

toth.gyula.2\_46\_22

# A nehézségi erőter gradienseinek jelentősége és felhasználása a felsőgeodézia és a fizika egyes területein

MTA Doktori értekezés tézisei

Tóth Gyula

Budapest  
2022

## I. Bevezetés

A földi nehézségi erőter ismerete fontos a tudomány és a mérnöki alkalmazások számára. A fizika, geofizika, óceánkutatás, meteorológia igényli a nehézségi erő eloszlása, változása ismeretét. Az építési, vízpítési tevékenység is szorosan kapcsolódik hozzá, mivel a nehézségi erő vektorai jelölik ki a függőleges irányokat, a rájuk merőleges szintfelületek érintő egyenesei pedig a helyi vízszintes irányokat. A nehézségi erő és ennek két összetevője, a tömegvonzási (gravitációs) és forgási centrifugális erők potenciális erők, ezért a nehézségi erő vektorai a nehézségi erőter potenciálfüggvényéből származtathatók gradiens (derivált) képzéssel. A tömegvonzási rész a Föld tömegeloszlásától függ, ezért a nehézségi erőter ismerete a nyersanyagkutatás szempontjából is fontos.

A mérnöki, hidrológiai, óceánkutatási feladatok elsősorban a szintfelületek, és a közepes tengerszintek magasságában levő kitüntetett szintfelület, a geoid egyre pontosabb ismeretét igénylik. A felsőgeodézia egyik időszerű feladata az egyes országok, földrészek önálló magassági rendszereinek összekapcsolása, amihez a geoid egész földre kiterjedő meghatározása szükséges. A geodinamikai szemléletmód az időben változó erőterre jellemző mennyiségek meghatározását célozza. Ehhez elengedhetetlen a méréseink megismétlése, folyamatos végzése és feldolgozása. A mérnöki alkalmazásokban cm-es, szélső esetben egy-egy mérnöki létesítmény területén akár még nagyobb pontosságra is szükség lehet. Ez megkívánja az erőter finomszerkezetének meghatározását, amihez fontos a nehézségi erő helyfüggő változását leíró gradiensek mérése, feldolgozása.

A nehézségi erő gradiensei és ezek mérése elválaszthatatlanul összekapcsolódnak Eötvös Loránd nevével. A nehézségi erő gradienseinek mértékegysége, és az általa megalkotott eszköz, a horizontális variométer az ő nevét viselik. Az Eötvös-inga mint gradiensmérő műszer, alkalmas a nehézségi erőter meghatározására, finomszerkezeté-

nek vizsgálatára. A nehézségi erőter valamely kiválasztott szintfelülete részletes meghatározásával a világon először tudományos célokból Eötvös Loránd foglalkozott. Arad vidékén az ingájával végzett mérések felhasználásával a szintfelületet érintő Bessel-ellipszoidhoz viszonyított potenciálettéréseket szerkesztették meg  $\sim 2$  cm-nek megfelelő értékű izovonalakkal.

Eötvös kutatásai nem választhatók szét a mai értelemben vett alap- és alkalmazott kutatásra. Ingája a gyakorlati geofizika, a kőolaj-kutatás első és sokáig egyetlen műszere lett. Eszközével viszont egy olyan alapkutatási problémát is vizsgált, mint a súlyos és tehetetlen tömeg egyezőségének vizsgálata. Az 1906 és 1909 között végzett mérésorozat leírását Eötvös munkatársai, Pekár Dezső és Fekete Jenő publikálták 1922-ben. Ephraim Fischbach 1986-ban megjelent cikke világméretű érdeklődést keltett Eötvös, Pekár és Fekete (EPF) klasszikus kísérletsorozata iránt a feltételezett "ötödik erő" miatt. A Fischbach és munkatársai által észrevett fajlagos barionszám függés oka továbbra is tisztázatlan.

A 2019-es Báró Eötvös Loránd-émlékév kapcsán nemrég előtérbe került Eötvös Loránd szellemi hagyatéka. Kutatásaimban ennek a gazdag szellemi örökségnek a felhasználása vezetett az elmélet és a gyakorlat igényeinek a szem előtt tartásával.

## II. A kutatás célkitűzései

Tudományos fokozatomat (kandidátus) 1994-ben szereztem a földi nehézségi erőter és a topografikus-izosztatikus tömegek kapcsolatának kutatásában elért eredményeimből. Ezután a kutatásaim a nehézségi erőter modellezése, finomszerkezetének vizsgálata témájában folytatódtak.

Értekezésemben három főbb területen végzett vizsgálataimat mutatom be, melyek mindegyike szorosan kapcsolódik Eötvös mun-

kásságához. Az első kettő a nehézségi erőter meghatározása gradiensmérések felhasználásával. Ez azért fontos, mert bár az Eötvös-ingával végzett gradiensmérések szempontjából Magyarország a világ legjobban felmért területe, viszont a méréseket korábban csak nyersanyagkutatói szempontból hasznosították. A korszerű űreszközökkel (GOCE) végzett gradiensmérések is rendelkezésre állnak. Az említett pontossági igényeket szem előtt tartva ezért célul tűztem ki ezek bevonását a nehézségi erőter meghatározásába. Erre a gradiometriai peremérték-feladatok lehetőséget adnak. A mesterséges holdas mérések viszont nem a földfelszín közelében vannak, ezért foglalkoztam a mérések analitikai folytatásával is. Az Eötvös-inga mérések további felhasználása valósult meg abban az átfogó nehézségi erőter meghatározásban, melybe alkalmas inverziós eljárással a rendelkezésre álló összes pontbeli mérést, köztük az összes felszíni gradiensmérést bevontam. A harmadik terület, bár kissé eltér ettől, mégis szorosan kapcsolódik az előzőekhez: a nehézségi erőter gradienseinek, ezek időbeli és térbeli változásainak a hatását vizsgáltam az EPF ekvivalenciakísérletben.

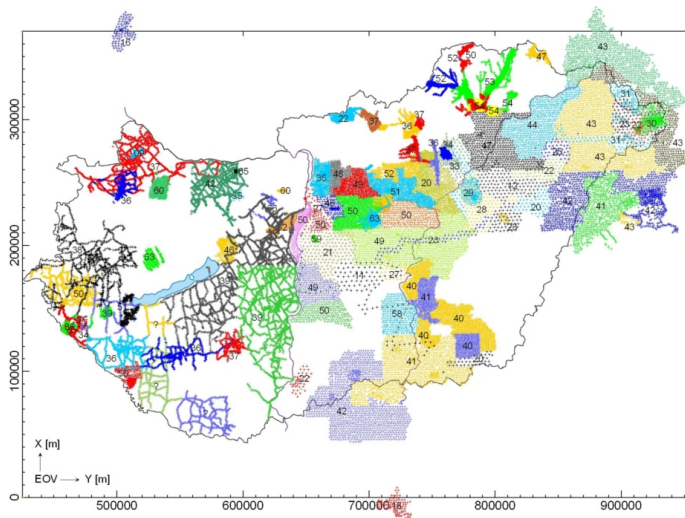
Értekezésemben tudományos eredményeimet négy fejezetben tárgyalom, amelyek mindegyike egy-egy tézisnek felel meg. Ezt a tézisfüzetet is ennek megfelelően tagolom. A következő fejezetekben az egyes témakörökhöz tartozó új tudományos eredményeimet foglalom össze.

