

toth.gyula.2_46_22

A nehézségi erőter gradienseinek jelentősége
és felhasználása a felsőgeodézia és a fizika
egyres területein

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Írta:
Tóth Gyula

Budapest
2022

toth.gyula.2_46_22

Tartalomjegyzék

Jelölések

1. Bevezetés	1
2. Az Eötvös peremérték-feladat	3
2.1. Peremértékek számítása Eötvös-inga mérésekből	5
2.2. Vektor és tenzor gömbfüggvények	6
2.3. A peremérték-feladat és megoldása a spektrumban	7
2.4. Térbeli megoldás és az Eötvös magfüggvények	8
2.5. Az Eötvös integrálok számítása nem a teljes földfelszínre	10
2.6. Összefoglalás	14
3. Gravitációs gradiens tenzor analitikai folytatása és alkalmazása az űrgradiometriában	15
3.1. Gradiométeres adatok	16
3.2. Az Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatása	16
3.2.1. Gradiens tenzoroperátorok komplex gömbi, valós és poláris formában .	17
3.2.2. A derivált operátorok elforgatása	17
3.2.3. A számítási és kiindulási operátorok alkalmazása a Poisson-integrálra .	18
Számítási operátorok	18
Kiindulási operátorok	18
A számítási és kiindulási operátorok együttes hatása	19
3.2.4. Magfüggvények a felfelé/lefelé folytatáshoz	19
3.3. Összefoglalás	23
4. Nehézségi gradiens bevonása Magyarország területén a nehézségi erőter meghatározásába	25
4.1. A HTGUB2007 kvázigeoid megoldás legkisebb négyzetes kollokációval	27
4.1.1. A felhasznált adatok és redukálásuk	27
4.1.2. A kvázigeoid meghatározása	29
4.1.3. A számított megoldások és összehasonlításuk	31
4.1.4. Összefoglalás	35
4.2. A HGTUB2015 kvázigeoid megoldás gömbi radiális bázisfüggvényes inverzióval	36
4.2.1. A paraméterek becslése	36
4.2.2. A felhasznált adatok és redukálásuk	38
4.2.3. Kísérleti számítások és eredmények	43
4.2.4. Összefoglalás	52

5. Nehézségi gradiensek jelentősége a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának mérésében	55
5.1. Az Eötvös-Pekár-Fekete kísérlet elve és a szabályos hiba oka	57
5.2. Multipólus kifejtés és a lehetséges gravitációs gradiens hatás elemzése	61
5.3. Az EPF-kísérlet lehetséges hibájának számszerűsítése és elemzése	64
5.4. A nehézségi gradiensek hatása más ekvivalenciakísérletekre	70
5.5. Összefoglalás	72
6. Az eredmények összefoglalása	75
Köszönetnyilvánítás	77
Irodalom	79

Jelölések

$B(x, x_k)$	bázisfüggvény az x_k bázispontban
C	centrifugális gyorsulás
$\delta\mathbf{E}$	Eötvös-tenzor rendellenesség (zavar)
$\delta\mathbf{E}^{(1)}$	Eötvös gradiens vektor rendellenesség (zavar)
$\delta\mathbf{E}^{(2)}$	Eötvös nyírási tenzor rendellenesség (zavar)
$\nabla^{(2)}$	másodrendű gömbi tenzor differenciáloperátor
$\Delta\eta$	Eötvös ekvivalenciaparaméter-különbség két különböző anyagra
\mathbf{E}	Eötvös-tenzor
$E_T^{(1)}(\psi), E_T^{(1)}(\psi)$	potenciálzavar Eötvös magfüggvényei
$E_{\Delta g}^{(1)}(\psi), E_{\Delta g}^{(1)}(\psi)$	nehézségi rendellenesség Eötvös magfüggvényei
ÉKL	$x = \text{Észak}, y = \text{Kelet}, z = \text{le irányokba mutató tengelyű koordináta-rendszer}$
g	nehézségi térerősség, nehézségi gyorsulás
G	Newton-féle egyetemes tömegvonzási állandó; tömegvonzás gyorsulása
$G_N(P, Q)$	geoidundulációhoz tartozó Green-függvény
$G_{\Delta g}(P, Q)$	nehézségi rendellenességhez tartozó Green-függvény
GOCE	Gravity and Ocean Circulation Explorer
γ	normál nehézségi térerősség, normál nehézségi gyorsulás
γ^2	Tyihonov-regularizáció paramétere
δg	nehézségi zavar vektora
Δg	nehézségi rendellenesség
N	geoidunduláció, geoid-ellipszoid távolság
Ω	egységgömbfelület
$P_{lm}(\sin \varphi)$	Legendre függvények
φ	ellipszoidi földrajzi szélesség
ψ_{PQ}	P és Q pontok gömbi szögtávolsága
q_{lm}	multipólus nyomaték
$Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}$	távoli terület hatásához tartozó együtthatók az Eötvös integrálokban
Q_{lm}	multipólus tér
R	a földi ellipszoiddal térfogatazonos gömb sugara
$S(\psi)$	Stokes-függvény

\mathbf{S}_{lm}	szferoidális vektor gömbfüggvény
SNR	jel/zaj viszony
T	potenciálzavar
T_g	az Eötvös-ingára ható gravitációs nyomaték
U	normál nehézségi erőter potenciálfüggvénye
v	az Eötvös-inga K-Ny-i irányban álló ingarúdjának elfordulási szöge
V	tömegvonzási erőter vagy geopotenciális modellel redukált erőter potenciálfüggvénye
V_{ij}	gravitációs gradiens tenzor ($i, j = x, y, z$)
w	az Eötvös-inga É-D-i irányban álló ingarúdjának elfordulási szöge
W	nehézségi erőter potenciálfüggvénye; gravitációs kölcsönhatás potenciális energiája
ξ	É-D-i irányú függővonal-elhajlás összetevő
Y_{lm}	gömbfüggvény
η	K-Ny-i irányú függővonal-elhajlás összetevő; Eötvös ekvivalenciaparaméter
\mathbf{Z}_{lm}	nyírási tenzor gömbfüggvény
ζ	kvázigeoid unduláció, magassági rendellenesség

1 Bevezetés

A földi nehézségi erőter ismerete fontos a tudomány és a mérnöki alkalmazások számára. A fizika, geofizika, óceánkutatás, meteorológia igényli a nehézségi erő eloszlása, változása ismeretét. Az építési, vízepítési tevékenység is szorosan kapcsolódik hozzá, mivel a nehézségi erő vektorai jelölik ki a függőleges irányokat, a rájuk merőleges szintfelületek érintő egyenesei pedig a helyi vízszintes irányokat. A nehézségi erő és ennek két összetevője, a tömegvonzási (gravitációs) és forgási centrifugális erők potenciális erők, ezért a nehézségi erő vektorai a nehézségi erőter potenciálfüggvényéből származtathatók gradiens (derivált) képzéssel. A tömegvonzási rész a Föld tömegeloszlásától függ, tehát a nehézségi erőter ismerete a nyersanyagkutatás szempontjából is fontos.

A mérnöki, hidrológiai, óceánkutatási feladatok elsősorban a szintfelületek, és a közepes tengerszintek magasságában levő kitüntetett szintfelület, a geoid egyre pontosabb ismeretét igénylik. A felsőgeodézia egyik időszerű feladata az egyes országok, földrészek önálló magassági rendszereinek összekapcsolása, amihez a geoid egész földre kiterjedő meghatározása szükséges (Rummel 2001). A geodinamikai szemléletmód az időben változó erőterre jellemző mennyiségek meghatározását célozza (Biró 1983). Ehhez elengedhetetlen a méréseink megismétlése, folyamatos végzése és feldolgozása. A mérnöki alkalmazásokban cm-es, szélső esetben egy-egy mérnöki létesítmény területén akár még nagyobb pontosságra is szükség lehet (Hirt és Seiber 2007; Hirt és Flury 2008). Ez megkívánja az erőter finomszerkezetének meghatározását, amihez fontos a nehézségi erő helyfüggő változását leíró gradiensek mérése, feldolgozása.

A nehézségi erő gradiensei és ezek mérése elválaszthatatlanul összekapcsolódnak Eötvös Loránd nevével. A nehézségi erő gradienseinek mértékegysége, és az általa megalkotott eszköz, a horizontális variométer az ő nevét viselik. Az Eötvös-inga mint gradiensmérő műszer, alkalmas a nehézségi erőter meghatározására, finomszerkezetének vizsgálatára. A nehézségi erőter valamely kiválasztott szintfelülete részletes meghatározásával a világon először tudományos célokból Eötvös Loránd foglalkozott. Arad vidékén az ingájával végzett mérések felhasználásával (Eötvös 1906) ő és munkatársai megszerkesztették nehézségi erő egyenlő nagyságú vízszintes gradienseinek izovonalait, valamint a szintfelületet érintő Bessel-ellipszoidhoz viszonyított potenciálettéréseket ~ 2 cm-nek megfelelő értékű izovonalakkal (Biró et al. 2013).

Eötvös kutatásai nem választhatók szét a mai értelemben vett alap- és alkalmazott kutatásra. Ingája a gyakorlati geofizika, a kőolajkutatás első és sokáig egyetlen műszere lett. Eszközével viszont egy olyan alapkutatási problémát is vizsgált, mint a súlyos és tehetetlen tömeg egyezőségének vizsgálata. Az 1906 és 1909 között végzett mérésorozat leírását Eötvös munkatársai, Pekár Dezső és Fekete Jenő publikálták (Eötvös et al. 1922). Egy 1986-ban megjelent cikk (Fischbach et al. 1986) világméretű érdeklődést keltett Eötvös, Pekár és Fekete (EPF) klasszikus kísérletsorozata iránt a feltételezett "ötödik erő" miatt. Az Fischbach és munkatársai által észrevett fajlagos barionszám függés oka továbbra is tisztázatlan (Kilényi 2019).

A 2019-es Báró Eötvös Loránd-emlékévkapcsán nemrég előtérbe került Eötvös Loránd szellemi hagyatéka. Kutatásaink egyik célja ennek a gazdag szellemi örökségnek a felhasználása. A jelen értekezésben három fő területen végzett vizsgálataimat mutatom be, melyek mindegyike szorosan kapcsolódik Eötvös munkásságához. Az első kettő a nehézségi erőter meghatározása gradiensmérések felhasználásával, amit a következő három részben tárgyalom. Az

Eötvös-ingával végzett gradiensemérések szempontjából Magyarország a világ legjobban felmért területe, de mivel a méréseket korábban csak nyersanyagkutatói szempontból hasznosították, ezért fontos azok geodéziai hasznosítása. A korszerű űreszközökkel (GOCE) végzett gradiensemérések is rendelkezésre állnak. Az említett pontossági igényeket szem előtt tartva így célul tűztük ki ezek bevonását a nehézségi erőter meghatározásába. Erre a gradiometriai peremérték-feladatok lehetőséget adnak, amiről a második részben szólok. A mesterséges holdas mérések viszont nem a földfelszín közelében vannak, ezért foglalkoztam a mérések analitikai folytatásával. Ez a harmadik rész tárgya. További lehetőségként átfogó nehézségi erőter meghatározást végeztem alkalmas inverziós eljárással a rendelkezésre álló összes mérés, köztük az összes felszíni gradiensemérés bevonásával. Az ezzel kapcsolatos kutatásaimról szólok a negyedik részben. A harmadik terület, bár kissé eltér ettől, mégis szorosan kapcsolódik az előzőekhez: a nehézségi erőter gradienseinek, ezek időbeli és térbeli változásainak a hatását vizsgáltam az EPF ekvivalenciakísérletben. Az ötödik részben erről adok számot.

A kutatásaim tudományos jelentőségét abban látom, hogy hogy ismereteim szerint elsőként fogalmaztam meg az Eötvös geodéziai peremérték-feladatot és adtam meg annak megoldását. Meghatároztam az Eötvös tenzor analitikai folytatását leíró, a korábbiaknál teljesebb összefüggéseket. Fontos eredménynek gondolom azt az átfogó inverziós nehézségi erőter meghatározást, amiben felszíni nehézségi gradiensek, nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlások és GNSS/szintezési mérések együttesen szerepelnek. Jelentős tudományos felismerésnek tartom a nehézségi gradiensek okozta szabályos hibát és vizsgálatát az Eötvös, Pekár, Fekete-féle ekvivalenciakísérletben.

Az elért eredmények jelentősége véleményem szerint az, hogy elméleti és gyakorlati oldalról hozzájárultak a magasságmeghatározás szempontjából fontos referencia felület, a geoid pontos meghatározásához. Erre továbbra is szükség van, mert így a GNSS vevőkkel meghatározott geometriai magasságok felhasználhatók fizikai, tengerszint feletti magasságok kiszámítására. A gyakorlatban ezért fontos a geoid pontos ismerete a költséges magasságmeghatározási eljárások (pl. szintezés) kiváltására. Kutatásaim továbbá hozzájárultak a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) globális geodéziai megfigyelőrendszere, a GGOS (Ádám 2007) céljai megvalósításához, hogy biztosítsa a Föld nehézségi erőtere, időbeli és térbeli változásainak vizsgálatát.

