Válasz Korvin Gábor professzor úr
"A nehézségi erőtér gradienseinek jelentősége és felhasználása a felsőgeodézia és a fizikai geodézia egyes területein" c. MTA doktori értekezésemre adott bírálói véleményére

Köszönöm professzor úr alapos bírálatát, hasznos észrevételeit és a dolgozat pozitív értékelését. Az opponensi véleményben leírt megjegyzésekre és kérdésekre az alábbiakban adom meg részletes válaszaimat a véleményben jelzett észrevételek sorrendjében.

A) *Formális kritikai megjegyzések*

A kritikai megjegyzéseket köszönöm és elfogadom.

1. A dolgozatban igyekeztem egyes szám első személyben fogalmazni, de sajnos maradtak benne indokolatlanul többes szám első személyű megfogalmazások.
2. Rövidítések jegyzékét állítottam össze a dolgozathoz, amelyet a válaszhoz mellékeltem.
3. Köszönöm az észrevételt. A dolgozatban is helye lett volna ennek a bekezdésnek.

B) *Technikai jellegű megjegyzések és kérdések*

1. A színek a különböző ingamérési területeket jelzik, a számok a mérés évszáma utolsó két számjegye (mindegyik mérés a 20. században történt)
2. A hivatkozás Biró et al. (2013) 247.o.
3. Az $U_0 = kM/R$ képletben a k a Newton-féle tömegvonzási állandó a felsőgeodéziában szokásos jelöléssel (Biró et al. 2013)
4. A referencia a gömbfüggvények összegzési tételére Biró et al. (2013) 151.o., a Vening-Meinesz integrálra ugyancsak Biró et al. (2013) 256.o.
5. A Bruns összefüggés a geoidmagasságok számítását teszi lehetővé a potenciálzavar segítségével, hivatkozás Biró et al. (2013) 421.o.
6. Mologyenszkij helyett valóban Molodenskii a szerző neve az angol publikációban
7. A deriváltak együttesének számítását a Tóth et al. (2006) publikációban javasoltam
8. A Wiener szűrőkről a referencia Wiener (1964)
9. A fizikai geodéziában a nehézségi erőtér modellezéséhez használt kovarianciafüggvények sajátos szerkezetű harmonikus függvények, amelyek kielégítik a Laplace-egyenletet. A legkisebb négyzetek módszerén alapuló kollokáció eljárásában használt kovarianciafüggvények esetében a H. Moritz által javasolt, Moritz (1980) 22. fejezetében ismertetett korrelációs hosszat (németül Halbwertsbreite) szokták alkalmazni, amelyik nem egyezik az általában exponenciális lecsengés esetében alkalmazott korrelációs hosszal. Az értekezésben a fizikai geodéziában szokásos meghatározást szem előtt tartva fogalmaztam, viszont hasznos lett volna felhívni a figyelmet arra, hogy ez nem egyezik az általánosan használt mennyiséggel.
10. A Tyikhonov regularizáció klasszikus hivatkozása Tikhonov és Arsenin (1977). A Tyikhonov regularizáció γ^2 paraméterét Koch és Kusche (2002) (10) összefüggése szerint számítottam, vagyis az első adatrendszerhez (V_{xz}) tartozó σ_1 és a paraméterekhez tartozó σ_μ szórástényezők hányadosából:

$$\gamma^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_\mu^2}. \tag{1}$$

C) *Megválaszolandó tudományos kérdések*

(i) Az Eötvös peremérték-feladat megoldását első közelítésben a gömbön végeztem el, mivel a gömbfelületen ortogonális tenzor gömbfüggvények alkalmas matematikai eszközt nyújtottak a probléma megoldásához. A forgás-ellipszoidon való megoldást is tervbe vettem, viszont időközben 2005-ben Bölling és Grafarend (2005) publikálták egy ellipszoidra vonatkozó megoldást vektor és tenzor ellipszoidi harmonikusokkal, így ezzel a továbbiakban nem foglalkoztam. Érdekes viszont az, hogy legújabban Šprlák (2023) hibát talált a levezetésben, ami érvényteleníti Bölling és Grafarend (2005) eredményeit. A hiba oka bizonyos tenzor ellipszoidi harmonikusok ortogonalitásának a hiánya, így ez a feladat az ellipszoidon a felsőgeodézia és a potenciálelmélet nyitott és nehéz problémája maradt.

