Science & Business Media.

Gáspár, O., Sipos, A. A., & Sajtos, I. 2018. Effect of stereotomy on the lower bound value of minimum thickness of semi-circular masonry arches. *Int. J. Arch. Herit.*, **12**(6), 899–921.

Gáspár, O., Sipos, A. A., & Sajtos, I. 2019. *The role of rotational collapse mode and catenary-type thrust lines in the limit state analysis of masonry arches.* International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). Pages 1–8.

Gáspár, O., Sajtos, I., & Sipos, A. A. 2021. Friction as a geometric constraint on stereotomy in the minimum thickness analysis of circular and elliptical masonry arches. *Int. J. Solids & Struct.*, **225**. Article number: 111056.

Gáspár, O., Sajtos, I., & Sipos, A. A. 2022. Multi-hinge failure mechanisms of masonry arches subject to self-weight as derived from minimum thickness analysis. *Int. J. Arch. Herit.* Bírálat alatt.

Giga, Y. 1997. A level set method for surface evolution equations. *Sug. Exp.*, **10**, 217–241.

Géminard, J. C., Bernal, R., & Melo, F. 2004. Wrinkle formations in axi-symmetrically stretched membranes. *Eur. Phys. J. E.*, **15**, 117–126.

Grayson, M.A. 1987. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differ. Geom.*, **26**, 285–314.

Hamilton, R. 1982. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differ. Geom.*, **17**, 255–306.

Hamilton, R. S. 1994. Worn stones with flat sides. *Discourses Math. Appl.*, **3**, 69–78.

Healey, T. J. 2002. Material Symmetry and Chirality in Nonlinearly Elastic Rods. *Math. Mech. Sol.*, **7**, 405–420.

Healey, T. J., & Mehta, P. G. 2005. Straightforward Computation of Spatial Equilibria of Geometrically Exact Cosserat Rods. *Int. J. Bifur. Chaos*, **15**(3), 949–965.

Healey, T. J., & Sipos, A. A. 2013. Computational stability of phase-tip splitting in the presence of small interfacial energy in a simple two-phase solid. *Phys. D: Nonlin. Phen.*, **261**, 62–69.

Healey, T. J., Li, Q., & Cheng, R. B. 2013. Wrinkling Behavior of Highly Stretched Rectangular Elastic Films via Parametric Global Bifurcation. *J. Nonlin. Sci.*, **23**, 777–805.

Heller, P.L., Komar, P.D., & Pevear, D.R. 1980. Transport Processes in Ooid Genesis. *J. Sed. Res.*, **50**(3), 974–982.

Heyman, J. 1969. Safety of masonry arches. *Int. J. Mech. Sci.*, **11**, 363–385.

Heyman, J. 1995. *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press, Cambridge.

Horgan, B. H.N., Anderson, R. B., Dromart, G., Amador, E. S., & Rice, M. S. 2020. The mineral diversity of Jezero crater: Evidence for possible lacustrine carbonates on Mars. *Icarus*, **339**, 113526.

Horváth, G. M., Várkonyi, P. L., & Sipos, A. A. 2019. Shape of an elastica under growth restricted by friction. *Int. J. Solids & Struct.*, **156-157**, 137–147.

Howell, P., Kozyreff, G., & Ockendon, J. 2009. *Applied Solid Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Howes, B., Mehra, A., & Maloof, A. 2021. Three-Dimensional Morphometry of Ooids in Oolites: A New Tool for More Accurate and Precise Paleoenvironmental Interpretation. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, **126**(4), e2020JF005601.

Hoyle, R. 2006. *Pattern Formation*. Cambridge University Press, Cambridge.

Huang, Q., Yang, J., Huang, W., Giunta, G., Belouettar, S., & Hu, H. 2020. The boundary effects on stretch-induced membrane wrinkling. *Thin-W. Struct.*, **154**.

Huisken, G. 1990. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differ. Geom.*, **31**, 285–299.

Huylebrouck, D. 2019. *Africa and Mathematics*. Springer, Basel.

Ii, J.V., & Goldenfeld, N. 2008. Watching rocks grow. *Nat. Phys.*, **4**(4), 310–313.

Jenkins, C. H., Haugen, F., & Spicher, W. H. 1998. Experimental measurement of wrinkling in membranes undergoing planar deformation. *Exp. Mech.*, **8**, 147–152.

Jerolmack, D.J., & Brzinski, T.A. 2010. Equivalence of abrupt grain-size transitions in alluvial rivers and eolian sand seas: A hypothesis. *Geology*, **38**(8), 719–722.

Kardar, M., Parisi, G., & Zhang, Y. C. 1986. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 889–892.

Károlyi, Gy., & Sipos, A. A. 2021. Soft impact of an elongated elasto-plastic missile. *Int. J. Mech. Sci.*, **212**. Article number: 106804.

Krynine, P. D. 1960. On the Antiquity of "Sedimentation" and Hydrology. *Bull. Geol. Soc. America*, **71**, 1721–1726.

Kuenen, P. H. 1956. Experimental abrasion of pebbles: 2. Rolling by current. *J. Geo.*, **64**(4), 336–368.

