Opponensi vélemény
Patkós Balázs doktori pályázatáról

Bíráló: Füredi Zoltán, az MTA rendes tagja,
Rényi Alfréd Matematikai Intézet
furedi.zoltan@renyi.hu

2023 május 11.

Patkós Balázs a Katona Gyula által művelt extremális hipergráfelmélet nemzetközileg elismert kutatója. Kutatási témaja a kombinatorika egyik legfontosabb ága, mivel minden véges probléma átfogalmazható egy extremalis hipergráf kérdéssé. A doktori disszertációja egy rövid bevezetésből és három nagyobb fejezetből áll melyek rendre 34, 23 illetve 21 oldalasak, azaz a dolgozat lényegi része 78 oldal. Rengeteg eredményt, összesen 21 saját tételt bizonyít. Ezek közül mindhárom fejezetből kiragadok egyet amelyet a legfontosabbnak tartok.

Előbb néhány szó az extremális hipergráfokról. Az elmélet egyik központi eredménye a metsző rendszerekről szóló Erdős-Ko-Rado tétel. Legyen X egy n-elemű alaphalmaz és tegyük fel, hogy H az X k-elemű részhalmazainak egy rendszere (azaz k-uniform). Ha H tagjai páronként metszőek és $n > 2k$ akkor $|H| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Itt egyenlőség csak a triviálisan metsző rendszer esetén áll fenn, azaz amikor H összes tagja tartalmazza az X egy ugyanazon elemét.

Egy másik alapvető eredmény, a Kruskal-Katona tétel a H árnyékairól szól. Jelölje ∂H a H tagjai által lefedett $(k-1)$-elemű halmazok rendszerét. A Kruskal-Katona tétel meghatározza az adott méretű k-uniform halmazrendszerek árnyékának a minimumát. Tételüknek már a kimondása sem egyszerű, viszont Lovász László talált egy nagyon használható becslést amivel a legtöbb esetben elkerülhetőek a bonyolult binomiális együttható összegek. Bármely $y \geq k$ valós számra definiáljuk az $\binom{y}{k}$ függvényt ami ezen a tartományon egy konvex k-adrendű polinom, $\binom{y}{k} := y(y-1)...(y-k+1)/k!$. Ha H mérete legalább $\binom{y}{k}$ akkor $|\partial H| \geq \binom{y}{k-1}$.

Az előzmények közül harmadiknak ide vehetjük a Boole háló legnagyobb antiláncáról szóló Sperner tételt. Erdős Pál erősebb változata szerint ha egy n-elemű alaphalmaz részhalmazainak egy S rendszere nem tartalmaz $k+1$ tagból álló láncot (az ilyen láncokat C_{k+1}-gyel jelöljük), akkor S számossága legfeljebb a k középső szint mérete lehet.

A doktori mű tulajdonképpen a fenti három klasszikus eredmény kiterjesztései, általánosításai.

A háromból az első nagy fejezet a Sperner tétel egy nagyon természetes általánosításáról szól. A jelölt olyan rendszerek számosságát vizsgálja ahol a C_{k+1} helyett egy más előírt P poset a tiltott részkonfiguráció. Ennek maximális számosságát jelölje $La(n, P)$, az indukált esetben $La^*(n, P)$. E függvény nagyságának meghatározása, az ide vonatkozó közel 40 éves sejtés bizonyítása még távolról sem teljes. A feladat nehézségét mutatja, hogy még az sem bizonyított, hogy a $\lim_{n\to\infty} La(n, P)/\binom{n}{n/2}$ limesz létezik e. Egy másik nehézség az az, hogy a sejtett extremális rendszerek szerkezete lényegesen komplikáltabb mint a C_{k+1} esetén, amikor a Boole háló k teljes szintje alkotja az optimális rendszert.