2 Az Eötvös peremérték-feladat

A potenciálemélet peremérték-feladatai fontosak ott, ahol potenciálfüggvényeket alkalmaznak. Ilyeneket használunk az elektromosság, mágnesség vagy a geofizika területén. A felsőgeodéziában azért fontosak, mert segítségükkel a földfelszínen végzett mérésekből a teljes külső térben meghatározható a nehézségi erőter, továbbá a Föld matematikai vagy fizikai alakja. A gyakorlatban számban és típusban is egyre több mérési adat áll rendelkezésre, melyek pontossága és eloszlása is folyamatosan javulnak. Ezzel párhuzamosan a geoidfelület meghatározásának megbízhatósága az 1950-es évektől napjainkig a többször 10 m-ről néhány cm–dm-re javult. Az előrehaladás ellenére a geodéziái peremérték-feladatok szempontjából továbbra is kihívás a cm pontos geoid meghatározása (Wang 2016).

A Stokes-féle peremérték-feladat és megoldása jellegzetes példája a geodéziái peremérték-feladatoknak, ezért tanulságos ezt röviden áttekinteni (Biró et al. 2013). A Stokes-féle feladatban a Föld külső nehézségi erőterének a W potenciálfüggvényét, pontosabban ennek valamely alkalmas U referencia (normál) erőterhez viszonyított eltérését (a $T = W - U$ potenciálzavart) határozzuk meg a földfelszínen mért nehézségi értékek függvényében. Stokes megoldása (Stokes 1849) egy olyan integrál (2.1), amelyben a Δg nehézségi rendellenességek és egy speciális függvény ($S(\psi)$ súlyfüggvény vagy magfüggvény, az ún. Stokes-függvény) szorzata szerepel. A Stokes-függvény két pont, a P és Q pontok ψ_{PQ} szögtávolságától függ, és az integrálást a teljes földfelszínre (pontosabban a normálalak felszínére) ki kell terjeszteni.

Célszerű a továbbiakban elnevezésükben is megkülönböztetni egymástól a P és Q pontokat. Az N geoidundulációt a földfelszíni P -nek megfelelő geoidi P' pontban számítjuk ki, ezért ezt *számítási* pontnak fogom nevezni. A számítás kiindulásaként használt nehézségi rendellenességek a Q pontokban ismertek, ezért ezekre *kiindulási* pontokként fogok utalni. A normál nehézségi térerősség (átlagos) γ nagyságát figyelembe véve a megoldás

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\text{Föld}} S(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) dF_Q. \quad (2.1)$$

Az összefüggésben dF_Q -val jelöltem a Q kiindulási ponthoz tartozó felszínelemet az R sugarú gömbön.

A megoldáshoz a Föld fizikai felszínén végzett nehézségi méréseinkből nehézségi rendellenességeket számítunk. Ezt a geodéziái földmodell teszi lehetővé, ami magában foglalja a Föld normálalakját és normál nehézségi erőterét. Segítségével a $\Delta g_{P'} = g_{P'} - \gamma_{P'}$ (geoidi) nehézségi rendellenesség bármely pontban kiszámítható (P'' jelöli az ellipszoidi normálalak felszínén a P' -nek megfelelő pontot). A Stokes-féle integrálból végeredményben megkapjuk a geoid-ellipszoid távolságot (geoidundulációt).

A Stokes-féle integrál (2.1) esetében az integrálást egy R sugarú gömb felszínére írjuk elő, így a lapultság nagyságrendjének megfelelő elhanyagolással élünk. Nagyobb pontossági igény esetén korrekciós tagokat alkalmazhatunk, illetve megoldható a feladat gömb helyett forgási ellipszoidon (Bölling és Grafarend 2005). Bármelyik megoldást is választjuk, az ellipszoidi peremfelület feletti tömegeket valamilyen redukciós eljárással el kell távolítani. Így a peremérték-feladat megoldására alkalmazható a potenciálra vonatkozó Laplace-egyenlet, amely csak a tömegeken kívüli térben érvényes. A Stokes-féle integrál pedig előállítja a potenciálzavart és a

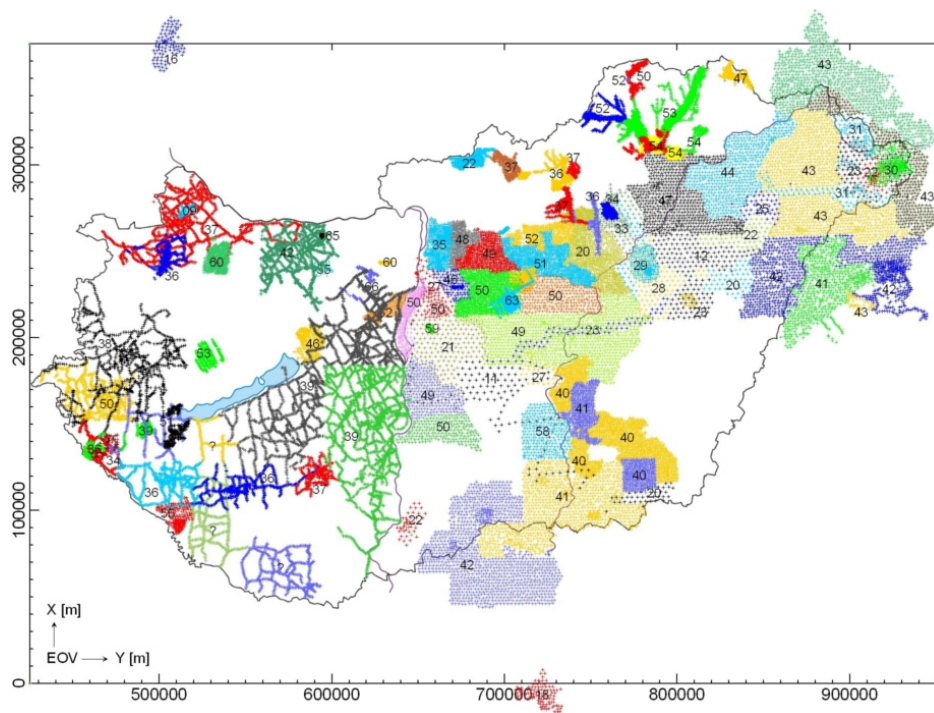
belőle (a Bruns-féle összefüggéssel) számítható ellipszoidhoz viszonyított geoidundulációkat a Föld külső terében.

A továbbiakban részletesebben tárgyaljuk, hogy milyen, a Stokes-féle megoldáshoz hasonló összefüggések írhatók fel a potenciálzavar és a nehézségi rendellenességek kiszámítására (2.2). A számításhoz kiinduló adatként csupán az Eötvös-inga mérésekből előállítható mennyiségekre (δE) van szükség:

$$\begin{Bmatrix} N(P) \\ \Delta g(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{R^2}{4\pi\gamma} \\ \frac{R}{4\pi} \end{Bmatrix} \iint_{\text{Föld}} \begin{Bmatrix} G_N(P, Q) \\ G_{\Delta g}(P, Q) \end{Bmatrix} \delta E(Q) dF_Q. \quad (2.2)$$

Ezt a peremérték-feladatot *Eötvös peremérték-feladat*nak nevezhetjük el (Tóth 2002), mert az Eötvös-féle torziós inga által mérhető összes gradiens, és *csakis ezek* a benne foglalt mérési eredmények. Az Eötvös peremérték-feladat, mivel abban a nehézségi erő potenciálfüggvényének második deriváltjai szerepelnek, másodrendű, ún. *gradiometriai peremérték-feladat*.

Az Eötvös peremérték-feladat megoldásának az elméleti jelentőségén túl a gyakorlati haszna abban áll, hogy segítségével a meglévő magyarországi Eötvös-inga mérések felhasználhatók az erőter modellezésére. Ezeket akár közvetlenül, akár nehézségi rendellenességekké átszámítva más adatokkal együtt fel tudjuk használni a geoid meghatározására. A 2.1 ábrán (Völgyesi 2019) láthatjuk azt, hogy a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék adatbázisában mintegy 45000 pontban vannak Eötvös-inga mérések.



2.1. ábra. Digitális adatbázisba rendezett mintegy 45 000 hazai Eötvös-inga-mérés pontjainak területi eloszlása (Völgyesi 2019)

A peremérték-feladat megoldásához először azt tisztázzuk, hogy az Eötvös-inga mért mennyiségeit hogyan kell egymáshoz kapcsolni a peremérték-feladatban, mik a peremértékek: ehhez egy vektor és egy tenzor mennyiséget adunk meg. A vektor és tenzor gömbfüggvények segítségével a térben adott függvényeinket a spektrális tartományba visszük át, ami a sorfejté-

si együtthatók kiszámítását jelenti. A peremérték-feladatot az együtthatók segítségével megoldjuk. Megkeressük a térbeli megoldást és a szükséges magfüggvényeket (az Eötvös függvényeket). Vizsgáljuk annak hatását a számításra, amikor csak egy korlátozott területen vannak méréseink.

2.1 Peremértékek számítása Eötvös-inga mérésekből

A nehézségi erőter W potenciálfüggvényének kilenc másodrendű deriváltja alkotja az \mathbf{E} Eötvös-féle tenzort (röviden: Eötvös-tenzor). A Földünk külső terében csak öt független eleme van, mivel szimmetrikus és a Laplace-egyenlet miatt a főátlóban levő elemek összege zérus. Az Eötvös-ingával mérhető négy mennyiségben a tenzornak mind az öt független eleme szerepel, azonban ezek közül kettőnek csak a különbsége mérhető: W_{xz} , W_{yz} , $W_{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy} . (Itt és a továbbiakban a rövidség kedvéért a potenciálfüggvény koordináták szerinti parciális deriváltjait alsó indexszel jelöljük, pl. $W_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 W / \partial x \partial y$).

Méréseink az (x, y, z) helyi derékszögű koordináta-rendszerben vannak, amelynek tengelyei megegyeznek a helyi szintfelületi koordináta-rendszer tengelyeivel: x Északra, y Keletre, illetve z a helyi szintfelületi normális irányában lefelé mutatnak. A méréseket át kell számítanunk az ellipszoidi peremfelületre úgy, hogy a felszíni tömegeket eltávolítjuk. A tömegek eltávolítását valamilyen topografikus redukcióval oldhatjuk meg. Az Eötvös-inga mérésekre a közeli terep hatását előállították, és azt minden esetben figyelembe vettük.

A geodéziai peremérték-feladatok esetében szokásos módon a peremértékeket egy alkalmasan választott U potenciálfüggvénnyel jellemezhető normál nehézségi erőterhez viszonyítjuk. A mérési pontokban a normál Eötvös-tenzor

$$\mathbf{grad}U = \begin{bmatrix} U_{xx} & 0 & U_{xz} \\ 0 & U_{yy} & 0 \\ U_{xz} & 0 & U_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

nemzérus elemei Claessens (2021) összefüggéseivel kiszámíthatók a választott geodéziai vonatkoztatási rendszerben (pl. GRS80). A normál Eötvös-tenzorból szükséges $U_{\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} U_{yy} - U_{xx}$, U_{xz} értékek a mérési hely függvényében csak kissé változnak: 100 m-es vízszintes helyzetváltozás esetén kb. 0,07 E-t és a magasságtól első közelítésben függetlenek (Rummel és Colombo 1985). A helyi és ellipszoidi koordináta-rendszerek közötti elforgatás miatti változás pedig (Hein 1981) tanulmánya szerint kisebb 0,1 Eötvösnél, így a méréseink 1-3 E pontosságához képest elhanyagolható.

Mérési pontjaink térbeli helyzete a szükséges pontossággal ismert, ezért a feladatunk ún. kötött peremérték-feladat. A peremértékek kiszámításának első lépése az Eötvös-tenzor elemeinek valódi és normál erőterben vett különbségei (a T potenciálzavar függvény második deriváltjai) meghatározása a

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{grad}U = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

összefüggés szerint. Ezeket az értékeket még át kell számítani a peremfelületre (ellipszoid) úgy, hogy a peremfelület felett ne legyenek tömegek. Az átszámítás első lépéseként az ellipszoid feletti tömegeket igen vékony, de nagy sűrűségű rétegbe az ellipszoid alá tömörítjük, a Helmert-féle

kondenzációs modellhez hasonlóan. Ennek az eljárásnak a hatását figyelembe vesszük (2.4) elemeire. Ezt követően analitikus lefelé folytatással megkapjuk a T_{xz} , T_{yz} , T_{Δ} , T_{xy} peremértékeket az ellipszoid felszínén. Az Eötvös-tenzor analitikus lefelé folytatásának egyik lehetőségét az értekezés következő fejezetében ismertetem.

A szintfelületi helyi koordináta-rendszerben az Eötvös-tenzor elemei vagy csak vízszintes, vagy csak függőleges irányú, vagy pedig mindkét irányú deriválást tartalmaznak. Ezért különböző típusú gradiometriai peremérték-feladatokról beszélhetünk. A csak függőleges irányú deriváltat tartalmazó peremérték-feladat megoldását Heck (1979) adta meg. Az Eötvös-tenzor főátlóbeli elemeivel Petrovskaya és Zieliński (1998) adtak megoldást. Az Eötvös-ingával mérhető deriváltakat tartalmazó peremérték-feladatok megoldásához a szokásos skalár értékű gömbfüggvények mellett vektor és tenzor gömbfüggvényeket is kell alkalmazni.