### **III. Az Eötvös peremérték-feladat**

A felsőgeodézia peremérték-feladatai azért fontosak, mert segítségükkel a földfelszínen végzett mérésekből a teljes külső térben meghatározható a nehézségi erőter, továbbá a Föld matematikai vagy fizikai alakja. A gyakorlatban számban és típusban is egyre több mérési adat áll rendelkezésre, melyek pontossága és eloszlása is folyamatosan ja-

vulnak. Ezzel párhuzamosan a geoidfelület meghatározásának megbízhatósága az 1950-es évektől napjainkig a többször 10 m-ről néhány cm-dm-re javult. Az előrehaladás ellenére a geodéziai peremértékfeladatok szempontjából továbbra is kihívás a cm pontos geoid meghatározása.

A BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék adatbázisában mintegy 45000 pontban vannak Eötvös-inga mérések. Ezzel Magyarország az egész világon egyedülálló a felszíni gradiensmérések tekintetében. Az 1. ábra (Völgyesi 2019) mutatja a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék adatbázisában levő mintegy 45000 Eötvös-inga-mérési pontot. Kutatásaimnak ezért fontos célja a meglévő Eötvös-inga mérések felhasználása az erőter meghatározására, finomszerkezetének vizsgálatára.



1. ábra. Digitális adatbázisba rendezett mintegy 45 000 hazai Eötvös-ingamérés pontjainak területi eloszlása (Völgyesi 2019).

A gradiensmérések geodéziai hasznosítása érdekében megfogal-

maztam az *Eötvös peremérték-feladatokat* (Tóth 2002), amelyben az Eötvös-inga által mérhető összes gradiens, és *csakis* ezek a mérési eredmények, a számított mennyiségek pedig a potenciálzavar ( $N$  geoidunduláció) és a  $\Delta g$  nehézségi rendellenességek. Az Eötvös-inga mért mennyiségeit egy-egy vektor és tenzor mennyiségbe foglalva a vektor és tenzor gömbfüggvények segítségével a térbeli függvényeket a spektrális tartományba vittem át, és ott a feladatot megoldottam. Megke-  
restem a térbeli megoldásokat, az (1) Eötvös integrálokat.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} N(P) \\ \Delta g(P) \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{R^2}{4\pi\gamma_0} \\ \frac{R}{4\pi\gamma_0} \end{array} \right\} \iint_S \left\{ \begin{array}{c} E_T^{(1)} \\ E_{\Delta g}^{(1)} \end{array} \right\} (\psi_{PQ}) (T_{xz} \cos \alpha^* + T_{yz} \sin \alpha^*) (Q) + \\ &+ \left\{ \begin{array}{c} E_T^{(2)} \\ E_{\Delta g}^{(2)} \end{array} \right\} (\psi_{PQ}) (T_{\Delta} \cos 2\alpha^* + \delta 2W_{xy} \sin 2\alpha^*) (Q) dS(Q). \end{aligned} \quad (1)$$

Az ( $r=R$ ) speciális esetben a (2,3) Eötvös magfüggvények

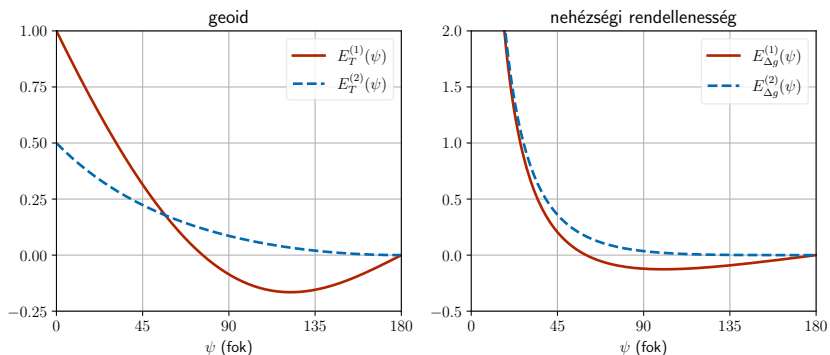
$$E_T^{(1)}(\psi) = \frac{1}{\cos \frac{\psi}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \left( 1 + \cos^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad E_T^{(2)}(\psi) = \frac{1}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$E_{\Delta g}^{(1)}(\psi) = \frac{\cos \frac{\psi}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}, \quad E_{\Delta g}^{(2)}(\psi) = \frac{\left( 1 - \sin \frac{\psi}{2} \right)^2}{2 \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}. \quad (3)$$

Az Eötvös magfüggvények a 2. ábrán láthatók. Zérus szögtávolságra a potenciálzavar (geoid) számításához szükséges függvények korlátosak, míg a a nehézségi rendellenességhez tartozók a Stokes-függvényhez hasonlóan szingulárisak. Ez lényeges sajátosság a távoli terület hatásának számítása szempontjából.

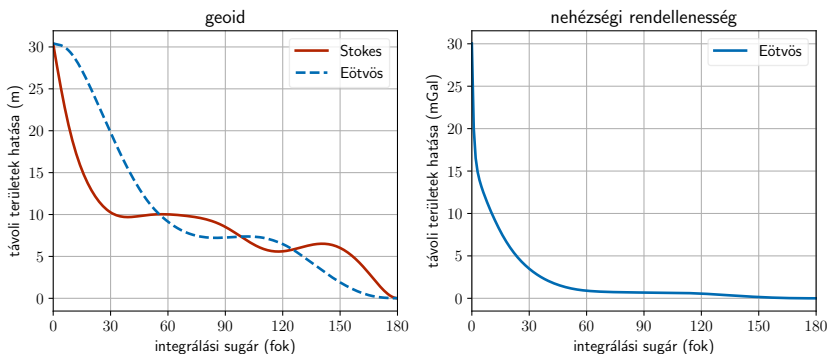
Megvizsgáltam azt a gyakorlat számára fontos esetet, amikor csak egy korlátozott területen vannak mérések. Ez esetben a közeli mérési adatokból számított geoidundulációt vagy a nehézségi rendellenességet kiegészítjük a távoli terület hatásával. A távoli terület hatása geopotenciális modellből számítható. Ismert geopotenciális

modellekből becsültem a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát és elemeztem a hiba csökkentésének lehetőségeit.



**2. ábra.** A (2, 3) Eötvös magfüggvények a szögtávolság függvényében.

Az EGM2008 modellel végzett becslés eredményét mutatja a 3. ábra.



**3. ábra.** A távoli területek becsült átlagos hatása az Eötvös és Stokes-integrál esetében, az EGM2008 modellel (Pavlis et al. 2012) 2160 fokig számítva.

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményeket adom meg.

### 1. tézis

Levezettem a geoidmagasságokra és nehézségi rendellenességekre vonatkozó integrálösszefüggéseket, az *Eötvös integrálokat*, amelyekben az Eötvös-inga által mérhető összes mennyiség szerepel.

**A tézishoz kapcsolódó publikációk:** (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)

### 1.1 altézis

Az Eötvös integrálok magfüggvényeit az *Eötvös magfüggvények* végtelen sorait összegezve zárt alakban előállítottam.

