

Válasz Dobróka Mihály professzor úr

**”A nehézségi erőter gradienseinek jelentősége és felhasználása a felsőgeodézia és a fizikai geodézia egyes területein” c. MTA
doktori értekezésemre adott bírálói véleményére**

Professzor úr észrevételeire adandó válaszaim előtt szeretném megköszönni az igen alapos és gondos, egyben pozitív és támogató bírálatát! Az opponensi véleményben kifejtett megjegyzésekre és kérdésekre az alábbiakban adom meg részletes válaszaimat a véleményben jelzett észrevételek sorrendjében.

A 2.2 altézishez kapcsolódó kérdés, hogy milyen mértékben segítenek/segíthetnek a GOCE mérései a felszíni Eötvös-inga adatok értelmezésében (inverziójában)? Jelentkezik itt is simító hatás, esetleg valamilyen súlyfaktor alkalmazására lehet szükség.

A GOCE és az Eötvös-inga adatok jeltartalmának összehasonlításával eldönthető, hogy a GOCE adatai segíthetnek-e a felszíni Eötvös-inga adatok értelmezésében, inverziójában. Az összehasonlítást úgy végeztem, hogy a GOCE adatokból az Eötvös-inga mérési pontokban meghatároztam az inga által mérhető gradiens (W_{xz} , W_{yz}) és görbüeti (W_{Δ} , W_{xy}) összetevőket. Ezután összehasonlítottam az így kapott adatok jeltartalmát.

Az összehasonlítás érdekében a Tóth és Földváry (2005) publikációban tárgyalt problémától eltérő fordított esetben a GOCE adatok analitikai *lefelé* folytatását kell megvalósítani. Ez a művelet felerősíti a bemeneti jelben található rövidebb hullámhosszú összetevőket és a zajt, ezért a bemenő jel frekvenciájának korlátozására (simítás) van szükség. A GOCE esetében a hasznos jel nagyjából a gömbfüggvényspektrum 30–300 fokszámtartományára korlátozódik, de 220 fokszám felett már a zaj kezd dominálni (Rummel 2020). Ezért a számításhoz nem a nyers adatokat, hanem egy olyan geopotenciális modellt használtam, amelyik csak a GOCE mérésein alapul (Brockmann et al. 2021), és 300 fokszámig tartalmazza az együtthatókat. A gömbfüggvénysor segítségével a számítás nehézség nélkül elvégezhető.

Figyelembe kell venni, hogy az Eötvös-inga adatok szabálytalan területi eloszlásban állnak rendelkezésre. Tetszőleges tartományon rendelkezésre álló adatok elemzésének egy alkalmas eszköze a Slepian-féle kettősen ortogonális függvényrendszer (Slepian és Pollak 1961). Ez a kettősen ortogonális függvényrendszer létrehozható a síkon, illetve a gömbön is (Simons és Wang 2011). A Slepian függvények az adott területen maximális energia koncentrációval rendelkeznek és egy adott frekvenciatartományra korlátozottak. Ezek a függvények egy sajátérték-probléma sajátvektoraiént állíthatók elő. Amennyiben a hozzájuk tartozó λ_n sajátértékek szerint csökkenő sorrendben rendezzük őket, az első N_S Slepian függvény rendelkezik az energia koncentráció tulajdonságával, ahol N_S az ún. Shannon-szám (Simons és Wang 2011). Ezek a függvények kétváltozós esetben mind a teljes síkon (gömbön), mind az adott tartományon ortogonálisak, és így alkalmasak arra, hogy segítségével az ott értelmezett függvényeket egy ún. Slepian-sorba fejtjük (Moore és Cada 2004).

A magyarországi Eötvös-inga és a GOCE mérésekből a földfelszínre kiszámolt gradiens és görbüeti értékek jeltartalmának összevetéséhez kiszámítottam a GO_CONS_GCF_2_TIM_R5 elnevezésű geopotenciális modelltől (Brockmann et al. 2021) 30–300 gömbfüggvényfokszám között az inga mérési pontokra a T_{xz} , T_{yz} , T_{Δ} , T_{xy} összetevőket. Ez a modell kizárólag a GOCE mérései alapján készült. A T jelölés arra utal, hogy a normál nehézségi erőter hatását ezek már nem tartalmazzák, ahogy a számításba bevont Eötvös-inga adatok sem. Közelítőleg lehatároltam a gradiens, illetve a görbüeti adatok területeit, majd kiszámítottam a területekhez tartozó $N_S = 200$ -nak megfelelő Slepian függvényeket. Az első 200 sajátfüggvény elegendőnek bizonyult a vizsgálathoz,

mivel a fokszám növekedésével a GOCE gradienseinek jeltartalma gyorsan csökken. Ezeket a függvényeket felhasználva elemeztem az Eötvös-inga és a GOCE mérésekből kiszámolt adatokat. Ez azt jelentette, hogy kiszámoltam egy tetszőleges \mathbf{x} pontban az R területen ortonormális $g_n(\mathbf{x})$ Slepian függvényekkel felírt

