Opponensi vélemény

Patkós Balázs

Problémák az Extremális Halmazrendszerek témaköréből

című

doktori értekezéséről

Patkós Balázs doktori értekezését egy olyan témában írta, melyben Magyarország hagyományosan erős. Az extremális halmazrendszerek témájában Katona Gyula egy nagyon erős iskolát hozott létre, nem kis részben az általa vezetett, és immár több mint fél évszázados múltra visszatekintő Extremális halmazrendszerek szeminárium segítségével. Az értekezés három egymással szoros kapcsolatban levő témát ölel fel: a klasszikus extremális halmazrendszer problémákat – amik részbenrendezett halmazok azaz poszetek nyelvén is megfogalmazhatók, a halmazrendszerek nyomának a halmazrendszerre történő hatását vizsgáló problémákat, és a q-analógok, azaz a lineáris terekben való általánosítások problémáit. Röviden összefoglalom az eredményeket, de engedtessék meg, hogy mivel a tételek pontos kimondása sok technikai részletet tartalmazna, és azok természetesen könnyen megtalálhatók a disszertációban, így ehelyett csak a disszertációbeli számozásra fogok hivatkozni, ami egyébként az opponensi vélemény hosszára is jótékony hatással lesz.

Az értekezés bevezető utáni második fejezete kizárt részposzetes problémákkal foglalkozik, azaz olyan halmazrendszerekkel, melyek nem tartalmaznak valamilyen tartalmazással leírható P részstruktúrát. A klasszikus tételekben (Sperner tétel, Erdős-Ko-Rado tétel) ezek a feltételek egyszerűek voltak, a kutatások előrehaladtával ezek már bonyolultabbak. A terület egyik fő sejtése arról szól, hogy mindegyik esetben az extremális struktúra – legalábbis aszimptotikus értelemben - egyszerű sruktúrával rendelkezik. A sejtés emlékeztet a legalább 3-kromatikus gráfokat nem tartalmazó extremális gráfok esetére (élszám és struktúra). Egyszerű fa struktúrájú poszetekre már megvolt az eredmény, a szerző a 7-10. tételekben konkrét speciális esetekben igazolja ezt a sejtést. Ezek közül talán a pillangó és a gyémánt a legfontosabbak, utóbbi különösen nehéznek bizonyult, teljes megoldás még mindig nincs. Nagyon érdekes, hogy gráfelmélethez hasonlóan, ahol az általánosított Turán szám adott gráfok példányainak maximális száma a kérdés, poszetek esetében is elkezdődött a részstruktúrák számának vizsgálata. Figyelemre méltó, hogy itt – akárcsak extremális gráfelméletben – nem kanonikus struktúrák (nem Turán-gráfoknak megfelelően nem néhány szintből állók) is megjelennek. (Gerbner – Keszegh – Patkós cikke). (Már 15 éves eredmény, de kiemelném a 15. tételt, ahol Gerbnerrel szép becslést adnak k-láncok maximális számára l-láncot nem tartalmazó poszetekben.)

A harmadik fejezet halmazrendszerek nyomára vonatkozó feltételeket kielégítő halmazrendszereket vizsgál. Az F halmazrendszer egy S halmazra vett nyoma az S halmazra vett megszorítása: minden F-beli F halmazt elmetszünk S-sel és ezeknek a metszeteknek a halmazrendszere a nyom. A terület alaptétele a Sauer-lemma, ami éles becslést ad a halmazrendszer méretére, ha nincs olyan k elemű K részhalmaza az alaphalmaznak, amin a nyom K összes részhalmazát tartalmazza. A vizsgálatok arról szólnak, hogy mit tudunk mondani, ha a nyom még azt is tudja, hogy nem tartalmaz hosszú láncot. (44-45. tétel, és a 46. tétel is hasonló jellegű). Véleményem szerint a 44-45. tétel a dolgozat

kiemelkedő eredményei. A 47. tétel enyhíti a nyomra vonatkozó feltételt, a 48. tétel pedig egy szép, és némiképp meglepő szaturációs tétel. Elmondható, hogy a harmadik fejezet számos szép erősítését tartalmazza a nyommal kapcsolatos „klasszikus” tételeknek.

A negyedik rész egy másik fontos irányban tartalmaz szép eredményeket metszettételek q-analógjairól. A q-analógok a téma lineáris algebrai általánosításait jelenti, az alaphalmaz egy vektortér, és részhalmazok helyett altereket tekintünk. Érdekes, hogy néha ezek az eredmények előreszaladtak, előbb bebizonyították őket, mint a megfelelő halmazrendszeres kérdést. (Frankl-Wilson tétel.) A Katona Kruskal féle árnyéktétel vektorteres általánosítása egy ideig derekasan ellenállt a bizonyítási kísérleteknek, mígnem Keevash új módszerét Chowdhury és a jelölt tovább fejlesztették, és bebizonyították a megfelelő tétel. (76. tétel) Hasonlóképpen az r-szeresen metsző Erdős-Ko Rado tételt (ami Frankl Péter eredménye) is sikerült vektorterekre általaánosítaniuk. Blokhuis, Brouwer, Chowdhury, Frankl, Mussche, Patkós és Szőnyi pedig a híres Hilton-Milner tétel q-analógját bizonyították be (80. tétel). A kidolgozott módszer segítségével a fenti hét szerző érdekes kitekintést talál a 81. tételben. Ha a Kneser gráfot nem halmazokra, hanem vektortér altereire definiáljuk, akkor sikerült meghatározniuk a kapott q-Kneser gráf kromatikus számát. (Korábban csak speciális esetekben volt ismert ez a kromatikus szám.)

Formai szempontból az értekezés gondosan szerkesztett, alapos munka. A problémák történetét, hátterét jól bemutatja, a különböző kérdések összefüggéseit világosan bemutatja. Bár vannak a dolgozatban és a tézisekben sajtóhibák, ezek az olvasást nem nehezítik.

Összefoglaló:

A disszertáció a jelölt tizenkét cikkén alapul, nem említve a Gerbner Dániellel közösen írt kiváló könyvét. A cikkek – amiből hat egy-szerzős – kiválóak, amit a fent leírtak mellett az is bizonyít, hogy azok kimagasló jórészt D1-esQ1-es folyóiratokban jelentek meg, mint pl European Journal of Combinatorics, Journal of Combinatorial Theory A, SIAM Journal on Discrete Mathematics, The Electronic Journal of Combinatorics, Order. A jelölt az értekezésben bebizonyította, hogy a téma kiváló szakértője, számos fontos tételt bizonyított. Elmondható, hogy eredményeivel jelentősen hozzájárult a témában történt kutatásokhoz. Az elért eredmények, a doktori disszertáció színvonala egyértelműen meghaladják az MTA doktori cím megszerzéséhez szükséges szintet. Mindezek alapján Patkós Balázsnak az MTA doktora cím odaítélését javaslom.

2023. 03. 31.

Győri Ervin

kutatóprofesszor

a matematika tudomány doktora