**A tézishoz kapcsolódó publikációk:** (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)

### 1.2 altézis

A gyakorlat igényeit szem előtt tartva kidolgoztam a távoli területek hatásának számítását a peremérték-feladatot megoldó integrálkifejezésekre. Megállapítottam, hogy az Eötvös függvények eltérő sajátosságai miatt a távoli területek hatása lényegesen eltérő módon csökken a geoidundulációk, illetve a nehézségi rendellenességek esetében. Ez alapján két lépéses eljárást javasoltam a geoidundulációk számítására.

**A tézishoz kapcsolódó publikációk:** (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)



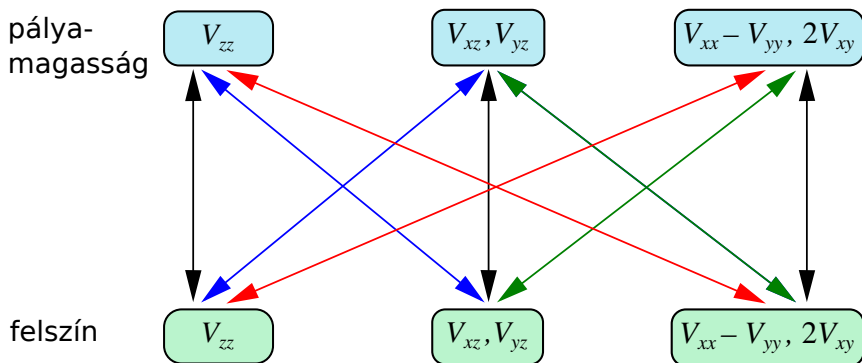
## IV. Gravitációs gradiens tenzor analitikai folytatása és alkalmazása az űrgradiometriában

Az analitikai folytatások segítségével kapcsolat teremthető a nehézségi vagy tömegvonzási (gravitációs) erőter különböző kiinduló és számítási mennyiségei között. Ilyen mennyiségek lehetnek a potenciál(zavar), a nehézségi rendellenesség, a függővonal-elhajlás és a potenciálfüggvény második deriváltjai, az Eötvös tenzor elemei. A kiinduló mennyiségek általában valamely szabályos felületen (pl. gömb, forgási ellipszoid) ismertek. Az analitikai folytatások segítségével a számítási mennyiségek határozhatók meg ugyanazon vagy egy másik ismert felületen. A nehézségi vagy tömegvonzási erőter meghatározása szempontjából ezek az eljárások fontosak, mivel valamely kiinduló (mért) mennyiségekből a kívánt számítási mennyiségeket adják meg. A mennyiségek átvitele két, különböző méretű felület között felfelé/lefelé folytatásként is ismeretes.

A GOCE űrprojekt a tömegvonzási erőter gradiens tenzorát (gravitációs gradiens tenzor) mérte a műhold magasságában, és ezáltal jelentősen hozzájárult a nehézségi erőter pontosabb meghatározásához. Különböző adatfeldolgozási stratégiákkal a mérésekből nehézségi erőter modellt állíthatunk elő. A legtöbb ilyen eljárás a nehézségi erőter gömbfüggvénysorfejtésén alapul. Egy másfajta megközelítés a GOCE-adatok közvetlen felhasználása. Ebben az esetben alkalmas összefüggésekre van szükségünk a gravitációs gradiens átvitelére a különböző magassági szintek között.

Bölling és Grafarend (2005) megoldást adtak az Eötvös tenzor elemei egy-egy sajátos összeállításának ( $V_{zz}$ ;  $V_{xz}$  és  $V_{yz}$ ;  $V_{xx} - V_{yy}$  és  $2V_{xy}$ ) analitikai folytatására. Kutatásaimban egy tőlük független – a 2004-ben közlésre elfogadott Tóth et al. (2006b) cikkben bemutatott – kibővített megoldást adtam három elem-összeállítás 9-féle analitikai

folytatására bármely másik elem-összeállításba. Az eljárás vázlatát mutatja a 4. ábra.



4. ábra. Az Eötvös tenzor analitikai felfelé/lefelé folytatásának vázlata. Börling és Grafarend (2005) megoldását a fekete nyilak mutatják.

Levezettem, hogy a kilencféle analitikai folytatás számítását lehetővé tevő összefüggések a teljes  $\Omega$  térszögre vonatkozó integrálok

$$\nabla_j V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla_i V(\mathbf{r}^*) \cdot \begin{pmatrix} \cos i\alpha^* \\ \sin i\alpha^* \end{pmatrix} K_{(i)}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \begin{pmatrix} \cos j\alpha \\ \sin j\alpha \end{pmatrix} d\Omega^*. \quad (4)$$

$i, j \in \{0, 1, 2\}$

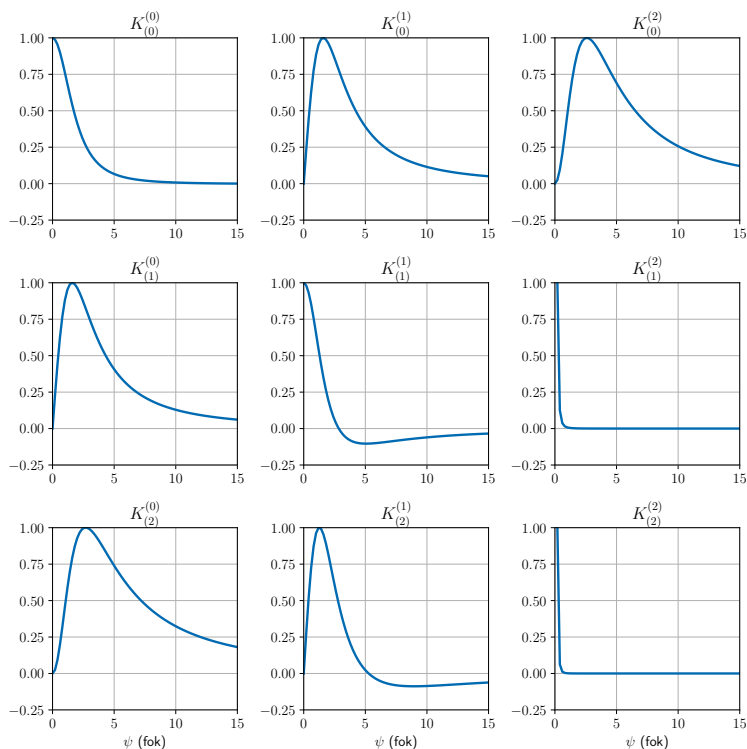
A kilenc  $K_{(i)}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  magfüggvényt mutatja az 5. ábra.

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményt adom meg.

## 2. tézis

Felírtam az Eötvös tenzor elemei háromféle összeállításának 9-féle analitikai folytatását lehetővé tevő integrálokat és a bennük szereplő magfüggvényeket.

