

Válasz Paláncz Béla professzor úr
”A nehézségi erőter gradienseinek jelentősége és felhasználása a felsőgeodézia és a fizikai geodézia egyes területein” c. MTA
doktori értekezésemre adott bírálói véleményére

Először is szeretném megköszönni professzor úr pozitív és támogató bírálatát! Az opponensi véleményben kifejtett megjegyzésekre és kérdésekre – követve annak struktúráját – az alábbiakban adom meg részletes válaszaimat.

I. Bevezető gondolatok

A dolgozat valóban meglehetősen rövid terjedelmű, valamint sok részlet csak a hivatkozott publikációkban található meg, ezért nehezebben követhető. Köszönöm a dolgozatban észrevett gépeleési hibák felsorolását.

II. A dolgozat fejezetei és a kapcsolatos tézisek

Egyetértek a Bíráló 3. fejezetéhez fűzött megjegyzésével, hogy az analitikai folytatás kifejezés a dolgozatban nem a komplex függvénytanban szokásos műveletre utal. A geofizika tetszőleges anomáliaterek esetében használja az analitikai folytatás elnevezést. Völgyesi (2002) szerint “Az analitikai folytatások módszerének az a lényege, hogy tetszőleges (pl. gravitációs) anomáliatereket az adott észlelési síkról átvisszük (átranzformáljuk) valamely fölötte, vagy alatta levő síkra. Az előbbi az analitikai felfelé folytatás, az utóbbi az analitikai lefelé folytatás esete”. A felsőgeodéziába Sjöberg és Bagherbandi (2011) szerint A. Bjerhammar vezette be az analitikus folytatás fogalmát, amivel a külső tömegvonzási erőter harmonikus lefelé folytatására utalt a Föld belsejében elhelyezkedő és később róla elnevezett Bjerhammar gömbre. A dolgozatban a geofizikában és a felsőgeodéziában elterjedt (Moritz 1970; Cruz és Laskowski 1984; Ågren 2004; Sjöberg 2007; Sjöberg és Bagherbandi 2011) szóhasználatot vettem alapul, és ezt talán hasznos lett volna ott megemlíteni.

3. A dolgozat téziseiről

a) Altézisek megfogalmazásával a tézisek jobb strukturálása volt a célom. Természetesen el tudom fogadni, hogy az 1. és 2. tézisek altézisei a megfelelő tézisekbe legyenek integrálva.

c) Köszönöm a Bíráló javaslatát. A 4. tézist és a 4.1 altézist ez alapján a következőképpen fogalmazom meg:

4. tézis

Pontosítottam az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciamérés modelljét az inhomogén nehézségi erőterben a különböző anyagi minőségű minták eltérő hosszúságából adódó hatással, ami indokoltá teszi a kísérletek megismétlését.

4.1 altézis

Elméleti megfontolások alapján kimutattam, hogy az EPF kísérletben az inhomogén erőter hatása a próbatömegek alakjának megfelelő megválasztásával kiküszöbölhető, és javasoltam ennek figyelembe vételét a kísérlet újramérése során

4. Néhány összefoglaló, záró megjegyzés

a) A dolgozat angol nyelvű ismertetését csatoltam a válaszhoz.

b) Köszönöm a Bíráló észrevételét. Az említett kutatók valóban sokat tettek a geoiddal kapcsolatos kutatások területén. Prof. Sjöberg nevéhez fűződik például az egyik nagy sikerű, a geoid számításával kapcsolatos nemzetközi iskola létrehozása. Az, hogy az ő eredményeikre nem hivatkoztam, nem az érdemeik kisebbitését jelenti. Az említés hiányának oka az, hogy a dolgozatban nem tértem ki azokra a fontos geoidszámítási módszerekre, melyekkel ők foglalkoztak. Részletesebben csak azokat az eljárásokat tárgyaltam (legkisebb négyzetek szerinti kollokáció, gömbi radiális bázisfüggvények), amelyek kívül esnek a felsorolt kutatók munkásságán.

c) Egyetértek a Bíráló megjegyzésével. Kezdeti kutatási témám globális topografikus-izosztatikus modellek vizsgálata volt, ebből készítettem a kandidátusi értekezésemet. A felsőgeodézia területén Eötvös Loránd szellemi hagyatéka ápolását szem előtt tartva váltottam irányt. A nemzetközi hivatkozások számát tekintve jobb lett volna megmaradni a kezdeti irány mellett, de nem bánom, hogy így alakult.