A peremérték-feladat megoldása megkívánja az Eötvös-ingával mért mennyiségek egymáshoz kapcsolását egy vektor és egy tenzor mennyiségben. A $\delta\mathbf{E}^{(1)}$ *gradiens vektor* a $\delta\mathbf{g}$ nehézségi zavar vízszintes változását mutatja

$$\delta\mathbf{E}^{(1)} = \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A $\delta\mathbf{E}^{(2)}$ tenzort *nyírási tenzornak* nevezhetjük, mivel ez a deformációelméletből ismert síkbeli nyírási deformáció tenzorához hasonló, szimmetrikus és zérusátlójú tenzor

$$\delta\mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} T_{\Delta} & -2T_{xy} \\ -2T_{xy} & -T_{\Delta} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ahol $T_{\Delta} = T_{xx} - T_{yy}$. A tenzor elemeire (T_{Δ} , T_{xy}) a görbületi mennyiségek elnevezést is használjuk, mert kapcsolatban vannak a szintfelületek görbületével. A (2.5) vektor és (2.6) tenzor alkalmas vektor és tenzor gömbfüggvények segítségével a spektrális tartományba vihető át. Ezt látjuk a következő fejezetben.

2.2 Vektor és tenzor gömbfüggvények

Az Eötvös geodéziai peremérték-feladat megoldásához háromfajta bázisfüggvényre van szükségünk: skalár, szferoidális vektor, illetve nyírási tenzor gömbfüggvényekre. Az első az Y_{lm} (komplex) skalár gömbfüggvény. Ezt a (φ, λ) gömbi földrajzi koordináták függvényében így definiáljuk:

$$Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_{lm}(\sin \varphi) e^{im\lambda}. \quad (2.7)$$

Itt $P_{lm}(\sin \varphi)$ -vel jelöltük a Legendre függvényeket. Gömbfelületen értelmezett skalármennyiségek – bizonyos feltételek mellett – sorba fejthetők skalár gömbfüggvények szerint. A számunkra érdekes potenciálzavar illetve nehézségi rendellenesség függvényei is ilyenek. A külső térben ezek a sorok

$$T(\varphi, \lambda, r) = U_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l T_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda), \quad (2.8)$$

$$\Delta g(\varphi, \lambda, r) = \gamma_0 \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=-l}^l \Delta g_{lm} Y_{lm}(\varphi, \lambda), \quad (2.9)$$

alkalmas T_{lm} és Δg_{lm} együtthatókkal. Az együtthatók l és m szerint végtelen rendszere a spektrális tartományban jellemzi az Eötvös peremérték-feladat ismeretlen függvényeit. A (2.8, 2.9) összefüggésekben az $U_0 = kM/R$ és $\gamma_0 = U_0/R$, ahol kM a Föld geocentrikus gravitációs állandója és R a Föld sugara.

Az Eötvös-inga mérésekből számítható peremértékeket kétfajta ortogonális bázisfüggvényrendszer segítségével vihetjük át a spektrumba. Ezek a (komplex) \mathbf{S}_{lm} szferoidális vektor, illetve a \mathbf{Z}_{lm} nyírási tenzor gömbfüggvények. A skalár gömbfüggvények differenciálásával kapjuk őket

$$\nabla^{(1)} Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \sqrt{\frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \mathbf{S}_{lm}(\varphi, \lambda) \quad (2.10)$$

$$\nabla^{(2)} Y_{lm}(\varphi, \lambda) = \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \mathbf{Z}_{lm}(\varphi, \lambda). \quad (2.11)$$

A $\nabla^{(1)}$, $\nabla^{(2)}$ differenciáloperátorokat a nehézségi erőter T potenciálzavar függvényére alkalmazva a peremértékek említett (2.5) vektorát és (2.6) tenzorát kapjuk. Ezek a vektor és tenzor mennyiségek átvihetők a gömbfüggvénytartományba vektor és tenzor gömbfüggvénytartományok segítségével

$$\delta \mathbf{E}^{(1)}(\varphi, \lambda, r) = E_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=-l}^l \delta E_{lm}^{(1)} \mathbf{S}_{lm}(\varphi, \lambda), \quad (2.12)$$

$$\delta \mathbf{E}^{(2)}(\varphi, \lambda, r) = E_0 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=-l}^l \delta E_{lm}^{(2)} \mathbf{Z}_{lm}(\varphi, \lambda). \quad (2.13)$$

Ezekben az összefüggésekben $E_0 = \gamma_0/R$. A gömbfüggvény-együtthatókat a vektor és tenzor gömbfüggvények

$$\delta E_{lm}^{(1)} = \frac{1}{E_0} \left(\frac{r}{R}\right)^{l+3} \iint_S \delta \mathbf{E}^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{S}}_{lm} dS, \quad (2.14)$$

$$\delta E_{lm}^{(2)} = \frac{1}{E_0} \left(\frac{r}{R}\right)^{l+3} \iint_S \delta \mathbf{E}^{(2)} \cdot \bar{\mathbf{Z}}_{lm} dS \quad (2.15)$$

ortonormalitása segítségével kaphatjuk meg. Az integrálás tartománya az S egységgömbfelszín (vagy a teljes térszög). Az integrandusban a vektorok, illetve a tenzorok skaláris szorzata (kontrakciója) szerepel, és felülvonás jelöli valamely komplex mennyiség konjugáltját.

A következőkben felírjuk az Eötvös peremérték-feladatot és megoldjuk az együtthatók segítségével a spektrumban.

2.3 A peremérték-feladat és megoldása a spektrumban

Az Eötvös-inga mérések a (2.12, 2.13) összefüggések szerint két együttható sorozatot adnak, viszont a (2.8, 2.9) egyenletekben csak egy-egy ismeretlen T_{lm} illetve Δg_{lm} együttható sorozat van. Az Eötvös peremérték-feladat ezért ún. *túlhatározott* geodéziai peremérték-feladat. Emiatt legkisebb négyzetek szerinti becslést adunk az ismeretlen együtthatókra. A becslést általános esetben Gelderen és Rummel (2001), illetve Gelderen és Rummel (2002) ismertetik. Az együtt-

hatók optimális becslése a mi esetünkben

$$\Delta \hat{T}_{lm} = \frac{\lambda_l^{(1)} p_l^{(1)} \delta E_{lm}^{(1)} + \lambda_l^{(2)} p_l^{(2)} \delta E_{lm}^{(2)}}{(\lambda_l^{(1)})^2 p_l^{(1)} + (\lambda_l^{(2)})^2 p_l^{(2)}}, \quad (2.16)$$

$$\Delta \hat{g}_{lm} = \frac{(l-1) (\lambda_l^{(1)} p_l^{(1)} \delta E_{lm}^{(1)} + \lambda_l^{(2)} p_l^{(2)} \delta E_{lm}^{(2)})}{(\lambda_l^{(1)})^2 p_l^{(1)} + (\lambda_l^{(2)})^2 p_l^{(2)}}. \quad (2.17)$$

Ezekben a kifejezésekben $\lambda_l^{(1)}$ és $\lambda_l^{(2)}$ a (2.10) és (2.11) differenciáloperátorok sajátértékei, továbbá $p_l^{(1)}$ valamint $p_l^{(2)}$ a két rész spektrális súlyai. Az együthetők

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_{lm} \\ \Delta \hat{g}_{lm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (g_l^{(1)})_T \\ (g_l^{(1)})_{\Delta g} \end{Bmatrix} \delta E_{lm}^{(1)} + \begin{Bmatrix} (g_l^{(2)})_T \\ (g_l^{(2)})_{\Delta g} \end{Bmatrix} \delta E_{lm}^{(2)} \quad (2.18)$$

optimális becslését úgy kaptuk meg úgy, hogy a két részhez azonos, egységnyi súlyokat rendeltünk. Az (2.18) összefüggésben szereplő g_l szorzótényezőket a 2.1. táblázatban foglaltuk össze.

2.1. táblázat. Az (2.18) összefüggésben szereplő g_l szorzótényezők.

mérések	T potenciálzavar	Δg nehézségi rendellenesség
(1) (T_{xz}, T_{yz})	$\frac{1}{(2l+1)\sqrt{l(l+1)}}$	$\frac{l-1}{(2l+1)\sqrt{l(l+1)}}$
(2) (T_{Δ}, T_{xy})	$\frac{\sqrt{l-1}}{(2l+1)\sqrt{l(l+1)(l+2)}}$	$\frac{\sqrt{(l-1)^3}}{(2l+1)\sqrt{l(l+1)(l+2)}}$

2.4 Térbeli megoldás és az Eötvös magfüggvények

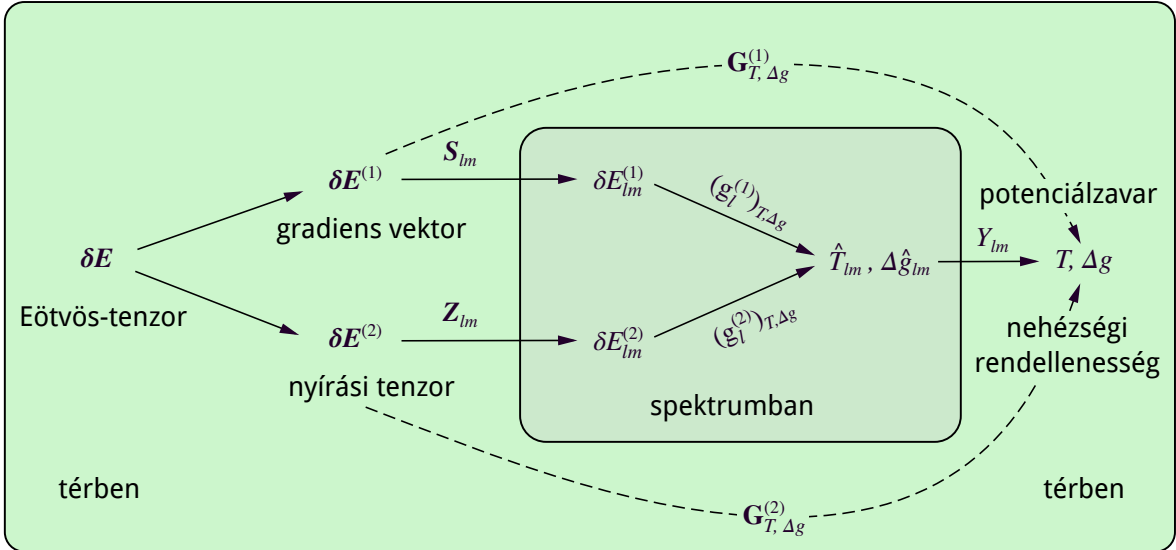
A térbeli, (2.2) alakú megoldást az együthetők (2.18) becsléséből kapjuk. A becsléseket beírjuk a (2.8,2.9) gömbfüggvénysorokba és figyelembe vesszük az együthetők (2.14), (2.15) értékeit. Az integrálás és az összegzés felcserélése után

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}(P) \\ \Delta \hat{g}(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{R^2}{4\pi} \\ \frac{R}{4\pi\gamma_0} \end{Bmatrix} \iint_S \left(\delta \mathbf{E}^{(1)}(Q) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_T^{(1)}(P, Q) \\ \mathbf{G}_{\Delta g}^{(1)}(P, Q) \end{Bmatrix} + \delta \mathbf{E}^{(2)}(Q) \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_T^{(2)}(P, Q) \\ \mathbf{G}_{\Delta g}^{(2)}(P, Q) \end{Bmatrix} \right) dS(Q). \quad (2.19)$$

A (2.19) kifejezésben szereplő négy, vektor illetve tenzor $\mathbf{G}(\cdot)$ függvény a peremérték-feladat térbeli megoldását adó *Green-függvények*. Ezek végtelen sor alakjában vannak a megoldásban

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{G}^{(1)}(P, Q) \\ \mathbf{G}^{(2)}(P, Q) \end{Bmatrix} = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+2} \begin{Bmatrix} \hat{g}_l^{(1)} \\ \hat{g}_l^{(2)} \end{Bmatrix} \sum_{m=-l}^l \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{lm}(Q) \\ \bar{\mathbf{Z}}_{lm}(Q) \end{Bmatrix} Y_{lm}(P). \quad (2.20)$$

Az Eötvös peremérték-feladat megoldásának a lépéseit összefoglalóan a 2.2 ábrán láthatjuk.



2.2. ábra. Az Eötvös peremérték-feladat megoldása vektor és tenzor gömbfüggvények segítségével (Tóth 2003).