**A tézishez kapcsolódó publikációk:** (Tóth et al. 2006a), (Tóth et al. 2006b)

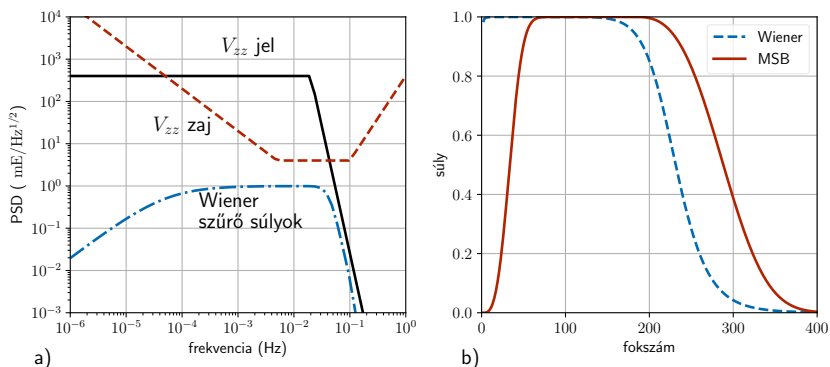


**5. ábra.** Az Eötvös tenzor analitikai felfelé folytatásának magfüggvényei a GOCE pályamagasságára számítva.

A GOCE gravitációs gradiensek átvitele a gyakorlatban a különböző magassági szintek között több probléma vizsgálatát igényelte. Az egyik a gravitációs gradiensek átvitelének korlátozása (szűrés) a gömbfüggvény-spektrumban. Ez azért szükséges, mert a GOCE mérései főként az 5–100 mHz közötti frekvenciatartományra korlátozódnak (6. a) ábra). A másik annak vizsgálata, hogy egy adott pontosság

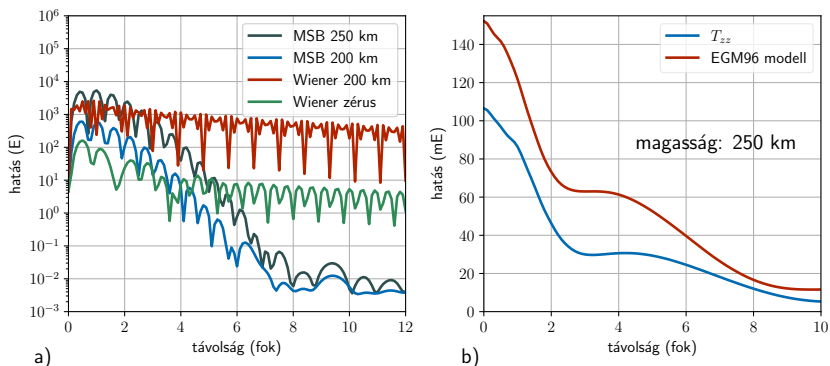
eléréséhez a (4) integrálást mekkora területre kell kiterjeszteni, vagyis mekkora a távoli területek elhanyagolásából eredő hiba.

A gömbfüggvény-spektrumban végzett szűréshez Wiener, illetve módosított gömbi Butterworth (MSB) szűrőket definiáltam. Ezek spektrális súlyait mutatja az 6. b) ábra.



**6. ábra.** a) GOCE  $V_{zz}$  jel- és zajspektrumok és Wiener-szűrő súlyok. b) A GOCE mérések frekvenciatartományához igazított Wiener és MSB szűrők súlyai a gömbfüggvény-spektrumban.

A távoli területek elhanyagolásából származó hibát mind a felfelé folytatás esetében vizsgáltam (Tóth et al. (2005), Tóth et al. (2006a)). A felfelé folytatás akkor szükséges, amikor a GOCE méréseit összevetjük a földfelszíni nehézségi vagy Eötvös-inga mérésekkel. A lefelé folytatás pedig a GOCE mérési adatainak felhasználását teszi lehetővé a nehézségi erőter helyi szerkezetének kutatására. A lefelé folytatással átszámított adatokat így a földfelszíni mérésekkel együtt tudjuk felhasználni. A távoli területek elhanyagolásából eredő hibát mutatja a vertikális gravitációs gradiens lefelé folytatása során a 7. a) ábra, az Eötvös-inga mérésekből számított  $T_{zz}$  felfelé folytatása során pedig a 7. b) ábra.



**7. ábra.** a) A távoli területek elhanyagolásából eredő hiba a  $V_{zz}$  lefelé folytatása során 200 és 250 km-es pályamagasságból, MSB és kétféle Wiener szűréssel az EGM96 geopotenciális modell segítségével becslve. b) A távoli területek elhanyagolásából eredő hiba az Eötvös-inga mérésekből számított  $T_{zz}$  GOCE pályamagasságba való felfelé folytatása során.

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményeket adom meg.

### 2.1 altézis

Meghatároztam a GOCE mérések lefelé folytatása során a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát. Megállapítottam a mérések pontosságának megfelelő lefelé folytatáshoz szükséges adatterület nagyságát.

**A tézishez kapcsolódó publikáció:** (Tóth et al. 2006a)

## 2.2 altézis

Meghatároztam az Eötvös-inga mérések felfelé folytatása során a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát. Megállapítottam, hogy az Eötvös-inga adatai önmagukban nem, csak más mérésekkel együtt alkalmasak a GOCE mérések ellenőrzésére.

*A tézishez kapcsolódó publikáció:* (Tóth et al. 2005)

## V. Gravitációs gradiensek felhasználása a nehézségi erőter meghatározására Magyarország területén

A nehézségi erőter valamely kiválasztott szintfelülete részletes meghatározásával gradiensmérésekből a világon először tudományos célokból Eötvös Loránd foglalkozott. Arad vidékén az ingájával végzett mérések felhasználásával (Eötvös 1906) a szintfelületet érintő Bessel-ellipszoidhoz viszonyított potenciáleltéréseket szerkesztették meg  $\sim 2$  cm-nek megfelelő értékű izovonalakkal (Biró et al. 2013). Az egész országra kiterjedően az 1950-es évektől végzett csillagászati-geodéziai geoidmeghatározásokat a különböző intézményekben modern gravimetriai geoidszámítások követték.

A felszíni gradiensmérések önmagukban is alkalmasak az Eötvös peremérték-feladatok segítségével a geoid vagy a nehézségi rendellenességek kiszámítására. Ugyanakkor indokolt az Eötvös-inga-méréseket a többi méréssel együtt felhasználni. Ezzel az eljárással várhatóan növelhető a megoldás pontossága és megbízhatósága. A nehézségi erőter meghatározásának különböző inverziós eljárásai

lehetőséget adnak erre.

Az inverziós módszerek közös alap gondolata az, hogy a nehézségi erőter meghatározandó  $W(x)$  potenciálfüggvényét alkalmas  $B(x, x_k)$  bázisfüggvények segítségével felírjuk