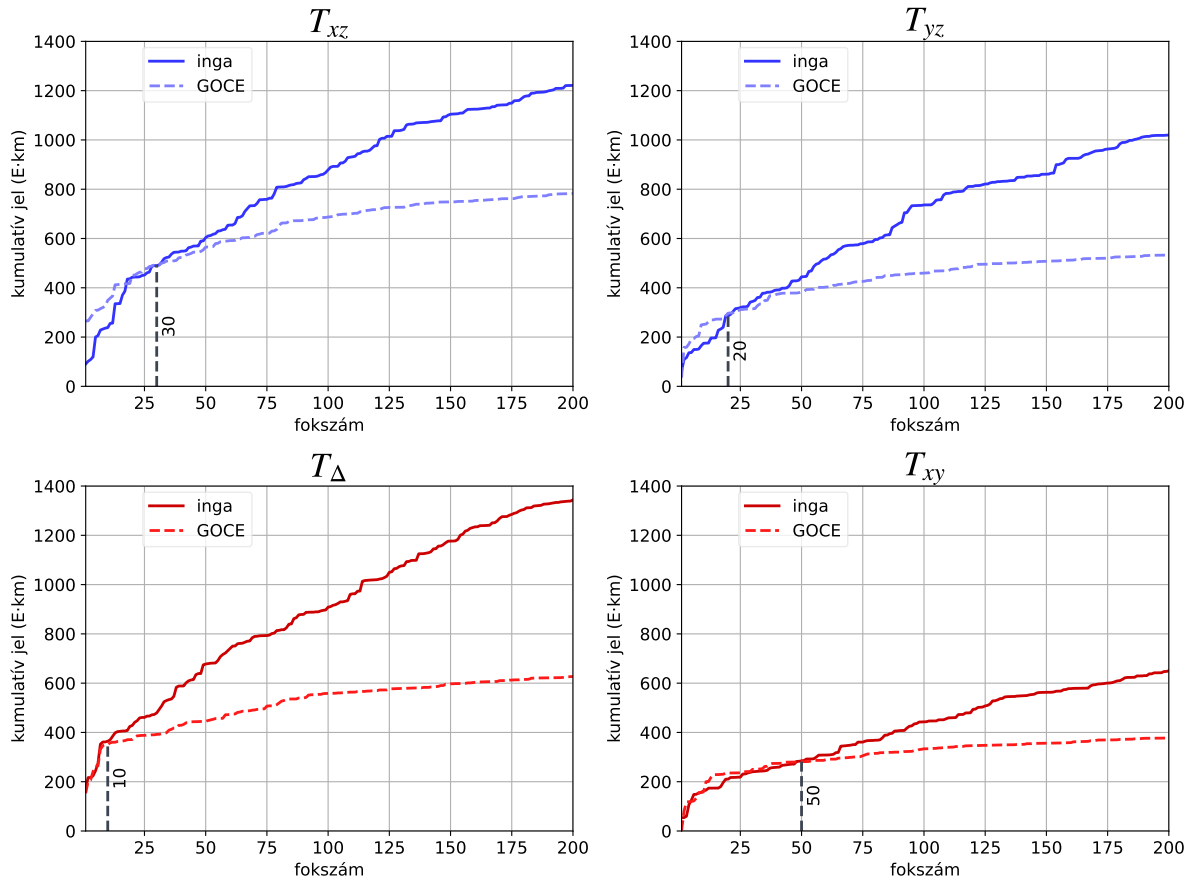
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Slepian-sor c_n sorfejtési együtthatóit

$$c_n = \int_R f(\mathbf{x}) g_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

az $N = 200$ maximális fokszámig. A Slepian-sorra is érvényes Parseval-egyenlőség miatt a c_n együtthatók négyzetösszege adja a jel teljes energiáját a teljes R^2 síkon