(ii) A spektrális súlyok megválasztása Gelderen és Rummel (2001) javaslata szerint a felhasznált adatok sztochasztikus modelljén alapulhat. Az általam alkalmazott, a gradiens és görbületi mennyiségeket azonos, egységnyi súllyal figyelembe vevő megoldás természetesen csak egy első közelítésnek tekinthető, ami akkor indokolt, ha a kétfajta mennyiség azonos megbízhatóságú. Ez nem elfogadhatatlan, de nem is optimális megoldás. Egyetértek a Bíráló megjegyzésével, hogy a zárt alak nem feltétlen jelent nagyobb pontosságot. Érdekes lenne változó spektrális súlyokkal is számítani megoldást. A tapasztalataim szerint ekkor viszont felszínközeli pontok esetében az izotróp magfüggények sorfejtésének lassú konvergenciája a zárt alak hiánya miatt gyakorlati nehézségek forrása lehet.

(iii) A 3.1. táblázatban található sorok esetében felső korlátot lehet adni arra a hibára, amely abból adódik, hogy a végtelen sort csak egy adott l_{max}-ig összegezzük. Amennyiben a megengedhető hiba van megadva, akkor a becsült felső korlát segítségével megállapítható a szükséges l_{max} felső határ.

Az l_{max}-nál magasabb fokú tagok elhanyagolásából adódó hiba felső korlátjára a következő eljárással adhatunk becslést. A végtelen sorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget (Heinbockel 2010) valamely $\sum_i a_i$ végtelen sor első n elemének elhagyásával keletkező végtelen sorra felírva, a sor R_n maradékának abszolút értékét kapjuk

$$|R_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| \,. \tag{2}$$

E szerint a maradék abszolút értékét felülről becsülhetjük a maradék sor tagjai abszolút értékeinek összegével. Mivel a 3.1. táblázatban található sorok $\sigma < 1$ esetén abszolút konvergensek, a maradékok abszolút értékei összegének sora is abszolút konvergens, tehát $|R_n|$ létezik és véges. A pozitív elemekből álló maradék sort – speciálisan az említett magfüggvények esetében – felülről közelítjük az

$$\left| R_{l_{max}} \right| = \sum_{l=l_{max}+1}^{\infty} 2(2l+1)\sigma^{l+3} \tag{3}$$

geometriai sorral. A 2-es tényező két rész szorzata. Az egyik rész abból adódik, hogy a függvénysorokban található $P_{l0}(x)$ Legendre-polinomok és $P_{l1}(x)$, $P_{l2}(x)$ Legendre-függvények abszolút értékére (a teljes $-1 \leq x \leq 1$ értelmezési tartományban) a következő korlátokat állíthatjuk fel