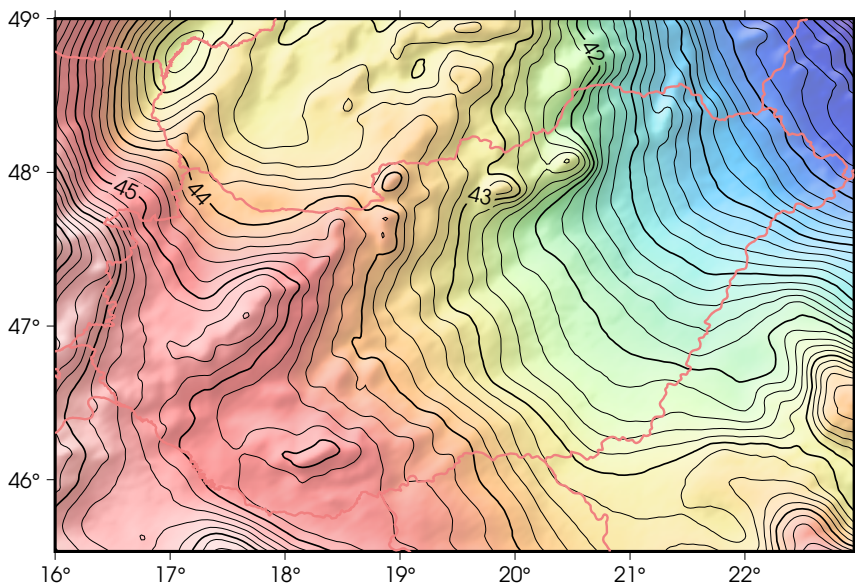
$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k) \quad (5)$$

alakban. Célunk az ebben a felírásban szereplő  $c_k$  inverziós együtthatók meghatározása. A méréseket a  $W(x)$  potenciálfüggvény segítségével modellezzük. Ezután valamilyen becslési eljárással az együtthatókra kapott egyenletrendszer megoldjuk. A megoldás ismeretében a potenciálfüggvény és bármely, az erőterben belőle származtatható mennyiség (geoidunduláció, nehézségi rendellenesség, függővonal-elhajlás, Eötvös-tenzor) tetszőleges pontban kiszámítható. Az inverziós eljárások nagy előnye, hogy a felhasznált és a számított mennyiségek hibái is részei a megoldásnak.

Magyarországon a nehézségi erőteret kétféle inverziós eljárással határoztam meg. Az egyik a Krarup és Moritz nevéhez fűződő legkisebb négyzetes kollokáció (Moritz 1980). A másik a radiális bázisfüggvényes inverzió (Schmidt et al. 2007).

A legkisebb négyzetes kollokációval számított HGTUB2007 elnevezésű megoldás (Tóth (2009a), Tóth (2009b))  $1' \times 1,5'$ -es átlag szabadlevegő nehézségi rendellenességek, csillagászati-geodéziai függővonal elhajlások, 6678 pontbeli  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  vízszintes nehézségi gradiensek és az OGPSH 95 szintezett pontjában levő GNSS mérések alapján készült el. Kétféle geopotenciális modell és az SRTM3 digitális domborzatmodell lett felhasználva a számításban. Az Eötvös-inga mérések egy erre a célra kidolgozott két lépéses eljárásban kerültek bele a megoldásba. A GPM98CR geopotenciális modellel elkészített gravimetriai, asztrogeodéziai, gradiometriai és GNSS/szintezési megoldást a 8. ábra mutatja. A különböző típusú adatokat tartalmazó megol-

dásokat egymás között, korábbi megoldásokkal és független EUVN GNSS/szintezési adatokkal is összehasonlítottam.



8. ábra. A HGTUB2007 kvázigeoid megoldás.

1. táblázat. A radiális bázisfüggvényes inverzióban felhasznált adatok

adatrendszer	típus	adatok száma
MGH-50	$\Delta g$ nehézségi rendellenesség	509
GMH 1991	$\xi, \eta$ függővonal-elhajlás	$2 \times 138$
OGPSH+Bendefy	$\pm 0,22$ m	87
OGPSH+EOMA	$\pm 0,22$ m	149
OGPSH+EOMA újabb	$\pm 0,22$ m	97
Eötvös-inga	$W_{xz}, W_{yz}$ vízsz. grad.	$2 \times 37610$
Eötvös-inga	$W_{\Delta}, W_{xy}$ görb. grad.	$2 \times 37272$
összesen:		154477



Az Eötvös-inga mérések további felhasználása valósult meg a nehézségi erőter radiális bázisfüggvényes meghatározásban (Völgyesi et al. 2018a). Ebben az inverziós eljárásban az 1. táblázatban felsorolt mintegy 155 ezer pontbeli mérési adatot, köztük az összes felszíni Eötvös-inga mérést felhasználtam. A legkisebb négyzetes kollokációval a megoldandó egyenletrendszer mérete 180 GB lett volna. A radiális bázisfüggvényes eljárás (Tóth és Földváry 2015) legnagyobb tárigénye csak 16 GB volt. Ennek az az oka, hogy ez utóbbi eljárásban nem a mérések, hanem a bázisfüggvények számának megfelelő méretű egyenletrendszert kell megoldani. A számításokat három különböző, 2160 fok- és rendszámú geopotenciális modellel végeztem. Megállapítottam, hogy a magyarországi adatokhoz legjobban az 5. generációs GOCE és az EGM2008 kombinált modellje illeszkedik a radiális bázisfüggvények 200-1200 fokszám közötti tartományában. A domborzat hatását az ERTM2160 modell segítségével (Hirt et al. 2014) vettem figyelembe.

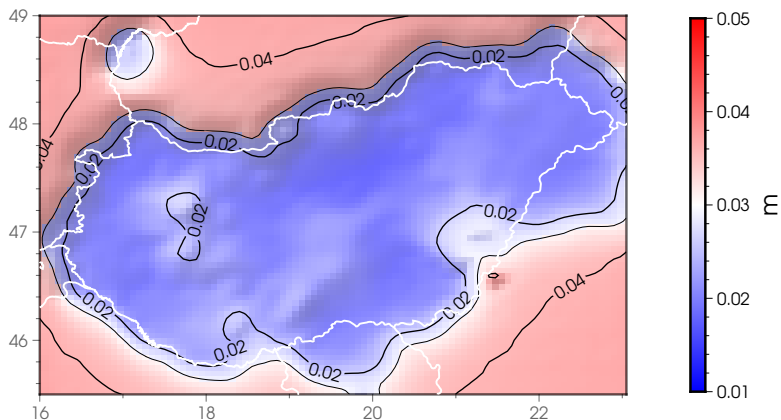
A nehézségi erőter modellezése általában rosszul kondicionált inverzfeladathoz vezet. Egyrészt a mérések hibái, másrészt a lefelé folytatás és a szabálytalan adateloszlás miatt. A fizikailag értelmes megoldás megtalálása regularizációt igényel. A megoldás során használt iterációs VCE eljárás (Koch és Kusche 2002) a regularizáción túlmenően az adatok szórás tényezőit is megadta. Ezek a tényezők megmutatták azt, hogy az egyes mérések milyen mértékben járultak hozzá a nehézségi erőter modelljéhez. Meghatározhatók továbbá az 1. táblázatban feltüntetett adatrendszerek jel/zaj viszonyai, vagyis a modellbe bevont/be nem vont jelösszetevők átlagos nagyságának hányadosai. Ezeket a 2. táblázatban láthatjuk az EGM2008-as modellel készített megoldás esetében. A táblázatból látható, hogy az EGM2008 modellel készített megoldáshoz a legnagyobb mértékben az újonnan színtezett OGPSH pontok járultak hozzá, a legkevésbé pedig a  $W_{\Delta}$  görbületi gradiensek. Sajnos csak viszonylag kevés pontbeli nehézségi rendelleneséget lehetett bevonni a megoldásba, mivel kutatási célra

sem volt elérhető a közel 400 ezer pontot tartalmazó magyarországi nehézségi adatbázis.