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_{R^2} (f(\mathbf{x}))^2. \quad (3)$$

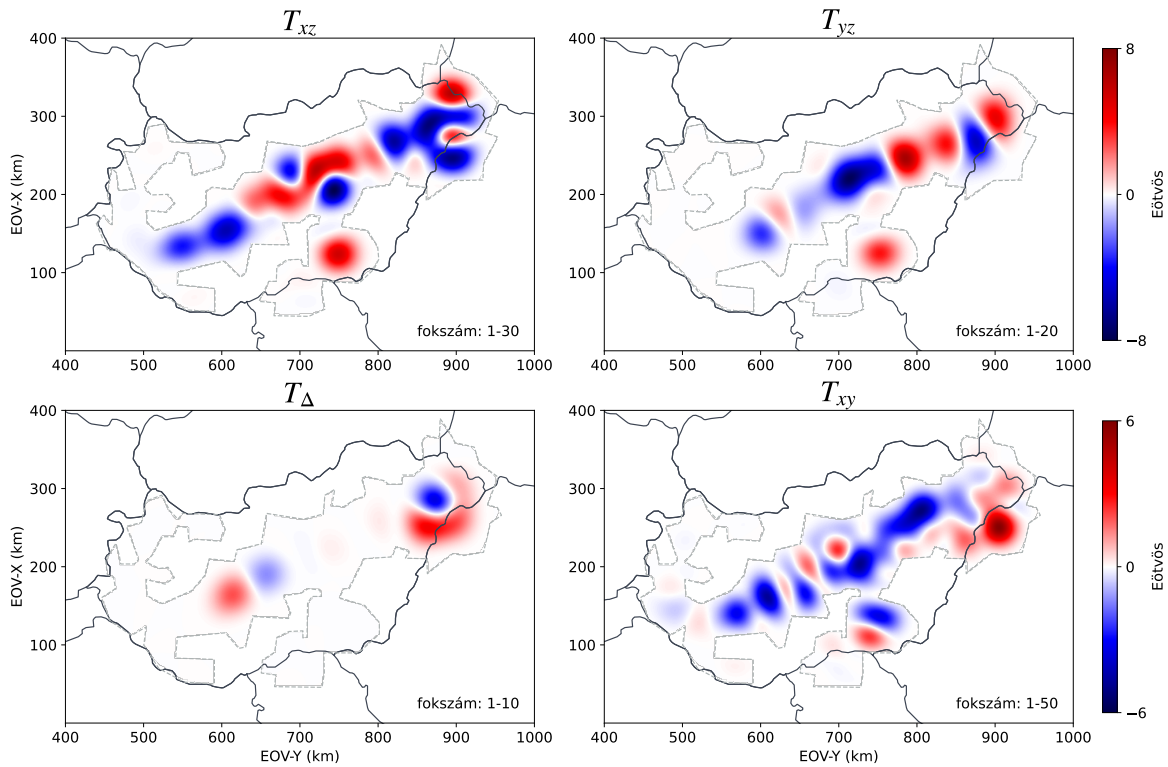


1. ábra. Az 1–200 Slepian-sor fokszám tartományban a GOCE és Eötvös-inga gradiens és görbületi mennyiségek kumulatív spektrumai. Szaggatott vonal jelzi azt a közelítő fokszámot, amitől kezdve az Eötvös-inga adatok kumulatív spektruma már meghaladja a GOCE adatokét.

Az R tartományban nem teljesen koncentrálódó függvények sorából adódó energia valamivel kisebb. A sorfejtési együtthatók négyzetösszege azonban ekkor is hasznos információt ad a jel nagyságáról. Ezért kiszámítottam $n_{max} = 200$ maximális fokszámig ($N_S = 200$ mellett) minden fok-

számra a kumulatív spektrumokat (c_n^2 -ek összegének négyzetgyökét) mind az Eötvös-inga, mind a GOCE gradiens és görbületi adatokból. Ezek az 1. ábrán láthatók.