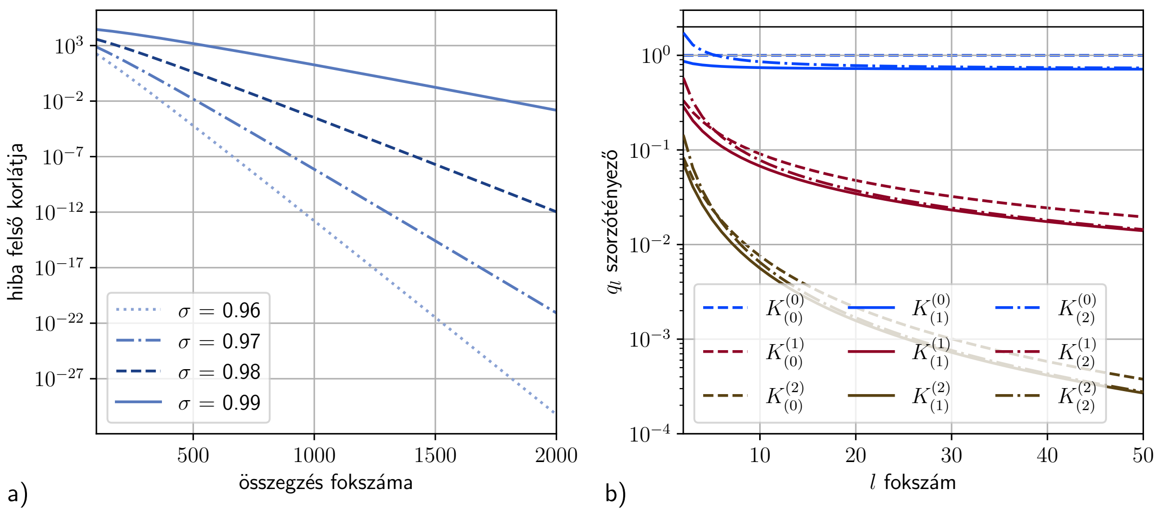
(Abramowitz és Stegun (1964), Lohöfer (1991))

$$|P_{l0}(x)| \leq 1, \qquad |P_{l1}(x)| \leq \sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}, \qquad |P_{l2}(x)| \leq \sqrt{\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2}}. \tag{4}$$

A másik rész a magfüggvények sorában szereplő további, l-től függő tényezők felső korlátja. Ha ezt a két részt összeszorozzuk, akkor ezek lesznek az egyes magfüggvényekhez tartozó, q_l-el jelölt szorzók. Az 1. b) ábra azt szemlélteti, hogy minden magfüggvényre és az összes $l \geq 2$ fokszámra ezek a q_l szorzók 2-nél kisebbek. Így a (3) összefüggésben található 2-es tényező felső korlátot ad minden lehetséges x-re és az összes magfüggvényre vonatkozóan a q_l szorzótényezőkre. A (3) sor összege zárt alakban kifejezhető

$$|R_{l_{max}}| = 2\sigma^{l_{max}+4}\frac{3-\sigma-2l_{max}\sigma+2l}{(1-\sigma)^2} \tag{5}$$

és felső korlátot ad a magfüggvények l_{max} fokszámig történő összegzéséből eredő hibára. Az 1. a) ábra mutatja ezt a hibát különböző σ értékekre. Látszik, hogy pl. $\sigma = 0.96$ esetében $l_{max} = 1250$ maximális fokszámig végezve a magfüggvények sorának összegzését a hiba már biztosan kisebb, mint 10^{-17}. Az is látszik, hogy minél közelebb van σ 1-hez, vagyis minél közelebb van a számítási pont a földfelszínhez, annál lassabb a sorok konvergenciája.



1. ábra. a) Az Eötvös tenzor felfelé folytatásához használt magfüggvények adott fokszámig való összegzésével elkövetett hiba felső korlátja. A számítás h magasságát jelzi a $\sigma = R/(R+h)$ paraméter, R a földsugár. b) Különböző magfüggvényekhez tartozó q_l szorzótényezők a sorfejtés l fokszáma függvényében. Az összes magfüggvény esetében a szorzók értéke 2 alatt marad, amit az ábra felső részén látható egyenes szemléltet.

(iv) Köszönöm a Bíráló észrevételét. Sajnos elmulasztottam az 1.1 altézis megfogalmazásánál kiemelni azt a különbséget, ami az Eötvös peremérték-feladatot megoldó magfüggvények, illetve az Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatását megvalósító magfüggvények között van. Ezért tűnhet ellentmondásosnak az 1.1 tézis és a 3.1 táblázat magyarázata. Az Eötvös peremérték-feladatot megoldó magfüggvények (2.23-24) zárt alakját én állítottam elő (Tóth 2003), míg Šprlák et al. (2014) az Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatását megvalósító magfüggvények zárt alakját közölte.