A gyakorlatban előnyösebb a Green-függvények zárt alakját használni. A (2.20) végtelen sorokat az m index szerint a vektor és tenzor gömbfüggvények összegzési tételei segítségével szummázhatjuk. A P és Q pontok gömbi szögtávolságát ψ -vel, a P pont a Q -ban vett északi azimutját α^* -val jelölve

$$\sum_{m=-l}^l \bar{\mathbf{s}}_{lm}(Q) Y_{lm}(P) = \frac{2l+1}{4\pi} \sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+1)!}} P_{l,1}(\cos \psi) \begin{bmatrix} \cos \alpha^* \\ \sin \alpha^* \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\sum_{m=-l}^l \bar{\mathbf{z}}_{lm}(Q) Y_{lm}(P) = \frac{2l+1}{4\pi} \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} P_{l,2}(\cos \psi) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha^* & -\sin 2\alpha^* \\ -\sin 2\alpha^* & -\cos 2\alpha^* \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

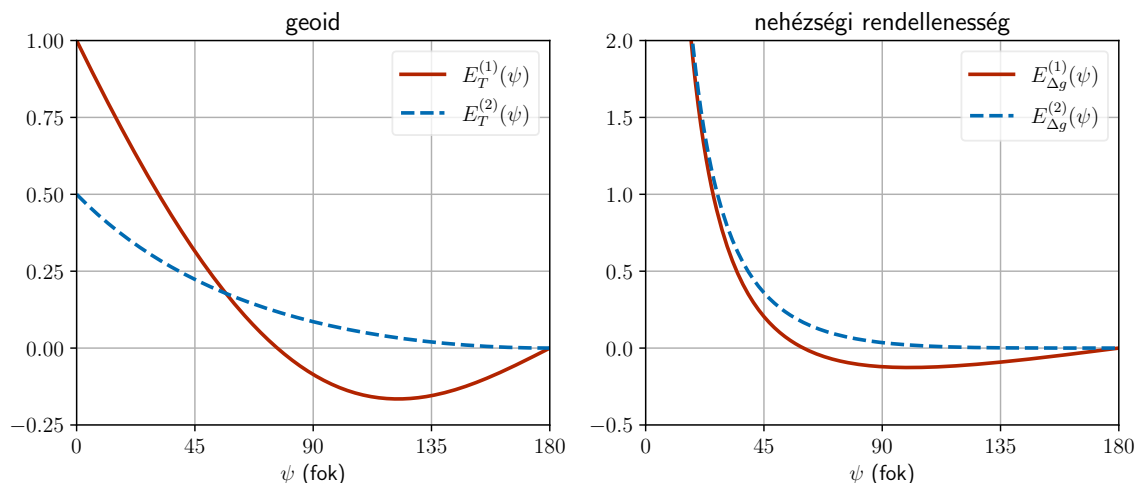
ahol $P_{l,1}(\cos \psi)$ és $P_{l,2}(\cos \psi)$ az l -edfokú első- és másodrendű Legendre-függvények. Az összegzési tételeket alkalmazva a Green-függvények első- és másodrendű Legendre függvények végtelen sorai lesznek és szétbonthatók két rész szorzatára. Az egyik rész irányfüggetlen, a P és Q pontok szögtávolságától függ és Legendre-függvények végtelen sora, míg a másik rész egy-egy azimutfüggő vektor illetve tenzor (mátrix). Fontos megemlíteni, hogy a szintén azimutfüggő Vening-Meinesz integrálban, amivel függővonal-elhajlások számíthatók nehézségi rendelleneségekből, az azimut különbözik ettől. Abban a Q pont α azimutja szerepel a P pontból nézve, nem a P pont α^* azimutja a Q -ból nézve.

A zárt alakú megoldást a g_l együtthatókkal felírt végtelen Legendre-függvénysorok összegzésével kapjuk. Az összegzés a Legendre-függvények és a Legendre-polinomok közötti kapcsolat segítségével végezhető el. Az összefüggvényeket, más néven magfüggvényeket *Eötvös magfüggvényeknek* nevezzük. Az $r = R$ speciális esetben

$$E_T^{(1)}(\psi) = \frac{1}{\cos \frac{\psi}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad E_T^{(2)}(\psi) = \frac{1}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{1}{2}, \quad (2.23)$$

$$E_{\Delta g}^{(1)}(\psi) = \frac{\cos \frac{\psi}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}, \quad E_{\Delta g}^{(2)}(\psi) = \frac{\left(1 - \sin \frac{\psi}{2} \right)^2}{2 \sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}. \quad (2.24)$$

Az Eötvös magfüggvények a 2.3 ábrán láthatók. Zérus szögtávolságra a potenciálzavar (geoid) számításához szükséges függvények korlátosak, míg a a nehézségi rendellenességhez tartozók a Stokes-függvényhez hasonlóan szingulárisak. A függvények viselkedése az origóban lényeges szempont, amennyiben nem a teljes felszínre végezzük az integrálást. Ezzel a 2.5 fejezetben foglalkozom.



2.3. ábra. Az (2.23, 2.24) Eötvös magfüggvények a szögtávolság függvényében.

A mondottakat figyelembe véve felírjuk a geoidmagasságokra és nehézségi rendellenességekre vonatkozó végső integrálösszefüggéseket. Először a (2.5) vektort és (2.6) tenzort beírjuk a (2.21, 2.22)-be és kiszámítjuk a skalárszorzatot illetve a tenzorok kontrakcióját. Végül (a Bruns összefüggést is figyelembe véve) megkapjuk az *Eötvös integrálokat*

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N(P) \\ \Delta g(P) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{R^2}{4\pi\gamma_0} \\ \frac{R}{4\pi\gamma_0} \end{Bmatrix} \iint_S \begin{Bmatrix} E_T^{(1)} \\ E_{\Delta g}^{(1)} \end{Bmatrix} (\psi_{PQ}) (T_{xz} \cos \alpha^* + T_{yz} \sin \alpha^*) (Q) + \\ &+ \begin{Bmatrix} E_T^{(2)} \\ E_{\Delta g}^{(2)} \end{Bmatrix} (\psi_{PQ}) (T_{\Delta} \cos 2\alpha^* + \delta 2W_{xy} \sin 2\alpha^*) (Q) dS(Q). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Hangsúlyozzuk, hogy a geoidundulációra illetve a nehézségi rendellenességekre felírt Eötvös integrálokban levő magfüggvények kiszámításakor egységnyi spektrális súlyokat vettünk fel. Más súlyokkal mások a függvények és általában zárt alakban nem is fejezhetőek ki.

Az integrálok kiszámításához a teljes földfelszínre ismernünk kellene az Eötvös-ingával mért gradiens és görbületi értékeket. Mivel a gyakorlatban nem ez a helyzet, a következő fejezetben megvizsgáljuk az ennek következtében fellépő elhanyagolást, az ún. csonkítási hibát.

2.5 Az Eötvös integrálok számítása nem a teljes földfelszínre

A geoidundulációk és nehézségi rendellenességek számításához a (2.25) integrálokat a teljes földfelszínre kell venni. Helyette a gyakorlati alkalmazás során az integrálást a számítási ponttól vett valamilyen ψ_0 gömbi szögtávolságon belüli közeli területre végezzük el. Ez az a terület,

ahol vannak méréseink. Az ezen túli terület hatását a szakirodalom csonkítási hibának nevezi (Kenyeres 2001). A (2.25) Eötvös integrálok korlátozott számítási terület miatti sajátosságainak vizsgálata felhasználja a matematikai eszköztárat, amelyet Mologyenszkij fejlesztett ki a peremérték-feladatok vizsgálata során (Mologyenszkij et al. 1962). A távoli terület hatását egy olyan integrál adja, amelyben az $\bar{E}^{(i)}(\psi)$ módosított magfüggvények szerepelnek (i a gradiens vagy görbületi mennyiségekre utal, értéke 1 vagy 2 lehet). A módosított magfüggvények a ψ_0 gömbi szögtávolságon belül zérus értékűek, azon kívül pedig a megfelelő Eötvös magfüggvénnyel azonosak. A távoli terület járuléka végtelen sorba fejthető

$$\left\{ \begin{matrix} N_{cs}^{(i)} \\ \Delta g_{cs}^{(i)} \end{matrix} \right\} (P) = \left\{ \begin{matrix} R/2 \\ \gamma_0/2 \end{matrix} \right\} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} (Q_l^{(i)})_N \\ (Q_l^{(i)})_{\Delta g} \end{matrix} \right\} (\psi_0) E_l^{(i)}(P). \quad (2.26)$$

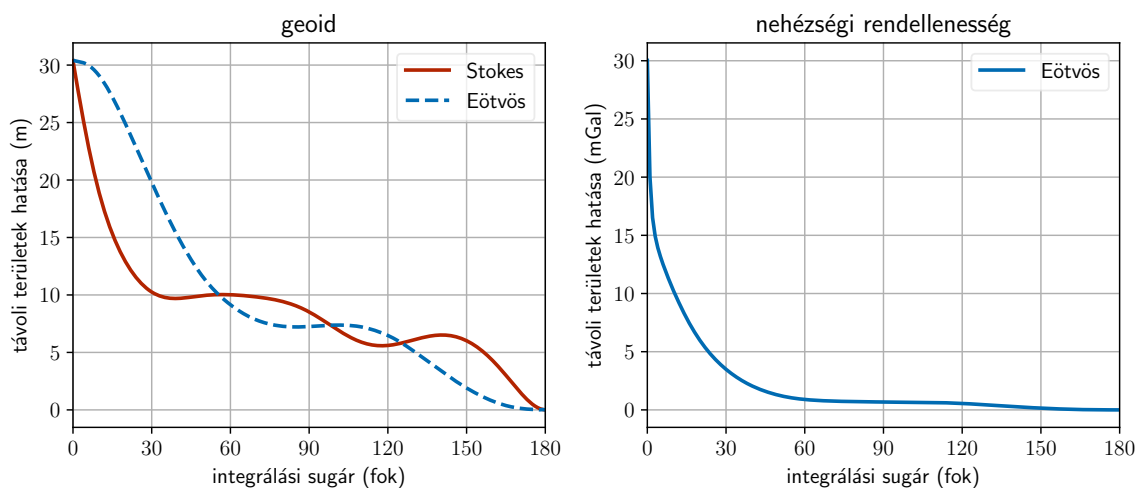
Az összefüggésekben a $Q_l^{(i)}(\psi_0)$ együtthatók és az l -edfokú $E_l^{(i)}(\varphi, \lambda)$ felületi gömbfüggvények szorzatai vannak. A felületi gömbfüggvények kiszámíthatóak a potenciálzavar gömbfüggvény-sorának az együtthatóiból.

A $Q_l^{(i)}(\psi_0)$ együtthatók meghatározásának matematikai részleteit Tóth et al. (2002) közli. Ezek az Eötvös magfüggvényekből integrálással számíthatók

$$\left\{ \begin{matrix} (Q_l^{(i)})_N \\ (Q_l^{(i)})_{\Delta g} \end{matrix} \right\} (\psi_0) = \sqrt{\frac{(l-i)!}{(l+i)!}} \int_{\psi_0}^{\pi} \left\{ \begin{matrix} E_N^{(i)} \\ E_{\Delta g}^{(i)} \end{matrix} \right\} (\psi) P_{l,i}(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.27)$$

A gyakorlatban kiszámítjuk a közeli mérési adatokból a geoidundulációt vagy a nehézségi rendellenességet és azt kiegészítjük a távoli terület hatásának becsült értékével, így vesszük közelítően figyelembe a távolabbi területek hatását. Ez a hatás geopotenciális modellből megbecsülhető. Végtelen sok (2.26) együttható helyett csak egy adott fokszám számítunk.

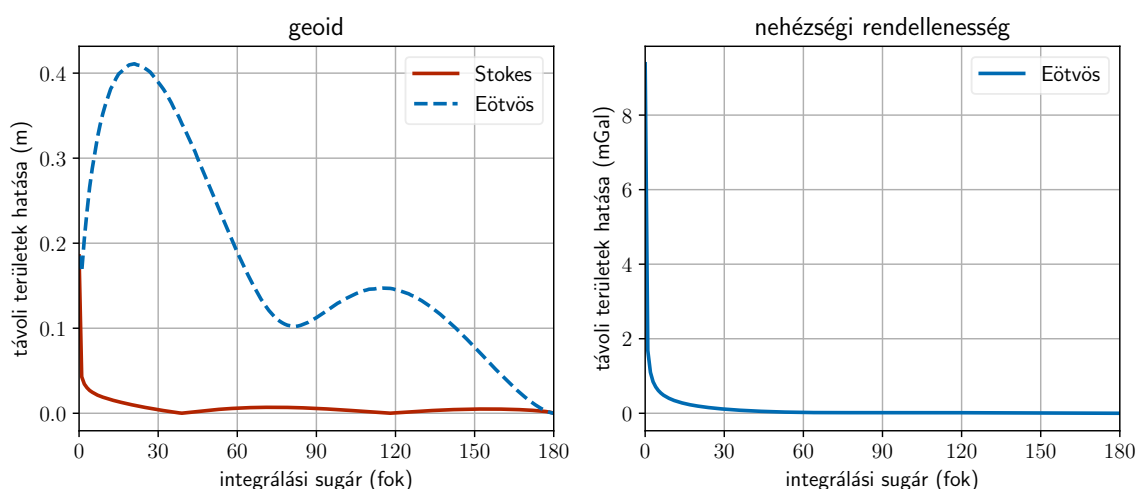
A távoli területek hatásának várható nagyságáról tájékozódhatunk a nehézségi erőter valamely geopotenciális modelljét használva. Ez lehet például az EGM2008 modell (Pavlis et al. 2012). A számítás eredményét mutatja a 2.4 ábra.