Az ábrán látható, hogy mindegyik összetevő esetében - bár változó mértékben - a GOCE jele dominál egy adott fokszámig. Ezt nevezhetjük domináns fokszám tartománynak. A spektrumok alapján levonható az a következtetés, hogy érdemes a GOCE adatokkal kiegészíteni/ellenőrizni az Eötvös-inga méréseket. Hogy milyen mértékben segíthetnek ebben a GOCE mérési adatai, azt a 2. ábra próbálja szemléltetni. Ezen az ábrán látható, hogy a domináns fokszám tartományban milyen mértékben haladja meg a GOCE jele az Eötvös-inga adatok jelét. A számítás szerint a domináns fokszám tartományban az ábrán látható jellel képes a GOCE mintegy kiegészíteni az Eötvös-inga mérésekből számítható gradiens és görbületi jelösszetevőket. A spektrumok alapján bevezethetőek spektrális súlytényezők, amelyekkel a GOCE és az Eötvös-inga mérések jelei kombinálhatók.



2. ábra. Az ábrán az látható, hogy a feltüntetett domináns fokszám tartományban szintetizált GOCE gradiens és görbületi jel milyen mértékben haladja meg az Eötvös-inga adatok jelét. A szintézishez Slepian-sorokat használtam. Szaggatott vonal határolja az Eötvös-inga mérési adatok területét. A Slepian bázisfüggvények erre a területre lettek kiszámítva.

Az értekezés 4. fejezetéhez kapcsolódó első kérdés, hogyan határoztam meg a Tyihonov regularizáció (gamma négyzet) paraméterét?

A Tyihonov regularizáció (4.19) ábrán feltüntetett γ^2 paraméterét Koch és Kusche (2002) (10) összefüggése szerint számítottam, vagyis az első adatrendszerhez (V_{xz}) tartozó σ_1 és a paraméterekhez tartozó σ_μ szórás tényezők hányadosából:

$$\gamma^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_\mu^2}. \quad (4)$$

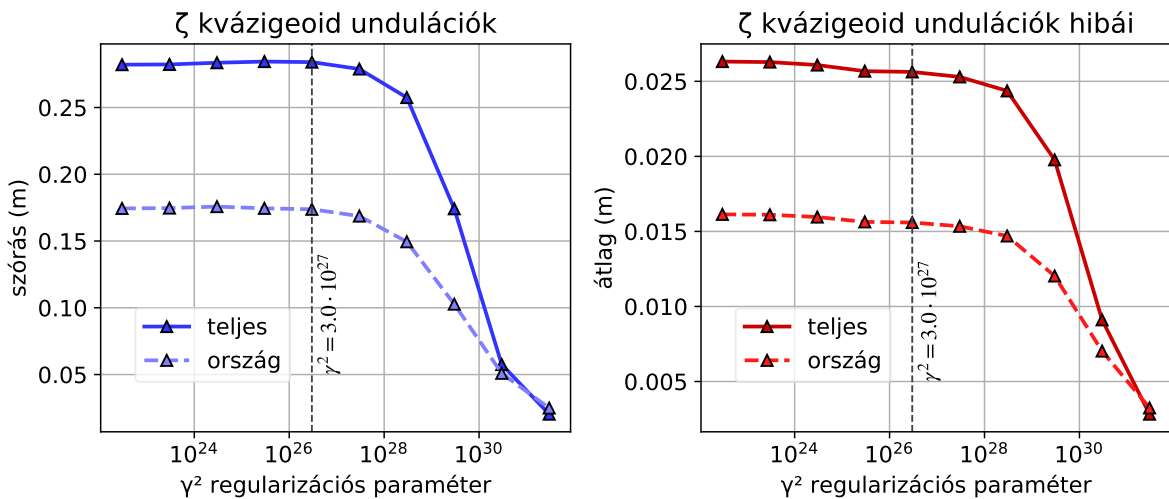
Ezek a szórás tényezők a Koch és Kusche (2002) által javasolt szórás tényező becslésből lettek szá-

mítva az ott ismertetett, illetve az értekezésben vázolt iterációs eljárás szerint. Ennek megfelelően javítandó az értekezés 37. oldalán olvasható mondat: “Ebből számítható a Tyihonov regularizáció (Bouman 1998) γ paramétere.”

További kérdés, hogy a kvázigeoid megoldás (4.21/b) ábrán bemutatott becült hibáit befolyásolja-e a Tyihonov regularizáció (gamma négyzet) paraméterének megválasztása?

A Tyihonov regularizáció γ^2 paramétere befolyásolja a kvázigeoid megoldás becült hibáit. Ugyanis a (4) egyenlet szerint ettől függ a σ_μ^2 szórástényező, amelyik a (4.9) egyenlet szerint befolyásolja a normálegyenlet-rendszer \mathbf{N} együttható-mátrixát, az pedig a (4.13, 4.14) összefüggések szerint befolyásolja a kvázigeoid undulációk \mathbf{C}_ζ kovariancia mátrixát. A dolgozat (4.21/b) ábrája ennek a mátrixnak a főátló elemei négyzetgyökét ábrázolja a kiválasztott számítási pontokban.