Patkós a 7., 8., 9. és 10. tételében a sejtésnek végtelen sok esetét igazolja, nevezetesen olyan esetekre ad nagyon szoros becsléseket amikor a P poset magassága legfeljebb 3. A tételek kimondása meglehetősen technikai, nem idézem. A tételek alapjául szolgáló cikk (aminek száma [99], a rövid tézisfüzetben meg [48]) az egyik legérdekesebb a dolgozatban. Mindenesetre ez egy jelentős előrelépés. A fejezetben még számos figyelemreméltó eredmény található, stabilitási, leszámlálási feladatok. Összességében is kijelenthetjük, hogy a dolgozat eredményekben igen gazdag.

A középső nagy fejezet központi fogalma a Vapnik-Chervonenkis dimenzió. Egy F halmazrendszer dimenziója azon d értékek maximuma amelyre található olyan d-elemű D halmaz a világban amelyet az F tagjaival metszve a D összes 2^d részhalmaza előállítható. Ismeretes, hogy adott VC dimenziójú rendszer nem lehet túl nagy, bonyolultsága polinomiális az alaphalmaz nagyságában. Emiatt is e fogalom rendkívül fontos szerepet játszik az algoritmusok elméletében, a statisztikában, a diszkrepanciaelméletben. Így a jelölt e fejezetbeli eredményei nagyon értékesek, ugyanis kidolgozza az extremális halmazrendszerek korábbi eredményeit adott VC dimenziójú halmazrendszerekre (ld pl a 46. Tételt). A fejezet legérdekesebb eredményének a 48. Tételt tartom ahol olyan adott VC-dimenziójú rendszerekről van szó amelyek "telítettek" azaz amelyekhez bármilyen további halmazt hozzávéve a dimenzió megnő. A telített (saturated) rendszerek vizsgálata a kombinatorika egyik központi feladata, ugyanis tkp. így különféle stabilitási tételek nyerhetőek, amelyek általában fontosabbak és használhatóbbak mint a szimpla extremális kérdések.

A harmadik (azaz az utolsó) nagy fejezet a fenti eredmények véges vektorterek altereire való kiterjesztéséről szól. Ez a rész a [10] és [22] (a rövid magyar tézisfüzetben [7] és [11]) számú, többek közt A. Chowdhury-val közös dolgozatokon alapul. Eredményük nagyonis beleillik abba a trendbe, hogy a kombinatorika egyfelől egyre több és több algebrai eszközt használ, másfelől egyre pontosabban igyekszik leírni az algebrai struktúrák kombinatorikus tulajdonságait. Mivel a 76. Tételt tartom a dolgozat legfontosabb eredményének, most pontosan idézem. Szükségünk van egy-két definícióra és jelölésre.

Legyen V az F_q véges test fölötti n-dimenziós vektortér. A k-dimenziós

altereinek számát $\binom{n}{k}_q$ Gauss együttható jelöli. Elemi számolás, hogy $\binom{n}{k}_q = \prod_{0\le i\le k-1}(q^{n-i}-1)/(q^{k-i}-1)$. Patkós (és társszerzői) kiterjesztik a Gauss együtthatót, hasonlóképp mint Lovász a binomiális együtthatót, minden valós értékre. Bármely $y \ge k$ valós számra definiáljuk az $\binom{y}{k}_q$ függvényt a következő formulával

$$\binom{y}{k}_q = \prod_{0\le i\le k-1} \frac{q^{y-i}-1}{q^{k-i}-1}.$$

A 76. Tétel azt mondja ki, hogyha H az F_q véges test fölötti n-dimenziós vektortér k-dimenziós altereinek egy rendszere és $|H| = \binom{y}{k}_q$, akkor a H tagjai által tartalmazott $(k-1)$ dimenziós alterek száma legalább $\binom{y}{k-1}_q$. Korábbi jelöléseink analógiájára $|\partial H| \ge \binom{y}{k-1}_q$. Ez egy nagyon jól használható egyenlőtlenség, a szerzők bemutatnak több alkalmazást is, pl. egy Erdős-Ko-Rado típusú tételt vektortér metsző részrendszereire (ez a 78. Tétel) amellyel P. Frankl egy eredményét terjesztik ki. Figyelemre méltó a 80. Tétel is, amely egy Hilton-Milner típusú stabilitási eredmény. A Math Reviews ezekre a cikkekre 24+37 hivatkozást sorol fel.