**2. táblázat.** Az adatrendszerek szórástényezői és jel/zaj viszonya (EGM2008 modellel készített megoldás)

adatrendszer	szórástényező	jel/zaj viszony (dB)
MGH-50	5,12 mGal	2.66
GMH 1991	$\xi: 0,93''$ és $\eta: 0,92''$	1,98 és 2,44
OGPSH+Bendefy	0,22 m	4,78
OGPSH+EOMA	0,14 m	2,53
OGPSH+EOMA újabb	0,20 m	4,84
Eötvös-inga	$W_{xz}: 5,6 \text{ E}$ és $W_{yz}: 6,0 \text{ E}$	-2,87 és -3,44
Eötvös-inga	$W_{\Delta}: 12,2 \text{ E}$ és $2W_{xy}: 12,5 \text{ E}$	-5,88 és -5,76

A radiális bázisfüggvényes inverzió során az ismeretlen paraméterek teljes kovariancia mátrixát is megkaptam, és ebből bármilyen kiszámítható mennyiség teljes kovariancia mátrixa is levezethető. Példaként a kvázigeoid undulációk becsült hibáit mutatja a 9. ábra.



**9. ábra.** Az EGM2008 modellen alapuló kvázigeoid megoldás becsült hibái a 200–1200 gömbfüggvény-fokszám tartományban.

A radiális bázisfüggvényes megoldást összehasonlítottam az EHT/VITEL 2014 geoidmodelljével (Takács és Siki 2017). Az eltérések statisztikáit mutatja a 3. táblázat.

**3. táblázat.** Az EGM2008 modellen alapuló kvázigeoid megoldás és az EHT/VITEL2014 geoidmodell eltéréseinek statisztikái

minimum	maximum	átlag	szórás
0,079 m	0,645 m	0,408 m	0,060 m

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményeket

adom meg.

### 3. tézis

Inverziós eljárással modellezve a nehézségi erőter potenciálfüggvényét, kombinált geoidmegoldásokat határoztam meg Magyarország területére az Eötvös-inga mérések felhasználásával.

*A tézishoz kapcsolódó publikáció:* (Tóth 2009b), (Tóth 2009a), (Tóth és Földváry 2015), (Völgyesi et al. 2018a)

#### 3.1 altézis

Legkisebb négyzetes kollokációval meghatároztam a nehézségi erőter modelljét. Az Eötvös-inga vízszintes nehézségi gradienseméréseket egy erre a célra kidolgozott két lépcsős eljárással vontam be a meghatározásba, melyben nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlások, szintezett GNSS pontok és az SRTM3 digitális domborzatmodell szerepeltek.

*A tézishoz kapcsolódó publikációk:* (Tóth 2009b), (Tóth 2009a)

#### 3.2 altézis

Regularizált radiális bázisfüggvényes megoldással az ország területén elsőként határoztam meg a nehézségi erőter modelljét az összes Eötvös-inga mérést, valamint az összes rendelkezésre álló egyéb pontbeli mérést is felhasználva.

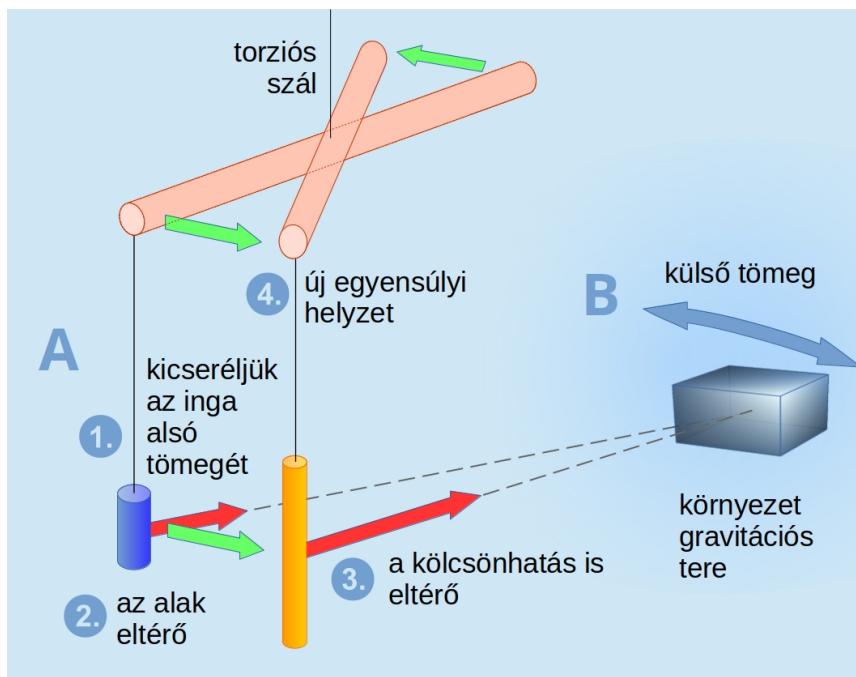
*A tézishoz kapcsolódó publikációk:* (Tóth és Földváry 2015), (Völgyesi et al. 2018a)

## VI. Nehézségi gradiensek jelentősége a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciamérésében

Eötvös Loránd és munkatársai, Pekár Dezső és Fekete Jenő 1906-tól több méréssorozatot végeztek (EPF-mérések) a súlyos (gravitációs) és a tehetetlen tömeg arányosságára vonatkozóan (Eötvös et al. 1922).

Az EPF kísérletben Eötvös feltételezte, hogy a centrifugális gyorsulás független az anyagi minőségtől, viszont a  $G$  tömegvonzási (gravitációs) erő függhet tőle. Az anyagi minőségi tényezőt (Eötvös-paraméter)  $\eta$ -val jelölve, a gravitációs erő nagysága az  $(1 + \eta)mG$  összefüggés szerint változik, amennyiben valamilyen referencia anyagra az  $\eta = 0$  értéket vesszük fel. Ha az inga felső és alsó tömegére az  $\eta$  tényezők különböznek egymástól, akkor a gravitációs és tehetetlen tömeg eltérése miatt megszűnik az egyensúly. Ennek következtében egy kicsiny északi irányú erő fog jelentkezni, mely az Eötvös-inga K-Ny-i irányban álló karja esetében maximális elfordulást okoz (Tóth 2019).

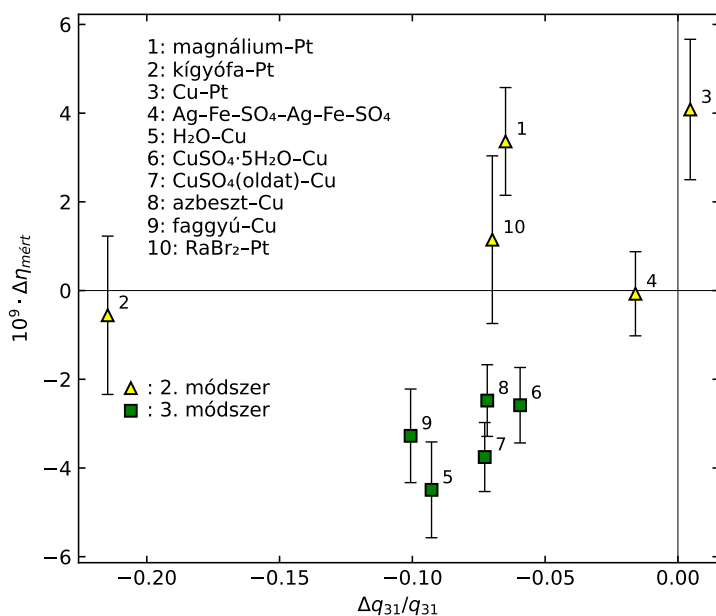
Eötvösék 10 anyagpárra meghatározták a  $\Delta\eta$  különbségek értékét. A mérés során az inga karján lelógatott Au tömeget kicserélték egy, a felső tömegtől eltérő, másik anyagból készített tömegre, és figyelték az inga karjának az elcsavarodását. A kevésbé fejlett 2. módszerrel mértek 5 anyagpárt. Ez esetben csak egy ingát használtak, és tisztában voltak vele, hogy a nehézségi erőter változása a mérés közben befolyásolhatta a kapott eredményeket. Ezért további 5 anyagpárra a fejlettebb 3. módszerükkel egyidejű mérést végeztek kettős ingával. Ezzel a módszerrel azt kívánták biztosítani, hogy a nehézségi erőter mérés közbeni megváltozása ne befolyásolja az eredményeket.