Laschi, C., Cianchetti, M., Mazzolai, B., Margheri, L., Follador, M., & Dario, P. 2012. Soft robot arm inspired by the octopus. *Advcd. Rob.*, **26**(7), 709–727.

Li, Q., & Healey, T. J. 2016. Stability boundaries for wrinkling in highly stretched elastic sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, **97**, 260–274.

Li, S., Z.J., Wang, & Chang, T.T. 2014. Temperature oscillation modulated self-assembly of periodic concentric layered magnesium carbonate microparticles. *PLoS ONE*, **9**, e88648.

Libai, A., & Simmonds, J. G. 1998. *The nonlinear theory of elastic shells.* Cambridge University Press, Cambridge.

Logg., A., Mardal, K.A., & Wells, G.N. 2012. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Lu, C., Cao, Y., & Mumford, D. 2002. Surface evolution under curvature flows. *J. Vis. Commun. Image Rep*, **13**, 65–81.

Meakin, P., & Jamtveit, B. 2010. Geological pattern formation by growth and dissolution in aqueous systems. *Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.*, **466**(2115), 659–694.

Meyer, C. J., & Deglon, D. A. 2011. Particle collision modeling – A review. *Mineral Eng.*, **24**(8), 719 – 730.

Michel, S., & Sipos, A. A. 2022. On the cracking patterns of brittle rings with elastic radial support under hydrostatic pressure. *Meccanica.* Közlésre elfogadva.

Miura, K., & Pellegrino, S. 2020. *Forms and Concepts for Lightweight Structures.* Cambridge University Press.

Müller, I., & Strehlow, P. 2004. *Rubber and Rubber Ballons - Paradigms of Thermodynamics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Monzel, C., & Sengupta, K. 2016. Measuring shape fluctuations in biological membranes. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **49**(24), 243002.

Nayyar, V., Ravi-Chandar, K., & Huang, R. 2014. Stretch-induced wrinkling of polyethylene this sheets: Experiments and modeling. *Int. J. Solids & Struct.*, **51**, 1847–1858.

Nikolić, D. 2017. Thrust line analysis and the minimum thickness of pointed masonry arches. *Acta Mech.*, **228**(6), 2219–2236.

Novák-Szabó, T., Sipos, A. A., Shaw, S., Bertoni, D., Pozzebon, A., Grottoli, E., Sarti, G., Ciavola, P., Domokos, G., & Jerolmack, D. J. 2018. Universal characteristics of particle shape evolution by bed-load chipping. *Sci. Adv.*, **4**(3). Article number: eaao4946.

Ogden, R. W., & Roxburgh, D. G. 1999. A pseudo-elastic model for the Mullins effect in filled rubber. *Proc. R. Soc A*, **455**, 2861–2877.

Petrás, A. 1984. *Galga menti hímzések.* Petőfi Múzeum, Aszód.

Plaut, R. H., & Virgin, L. N. 2017. Furthest reach of a uniform cantilevered elastica. *Mech. Res. Comm.*, **83**, 18–21.

Puntel, E., Deseri, L., & Fried, E. 2011. Wrinkling of a stretched thin sheet. *J. Elast.*, **105**, 137–170.

Raeisinezhad, M., Pagliocca, N., Koohbor, B., & Trkov, M. 2021. Design Optimization of a Pneumatic Soft Robotic Actuator Using Model-Based Optimization and Deep Reinforcement Learning. *Front. Robot. AI*, **8**.

Rankey, E.C., & Reeder, S.L. 2011. Holocene Oolitic Marine Sand Complexes of the Bahamas. *J. Sed. Res.*, **81**(2), 97–117.

Rankey, E.C., Riegl, B., & Steffen, K. 2006. Form, function and feedbacks in a tidally dominated ooid shoal, Bahamas. *Sedimentology*, **53**(6), 1191–1210.

Reddy, J. N. 2008. *An intorduction to nonlinear finite element analysis.* Oxford University Press, Oxford.

Reissner, E. 1938. On Tension Field Theory. *Proceedings of the 5th International Congress of Applied Mechanics*, 88–92.

Risken, H., & Frank, T. 1996. *The Fokker-Planck Equation.* Springer-Verlag Berlin.

Rózsa, P. 1991. *Lineáris Algebra és Alkalmazásai.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Silvestre, N. 2015. Wrinkling of stretched thin sheets: Is restrained Poisson's effect the sole cause? *Eng. Struct.*, **106**, 195–208.

Simonyi, K. 1978. *A Fizika Kultúrtörténete.* Gondolat, Budapest. Második Kiadás.

Sipos, A. A. 2013. Statisztikai próbák sztochasztikus, közel izotróp tenzorral leírható kőzetfizikai mennyiségek vizsgálatára. *Magyar Geofizika*, **54**(4), 170–184.

Sipos, A. A. 2020. Ooid growth: Uniqueness of time-invariant smooth shapes in 2D. *Eu. J. Appl. Math.*, **31**, 172–182.

Sipos, A. A., & Várkonyi, P. L. 2022. A unified morphoelastic rod model with application to growth-induced coiling, waving, and skewing of plant roots. *J. Mech. Phys. Solids*, **160**, 104789.