A hatás számszerűsítése érdekében megismételtem a számítást különböző γ^2 paraméterekkel. Az egyes adatrendszerekhez tartozó szórástényezők ugyanazok voltak, mint az eredeti számítás során. A 3. ábra mutatja a kapott eredményeket. Ezen az látszik, hogy a kvázigeoid undulációk átlagos nagysága (szórása), illetve az átlagos becült hibáik a paraméter 10^{23} – 10^{28} tartományában 10%-nál kevésbé változnak. A 10^{28} -nál nagyobb γ^2 paraméter esetén a túlzott regularizáció miatt viszont az átlagos jel és a becült hiba is gyorsan csökken. A megoldás túlzottan simává válik, ezért – ugyan kisebb hibával – egyre kisebb a modellezett jel nagysága.



3. ábra. A 200–1200 gömbfüggvény-fokszám tartományba eső kvázigeoid undulációk szórása és becült hibáik átlagos nagysága a Tyihonov regularizáció γ^2 paramétere függvényében a teljes számítási területre, illetve Magyarország területére. Szaggatott vonal jelzi a VCE eljárással kapott γ^2 értéket.

Az értekezés 5. fejezetéhez kapcsolódó kérdés, hogy mi az 5.16 egyenlet pontos alakja?

Köszönöm a Bíráló éles szemű észrevételét. Az (5.16) egyenlet pontos alakja

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = -\frac{5}{7} \frac{Q_{31}^+}{\text{Im}(Q_{21}) + 5/7 \text{Im}(Q_{31}) q_{31}/q_{21}} \cdot \left(\frac{q_{31}}{q_{21}}\right) \cdot \frac{dq_{31}}{q_{31}} \quad (5)$$

A javított egyenletben Q_{31}^+ szerepel Q_{31}^* helyett, illetve van egy további q_{31}/q_{21} tényező.

További kérdés, hogy a korrekció mennyiben befolyásolja az 5.16 alapján levont következtetéseket?

Az elemzésben azt használtam ki, hogy az Eötvös paraméter $\Delta\eta$ eltérése egyenesen arányos

1. táblázat. A v , w , v' , w' értékek és hányadosaik az EPF-kísérletben mért próbatömegekkel, az Eötvös et al. (1922) által közölt adatok alapján. 'div' az inga skálaosztás egysége, (3) jelzi a 3. módszerrel végzett méréseket

próbatömegek	v	w	v'	w'	v/w	v'/w'
	div	div	div	div		
magnálium–Pt	1.983	8.138	1.799	7.534	0.2437	0.2388
kígyófa–Pt	-1.797	6.698	-1.754	6.595	-0.2683	-0.2660
Ag–Fe–SO ₄ –Ag–Fe–SO ₄	-2.027	7.590	-2.032	7.622	-0.2671	-0.2666
RaBr ₂ –Pt	-1.736	6.566	-1.754	6.595	-0.2644	-0.2660
Cu–Pt	-1.923	6.516	-1.982	6.536	-0.2951	-0.3032
H ₂ O–Cu (3)	-2.029	6.767	-1.927	6.611	-0.2998	-0.2915
Cu–H ₂ O (3)	-2.016	6.786	-1.923	6.516	-0.2971	-0.2951
CuSO ₄ ·5H ₂ O–Cu (3)	-1.965	6.676	-1.937	6.684	-0.2943	-0.2898
Cu–CuSO ₄ ·5H ₂ O (3)	-1.923	6.613	-1.984	6.653	-0.2908	-0.2982
CuSO ₄ (oldat)–Cu (3)	-2.027	6.693	-1.928	6.669	-0.3029	-0.2891
Cu–CuSO ₄ (oldat) (3)	-1.982	6.766	-1.972	6.641	-0.2929	-0.2969
azbeszt–Cu (3)	-2.024	6.685	-1.935	6.705	-0.3028	-0.2886
Cu–azbeszt (3)	-1.933	6.736	-1.946	6.591	-0.2870	-0.2953
faggyú–Cu (3)	-1.917	6.575	-1.877	6.637	-0.2916	-0.2828
Cu–faggyú (3)	-1.930	6.831	-1.881	6.655	-0.2825	-0.2826