(v) A 3.3. a és b ábrák abszcisszáiban az f frekvencia és az l fokszám közötti átszámítást a GOCE műhold névleges $T = 5370$ s keringési ideje adja:

$$l = T \cdot f \tag{6}$$

(vi) A 3.4. a) ábra, ami a V_{zz} lefelé folytatása során a távoli területek elhanyagolásából eredő várható hibát mutatja, a gömbfüggvényspektrumban végzett számításon alapult. A $h = r - R$ magasság esetén az elhanyagolásból eredő hiba σ_{zz}^2 varianciáját a

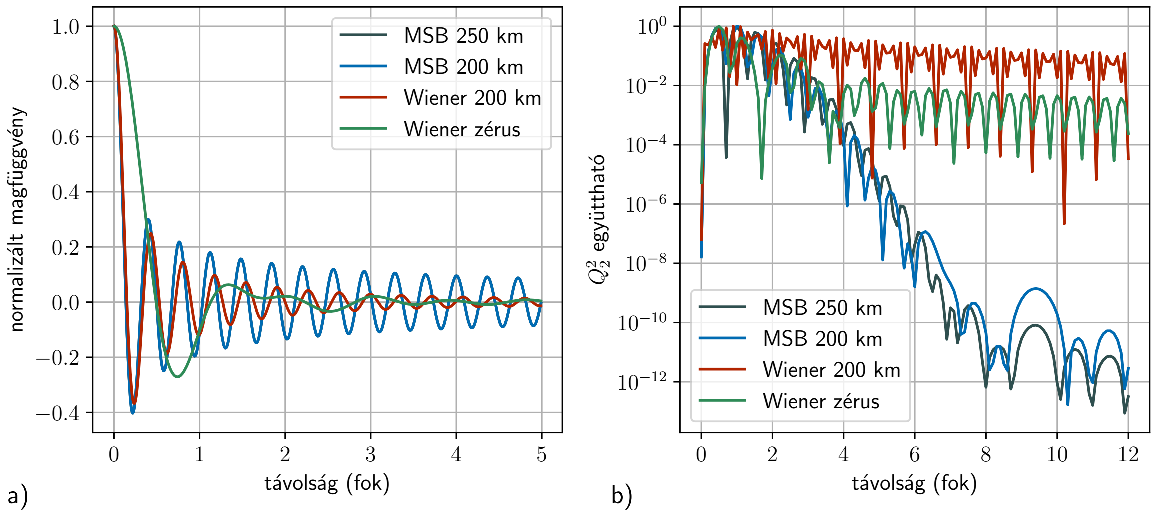
$$\sigma_{zz}^2(\psi_0) = \left(\frac{\Gamma_0}{2}\right) \sum_{l=2}^{\infty} \left[\left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} (l+1)(l+2)\, Q_l(r, R, \psi_0) \right]^2 \sigma_l^2 \tag{7}$$

összefüggéssel számítottam ki. A képletben Γ_0 jelöli V_{zz} normálértékét a felszínen (1541.4 E), R a földsugár, ψ_0 az a távolság, ameddig a számítást végezzük. Q_l az l-edfokú csonkítási együttható, σ_l^2 pedig a fokvariancia, amelyik valamely geopotenciális modell (az ábra esetében az EGM96) együtthatóiból képezhető a $\sigma_l^2 = \sum_{m=0}^{n} \left(C_{lm}^2 + S_{lm}^2\right)$ összefüggéssel.

A fokvarianciák az l fokszám függvényében lassan és szabályosan változnak, ezért a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát lényegében a $K(\psi)$ magfüggvénytől és a $P_l(cos\,\theta)$ Legendre polinomoktól függő