Néhány mérlegelésre okot adó gondolat.

1. A társszerzők kérdése. Megszámoltam a jelölt utolsó 60 közleményében a szerzők számát:

Szerzők száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Cikkek száma	6	7	5	18	10	7	2	2	2	-	2

Világjelenség a társszerzők számának a növekedése. Patkós társszerzői között rengeteg elismert nevet, vezető matematikust találunk (pl. J. Balogh, A. Blokhuis, A. E. Brouwer, P. Frankl, A. Grzesik, M. Krivelevich, A. Kupavskiii, D. Mubayi, A. Pokrovskiy). Hallgatva a jelölt előadásait és személyes beszélgetésekből is egyértelmű, hogy a közös munkákból arányosan kivette a részét. Másfelől a dolgozat eredményeinek többsége az egyszerzős cikkekből kerülnek ki. A sok társszerző nem az intuíció hiányát, hanem ép ellenkezőleg a jelölt együttműködőképességét jelzi.

2. Néhány stílusbeli fogyatékosság: Dícséretes, hogy a jelölt igyekezett a nemzetközi (azaz az angol) terminológiát magyarítani, de ez számos szerencsétlen elnevezéshez vezetett, pl. "erősen szétzúzott halmaz". A poszet magyar helyesirása is szükségtelen, szerintem.

3. Különösen a magyar nyelvű tézisekben benn maradt néhány valóban értelemzavaró elírás, az egyik épp az igen fontos Gauss együttható definíciójánál (rögtön a második lapon). A korrekt definíció sehol nem derül ki a szövegből, szerencsére a megjelent cikkben helyesen van kimondva.

4. A tézisfüzet és a dolgozat állításainak a számozása lehetett volna azonos. A szerző, dicséretes módon, a legtöbb helyen mindkét adatot megadja, szerintem olvashatóbb lett volna csak a dolgozat indexeihez ragaszkodni, a tézisfüzetben senkit nem zavart volna ha a 31. Tétel után a 36. jön.

5. Egy érdemi **kérdés**:
A harmadik rész eredményei tkp. a klasszikus Boole hálós tételek kiterjesztései egy másik sokat vizsgált posetre, az alterek részben rendezett halmazára. Jól ismert, hogy a Sperner tétel valamilyen értelemben MINDEN posetre kiterjeszthető (Dilworth tétel, Whitney számok, stb.), legalábbis a legtöbb fontos posetre. A dolgozatban diszkutált eredmények többsége bizonyára kiterjeszthetőek a posetek jóval szélesebb osztályaira. Kérdésem: vannak e ilyen kutatások folyamatban, ismeretesek e nemtriviális általánosítások?

Összefoglalva, a dolgozat komoly technikai tudást mutat, a témakör olyan kérdéseivel foglalkozik, melyek nemzetközi érdeklődésre tartanak számot. A disszertáció téziseit új eredménynek elfogadom. Véleményem szerint bőségesen elegendőek az MTA doktori címhez előírt követelmények teljesítéséhez. A dolgozat világossá teszi, hogy a pályázó alaposan elsajátította a kombinatorika eszköztárát. A jelölt eredményei rengeteg kutatást inspiráltak, kutatásai számos új problémát, szempontot vetnek fel. Végezetül megemlítendő, hogy a jelölt tudományos közéleti tevékenysége kiemelkedő.

Javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és melegen támogatom a jelöltnek az MTA doktora cím odaítélését.

§ § § § §