**10. ábra.** Az EPF kísérletben az inga alsó tömegét kicserélték. A.) A tömeg alakjának változása miatt megváltozott a gravitációs kölcsönhatás a környező tömegekkel és ez még változatlan nehézségi erőterben is befolyásolhatta a mérést. B.) A nehézségi erőter változhatott a mérés során.

Az ekvivalencia-kísérlet szabályos hibája abból adódik, hogy a próbatestek méretével összevethető távolságon a gravitációs erő megváltozása (a gradiens) már nem tekinthető egyenletesnek, így számít a próbatestek alakja is (10. ábra). Ez a hiba befolyásolhatta a 3. módszer eredményét is. A szabályos hiba értékének, a fellépő nyomotéknak a meghatározására gravitációs multipólus modellezést végeztem. Negyedfokú tagokig vizsgálva a kölcsönhatást leveztettem, hogy a 3. módszer esetében az Eötvös-paraméter változása egyenesen arányos lesz a 3-adfokú, 1-rendű inga multipólus tömegcsere miatti relatív vál-

tozásával ( $\Delta q_{31}/q_{31}$ ). Ez az eredmény azért fontos, mert független a külső nehézségi erőterétől, amely az EPF mérés esetében ismeretlen. A 11. ábrán az látható, hogy az EPF mérés esetében a becsült mérési hibákat is figyelembe véve valóban fennáll ez a közelítő lineáris függés. Ez az eredmény alátámasztja az EPF kísérlet szabályos hibájának hipotézisét.



**11. ábra.** Az Eötvös-paraméter  $\Delta \eta$  különbségei az EPF kísérletben az inga  $\Delta q_{31}/q_{31}$  tömegcsere miatti relatív multipólus változása függvényében. Jól látható a 3. módszerre a közelítő lineáris függés, ami alátámasztja a szabályos hiba hipotézisét.

Az elemzés rámutatott arra is, hogy a próbatestek alakjából szár-

mazó hiba kézben tartható a próbatestek alakjának megfelelő megválasztásával. Megállapítottam, hogy ha csak olyan henger alakú próbatömegeket használunk a kísérletben, amelyek esetében a  $H$  magasságú,  $R$  sugarú hengerre számított  $H^2/12 - R^2/4$  kifejezés értéke állandó, akkor a szabályos hiba - függetlenül a gravitációs erőter szerkezetétől - nem lép föl (Tóth 2020).

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményeket adom meg.

#### 4. tézis

Az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciamérésekben olyan nehézségi erőter függő szabályos hibát találtam, amely indokoltta teszi a kísérletek megismétlését.

*A tézishoz kapcsolódó publikációk:* (Tóth 2019), (Tóth 2020)

#### 4.1 altézis

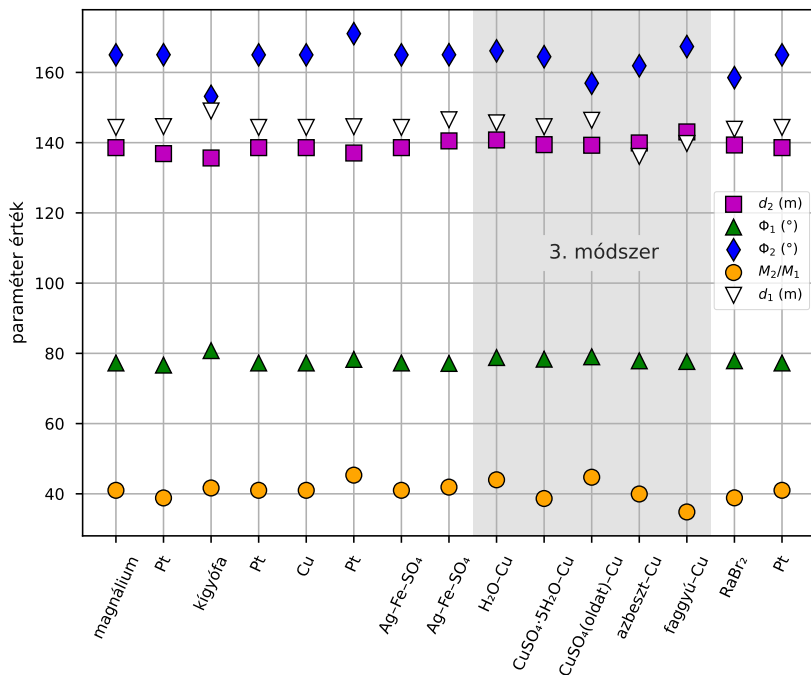
Kimutattam, hogy az EPF kísérlet szabályos hibája a próbatömegek alakjának megfelelő megválasztásával kiküszöbölhető, és javasoltam ennek figyelembe vételét a kísérlet újramérése során.

*A tézishoz kapcsolódó publikációk:* (Tóth 2019), (Tóth 2020), (Völgyesi et al. 2018b)

Az eredeti kísérleti mérések helyszínén a mérésekhez használt ingák közelében található tömegeket, azok nagyságát, elrendezését, a kísérlet közbeni esetleges változását nem ismerjük, ezért a szabályos hiba hatása utólag már nem számszerűsíthető. Viszont egy 5 tömegpontból álló egyszerű modellel megvizsgáltam a változó nehézségi erőter hatását az EPF kísérletben. A modell paramétereinek (tömegpontok helyzete, tömege) ésszerű mértékű, legfeljebb 18%-os változ-



tatásával teljesen reprodukálni lehetett az EPF ekvivalenciamérések eredményeit (12. ábra). A nehézségi erőter mérés közbeni változása valószínűsíthető. Eötvösék ugyanis beszámoltak róla, hogy egy építkezés kezdődött a mérés helyszínének közvetlen közelében, miatt folytak a mérések (Kilényi 2019).



**12. ábra.** Az EPF ekvivalenciaméréseket reprodukáló tömegmodell paramétereit (tömegpontok  $\Phi$  iránya,  $d$  távolsága,  $M_2/M_1$  tömegaránya). A maximális paraméter változás 18%, de a paraméterek 84%-ának változása  $\pm 5\%$ -nál is kisebb.

Ezek alapján az alábbi új tudományos eredményt adom meg.

