Válasz Balogh József kérdéseire

1. Milyen irányban halad a tiltott részposzetek elmélete? Milyen új eredmények várhatóak a következő 20 évben?

A kizárt részposzetes témakörrel foglalkozó cikkek döntő többsége 2005 és 2020 között született. Ezek mindegyike valamilyen kettős leszámlálós bizonyítást használ az erdemény megmutatásához. Mivel nagyon sokan dolgoztak különböző speciális eseteken, nem tartom valószínűnek, hogy a témakör fő sejtésének akár csak jelentős, új poszetcsaládokra való igazolását teljesen új módszerek használata nélkül el lehessen érni. Emiatt azt gondolom, hogy halmazrendszerek méretére vonatkozó olyan extremális eredmények születhetnek a következő időszakban, amelyeknél a halmazrendszer a poszetmentességen kívül valamilyen extra tulajdonsággal bír. Ilyen eredmények ismertek, amikor az extra tulajdonság valamilyen metszetkövetelménnyel adott. Ahogy a kizárt részposzetes témakör Sperner tételéből [32] indul, úgy a metszetes verzió kiindulópontja Milner "metsző Sperner" tétele [27], melyet azóta jó néhány másik követett [14, 18, 20, 1]. A metszettulajdonságokon kívül természetesnek tűnik a komplementerre zárt és a komplementer-mentes extra tulajdonsággal rendlkező halmazrendszerek vizsgálata is.

Az új módszerek hiányában az extremális problémák terén jobban figyelmet kaphatnak az *általánosított* kizárt részposzetes problémák, azaz amikor nem a halmazrendszer méretét, hanem egy Q poszet megjelenéseinek számát szeretnénk maximalizálni a P poszet kitiltása mellett. Ilyen eredmény született már a disszertációban foglaltak megjelenése óta is [2].

Az elmúlt évtized egyik nagy kombinatorikai áttörése a hipergráf konténer módszer megjelenése volt [3, 30]. Ennek segítségével megválaszolásra került a kizárt részposzetes probléma szuperszaturálós [29] és véletlenes [4, 8] verzióinak láncokra vonatkozó speciális esete és a vonatkozó kérdések még egy-két konkrét poszet esetében [21, 23]. Bár megoldatlan kérdés ezeken az alterületeken is nagyon sok van, nem érzem, hogy az extremális közösség érdeklődése ezek felé fordulna.

Nagyon nagy az aktivitás viszont az extremális kérdéskör "kistestvérénél", a szaturálási szám meghatározására irányuló kutatásoknál. A legkisebb bővíthetetlen P-mentes halmazrendszer méretének vizsgálatát 10 évvel ezelőtt egy hatszerzős cikkben vetettük fel [19]. Azóta a nem feltétlenül feszített esetben kiderült, hogy ez bármilyen P poszet esetén egy az alaphalmaz méretétől független, csak P-től függő konstans [26]. Így a témában a feszített eset megértésére irányul a legtöbb figyelem: tudjuk, hogy van poszet, melyre ez az érték is konstans, de van olyan poszet, melynek a feszített szaturálási száma lineárisan nő az alaphalmaz méretével. Egy

friss eredmény szerint [15], ha e szám nem konstans, akkor legalább gyökösen nő az alaphalmaz méretével, de nem világos, hogy $\sqrt{n}$-nél, lináris növekedésnél, vagy valamilyen közbülső függvénynél lenne az ugrás. Tekintve a témában születő cikkek számát [5, 13, 28, 9, 24, 25], megkockáztatom, hogy ez ki fog derülni a következő 20 év folyamán.

Végezetül megemlíteném, hogy a kizárt részposzetes problémát más részben rendezett halmazokban is lehet vizsgálni és ismert is néhány ilyen eredmény [22, 31, 33, 34]. A legtermészetesebb általánosításnak a többdimenziós rácsok illetve egy véges test feletti vektortér altereinek poszete tűnik.

2. A V.C.-dimenzió többnyire diszkrét geometriában szokott megjelenni. Van-e valamilyen geometriai alkalmazása az új eredményeknek?

A halmazrendszerek nyomaira vonatkozó, a disszertáció harmadik fejezetében szereplő problémákat inkább extremális halmazrendszeres elméleti megközelitésből vizsgáltam. Nem tudok az eredmények geometriai alkalmazásáról, azok impaktja szintén az extremális kombinatorika közösségben mutatkozik meg. A 46. Tétel (tézisfüzetben 3.4) bizonyításának fontos eleme egy szoros utakat nem tartalmazó halmazrendszerekről szóló állitás, mely több idézetet is kapott. A 47. Tétel (tételfüzetben 3.5) egy általam sejtett általánositását egy cambridge-i doktorandusz, Ta Sheng Tan bizonyította be. A Frankl Nórával, Sergey Kiselevvel és Andrey Kupavskii-val közös a VC-dimenzió szaturálásási számáról szóló tételünk (48-as illetve 3.6-os Tétel) beilleszkedik abba a sorba, hogy egyre több területen vizsgálják az extremális problémák szaturálós változatát. Nemcsak az előző kérdésre adott válaszban is megemlitett kizárt részposzetes kérdéskörben, hanem kizárt 0-1 részmátrixok [16, 17, 6], rendezett gráfok [7], Berge-hipergráfok [10, 11] és egyéb hipergráfos kérdések [12] esetén is.