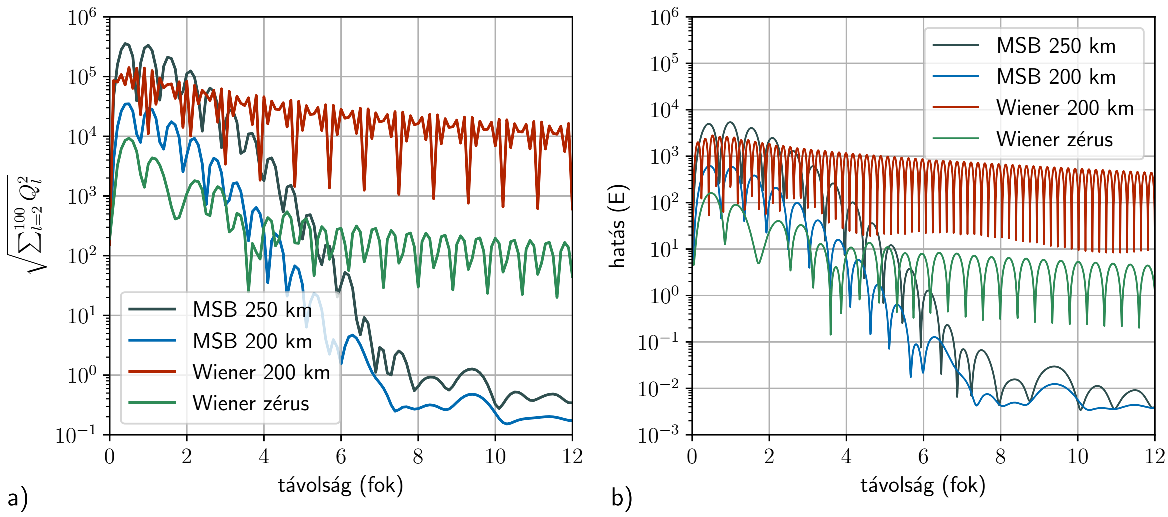
$$Q_l(r, R, \psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} K(r, R) P_l(cos\,\theta)\, sin\,\theta d\theta$$

csonkítási együtthatók határozzák meg. A magfüggvény spektrális szűrése (amit a Legendre spektrumán végezhetünk) után kapott módosított magfüggvényeket a 2. a) ábra mutatja.



2. ábra. a) Különböző spektrális szűrésekkel módosított magfüggvények a V_{zz} lefelé folytatásához. Az értékeket az egyes magfüggvények maximális értékével normalizáltam. b) A Q_2 csonkítási együttható négyzete ugyancsak a különböző spektrális szűrésekkel módosított magfüggvényekre.

Az ábrán az látható, hogy a szűréssel módosított magfüggvények jellegzetes hullámzást mutatnak, ami a szűrés típusától függ, és alapvetően ez az oka a dolgozat 3.4. a) ábráján tapasztalható hullámzásnak. A Q_l együtthatók is követik a magfüggvények hullámzását a távolság függvényében, viszont a (7) egyenletben szereplő négyzetreemelés miatt a frekvencia duplázódik. Ezt jól szemlélteti a 2. b) ábra, ami a Q_2 együttható négyzetét mutatja a ψ_0 távolság függvényében. További Q_l együtthatók (l=3–100) négyzetének hozzáadása után is megmarad a jellegzetes, 3.4. a) ábrán látható hullámzás (3. a) ábra), ezért megállapítható, hogy a periódikus oszcillációk oka a szűréssel módosított magfüggvények hullámzása. A lefelé folytatás exponenciálisan felerősíti a magas frekvenciákat, emiatt azokat a magfüggvény regularizációjával el kell nyomni.



3. ábra. a) A Q_l (l=2–100) csonkítási együtthatók négyzetösszegeinek négyzetgyöke a különböző spektrális szűrésekkel módosított magfüggvényekre. Szembetűnően hasonló az értekezés 3.4 a) ábrájához. b) Az értekezés 3.4.a) ábrája 0.1° helyett 0.01°-os mintavételezéssel kiszámítva.

A 3.4. a) ábra előállításának utolsó lépésében mégis szükség volt mintavételezésre a tértartományban. A Bíráló kérdése alapján ellenőriztem a helyes mintavételezés Nyquist-Shannon féle szabályainak betartását. Ez az ellenőrzés arra vezetett, hogy a "Wiener 200" szűrő esetében nem teljesült az a szabály, hogy a jelben levő legnagyobb frekvenciának legalább a kétszeresével kell mintavételezni. A jel maximális frekvenciájának megfelelő periódushossz ugyanis 0.18°, ezért legalább 0.09° távolsággal kellene mintavételezni. Ezzel szemben 3.4. a) ábra, illetve a 2. b), 3. a) ábrák 0.1°-os mintavételezéssel készültek, ami miatt egy hamis alacsonyfrekvenciás jel jelent meg rajtuk. A 3. b) ábra elégséges (0.01°-os) mintavételezéssel készült, ezért azon már nem látható ez a hamis információ.