Sipos, A. A., Domokos, G., Wilson, A., & Hovius, N. 2011. A discrete random model decribing bedrock profile abrasion. *Math. Geosci.*, **43**, 583–591.

Sipos, A. A., Márton, E., & Fodor, L. 2018a. Reconstruction of early phase deformations by integrated magnetic and mesotectonic data evaluation. *Tectonophysics*, **726**, 73–85.

Sipos, A. A., Domokos, G., & Jerolmack, D. J. 2018b. Shape evolution of ooids: a geometric model. *Sci. Rep.*, **8**. Article number: 1758.

Sipos, A. A., Domokos, G., & Török, J. 2021. Particle size dynamics in abrading pebble populations. *Earth Surf. Dyn.*, **9**, 935–251.

Sipos, A.A., & Fehér, E. 2016. Disappearance of stretch-induced wrinkles of thin sheets: a study of orthotropic films. *Int. J. Solids & Struct.*, **97–98**, 275–283.

Sipos, A.A., & Várkonyi, P.L. 2020. The longest soft robotic arm. *Int. J. Nonlin. Mech*, **119**. Article number: 103354.

Spathis, G. D. 1991. Polyurethane Elastomers Studied by the Mooney-Rivlin Equation for Rubbers. *J. Appl. Polym. Sci.*, **43**, 613–620.

Steigmann, D. J. 2008. Two-dimensional models for the combined bending and stretching of plates and shells based on three-dimensional linear elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, **46**, 654–676.

Sternberg, H. 1875. Untersuchungen uber Langen-und Querprofilgeschiebefuhrender Flusse. *Z. Bauwes.*, **25**, 486–.506.

Szabó, T., Fityus, S., & Domokos, G. 2013. Abrasion model of downstream changes in grain shape and size along the Williams River, Australia. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, **118**(4), 2059–2071.

Taber, L.A. 2004. *Nonlinear theory of elasticity: applications in biomechanics.* World Scientific Publishing, Singapore.

Taylor, M., Bertoldi, K., & Steigmann, D. J. 2014. Spatial resolution of wrinkle patterns in thin elastic sheets at finite strain. *J. Mech. Phys. Solids*, **62**, 163–180.

Taylor, M., Shirani, M., Dabiri, Y., Guccione, J.M., & Steigmann, D.J. 2019. Finite elastic wrinkling deformations of incompressible fiber-reinforced plates. *Int. J. Eng. Sci.*, **144**, 103138.

Thompson, D.W. 1942. *On Growth and Form. The Complete Revised Edition.* Dover Publications, NY.

Timoshenko, S. P., & Gere, J.M. 1963. *Theory of elastic stability.* 2nd edn. McGraw-Hill International Book Company, NY.

Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. 1959. *Theory of paltes and shells.* 2nd edn. McGraw-Hill International Book Company, NY.

Treloar, L. R. G. 1948. Stresses and Birefringence in Rubber subjected to General Homogeneous Strain. *Proceedings of the Physical Society*, **60**(2), 135–145.

Trower, E. J., Bridgers, S. L., Lamb, M. P., & Fischer, W. W. 2020. Ooid Cortical Stratigraphy Reveals Common Histories of Individual Co-occurring Sedimentary Grains. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, **125**(7), e2019JF005452.

Trower, E.J., Lamb, M.P., & Fischer, W.W. 2017. Experimental evidence that ooid size reflects a dynamic equilibrium between rapid precipitation and abrasion rates. *Earth & Planet. Sci. Lett.*, **468**, 112–118.

Uberoi, M. S. 1957. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows. *J. Appl. Phys.*, **28**(10), 1165–1170.

Várkonyi, P., & Domokos, G. 2011. A general model for collision-based abraison processes. *IMA J. Appl. Math.*, **76**, 47–56.

von Kármán, T. 1910. *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften.*

Wang, C.Y. 2015. Longest reach of a cantilever with a tip load. *Europ J. Phys.*, **37**(1), 012001.

Wang, T., Yang, Y., Fu, C., & Xu, F. 2022. Competition between Mullins and curvature effects in the wrinkling of stretched soft shells. *Int. J. Solids & Struct.*, **241**, 111473.

Ward, I. M. 1997. *Structure and properties of oriented polymers*. Chapman & Hall, NY.

Wong, Y. W., & Pellegrino, S. 2006. Wrinkled membranes I: Experiments. *J. Mech. Mater. Struct*, **1**, 27–61.

Yekutieli, Y., Sagiv-Zohar, R., Aharonov, R., Engel, Y., Hochner, B., & Flash, T. 2005. Dynamic model of the octopus arm. I. Biomechanics of the octopus reaching movement. *J. Neurophys.*, **94**(2), 1443–1458.

Zheng, L. 2009. *Wrinkling of Dielectric Elastomer Membranes*. Ph.D. thesis, Caltech.

Zhu, J., Zhang, X., & Wierzbicki, T. 2018. Stretch-induced wrinkling of highly orthotropic thin films. *Int. J. Solids & Struct.*, **139-140**, 238–249.