5. Kérdések a jelölthöz

Köszönöm a Bírálónak, hogy felhívta a figyelmemet a gépi tanulás módszereinek egyre növekvő alkalmazására a geoid, illetve tágabb összefüggésben a nehézségi erőter meghatározása kapcsán. Ezen módszerek jelentőségét az is mutatja, hogy a Globális geodéziai megfigyelőrendszer, a GGOS 2023 óta kiemelt területként kezeli a mesterséges intelligencia (MI, AI) alkalmazását. Az új "Focus Area on Artificial Intelligence for Geodesy (AI4G)" (GGOS 2023a) egyik munkacsoportjaként létrehozta az "AI for Gravity Field and Mass Change" elnevezésű bizottságot (GGOS 2023b), amelyik a nehézségi erőter és a tömegváltozások tanulmányozására a mesterséges intelligencia és gépi tanulási módszerek felhasználását célozza.

a) A vonatkozó nemzetközi szakirodalom alapján a geoid meghatározására a gépi tanulás változatos módszerei alkalmazhatók. Ezek az eljárások a felügyelt gépi tanulást használják. Többségük vagy közvetlenül GNSS/szintezési adatok alapján a geoid adott felületdarabjának regressziós közelítését, vagy egy ún. hibrid eljárással (Arana et al. 2017) valamilyen gravimetriai geoidmegoldáshoz és GNSS/szintezési adathalmazhoz rendelhető korrekciós felület meghatározását végzi. Erol és Erol (2013) tanulmánya az előbbi esetben részletesebben vizsgált néhány, mesterséges neurális hálózatokkal megvalósított gépi tanulási eljárást. Hazánkban is többféle, gépi tanuláson alapuló eljárás lett kipróbálva a geoid említett módokon történő meghatározására, melyben T. Bírálónak is fontos szerepe volt (Zaletnyik et al. 2004; Zaletnyik et al. 2007, 2008; Awange et al. 2018). Az említett gépi tanulási módszerek előnye, hogy tetszőleges nemlineáris függvényt képesek megtanulni és a tanítás után a számítás gyors. Hátrányként említi Erol és Erol (2013), hogy a mesterséges neurális hálózatok optimális felépítése nagyban a kísérletező ügyességétől és hozzáértésétől függ, valamint hosszas kísérletezést és sok erőfeszítést igényel.

Az előzőektől eltérő adatok esetében is van lehetőség a gépi tanulás módszereinek felhasználására a geoid meghatározása során. A mesterséges holdak méréseinek lefelé folytatása ugyanis lehetővé teszi a földfelszínen a geopotenciál és abból a Bruns összefüggéssel a geoid meghatározását. Schneider és Michel (2022) egy mesterséges intelligencián alapuló eljárást, a szótári tanulást alkalmazta a lefelé folytatás számításához, ahol a szótár elemei olyan próbafüggvények, mint a gömbfüggvények, a Slepian függvények, a radiális bázisfüggvények és a waveletek. Az eljárás lehetővé teszi azt, hogy végtelen sok próbafüggvénnyel dolgozhassunk.

A módszertől függetlenül a rendelkezésre álló tanító adatok minősége és eloszlása nagyban befolyásolja a közelítés végső pontosságát. Az adatok minősége és eloszlása szempontjából ezért hasznos lenne a különböző forrásból származó mérések együttes felhasználása. A geoid meghatározására hazánkban rendelkezésre álló heterogén információk (geopotenciális modellek, mestersé-

ges holdak mérései, GNSS/szintezési, nehézségi rendellenesség, függővonal-elhajlás, Eötvös-inga adatok) közvetlen bevonása a gépi tanulási eljárásokba viszont még további kutatásokat igényel.

b) A PINN (Physics Informed Neural Network) technika egy új, érdekes iránya a mesterséges intelligencián alapuló módszerek alkalmazásának (Raissi et al. 2019). A PINN-ek neurális hálózatok, amelyek explicit módon tartalmazzák a célfüggvényben a fizikai modellből fakadó kényszereket. Az asztrodinamika igényelte gravitációs erőteret modellezés területére Martin és Schaub (2022a) vezette be a módszert. Az eljárásuk lényege az volt, hogy az U potenciálfüggvénynek az a gyorsulások segítségével történő meghatározására létrehozott neurális hálózat célfüggvényében explicit módon alkalmazták a $-\nabla U = \mathbf{a}$ kényszert. Az U potenciálfüggvényből a ∇U gradiensvektort automatikus differenciálással nyerték. Módszerüket továbbfejlesztették olyan összetett célfüggvény bevezetésével, amelyben az U potenciálfüggvénynek már ki kellett elégítenie a konzervatív erőterre vonatkozó Laplace-egyenletet ($\Delta U = 0$) és a tömegeken kívüli forrásmentesség feltételét ($\nabla \times \nabla U = 0$) is (Martin és Schaub 2022b). Legújabban pedig tovább finomították a számítást a III. generációs modelljükkel, amelyet Martin és Schaub (2023) ismertet.