(vii) Braginsky és munkatársai kísérletének az elemzése esetében valójában arra voltam kíváncsi, hogy mekkora nedvességváltozásból eredő tömegváltozás adhat a kísérlet bejelentett pontosságával, az η Eötvös paraméter $0.9 \cdot 10^{-12}$ szórásával megegyező hatást. Próbaszámításokat végezve jött ki az említett 0.8 %-os nedvességváltozás, ami a teljes fal térfogatra vonatkozik. Ha feltételezzük, hogy az említett fal anyaga beton, akkor a beton porozitására a Cruz et al. (2015) által közölt 9-10 % körüli értéket felvéve 8-9% relatív nedvességváltozást kapunk. Így ez a számítás rámutatott a kísérlet egyik lehetséges hibaforrására.

(viii) Köszönöm, hogy a Bíráló felvetette ezt az érdekes kérdést. A gravitációshullám-detektorok a detektor két karjának relatív hosszváltozását mérik interferometria segítségével. A detektor a mérési frekvenciatartományban érzékeny a nehézségi erőtér megváltozására, vagyis az általában több km hosszú interferométer karok végén levő tükrökre ható tömegvonzási erők különbségére (Weiss 1972). Ezt nevezik gravitációs gradiens (GGN), vagy newtoni zajnak (NN). A newtoni zaj egyrészt az időtől függő környezeti sűrűségváltozások, másrészt a detektor közelében levő sűrűséginhomogenitások mozgása miatt keletkezik (ibid. p.67).

Az értekezésben bemutatott gravitációs gradiens számítási módszerek véleményem szerint *közvetlenül* nem alkalmazhatóak a gravitációs hullámok detektálását elősegítő műszerfejlesztésekben, az ilyen mérések értelmezésében és hiba-analízisében. A számított gravitációs gradiensek ugyanis *elemi* hosszon adják meg a tömegvonzási erő változását, míg a gravitációshullám-detektorok newtoni zajához a tömegvonzási erő változását több km-es hosszon kellene kiszámítani. Arra viszont látok lehetőséget, hogy az 5.2 fejezetben az Eötvös-Pekár-Feket kísérlet analíziséhez felhasznált multipólus kifejtést erre a célra lehessen felhasználni. A gravitációs kölcsönhatás W potenciális energiája időbeli változásának a detektor interferométer karjának irányába eső deriváltja ugyanis közvetlenül megadja a tükrökre ható erő megváltozását, és ebből a tükör mozgása kiszámítható. Ehhez elő kell állítani külső Q_{lm} multipólus tér időbeli változását és a detektor kölcsönható tömegeinek q_{lm} multipólus nyomatékait, és akkor az (5.7) kifejezéshez hasonlóan, de nem szög-, hanem iránymenti deriválttal az időben változó kölcsönhatás kiszámítható, és a fent említett célokra felhasználható.

Budapest, 2024. január 16.

Tóth Gyula

Tóth Gyula
egyetemi docens

Felhasznált irodalom

Abramowitz M, Stegun IA (1964) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth Dover printing, tenth GPO printing. Dover, New York

Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy (2013) A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest

Bölling K, Grafarend E (2005) Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. Journal of Geodesy 79:300–330. https://doi.org/10.1007/s00190-005-0465-y

Cruz JC de la, Campo JM del, Colorado D (2015) Comparative study on porosity and permeability of conventional concrete and concrete with variable proportions of natural zeolite additions. Revista de la Construcción Journal of Construction 14:70–76

Gelderen M van, Rummel R (2001) The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. Journal of Geodesy 75:1–11. https://doi.org/10.1007/s001900000146

Heinbockel JH (2010) Introduction to Finite and Infinite Series and Related Topics. Trafford Publishing

