

Bírálóí vélemény **Békési József**
Contribution to a Class of
Combinatorial Optimization Problems
című doktori értekezéséről

Békési József doktori disszertációja négy fejezetre tagolódik: *ládapakolási, ütemezési, mátrix transzponálási és tömegközlekedés optimalizálási* problémákat vizsgál. Az első két fejezet a kombinatorikus optimalizáció nagy, sokat vizsgált témaköröihez tartozik, elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt. A harmadik fejezet egy kicsit speciálisabb, a negyedik egy valóságos közlekedési problémára javasol megoldást.

A klasszikus *ládapakolási* probléma önmagában *NP-teljes*, ezért az online (azaz, amikor a tárgyak egyenként jönnek, tehát a teljes inputot nem ismerjük) verziójának a hatékonyságára jó mérőszám az az arány, hogy aszimptotikusan hányszor több ládát használunk a tárgyak elpakolásához, mint amennyit optimálisan kellene. Azaz ha L a tárgyak egy listája, $A(L)$ az A algoritmus során felhasznált ládák száma, $OPT(L)$ az optimálisan felhasználandó ládák száma, és $R_A(N)$ az $A(L)/OPT(L)$ arányok olyan listákon vett szuprémuma, amelyekre $OPT(L) = N$, akkor a

$$R_A^\infty = \limsup_{N \rightarrow \infty} R_A(N) \quad (1)$$

mennyiség az A algoritmus *aszimptotikus versenyképességi hányadosa* (*asymptotic competitive ratio*). Ismeretes, hogy a népszerű *First Fit* és *Best Fit* algoritmusokra $R_{FF}^\infty = R_{BF}^\infty = 17/10$. Lee és Lee vezették be a *Harmonic FIT* algoritmust és belátták, hogy $R_{HF}^\infty = 1,69103\dots$. Ezt az algoritmust időközben többen javították, jelenleg Békési és szerzőtársai *Advanced Harmonic* algoritmus a leghatékonyabb, $R_{AH}^\infty \leq 1,57828956$. A bonyolult algoritmus először a méretük alapján csoportosítja a tárgyakat, majd ezeket *konténerekbe* és az utóbbiakat ládákba pakolja. Lényeges, hogy a különböző típusú konténerek térfogata hogy van megválasztva. Az algoritmus elemzése jól megválasztott súlyfüggvény segítségével történik. Itt nagyon fontos hozzátennem, hogy ha - az egyszerűség kedvéért - R -el jelölöm az online ládapakolási problémára elérhető legjobb aszimptotikus versenyképességi hányadost, akkor Békési és társai azt is belátták, hogy $R \geq 1.54278$. Azaz

$$1.54278 \leq R \leq R_{AH}^\infty \leq 1,57828956. \quad (2)$$

A két korlát (a jelenleg ismert legjobbak) az online ládapakolási problémára nagyon éles becslést ad, mindkettő elérésében részt vett a szerző. Mivel ez egy nagyon sokak által vizsgált kérdés, ez szerintem a disszertáció legfontosabb eredménye.

Gutin és szerzőtársai vezették be a *kötegelt* láda pakolási problémát, amely átmenetet képez az online és offline verziók között. A tárgyak kötegekben jönnek. Ha a kötegek száma K , akkor K -köteges láda pakolásról beszélünk (K -BBPP, azaz *K-batched bin packing problem*). Világos, hogy ha minden köteg egy tárgyat tartalmaz, akkor a klasszikus online, és ha az összes tárgy egy kötegben érkezik, akkor a klasszikus (offline) ládapakolási problémát kapjuk. A (1) formulához hasonlóan definiálható egy K -köteges A láda pakolási algoritmus $R_{A,K}^\infty$ aszimptotikus hatékonysága. Gutin és szerzőtársai belátták, hogy a 2-BBPP probléma aszimptotikus versenyképességi hányadosa legalább 1.3871. Ezt kiterjesztve, Békési és szerzőtársai bebizonyították, hogy $K = 3$ esetén ez legalább 1,51211....