Budapest, 2023. június 7.

Patkós Balázs

References

[1] J. Balogh, W. B. Linz, and B. Patkós. On the sizes of t-intersecting k-chain-free families. *arXiv preprint arXiv:2209.01656*, 2022.

[2] J. Balogh, R. R. Martin, D. T. Nagy, and B. Patkós. On generalized Turán results in height two posets. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 36(2):1483–1495, 2022.

[3] J. Balogh, R. Morris, and W. Samotij. The method of hypergraph containers. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018*, pages 3059–3092. World Scientific, 2018.

[4] J. Balogh, R. Mycroft, and A. Treglown. A random version of Sperner's theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 128:104–110, 2014.

[5] P. Bastide, C. Groenland, H. Jacob, and T. Johnston. Exact antichain saturation numbers via a generalisation of a result of lehman-ron. *arXiv preprint arXiv:2207.07391*, 2022.

[6] B. A. Berendsohn. An exact characterization of saturation for permutation matrices. *Combinatorial Theory*, 3(1), 2023.

[7] V. Bošković and B. Keszegh. Saturation of ordered graphs. *arXiv preprint arXiv:2203.05307*, 2022.

[8] M. Collares and R. Morris. Maximum-size antichains in random set-systems. *Random Structures & Algorithms*, 49(2):308–321, 2016.

[9] I. Danković and M.-R. Ivan. Saturation for small antichains. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P1–3, 2023.

[10] S. English, D. Gerbner, A. Methuku, and M. Tait. Linearity of saturation for berge hypergraphs. *European Journal of Combinatorics*, 78:205–213, 2019.

[11] S. English, P. Gordon, N. Graber, A. Methuku, and E. C. Sullivan. Saturation of berge hypergraphs. *Discrete Mathematics*, 342(6):1738–1761, 2019.

[12] S. English, A. Kostochka, and D. Zirlin. Saturation for the 3-uniform loose 3-cycle. *Discrete Mathematics*, page 113504, 2023.

[13] M. Ferrara, B. Kay, L. Kramer, R. R. Martin, B. Reiniger, H. C. Smith, and E. Sullivan. The saturation number of induced subposets of the Boolean lattice. *Discrete Mathematics*, 340(10):2479–2487, 2017.

[14] P. Frankl. Analogues of Milner's theorem for families without long chains and of vector spaces. *European Journal of Combinatorics*, 93:103279, 2021.

[15] A. Freschi, S. Piga, M. Sharifzadeh, and A. Treglown. The induced saturation problem for posets. *arXiv preprint arXiv:2207.03974*, 2022.

[16] R. Fulek and B. Keszegh. Saturation problems about forbidden 0-1 submatrices. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 35(3):1964–1977, 2021.

[17] J. Geneson. Almost all permutation matrices have bounded saturation functions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P2–16, 2021.

[18] D. Gerbner. Profile polytopes of some classes of families. *Combinatorica*, 33:199–216, 2013.

[19] D. Gerbner, B. Keszegh, N. Lemons, C. Palmer, D. Pálvölgyi, and B. Patkós. Saturating Sperner families. *Graphs and Combinatorics*, 29(5):1355–1364, 2013.

[20] D. Gerbner, A. Methuku, and C. Tompkins. Intersecting P-free families. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 151:61–83, 2017.

[21] D. Gerbner, D. Nagy, B. Patkós, and M. Vizer. Supersaturation, counting, and randomness in forbidden subposet problems. *Electronic Journal of Combinatorics*, 28(1):1–20, 2021.

[22] D. Gerbner, D. T. Nagy, B. Patkós, and M. Vizer. Forbidden subposet problems in the grid. *Discrete Mathematics*, 345(3):112720, 2022.

[23] K. A. Hogenson. *Random and deterministic versions of extremal poset problems.* PhD thesis, Iowa State University, 2016.

[24] M.-R. Ivan. Saturation for the butterfly poset. *Mathematika*, 66(3):806–817, 2020.

[25] M.-R. Ivan. Minimal diamond-saturated families. *arXiv preprint arXiv:2110.01118*, 2021.

[26] B. Keszegh, N. Lemons, R. R. Martin, D. Pálvölgyi, and B. Patkós. Induced and non-induced poset saturation problems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 184:105497, 2021.

[27] E. C. Milner. A combinatorial theorem on systems of sets. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):204–206, 1968.

[28] N. Morrison, J. A. Noel, and A. Scott. On Saturated k-Sperner Systems. *Electronic Journal of Combinatorics*, 21(3), 2014.

[29] W. Samotij. Subsets of posets minimising the number of chains. *arXiv preprint arXiv:1708.02436*, 2017.

[30] D. Saxton and A. Thomason. Hypergraph containers. *Inventiones mathematicae*, 201(3):925–992, 2015.

[31] S. Shahriari and S. Yu. Avoiding brooms, forks, and butterflies in the linear lattices. *Order*, 37(2):223–242, 2020.

[32] E. Sperner. Ein satz über untermengen einer endlichen menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):544–548, 1928.

[33] B. Sudakov, I. Tomon, and A. Z. Wagner. Uniform chain decompositions and applications. *Random Structures & Algorithms*, 60(2):261–286, 2022.

[34] J. Xiao and C. Tompkins. On forbidden poset problems in the linear lattice. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P1–18, 2020.