2.4. ábra. A távoli területek becsült átlagos hatása az Eötvös és Stokes-integrál esetében, az EGM2008 modellel (Pavlis et al. 2012) 2160 fokig számítva.

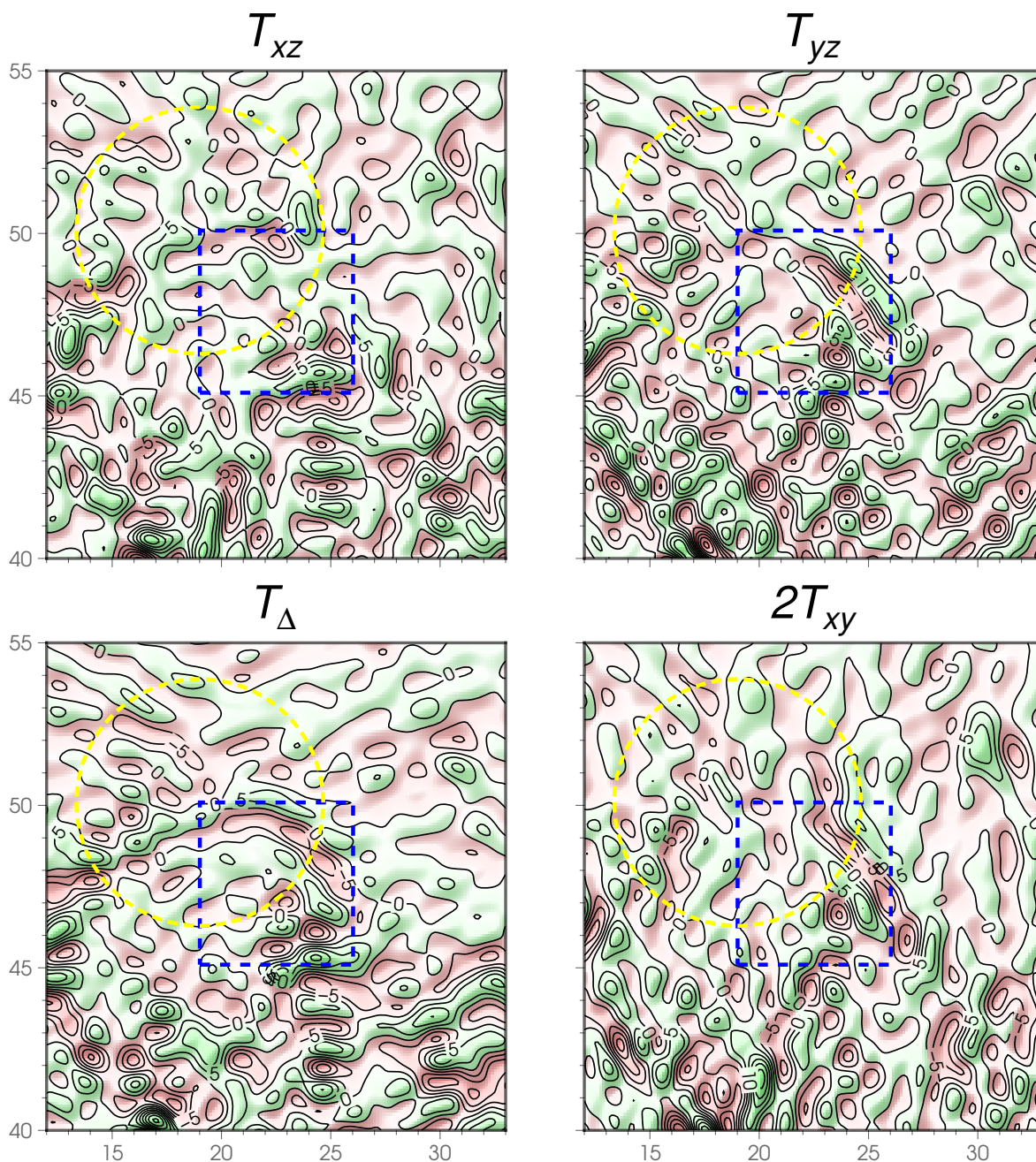
Az 2.4 ábrán látható függvények lokális minimumai a hozzájuk tartozó magfüggvények zérushelyei. A gyakorlat szempontjából az az eset kedvező, amikor a távoli területek hatása az integrálási sugár növelésével gyorsan csökken. A Stokes-integrál esetében ez a hatás kisebb integrálási sugár mellett láthatóan gyorsan csökken. Ennek az az oka, hogy a Stokes-féle függvény az origóban végtelen nagy, így jóval nagyobb súlyt kapnak a számítási ponthoz közeli adatok. A nehézségi rendellenességek számításához használt Eötvös magfüggvény (2.3 ábra) a Stokes-féle függvényhez hasonlóan az origóban végtelen nagy, ezért a távoli területek elhanyagolásából adódó hibája is kedvezőbb.

A távoli területek elhanyagolásának hibáját a gyakorlatban úgy is csökkenthetjük, hogy az adatokból eltávolítjuk valamely referencia erőter hatását, és az integrálokat a redukált adatokkal számítjuk. Az EGM96-os modellel redukált adatokra vonatkozó távoli területek hatását mutatják a 2.5 ábrák.



2.5. ábra. A távoli területek becsült átlagos hatása az Eötvös és Stokes-integrál esetében, a GPM98CR modellel (Wenzel 1998) 720 fokig számítva. Az adatok redukációját az EGM96-os modellel (Lemoine et al. 1998) végeztük 360 fokig (Pavlis et al. 2012).

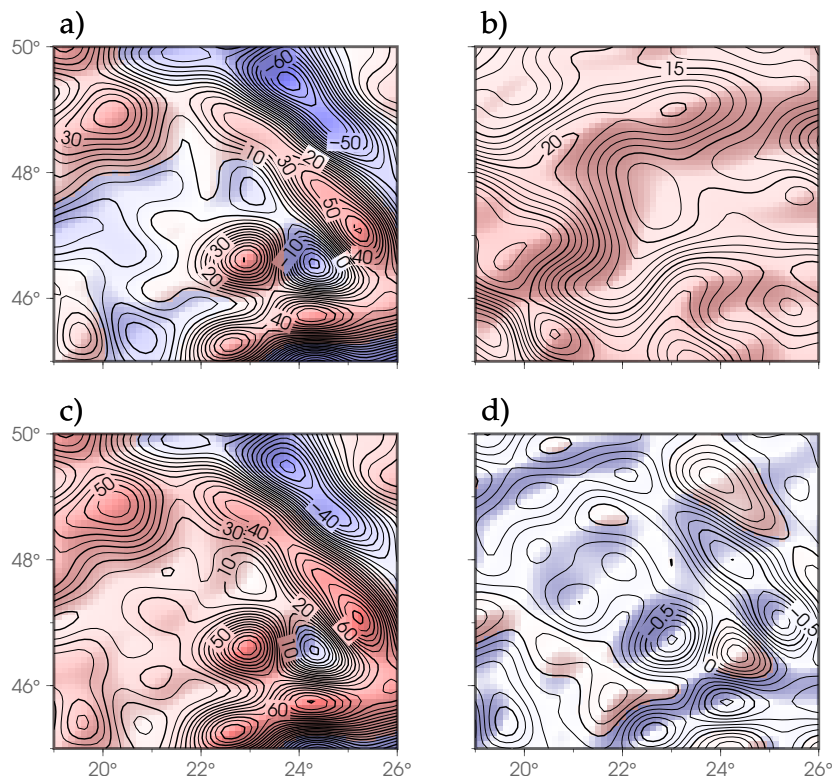
Látható, hogy a redukált adatokkal számított Eötvös integrálok esetében a távoli területek hatása már lényegesen kisebb, a bemutatott esetben néhány dm, illetve jórészt 1 mGal alatt van. Magasabb fokú referencia erőter eltávolítása után a hibák tovább csökkenthetők. Látjuk, hogy kedvezőbb ilyen szempontból a geoidundulációk számítását két lépésben, a nehézségi rendellenességeken keresztül végezni. Ha így járunk el, akkor a módosított Eötvös magfüggvények használata a cm pontos geoidmeghatározás számára is megfelelő eredményeket adhat.



2.6. ábra. Az EGM96 modellből (Lemoine et al. 1998) 360 fokig számított gradiens és görbületi mennyiségek. A számítási területet kék téglalap, az integrálási területet a számítási terület ÉNy-i sarkában sárga kör jelöli szaggatott vonallal. A mértékegység Eötvös (E), az izovonalak értékköze: 5 E

A nehézségi rendellenességek kiszámítását a (2.25) integrálás segítségével egy példán mutatom be. Az EGM96 geopotenciális modellel (Lemoine et al. 1998) kiszámított gradiens és görbületi adatokból (2.6 ábra) numerikus integrálással meghatároztam a $\psi_0 = 3,8^\circ$ távolságon belüli adatok hatását (2.7 a) ábra). A modell együtthatóival a (2.26) összefüggésből kaptam a távoli területek hatását. Ez a hatás 8 és 29 mGal közötti, viszonylag sima területi eloszlást mutat (2.7 b) ábra). A két rész együtt adta az Eötvös-inga mérések felhasználásával számított nehézségi rendellenességeket (2.7 c) ábra). A számítás ellenőrzését mutatja a 2.7 d) ábra. Ez a geopotenciális modellből számítható referencia nehézségi rendellenességekhez viszonyított eltéréseket ábrázolja. A számítás végén kapott eltérések szórása ± 0.22 mGal, ami a nehézségi

rendellenességek ± 25.2 mGal szórásának kevesebb, mint 1%-a. A kapott kis eltérések jelzik a eljárás helyességét és gyakorlati alkalmazhatóságát.



2.7. ábra. A (2.25) Eötvös integrállal kiszámított nehézségi rendellenességek. a) numerikus integrálásból a $\psi_0 = 3, 8^\circ$ távolságon belüli adatok hatása; b) távoli terület hatása; c) a) és b) együtt; d) c) eltérése az EGM96 modellből számított nehézségi rendellenességektől. A mértékegység mGal, az izovonalak értékköze: a) és c) 5 mGal, b) 1 mGal, d) 0.1 mGal.

2.6 Összefoglalás

Az Eötvös peremérték-feladatok megoldásába vektor illetve tenzor gömbfüggvényeket bevonva a Stokes integrálhoz hasonló alakú (2.25) megoldásokat, az Eötvös integrálokat kaptam. A (2.23, 2.24) magfüggvényeket, az Eötvös függvényeket speciális esetben (a megoldás során egységnyi spektrális súlyokat felvéve) zárt alakban is előállítottam.

A gyakorlat igényeit szem előtt tartva kidolgoztam a távoli területek hatásának számítását a peremérték-feladatot megoldó integrálkifejezésekre. Megállapítottam, hogy az Eötvös függvények eltérő sajátosságai miatt a távoli területek hatása eltérő módon csökken a geoidundulációk, illetve a nehézségi rendellenességek esetében. Az ismertetett eljárások működőképességét egy számpéldával mutattam be.

Az Eötvös peremérték-feladatok megoldásához, amint láttuk, a peremértékeket a földfelszínről a peremfelületre (tengerszintre) kell átszámítani. Az átszámítás akár a 3. részben tárgyalt analitikai lefelé folytatással, akár a 4. részben tárgyalt radiális bázisfüggvényes inverzióval elvi nehézség nélkül megoldható. A számítás gyakorlati megvalósítása viszont további kutatásokat igényel.

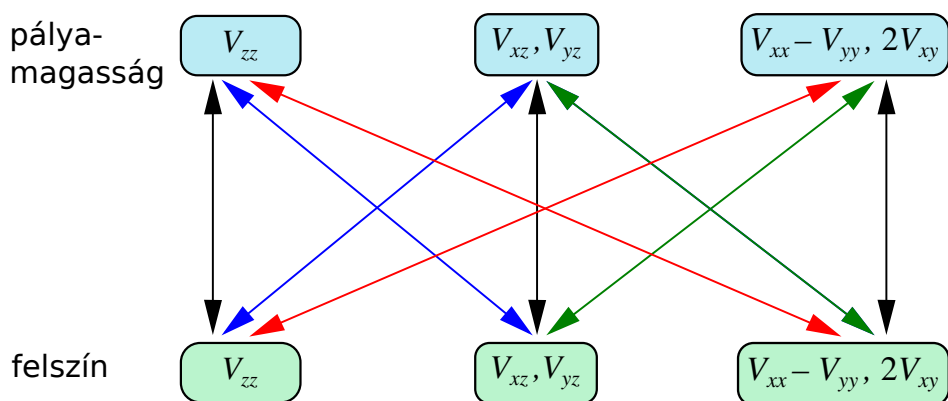
3 Gravitációs gradiens tenzor analitikai folytatása és alkalmazása az űrgradiometriában

Az analitikai folytatások segítségével a nehézségi vagy tömegvonzási (gravitációs) erőter különböző kiinduló (mért) és számított mennyiségei kapcsolatba hozhatók egymással. Ilyenek lehetnek a potenciál(zavar), a nehézségi rendellenesség, a függővonal-elhajlás és a potenciál-függvény második deriváltjai, az Eötvös tenzor elemei. A kiinduló mennyiségek sok esetben valamely szabályos felületen (pl. gömb, forgási ellipszoid) ismertek. Az analitikai folytatások megadják a számított mennyiségeket ugyanazon vagy egy másik ismert felületen. A mennyiségek átvitele két, *különböző* méretű felület között felfelé/lefelé folytatásként is ismeretes (Völgyesi 2002). A nehézségi vagy tömegvonzási erőter meghatározására hasznos eszközöknek bizonyultak ezek az eljárások.