a dq_{31}/q_{31} hányadossal, ha a q_{31}/q_{21} hányados illetve a Q_{21} , Q_{31} multipólus terek a próbatömeg párokra azonosak. Mivel a $Q_{31}^+ = Re(Q_{31}) + v/w Im(Q_{31})$ függ a v/w hányadostól is, ezért további kíváncságot, hogy a v/w hányadosoknak is közel állandónak kell lenniük a próbatömeg párokra. Ennek ellenőrzésére szolgál az 1. táblázat. A táblázat szerint a 3. módszerrel végzett mérések esetében a v/w hányados állandósága legfeljebb 4%-os relatív hibával teljesül. Az Eötvös paraméter $\Delta\eta$ eltérése tehát – néhány százalékos változástól eltekintve – egyenesen arányos a dq_{31}/q_{31} hányadossal, ezért a módosított (5) egyenlet esetén is fennállnak a belőle levont következtetések.

Köszönöm és elfogadom a Bíráló észrevételét a 4. tézis és a 4.1 altézis megfogalmazásával kapcsolatban.

A “szabályos hiba” kifejezést valójában egy sajátos, a geodéziai hibaelmélet szóhasználatában meggyökeresedett értelemben használtam. Erről a szóhasználatról Krauter (2002) ezt írja: “A tudatos egyszerűsítéssel (elhanyagolással) járó és emiatt szükségszerűen hibás modellválasztás azt jelenti, hogy lemondunk az eredmény egy részének meghatározásáról, és ezt a kiszámítható mennyiséget a mérési hibák közé soroljuk. A mérési hibákhoz tehát egy kiszámítható szabályos rész társul, a modellhibák tehát szabályos hibákat okoznak a mérési eredményben.” Természetesen a tézis megfogalmazása semmiképpen nem akarta azt a gondolatot közvetíteni, hogy az EPF mérések szerzőinek a munkája nem volt korrekt. Elfogadva azt, hogy a “hiba” szó általánosságban mindig elítélő, negatív értelmet hordoz, és hogy itt valóban a modell finomításáról van szó, az érintett tézis és altézis megfogalmazását ennek megfelelően módosítom:

4. tézis

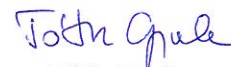
Pontosítottam az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciamérés modelljét az inhomogén nehézségi erőterben a különböző anyagi minőségű minták eltérő hosszúságából adódó hatással, ami indokoltá teszi a kísérletek megismétlését.

4.1 altézis

Elméleti megfontolások alapján kimutattam, hogy az EPF kísérletben az inhomogén erőter hatása a próbatömegek alakjának megfelelő megválasztásával kiküszöbölhető, és javasoltam ennek figyelembe vételét a kísérlet újramérése során.

Befejezésül szeretném ismét megköszönni az alapos és részletes bírálatot, amely fontos kérdéseket segített tisztázni a dolgozatban ismertetett kutatásokkal kapcsolatban.

Budapest, 2024. január 16.



Tóth Gyula
egyetemi docens

Felhasznált irodalom

- Bouman J (1998) Quality of regularization methods. In: DEOS Report. TU Delft
- Brockmann JM, Schubert T, Schuh W-D (2021) An Improved Model of the Earth's Static Gravity Field Solely Derived from Reprocessed GOCE Data. *Surveys in Geophysics* 42:277–316. <https://doi.org/10.1007/s10712-020-09626-0>
- Koch K-R, Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy* 76:259–268
- Krauter A (2002) *Geodézia*. Műegyetemi Kiadó, Budapest
- Moore IC, Cada M (2004) Prolate spheroidal wave functions, an introduction to the Slepian series and its properties. *Applied and Computational Harmonic Analysis* 16:208–230
- Rummel R (2020) GOCE: Gravitational Gradiometry in a Satellite. In: Freeden W, Nashed MZ, Sonar T (szerk) *Handbook of Geomathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1–14 o.
- Simons FJ, Wang DV (2011) Spatiospectral concentration in the Cartesian plane. *GEM - International Journal on Geomathematics* 2:1–36. <https://doi.org/10.1007/s13137-011-0016-z>
- Slepian D, Pollak HO (1961) Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty — I. *The Bell System Technical Journal* 40:43–63. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x>
- Tóth Gy, Földváry L (2005) Effect of geopotential model errors on the projection of GOCE gradiometer observables. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (szerk) *Gravity, Geoid and Space Missions*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 72–76 o.