Tétel 1.3.11 Minden A 3-BBPP algoritmusra teljesül az $R_{A,3}^\infty \geq 1,51211\dots$ egyenlőtlenség.

A tétel önmagában is szép de az igazi jelentőségét talán az adja, hogy az itt kidolgozott technikát tudták később alkalmazni a (2) egyenlőtlenség alsó korlátjának a bizonyításához.

A ládapakolási problémák egy fontos osztályát alkotják azok a kérdések, amikor az egyes ládába rakható elemek k számát korlátozzuk. Békési és szerzőtársai új alsó korlátokat kaptak szinte minden $5 \leq k \leq 35$ érték esetén az aszimptotikus versenyképességi hányadosára (Table 1.3). Továbbá vizsgálták a tárkorlátos ládapakolási modelleket és ott is új eredményeket értek el általános Sylvester sorozatok felhasználásával.

A dolgozat második részében a szerző ütemezési problémákat vizsgál. Adott (n) számú, esetlegesen eltérő sebességű gépen szeretnénk végrehajtani m számítás feladatot. A számításokat úgy kellene hozzárendelni a gépekhez, hogy a számítások minél előbb befejeződjenek. Online esetben a feladatok sorban, egyenként jönnek elő, és ezeket végérvényesen kell hozzárendelnünk az egyes gépekhez, ahol végrehajtnak majd. Egy online algoritmus R -kompetitív, ha minden input esetén legfeljebb R -szer annyi időt vesz igénybe a végrehajtása, mint az optimális hozzárendelés. Az $m = 4$ illetve $m = 5$ esetekre a Békési és társai $R_4 \geq 2,141391$ illetve $R_5 \geq 2,314595$ alsó korlátokat bizonyítják. A megadott számok nagyon tetszetős módon polinomok gyökeinek a vizsgálatával jönnek ki.

Az ütemezési problémák egy izgalmas változatában a feladat elvégzéséhez két részfeladatot kell megoldanunk adott sorrendben és adott késleltetéssel. Azaz egy feladatot egy (a_i, ℓ_i, b_i) hármas határoz meg, ahol a_i az első részfeladat elvégzéséhez szükséges idő, ℓ_i a késleltetés, b_i pedig a második részfeladat elvégzéséhez szükséges idő. Egy gépünk van. A késleltetés ideje alatt a gép kapacitása szabad, és így akár más feladatot is végezhet. A cél ebben az esetben az, hogy az egyetlen géphez úgy rendeljük hozzá a feladatokat, hogy időben ne fedjék át egymást és minél előbb befejeződjön a végrehajtásuk. Az olyan A algoritmust, amely legfeljebb ρ -szor annyi időt vesz igénybe minden n hosszú lista esetén, mint az optimális, ρ -approximációnak nevezünk, és az ilyen ρ -k infimuma az A algoritmus *legrosszabb eseti hányadosa*. Ageev és Baburin javasolták a feladat megoldását egy (kétszer alkalmazott) mohó eljárással (*Double*

Next Fit, *DNF*) és belátták, hogy $\rho_{DNF} \leq 7/4$. Békési és szerzőtársai belátták, hogy ez az eredmény éles, $\rho_{DNF} \geq 7/4$, azaz

$$\rho_{DNF} = 7/4.$$

A második fejezetben további ütemezési, míg a harmadikban mátrix transzponálási problémákat (*matrix transpose problem*, *MTB*) vizsgál Békési eredményesen. A negyedik fejezetben egy nagyon komplex közlekesési probléma kerül megoldásra a gyakorlatban. A megvalósíthatóság miatt itt is szép ötletek kellettek.

Békési József a dolgozatát angolul írta meg. Ugyan található a leírásban néhány hiba, de ezek a érthetőséget nem befolyásolják. Összegezve, az elért eredmények fontosak, és a témakör rangos nemzetközi folyóirataiban lettek leközölve. Ezért a *az MTA Doktora fokozat odaítélését* melegen ajánlom.

Budapest, 2023.10.16.



Ruszinkó Miklós