A PINN technika nagy előnye a gravitációs erőteret modellezése területén – szemben egyéb módszerekkel – a gyorsasága, mely különösen fontos szempont az asztrodinamika területén, amikor egy űrjármű valós idejű navigálása a feladat. Amikor a modellt csak egy égitest közelében kívánjuk használni, akkor a Martin és Schaub (2022a) által említett skálázási problémák nem játszanak szerepet. A kapott megoldás egyik problémája a neurális hálózatok spektrális torzítása (Rahaman et al. 2019), ami azt jelenti, hogy a hálózat a tanulás során előnyben részesíti a nehézségi erőteret alacsony frekvenciás összetevőit, vagyis azokat hamarabb tanulja meg. Ez rendkívül alacsony tanulási sebességet eredményezhet, amikor a gravitációs erőteret próbáljuk meg modellezni, amelyben magas frekvenciájú összetevők is jelen vannak. Ezt a problémát többféle módon próbálták orvosolni (Sitzmann et al. 2020; Tancik et al. 2020; Wang et al. 2021b). Egy másik nehézség, hogy az összetett célfüggvény a versengő gradiens számítási dinamika miatt lerontja a tanulási sebességet (Wang et al. 2021a). Ez abból fakad, hogy a különböző célok különböző tanulási tulajdonságokkal rendelkeznek, ami megakadályozhatja bizonyos célok érvényre juttatását a tanulás során. Emiatt a Föld gravitációs erőterének modellezése esetében a szerzők a számításaikban eddig nem is alkalmazták a konzervatív erőterre vonatkozó kényszereket (Martin és Schaub 2023).

Összességében ígéretes lehetőségnek látom a PINN-ek alkalmazását a nehézségi erőteret meghatározására, amennyiben a modell megalkotása során a felsőgeodézia szakterületének speciális szempontjait is sikerül figyelembe venni. Például fontos kíváncságot, hogy a potenciálfüggvény a külső térben kielégítse a Laplace-egyenletet. Egy másik kihívás lehet a PINN-ek alkalmazását illetően az a már korábban említett szempont, hogy a nehézségi erőteret meghatározására rendelkezésre álló heterogén információk (geopotenciális modellek, mesterséges holdak mérései, GNSS/szintezési, nehézségi rendellenesség, függővonal-elhajlás, Eötvös-inga adatok) közvetlenül legyenek bevonva a modell megalkotásába.

Budapest, 2024. január 16.



Tóth Gyula
egyetemi docens

The importance and use of gravity field gradients in some areas of geodesy and physics

MTA Doctoral thesis by Gyula Tóth

Summary

The thesis presents studies in three main areas, all closely related to Eötvös' work. The first two are the determination of gravity fields using gradient measurements. Hungary is the best surveyed area in the world in terms of gradient measurements with the Eötvös torsion balance, but since the measurements were previously only used for exploration purposes, it is important to exploit them in geodesy. Gravitational gradient measurements with modern space instruments (GOCE) are also available. In view of the accuracy requirements, the aim is to include these measurements in the determination of the gravity field. Gradiometric boundary value problems provide the opportunity for this, which is discussed in the second part. However, satellite measurements are not close to the Earth's surface, so it is necessary to continue the measurements analytically. This is the subject of part three. As a further option, a comprehensive gravity field determination was performed by a suitable inversion procedure using all available measurements, including all surface gravity gradient measurements. The related research is discussed in the fourth part. The third area, although slightly different, is closely related to the previous ones: the effect of gravity field gradients and their temporal and spatial variations in the EPF equivalence experiment. The fifth part reports on this.

The scientific significance of the research is the formulation and solution of the Eötvös geodetic boundary value problem, and the description of more complete relations than before, describing the analytical continuation of the Eötvös tensor. An important achievement is a comprehensive gravity field determination by inversion, combining surface gravity gradients, gravity anomalies, deflections of the vertical and GNSS/levelling measurements. A significant scientific insight is the refinement of the gravity gradient measurement model and its investigation in the Eötvös, Pekár, Fekete equivalence experiment.