Az Európai Űrügynökség (ESA) GOCE űrprojektjének a célja a nehézségi erőter minden korábbinál pontosabb meghatározása volt (Rummel et al. 2011). A GOCE műhold 2009 márciusa és 2013 novembere között háromtengelyű gradiométerrel mérte a V tömegvonzási potenciál második deriváltjainak teljes Eötvös tenzorát, a V_{ij} ($i, j = x, y, z$) gravitációs gradiens tenzort. Különböző adatfeldolgozási stratégiákkal a mérésekből nehézségi erőter modellt állíthatunk elő. Az egyik stratégia szerint a mért gravitációs gradiensekből a potenciál-függvény gömfüggvény-sorát használták a Föld nehézségi erőtere meghatározására.

Egy másik megközelítés a GOCE-adatok közvetlen felhasználása. Ennek a megközelítésnek az az egyik előnye, hogy a gömbfüggvénytől ellentétben egy korlátozott tartományban levő kiindulási adatokat vizsgálhatunk. Először egy alkalmas referenciagömbre vetítünk. Ezután a teljes Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatását kell elvégeznünk. Ezért megfelelő összefüggések szükségesek a gravitációs gradiensek átvitelére a különböző magassági szintek között. Ez a gravitációs gradiens tenzor analitikai folytatásának problémája.

A második függőleges gravitációs gradiensek felfelé/lefelé folytatásának feladatát Heck (1979) oldotta meg. Bölling és Grafarend (2005) pedig megoldották az Eötvös tenzor elemei egy-egy sajátos összeállításának (V_{zz} ; V_{xz} és V_{yz} ; $V_{yy} - V_{xx}$ és $2V_{xy}$) analitikai folytatását ugyanbba az elem-összeállításba. Tőlük függetlenül megoldottam három elem-összeállítás 9-féle analitikai folytatását bármely másik elem-összeállításba. Ezt a kibővített megoldást a 2004-ben közlésre elfogadott Tóth et al. (2006a) cikkben közzé tettük. Az eljárás vázlatát a 3.1. ábra mutatja. Azóta többen is vizsgálták az Eötvös tenzor analitikai folytatását. Šprlák et al. (2014) például a gravitációs gradiensek analitikai folytatásának további megoldásait is közli. Ebben a részben az általam adott megoldást mutatom be. Először a megfelelő összefüggésekről, utána a gyakorlati alkalmazásukról ejtek szót.



3.1. ábra. Az Eötvös tenzor analitikai felfelé/lefelé folytatásának vázlata. Bölling és Grafarend (2005) megoldását a fekete nyilak mutatják.

3.1 Gradiométeres adatok

A GOCE gradiométer mérései a pályamenti helyi vonatkoztatási rendszerben vannak. A gyakorlatban két ilyen rendszert használnak. Az elsőben az x , y és z a pálya menti, a pályasíkra merőleges és az előzőekre merőleges, közel sugárirányú tengelyeket jelöli. A második az analitikai folytatáshoz használt jobbsodrású, Földhöz kötött vonatkoztatási rendszer. Ez többféle tájolású lehet, pl. Kelet-Észak-fel (KÉF) vagy Észak-Kelet-le (ÉKL) tengelyű. Az egyértelműség miatt három betű (K , \acute{E} , F) is használható (x , y , z) helyett.

A GOCE pályája közel kör alakú volt 250 km-es névleges magasságban. A gradiométeres mérések tehát közelítőleg egy gömb felszínén vannak. Az analitikai folytatás számítása előtt a megfigyeléseket az átlagos pályamagasságban elhelyezkedő gömbre vetítjük. A vetítés a sugárirányú r változását jelenti, ezért a gravitációs gradiensek r szerinti Taylor-féle sorfejtésével történik

$$V_{ij}^{\text{gömb}}(\varphi, \lambda, r^{\text{gömb}}) = V_{ij}^{\text{mért}}(\varphi, \lambda, r) + \frac{\partial V_{ij}^{\text{mért}}(\varphi, \lambda, r)}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{ij}^{\text{mért}}(\varphi, \lambda, r)}{\partial r^2} dr^2 + \dots,$$

ahol $i, j = \varphi, \lambda, r$. A Taylor-féle sorfejtés magasabb fokú tagjait a viszonylag kis vetítési távolság miatt elhanyagolhatjuk. A vetítés hibájának részletesebb vizsgálatát Tóth és Földváry (2005) tartalmazza.

3.2 Az Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatása

Az Eötvös-tenzor felfelé/lefelé folytatását a geopotenciálra vonatkozó Poisson-integrálból kiindulva oldottam meg. Alkalmasskalár és komplex differenciáloperátorokat vettem fel, és ezeket a kiindulási- és számítási pontokban alkalmaztam a Poisson-integrálra.

A Poisson-integrál az Ω egységgömbfelületre (teljes térszögtartományra) vett integrál (Heiskanen és Moritz 1967)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} V(\mathbf{r}^*) K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) d\Omega^*. \quad (3.1)$$

$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ a Poisson-magfüggvény, amely Legendre-sorba fejthető (a nullad- és elsőfokú tagok

nélkül)

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r^*}{r} \right)^{l+1} (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^*) \quad (3.2)$$

($\hat{\mathbf{r}}$ és $\hat{\mathbf{r}}^*$ egységvektorok). A Poisson-magfüggvény zárt alakja (Moritz 1980)

$$K(\sigma, x) = \frac{\sigma^3 (1 - \sigma^2)}{L^3} - \sigma^3 - 3\sigma^4 x, \quad (3.3)$$

ahol $\sigma = (r^*/r)$, $x = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^*$ és $L^2 = 1 - 2\sigma x + \sigma^2$.

3.2.1 Gradiens tenzoroperátorok komplex gömbi, valós és poláris formában

A V_{ij} gravitációs gradiens tenzor a ∇_{ij} tenzoroperátor ($i, j = x, y, z$) hatása a V geopotenciálra; derékszögű koordinátákban felírva $V_{ij} = \nabla_{ij} V$. A gradiens tenzor kilenc összetevője egy-egy parciális derivált, $\partial_{ij} V = \partial_i \partial_j V$, ahol $\partial_i = \partial V / \partial x_i$. A koordináta-rendszer elforgatása után a másodrendű ∇_{ij} tenzoroperátor bizonyos összetevői egymás között transzformálódnak. Matematikailag ez úgy fogalmazható meg, hogy az $SO(3)$ forgáscsoport hatására a tenzoroperátor elemei úgy alakulnak át, mint a másodfokú komplex felületi gömbfüggvények (Fano és Racah 1959). Ezek az összetevők vagy összeállítások egy ún. $\nabla^{(2)}$ másodrendű gömbi tenzort alkotnak, amelynek öt összetevője $\nabla_m^{(2)}$, $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Ha a z tengely körül forgatunk, az öt összetevő mindegyike külön-külön az $SO(2)$ forgáscsoport ábrázolása szerint alakul át (Varshalovich et al. 1988). Ennek a gömbi tenzornak az összetevői (i a képzetes egység)

$$\begin{pmatrix} \nabla_{+2}^{(2)} \\ \nabla_{+1}^{(2)} \\ \nabla_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{yy} - \partial_{xx} \pm i2\partial_{xy} \\ \partial_{xz} \pm i\partial_{yz} \\ \partial_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

A komplex (3.4) gömbi tenzoroperátor összetevői helyett a ∇_2 , ∇_1 valós vektorokat és a ∇_0 skalárt használtam, amelyeket az ÉKL-rendszerben így definiáltam: $\nabla_2 = (\partial_{yy} - \partial_{xx}, 2\partial_{xy})^T$, $\nabla_1 = (\partial_{xz}, \partial_{yz})^T$, $\nabla_0 = \partial_{zz}$, ahol T a transzponálást jelöli.

A vektor differenciáloperátorok (r, φ, λ) gömbi polárkoordinátákban felírva

$$\begin{pmatrix} \partial_{yy} - \partial_{xx} \\ 2\partial_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \partial_{\varphi\varphi} + \tan \varphi \partial_{\varphi} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \partial_{\lambda\lambda} \\ 2\partial_{\varphi} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \partial_{\lambda} \right) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

és

$$\begin{pmatrix} \partial_{xz} \\ \partial_{yz} \end{pmatrix} = -\partial_r \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_{\varphi} \\ \frac{1}{r \cos \varphi} \partial_{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

ahol ∂_r , ∂_{φ} , ∂_{λ} a gömbi koordináták szerinti parciális deriváltakat jelölik.

3.2.2 A derivált operátorok elforgatása

A (3.2) Poisson-magfüggvény irányfüggetlen, vagyis csak a ψ gömbi szögtávolságtól függ ($\cos \psi = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^*$), az azimutoktól nem, ezért célszerű a (3.5, 3.6) vektor differenciáloperátorokat a (ψ, α) , illetve a (ψ, α^*) változók függvényében felírva alkalmazni a számítási, illetve a kiindulási pontokban. A megfelelő operátorok a P kezdőpontú helyi ÉKL-rendszerben a

következők

$$\begin{pmatrix} \partial_{yy} - \partial_{xx} \\ 2\partial_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2} (\partial_{\psi\psi} - \cot\psi\partial_{\psi}) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

és

$$\begin{pmatrix} \partial_{xz} \\ \partial_{yz} \end{pmatrix} = -\partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_{\psi} \right) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Ezek az operátorok az SO(2) forgáscsoport hatására ugyanúgy transzformálódnak, mint a másodfokú, másodrendű, illetve másodfokú, elsőrendű gömbfüggvények. Amikor a P^* kiindulási pontban alkalmazzuk őket, a (3.7, 3.8) kifejezésekben az α azimut helyett α^* -t kell írunk.

3.2.3 A számítási és kiindulási operátorok alkalmazása a Poisson-integrálra

Számítási operátorok

A Poisson-integrálra a (3.7, 3.8) operátorokat a számítási pontban egyszerűen alkalmazhatjuk. Bármilyen is a $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ magfüggvény, az operátor (r, ψ) változóktól függő részét alkalmazzuk rá. Az így kapott $K^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = (r^*/r)^2 (\partial_{\psi\psi} - \cot\psi\partial_{\psi})K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ és $K^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = -r^{*2}\partial_r(1/r)\partial_{\psi}K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ magfüggvényekkel

$$\begin{pmatrix} V_{yy-xx} \\ 2V_{xy} \end{pmatrix}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^{*2}} \int_{\Omega} V(\mathbf{r}^*) K^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} d\Omega^* \quad (3.9)$$

és

$$\begin{pmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{pmatrix}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^{*2}} \int_{\Omega} V(\mathbf{r}^*) K^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} d\Omega^*. \quad (3.10)$$

Ha a $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ függvényt végtelen Legendre-sorba fejtjük, akkor az (3.7, 3.8) operátorok r -től függő része tagonként alkalmazható, hiszen az egy r szerinti hatványsor. Azonban mielőtt a ψ szerinti tagonkénti differenciálást alkalmaztam, ellenőriznünk kellett a kapott sor egyenletes konvergenciáját.

A teljesség kedvéért közlöm a második függőleges derivált felfelé/lefelé folytatásának integrálját is (Heck 1979)

$$V_{zz}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^{*2}} \int_{\Omega} V(\mathbf{r}^*) K^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) d\Omega^* \quad (3.11)$$

ahol $K^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = r^{*2}\partial_{rr}K(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$.

Kiindulási operátorok

A (3.7, 3.8) kiindulási operátorok Poisson-integrálra történő alkalmazásához szükségem volt az operátorok $Y_{lm}(\varphi, \lambda)$ (komplex) gömbfüggvényekre vett hatására. Ezt a következőképpen határoztam meg.