Koch K-R, Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. Journal of Geodesy 76:259–268

Lohöfer G (1991) Inequalities for Legendre functions and Gegenbauer functions. Journal of Approximation Theory 64:226–234

Moritz H (1980) Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag; Abacus Press, Karlsruhe; Tunbridge Wells Kent

Šprlák M (2023) Comments and corrections to: „Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives" by Bölling and Grafarend (2005) in J. Geod. 79(6-7):300-330. Journal of Geodesy 97:101. https://doi.org/10.1007/s00190-023-01799-x

Tikhonov AN, Arsenin VY (1977) Solutions of ill-posed problems. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.: John Wiley & Sons, New York

Tóth Gy (2003) The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC. 102–107 o.

Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN, Ádám J (2006) Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica 41:21–30. https://doi.org/10.1556/ageod.41.2006.1.3

Weiss R (1972) Quarterly progress report. MIT Research Lab of Electronics 105:54

Wiener N (1964) Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series: With Engineering Applications. M.I.T. Press

Rövidítések

AG asztrogravimetriai
AGG asztrogravimetriai és GNSS/szintezési
AGGG asztrogravimetriai, GNSS/szintezési és vízszintes gravitációs gradiens

Bendefy-féle harmadik országos szintezési hálózatunk, amely Bendefy László nevéhez fűződik
BME Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

CHGEO Svájc geoid modellje

DIR Direct GOCE global geopotential model
DTM Digital Terrrain Model, digitális domborzatmodell

EGGG97 Európai gravimetriai kvázigeoid megoldás (1997)
EGM Earth Gravitational Model
EHT ETRS89-EOV Hivatalos Helyi Térbeli Transzformáció
EIGEN European Improved Gravity model of the Earth by New techniques
ÉKL Észak-Kelet-le koordináta-rendszer
EOMA Egységes Országos Magassági Alaphálózat
EPF Eötvös-Pekár-Fekete (kísérlet)
ERTM Earth Residual Terrain Model
ESA European Space Agency, Európai Űrügynökség
EUVN European Vertical Reference Network, európai magassági vonatkoztatási hálózat
Eöt-Wash Eöt-Wash Group at the University of Washington

GGM GRACE Gravity Model
GGOS Global Geodetic Observing System, globális geodéziai megfigyelőrendszer
GNSS Global Navigation Satellite Systems, globális navigációs műholdrendszerek
GOCE Gravity and Steady-State Ocean Circulation Explorer
GPM Geopotential Model, geopotenciális modell
GPS Global Positioning System, globális helymeghatározó rendszer
GRACE Gravity Recovery And Climate Experiment
GRS geodéziai vonatkoztatási rendszer

HGEO magyar gravimetriai kvázigeoid
HGGG magyar GPS-gravimetriai kvázigeoid
HGTUB BME kvázigeoid

IAG International Association of Geodesy, Nemzetközi Geodéziai Szövetség
INGA Integrált Geodéziai Alapponthálózat

KÉF Kelet-Észak-fel koordináta-rendszer

MBW Measurement Bandwidth, mérési sávszélesség, hasznos mérési tartomány
MGH Magyar Gravimetriai Hálózat

MICROSCOPE Micro-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence, Micro-Satellite with Compensated Drag for Observing the Principle of Equivalence

MSB Modified Spherical Butterworth, módosított gömbi Butterworth

OGPSH Országos GPS Hálózat

PSC parameter-signal correlation

PSD Power Spectral Density, teljesítménysűrűség

QDAEDALUS automatizált, számítógéppel vezérelt csillagászati-geodéziai mérőrendszer

RTM Residual Terrain Model, különbségi terepmodell

SNR jel/zaj viszony

SO(2), SO(3) speciális ortogonális mátrixok csoportja, melyek két-, ill. háromdimenziós forgatásokat ábrázolnak

UELN United European Levelling Network, Egységes európai szintezési hálózat

VCE Variance Component Estimation, szórástényező becslés

VITEL Valós Idejű Terepi transzformációs ELjárás