#### 4.2 altézis

Tömegmodell segítségével számszerűsítettem a változó nehézségi erőter hatását az EPF kísérletben. Kimutattam, hogy a nehézségi erőter ésszerűen feltételezhető időbeli változása a mérés során magyarázatot adhat a kísérletben tapasztalt eltérésekre.

*A tézishez kapcsolódó publikáció:* (Tóth 2020)

Eötvösék eredeti ekvivalenciakísérlete annyira érzékeny volt, hogy már egy ilyen kicsiny másodrendű gravitációs hatás is megjelenhetett az eredményekben, amire ők akkor nem gondoltak. Az ekvivalenciakísérlet megisméltése egy eredeti Eötvös-Pekár ingával modern körülmények között folyamatban van a Wigner Fizikai Kutatóközpontban (Völgyesi et al. 2018b), és segíthet megérteni azokat az okokat, amelyek az Eötvös-Pekár-Fekete kísérletben tapasztalt szabályos eltérésekhez vezettek, illetve a megismélt kísérlet már mentes lehet a próbatestek alakjától és a gravitációs tér szerkezetétől függő szabályos hibától.

## VII. Az új tudományos eredmények jelentősége, alkalmazási lehetőségei

A kutatásam tudományos jelentőségét abban látom, hogy ismereteim szerint elsőként fogalmaztam meg az Eötvös geodéziai peremértékfeladatot és adtam meg ennek megoldását. Meghatároztam az Eötvös tenzor analitikai folytatását leíró, a korábbiaknál teljesebb összefüggéseket. Fontos eredménynek gondolom azt az átfogó inverziós nehézségi erőter meghatározást, amiben felszíni nehézségi gradiensek, ne-

hézségi rendellenességek, függővonal-elhajlások és GNSS/szintezési mérések együttesen szerepelnek. Jelentős tudományos eredménynek tartom az Eötvös, Pekár, Fekete-féle ekvivalenciakísérletben a nehézségi gradiensek okozta szabályos hiba felismerését és vizsgálatát.

Az elért eredmények elméleti és gyakorlati oldalról hozzájárultak a magasságmeghatározás szempontjából fontos referencia felület, a geoid, illetve tágabb értelemben a nehézségi erőter szintfelületeinek pontos meghatározásához. Erre szükség van, mert így a GNSS vevőkkel vagy LIDAR technikával meghatározott geometriai magasságok felhasználhatók fizikai, tengerszint feletti magasságok kiszámítására. A HGTUB2007 geoidmodell például a Balaton vízfelszínének tengerszint feletti magassága meghatározásához lett felhasználva (Zlinszky et al. 2014), (Zlinszky et al. 2017). A geoid pontos ismeretének további gyakorlati geodéziai alkalmazása a költséges magasságmeghatározási eljárások (pl. szintezés) kiváltása. Kutatásaim nemzetközi szinten hozzájárultak a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) globális geodéziai megfigyelőrendszere, a GGOS céljai megvalósításához, hogy biztosítsa a Föld nehézségi erőtere, időbeli és térbeli változásainak vizsgálatát.

## Hivatkozások

- Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy (2013) A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest
- Bölling K, Grafarend E (2005) Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. *Journal of Geodesy* 79:300–330. <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0465-y>
- Eötvös R (1906) Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwage. In: *Verhandl. d. XV.*

- allg. Konferenz der Int. Erdmessung in Budapest. Berlin, 337–395 o.
- Eötvös R v., Pekár D, Fekete E (1922) Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik* 373:11–66
- Hirt C, Kuhn M, Claessens S, et al (2014) Study of the Earth's short-scale gravity field using the ERTM2160 gravity model. *Computers & Geosciences* 73:71–80. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cageo.2014.09.001>
- Kilényi É (szerk) (2019) Az Eötvös kísérlet - Történelmi keretben. Unicus Műhely Kiadó, Budapest
- Koch K-R, Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy* 76:259–268
- Moritz H (1980) *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag; Abacus Press, Karlsruhe; Tunbridge Wells Kent
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2012) The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 117: <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2011JB008916>
- Schmidt M, Fengler M, Mayer-Gürr T, et al (2007) Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy* 81:17–38
- Takács B, Siki Z (2017) Centiméter pontosságú ETRS89-EOV/Balti átszámítás nyílt forráskódú környezetben. In: Balázs B (szerk) *Az elmélet és a gyakorlat találkozása a térinformatikában*. Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, Magyarország, 355–362 o.
- Tóth Gy (2002) Az Eötvös geodéziai peremértékfeladat. *Geomatikai Közlemények* 5:163–174
- Tóth Gy (2003) The Eötvös spherical horizontal gradiometric boun-

- dary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC. 102–107 o.
- Tóth Gy (2009a) New combined geoid solution HGTUB2007 for Hungary. In: Observing our Changing Earth. Springer, 405–412 o.
- Tóth Gy (2009b) A HGTUB2007 új magyarországi kombinált kvázigeoid megoldás. Geomatikai Közlemények 12:131–140
- Tóth Gy (2019) Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciamérések szabályos hibája. Fizikai Szemle 69:155–188
- Tóth Gy (2020) Gravity gradient bias in the EPF experiment. Eur Phys J Plus 135:222. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00242-w>
- Tóth Gy, Ádám J, Földváry L, et al (2005) Calibration/validation of GOCE data by terrestrial torsion balance observations. In: A Window on the Future of Geodesy. Springer, 214–219 o.
- Tóth Gy, Földváry L (2015) Új magyarországi geoidmeghatározás az ötödik generációs GOCE nehézségi erőter modellek segítségével. Geomatikai Közlemények 18:63–74
- Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN (2006a) Practical aspects of upward / downward continuation of gravity gradients. In: Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, Frascati, Rome, Italy, ESA SP-627. 115–120 o.
- Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN, Ádám J (2006b) Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica 41:21–30. <https://doi.org/10.1556/ageod.41.2006.1.3>
- Tóth Gy, Rózsa Sz, Ádám J, Tziavos IN (2002) Gravity field modelling by torsion balance data — a case study in Hungary. In: Ádám J, Schwarz K-P (szerk) Vistas for Geodesy in the New Millennium. Springer, Berlin, Heidelberg, 193–198 o.

- Völgyesi L (2019) Eötvös Loránd munkásságának geodéziai jelentősége. *Geodézia és Kartográfia* 71:4–13. <https://doi.org/10.30921/GK.71.2019.5.1>
- Völgyesi L, Ádám J, Égető C, et al (2018a) Hungarian contribution to the research in gravimetry, gravity field modelling and geoid determination (2015-2018) – IAG Commission 2. *Geomatikai Közlemények* 21:23–36
- Völgyesi L, Szondy G, Tóth G, et al (2018b) Előkészületek az Eötvös-kísérlet újramérésére. *Magyar Geofizika* 59:165–179
- Zlinszky A, Boergens E, Glira P, Pfeifer N (2017) Airborne Laser Scanning for calibration and validation of inshore satellite altimetry: A proof of concept. *Remote Sensing of Environment* 197:35–42. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.rse.2017.04.027>
- Zlinszky A, Timár G, Weber R, et al (2014) Observation of a local gravity potential isosurface by airborne lidar of Lake Balaton, Hungary. *Solid Earth* 5:355–369. <https://doi.org/10.5194/se-5-355-2014>