A $\nabla_{\pm 2}^{(2)}$ és $\nabla_{\pm 1}^{(2)}$ komplex differenciáloperátorok hatására a gömbfüggvényekből az úgynevezett spin-2 és spin-1 gömbfüggvényeket kaptam (Goldberg et al. 1967), amelyek ortonormált bázisfüggvények az egységgömb felületén. Ezért amikor ezeket az operátorokat a V potenciál P^* pontbeli gömbfüggvényesorfejtésére alkalmaztam, akkor a mérések spin-2 vagy spin-1 sorfejtését kaptam. E függvények ortonormalitása miatt a geopotenciál egységgömbfelületi integrá-

lokkal kifejezett sorfejtési együtthatóit kaptam. Amikor ezeket az együtthatókat visszaírtam a geopotenciál sorfejtésébe, akkor végül a kiindulási operátorok Poisson-integrálra vett hatását kaptam meg

$$V(\mathbf{r}) = \frac{r^{*2}}{4\pi} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} V_{yy-xx} \\ 2V_{xy} \end{pmatrix}(\mathbf{r}^*) \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\alpha^* \\ \sin 2\alpha^* \end{pmatrix} K_{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) d\Omega^* \quad (3.12)$$

és

$$V(\mathbf{r}) = \frac{r^{*2}}{4\pi} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{pmatrix}(\mathbf{r}^*) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \\ \sin \alpha^* \end{pmatrix} K_{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) d\Omega^*. \quad (3.13)$$

A $K_{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ és $K_{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ magfüggvényeket a (3.2) Legendre-sorból a megfelelő differenciáloperátorokkal és a spin gömbfüggvények sajátértékeinek négyzeteivel kaptuk. Ezek a magfüggvények

$$K_{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{l+1} \frac{2l+1}{(l-1)l(l+1)(l+2)} \overbrace{(\partial_{\psi\psi} - \cot \psi \partial_{\psi})}^{P_{l2}(\cos \psi)} P_l(\cos \psi) \quad (3.14)$$

és

$$K_{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)(l+2)} \overbrace{(-\partial_{\psi})}^{P_{l1}(\cos \psi)} P_l(\cos \psi) \quad (3.15)$$

az első- és másodrendű asszociált Legendre-függvények végtelen sorai.

A számítási és kiindulási operátorok együttes hatása

A (3.7, 3.8) kiindulási és a (3.13, 3.12) számítási operátorok együttes hatása a Poisson-integrálra a ∇_2 , ∇_1 vektor és ∇_0 skalár derivált operátorokkal

$$\nabla_j V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla_i V(\mathbf{r}^*) \cdot \begin{pmatrix} \cos i\alpha^* \\ \sin i\alpha^* \end{pmatrix} K_{(i)}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \begin{pmatrix} \cos j\alpha \\ \sin j\alpha \end{pmatrix} d\Omega^* \cdot i, j \in \{0, 1, 2\} \quad (3.16)$$

A $K_{(i)}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ magfüggvényeket a $\partial_2 = (\partial_{\psi\psi} - \cot \psi \partial_{\psi})$, $\partial_1 = -\partial_{\psi}$, $\partial_0 = 1$ operátorokkal definiáljuk,

$$K_{(i)}^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) = \partial_j \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{r^*}{r}\right)^{\ell+3} (2\ell+1) \frac{(\ell-i)!}{(\ell+j)!} P_{\ell i}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^*) \quad (3.17)$$

ahol $P_{\ell i}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^*) = P_{\ell i}(\cos \psi)$ az asszociált Legendre-függvények. Ezzel végül megkaptuk az (i) mennyiségek analitikai folytatásának keresett integrálösszefüggéseit a számítandó (j) mennyiségek előállítására. Látjuk, hogy (3.16) összesen 9-féle analitikai folytatást foglal magában.

3.2.4 Magfüggvények a felfelé/lefelé folytatáshoz

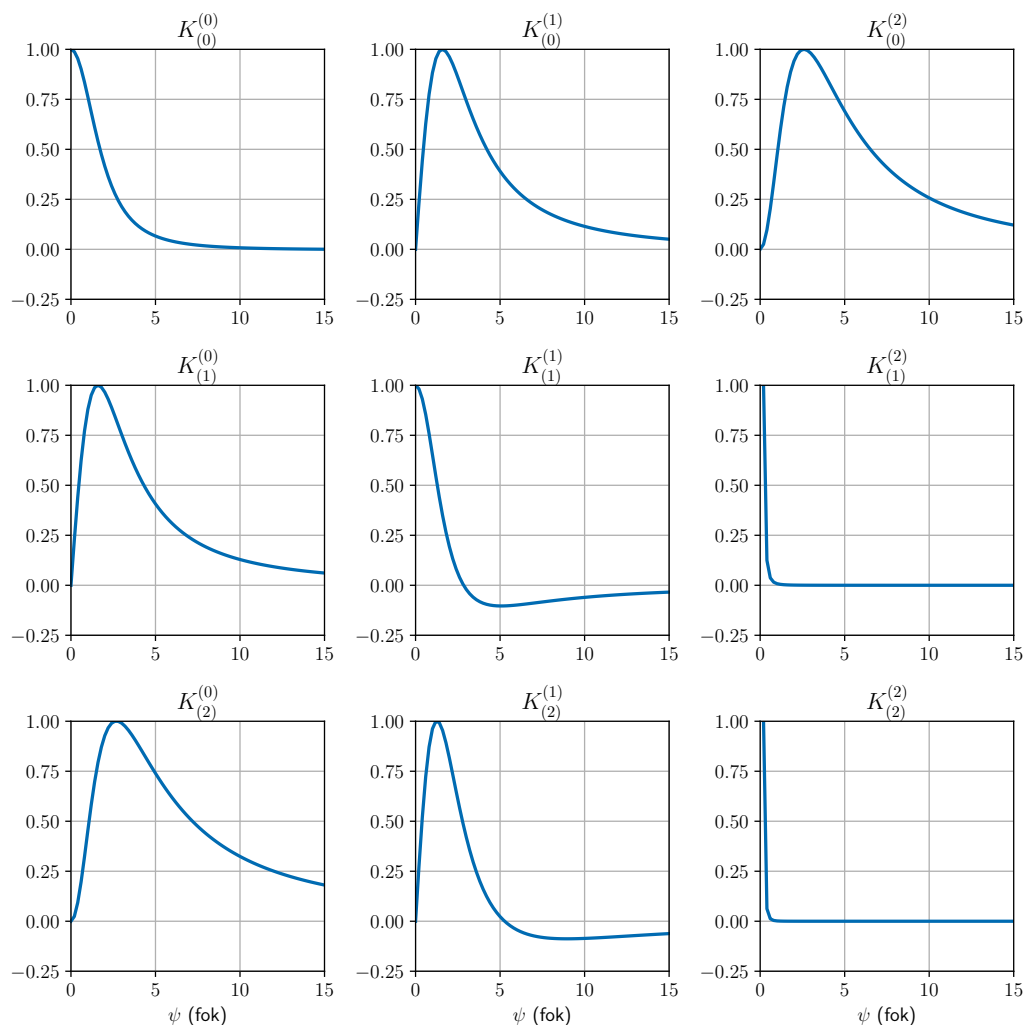
A felfelé/lefelé folytatáshoz tartozó magfüggvényeket a 3.1. táblázatban foglaltam össze. Itt a sorok a kiindulási gravitációs gradiens adatokat írják le, az oszlopok pedig az egyes magasságokban kiszámítandó különböző gravitációs gradiens mennyiségeket vagy együtteseket adják. A h magsságot a $\sigma = R/(R+h)$ paraméter tartalmazza.

3.1. táblázat. A teljes Eötvös tenzor elemeinek vagy együtteseinek felfelé/lefelé folytatásához tartozó magfüggvények az ÉKL koordináta-rendszerben. A sorokat $l = 2$ -től végtelenig vagy $l = l_{max}$ -ig összegezzük

kiszámított mennyiség \rightarrow	V_{zz}	(V_{yz}, V_{xz})	$(V_{yy-xx}, 2V_{xy})$
\downarrow mért mennyiség		$(\cos \alpha, \sin \alpha)$	$(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$
V_{zz}	$\sum_l (2l+1) \sigma^{l+3} P_{l0}$	$\partial_1 \sum_l \frac{2l+1}{l+1} \sigma^{l+3} P_{l0}$	$\partial_2 \sum_l \frac{2l+1}{(l+1)(l+2)} \sigma^{l+3} P_{l0}$
$V_{yz} \cos \alpha^* + V_{xz} \sin \alpha^*$	$\sum_l \frac{2l+1}{l} \sigma^{l+3} P_{l1}$	$\partial_1 \sum_l \frac{2l+1}{l(l+1)} \sigma^{l+3} P_{l1}$	$\partial_2 \sum_l \frac{2l+1}{l(l+1)(l+2)} \sigma^{l+3} P_{l1}$
$V_{yy-xx} \cos 2\alpha^* + 2V_{xy} \sin 2\alpha^*$	$\sum_l \frac{2l+1}{(l-1)l} \sigma^{l+3} P_{l2}$	$\partial_1 \sum_l \frac{2l+1}{(l-1)l(l+1)} \sigma^{l+3} P_{l2}$	$\partial_2 \sum_l \frac{2l+1}{(l-1)l(l+1)(l+2)} \sigma^{l+3} P_{l2}$

A fenti magfüggvények zárt képleteit Šprlák et al. (2014) közlik. A 3.2. ábra a GOCE magasságára vonatkozó magfüggvényeket mutatja.

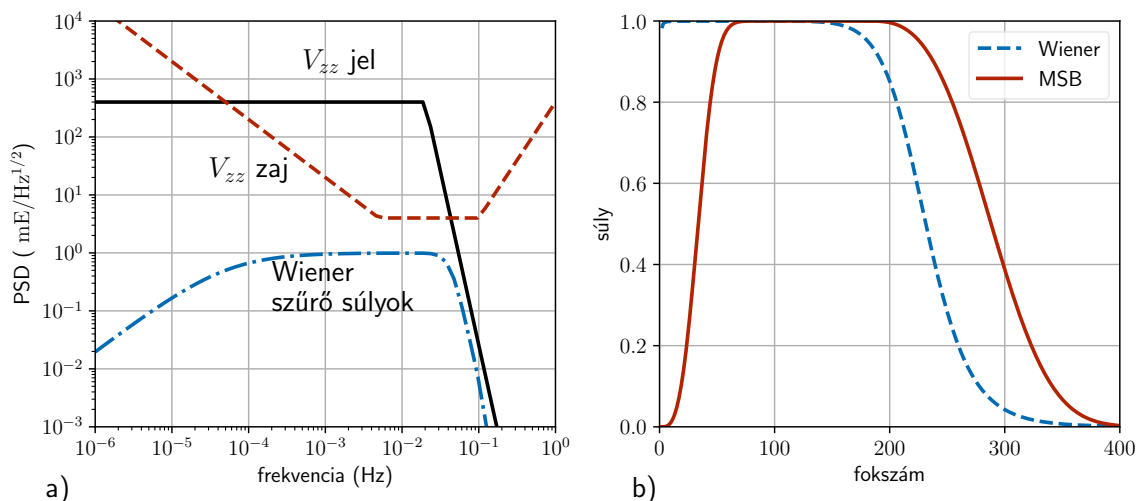
A főatlóban lévő magfüggvények hasonlóak egymáshoz, kivéve $K(2, 2)$, ami az origóban lévő kiindulási adatoknak ad maximális súlyt. A $K(1, 0)$, $K(2, 0)$, $K(0, 1)$, $K(2, 1)$, $K(0, 2)$ és $K(2, 2)$ magfüggvények mind eltolt maximumokkal rendelkeznek, és ezek tapasztalataim szerint (Tóth 2003) kedvezőtlenek a távoli területek elhanyagolása szempontjából. Érdekes kivétel az origóban szinguláris $K(1, 2)$ magfüggvény. Tapasztalataim szerint a szinguláris magfüggvények a távoli területek elhanyagolása szempontjából előnyösebbek. Ezért gyakorlati szempontból a GOCE esetében a (V_{xz}, V_{yz}) vegyes vízszintes-függőleges deriváltak együttesének számítását javasoltam a $(V_{yy-xx}, 2V_{xy})$ második vízszintes deriváltakból. Ez az elemzés csak a magfüggvények vizsgálatára támaszkodott. Adott esetben a csonkítási hibák részletes vizsgálatára lehet szükség.



3.2. ábra. Az Eötvös tenzor analitikai felfelé folytatásának magfüggvényei a GOCE pályamagasságára számítva.