The significance of the results obtained is that they have contributed, from a theoretical and practical point of view, to the accurate determination of the geoid, the important reference surface for height determination. This is still needed because the geometrical heights determined by GNSS receivers can be used to calculate physical heights above sea level by means of the geoid. In practice, therefore, accurate knowledge of the geoid is important to replace costly height determination procedures (e.g. levelling). The research has contributed to the objectives of the International Association of Geodesy's (IAG) Global Geodetic Observing System, GGOS, to provide a means of studying the Earth's gravity field, its variations in time and space.

Felhasznált irodalom

- Ågren J (2004) The analytical continuation bias in geoid determination using potential coefficients and terrestrial gravity data. *Journal of Geodesy* 78:314–332. <https://doi.org/10.1007/s00190-004-0395-0>
- Arana D, Camargo PO, Guimarães GN (2017) Hybrid Geoid Model: Theory and Application in Brazil. *An Acad Bras Cienc* 89:1943–1959
- Awange JL, Paláncz B, Lewis RH, Völgyesi L (2018) *Mathematical Geosciences Hybrid Symbolic-Numeric Methods*
- Cruz Y, Laskowski P (1984) Upward Continuation of Surface Gravity Anomalies. Ohio State University, Columbus, Ohio. Report No. 360
- Erol B, Erol S (2013) Learning-based computing techniques in geoid modeling for precise height transformation. *Computers & geosciences* 52:95–107
- GGOS (2023a) Artificial Intelligence for Geodesy - AI4G. <https://ggos.org/about/org/fa/ai-for-geodesy/>
- GGOS (2023b) AI for Gravity Field and Mass Change. <https://ggos.org/about/org/fa/ai-for-geodesy/gravity-field-mass-change/>
- Martin J, Schaub H (2022a) Physics-informed neural networks for gravity field modeling of the Earth and Moon. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 134:13. <https://doi.org/10.1007/s10569-022-10069-5>
- Martin J, Schaub H (2022b) Physics-informed neural networks for gravity field modeling of small bodies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 134:46. <https://doi.org/10.1007/s10569-022-10101-8>
- Martin J, Schaub H (2023) The physics-informed neural network gravity model revisited: model generation III. In: 33rd AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Austin, United States
- Moritz H (1970) Molodensky's Series and Analytical Continuation. Ohio State University, Columbus, Ohio. Report No. 145
- Rahaman N, Baratin A, Arpit D, et al (2019) On the spectral bias of neural networks. In: International Conference on Machine Learning. PMLR, 5301–5310 o.
- Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis GE (2019) Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics* 378:686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Schneider N, Michel V (2022) A dictionary learning add-on for spherical downward continuation. *Journal of Geodesy* 96:21. <https://doi.org/10.1007/s00190-022-01598-w>
- Sitzmann V, Martel J, Bergman A, et al (2020) Implicit neural representations with periodic activation functions. *Advances in neural information processing systems* 33:7462–7473
- Sjöberg L, Bagherbandi M (2011) A Numerical Study of the Analytical Downward Continuation Error in Geoid Computation by EGM08. *Journal of Geodetic Science* 1:2–8. <https://doi.org/10.2478/v10156-010-0001-8>
- Sjöberg LE (2007) The topographic bias by analytical continuation in physical geodesy. *Journal of Geodesy* 81:345–350. <https://doi.org/10.1007/s00190-006-0112-2>
- Tancik M, Srinivasan P, Mildenhall B, et al (2020) Fourier features let networks learn high frequency functions in low dimensional domains. *Advances in Neural Information Processing Systems* 33:7537–7547

- Völgyesi L (2002) Geofizika. Tankönyvkiadó, Budapest
- Wang S, Teng Y, Perdikaris P (2021a) Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing* 43:A3055–A3081
- Wang S, Wang H, Perdikaris P (2021b) On the eigenvector bias of Fourier feature networks: From regression to solving multi-scale PDEs with physics-informed neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 384:113938
- Zaletnyik P, Paláncz B, Völgyesi L, Kenyeres A (2007) Gravimetriai geoid korrekciója GPS-szintezési adatok felhasználásával. *Geomatikai Közlemények* 10:231–240
- Zaletnyik P, Völgyesi L, Paláncz B (2004) Approach of the Hungarian geoid surface with sequence of neural networks. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing* 35:119–122
- Zaletnyik P, Völgyesi L, Paláncz B (2008) Modelling local GPS/levelling geoid undulations using Support Vector Machines. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* 52:39–43. <https://doi.org/10.3311/pp.ci.2008-1.06>