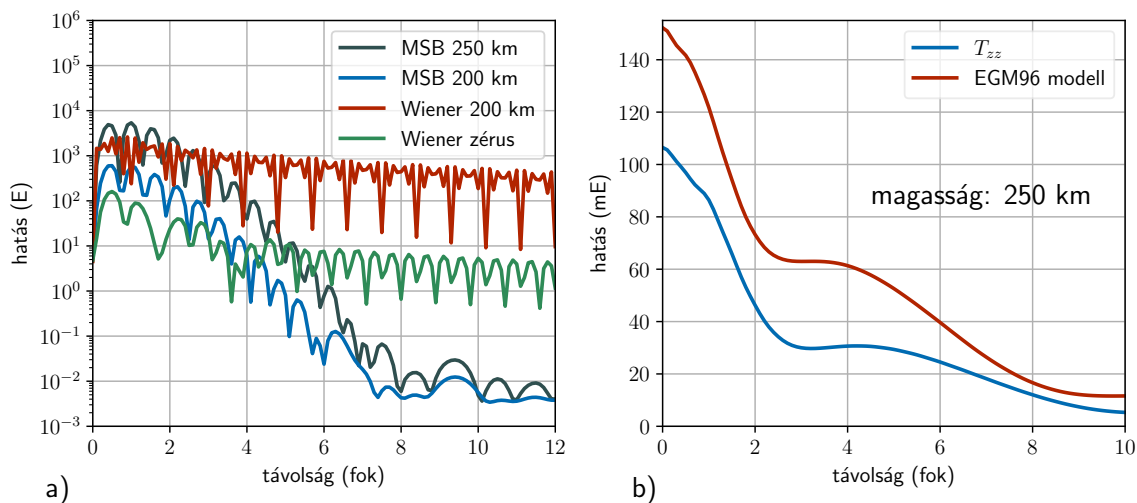
A GOCE gravitációs gradiensek átvitele a gyakorlatban a különböző magassági szintek között további vizsgálatokat igényelt (Tóth et al. 2006b). Az egyik gyakorlati szempont a gravitációs gradiens átvitelének korlátozása (szűrés) a gömbfüggvényspektrumban. Ez azért szükséges, mert a GOCE mérései főként az 5–100 mHz közötti frekvenciatartományra korlátozódnak (3.3. a) ábra). A másik annak vizsgálata, hogy egy adott pontosság eléréséhez a (3.16) integrálást mekkora területre kell kiterjeszteni, vagyis mekkora a távoli területek elhanyagolásából eredő hiba.

A gömbfüggvényspektrumban végzett szűréshez Wiener, illetve módosított gömbi Butterworth (MSB) szűrőket definiáltunk (Tóth et al. 2006b). Ezek spektrális súlyait mutatja az 3.3. b) ábra.



3.3. ábra. a) GOCE V_{zz} jel- és zajspektrumok és Wiener-szűrő súlyok. b) A GOCE mérések frekvencia-tartományához igazított Wiener és MSB szűrők súlyai a gömbfüggvényspektrumban.

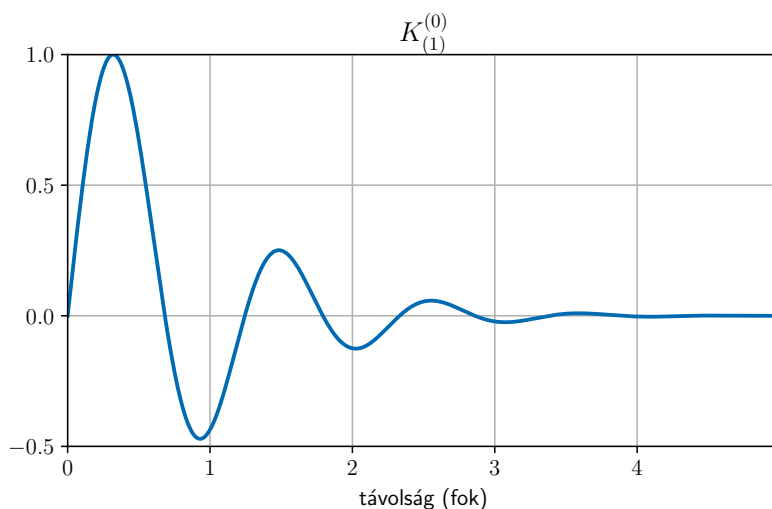
Megvizsgáltam a távoli területek elhanyagolásából származó hibát mind a fel- mind a lefelé folytatás esetében (Tóth et al. (2005), Tóth et al. (2006b)). A felfelé folytatás akkor szükséges, amikor a GOCE méréseit kalibráció céljából összevetjük a földfelszíni nehézségi vagy Eötvös-inga mérésekkel. A lefelé folytatás pedig a GOCE mérési adatainak felhasználását teszi lehetővé a nehézségi erőter helyi szerkezetének kutatására. A lefelé folytatással átszámított adatokat így a földfelszíni mérésekkel együtt tudjuk felhasználni valamilyen peremérték-feladat megoldásában. A távoli területek elhanyagolásából eredő hibát mutatja a függőleges gravitációs gradiens lefelé folytatása során a 3.4. a) ábra, az Eötvös-inga mérésekből számított T_{zz} felfelé folytatása során pedig a 3.4. b) ábra.



3.4. ábra. a) A távoli területek elhanyagolásából eredő hiba a V_{zz} lefelé folytatása során 200 és 250 km-es pályamagasságból, MSB és kétféle Wiener szűrővel az EGM96 geopotenciális modell segítségével becsülve. b) A távoli területek elhanyagolásából eredő hiba az Eötvös-inga mérésekből számított T_{zz} GOCE pályamagasságba való felfelé folytatása során.

A lefelé folytatás a magfüggvény regularizálását igényli, például úgy, hogy a magfügg-

vényt a gömbfüggvényspektrum adott részére korlátozzuk. A Haagmans et al. (2002) által alkalmazott gömbi Butterworth-szűrő alkalmas választás lehet, mivel segítségével a GOCE hasznos mérési tartományában (MBW) található információra korlátozódhatunk. A 3.5. ábrán példaként az így kapott $K_{(1)}^{(0)}$ magfüggvényt mutatom be. Ezzel a magfüggvénnyel a GOCE pályamagasságában mért T_{zz} gradienseket lefelé folytatva a földfelszínen V_{xz} és V_{yz} gradiensek számíthatók.



3.5. ábra. A GOCE hasznos mérési tartományára korlátozott átvitelű $K_{(1)}^{(0)}$ magfüggvény a GOCE pályamagasságából végzett lefelé folytatáshoz. A normalizált magfüggvény a gömbi szögtávolság függvénye. A szűrést 1-es típusú Butterworth szűrővel valósítottam meg (Haagmans et al. 2002)

A számítások további részleteit Tóth et al. (2005) és Tóth et al. (2006b) közlik.

3.3 Összefoglalás

Ebben a részben a teljes Eötvös tenzor felfelé/lefelé folytatásának problémáját vizsgáltam. Megmutattam, hogy a gravitációs gradiensek három meghatározott összeállítása (egy 2. rangú gömbi tenzor gradiens operátorának elemei, Bayman (1978)) különböző magasságokba átvihető a három közül bármelyik összeállításba. Az ismertetett eljárás 9 különböző magfüggvényt eredményezett, és a módosított Poisson-integrál 8 összeállítás esetében függ a kiindulási- és/vagy a számítási pontok egyszeres és kétszeres azimutjaitól. A magfüggvények segítettek eldönteni azt, hogy gyakorlati szempontból mely összeállítások előnyösek, és melyek nem. Az integrálokkal a teljes Eötvös-tenzor átvihető különböző magasságokra, a gömbfüggvényspektrum adott részére korlátozott magfüggvények segítségével. Így a gravitációs gradiens adatokat csak egy adott távolságig szükséges integrálni. Megvizsgáltam az Eötvös tenzor analitikai folytatásának gyakorlati megvalósításához kapcsolódó különböző szempontokat is. Kutatásaim eredményeit hasznosítani lehet az űr vagy légi gravitációs gradiometriával nyert Eötvös tenzor adatok feldolgozására.

4 Nehézségi gradiensek bevonása Magyarország területén a nehézségi erőter meghatározásába

Ahogy a bevezetésben említettük, a nehézségi erőter valamely kiválasztott szintfelülete részletes meghatározásával gradiensemérésekből a világon először tudományos célokból Eötvös Loránd foglalkozott (Eötvös 1906). Később az 1950-es évektől az egész országra kiterjedően történtek csillagászati-geodéziai geoidmeghatározások (Bíró et al. 2013), amelyeket a különböző intézményekben modern gravimetriai geoidszámítások követtek (Völgyesi et al. 2005).

A kvázigeoid meghatározásának egyik célja az, hogy megteremtse a kapcsolatot a Magyarországon használt, tengerszintre (EOMA alapszintjére) vonatkozó normálmagasságok és a GNSS-el meghatározott, adott geodéziai dátumra vonatkozó ellipszoid feletti magasságok között. Mérsékelt domborzati viszonyainknak köszönhetően a legnagyobb eltérés a kvázigeoid és a geoid (vagy normál- és ortométeres magasságok) között csak mintegy 25 mm (Ádám et al. 2002), viszont ezt az eltérést a nagy pontosságú geoid meghatározásánál már tekintetbe kell venni. A rövidség kedvéért a „geoid” elnevezés alatt is a továbbiakban mindig a kvázigeoidot értjük.

Magyarországra több gravimetriai geoidmegoldás készült el a Stokes integrál (2.1) eljárásával (HGEO2000: Völgyesi et al. (2005), HGTUB2000: Tóth és Rózsa (2000)). Néhányat az Országos GPS Hálózat (OGPSH) GPS/szintezési pontjaira illesztettek a GNSS magasságmeghatározás céljára (HGGG2000 és HGGG2004: Völgyesi et al. (2005)). A GNSS és szintezési adatainknak kellően nagy súlyt adva ugyanis illeszthetjük a megoldást a GNSS és szintezési adatok magassági rendszerébe (Marti 2007).

Ahogy a 2. részben láttuk, az Eötvös peremérték-feladatok segítségével a felszíni nehézségi gradiensemérések *önmagukban* is alkalmasak a geoid vagy a nehézségi rendellenességek kiszámítására. Azt is láttuk, hogy a gyakorlatban a távoli területek hatását valamely geopotenciális modellel tudjuk számszerűsíteni. A cm pontos geoidmeghatározást szem előtt tartva azonban indokolt az Eötvös-inga-méréseket a többi méréssel *együtt* felhasználni (Szűcs et al. 2014). A nehézségi erőter meghatározásának inverziós eljárásai erre lehetőséget adnak. Ez az eljárás várhatóan javítja a megoldás részletességét, pontosságát és megbízhatóságát.

Az inverziós módszerek közös alap gondolata az, hogy a nehézségi erőter meghatározandó $W(x)$ potenciálfüggvényét alkalmas $B(x, x_k)$ bázisfüggvények és x_k bázispontok segítségével felírjuk a

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k) \quad (4.1)$$

alakban. Célunk az itt szereplő c_k inverziós együtthatók meghatározása. Ehhez különböző méréseket használunk fel, amelyeket az erőter potenciálfüggvényéhez valamilyen $F(W)$ előírással rendeljük hozzá. Az $F(x_i)$ méréseket a $B^F(x_i, x_k)$ bázisfüggvényekkel modellezzük

$$F(x_i) + e(x_i) = \sum_k c_k B^F(x_i, x_k) \quad (4.2)$$

ahol $e(x_i)$ a mérési és modellezési hibákat jelöli. Ezután valamilyen becslési eljárással (például a hibák súlyozott négyzetösszegének minimalizálásával) a (4.2) egyenletrendszert megold-

jük az ismeretlen c_k együtthatókra. A megoldás ismeretében a W potenciálfüggvény, illetve bármely, belőle származtatható $F(W)$ mennyiség (geoidunduláció, nehézségi rendellenesség, függővonal-elhajlás, Eötvös-tenzor) tetszőleges x_j pontban kiszámítható (modellezhető, előre jelezhető) az

$$F(x_j) = \sum_k c_k B^F(x_j, x_k) \quad (4.3)$$

összefüggéssel. Az inverziós eljárások előnye az integrál transzformációs (Stokes, Eötvös) eljárásokkal összehasonlítva az, hogy a felhasznált és a számított mennyiségek hibái is részei a megoldásnak. Könnyű az eltérő megbízhatóságú mérések közös felhasználása és a számított mennyiségek megbízhatóságának jellemzése.

A nehézségi erőter modelljének megalkotása során a felsőgeodéziában szokásos eljárás az, hogy a valódi nehézségi erőteret egy szabályos erőterhez, a geodéziái földmodell nehézségi erőteréhez viszonyítjuk. A teljes $W(x)$ potenciálfüggvény helyett a geodéziái földmodell $U(x)$ normálpotenciáljához viszonyított $T(x) = W(x) - U(x)$ potenciálzavar függvényét, illetve a belőle számítható egyéb mennyiségeket (geoid-ellipszoid távolság, nehézségi rendellenesség, függővonal-elhajlás, stb.) használjuk.

Magyarországon a nehézségi erőteret kétféle inverziós eljárással határoztuk meg. Az egyik a Krarup és Moritz nevéhez fűződő legkisebb négyzetek módszerén alapuló *kollokáció* (Moritz 1980). A másik a *radiális bázisfüggvényes inverzió* (Schmidt et al. 2007). Ezek az eljárások a $B(x, x_k)$ bázisfüggvények megválasztásában különböznek egymástól.

A legkisebb négyzetek módszerén alapuló kollokáció (a továbbiakban röviden: kollokáció) esetén a bázisfüggvények az erőter statisztikai leírásához használt ún. kovarianciafüggvényekkel állnak kapcsolatban (Moritz 1980), a bázispontok pedig a mérési pontok. Az alkalmazott koordináta-rendszerrel függően a kovarianciafüggvények gömbi vagy vetületi síkkordinátákban adódnak. A kollokáció eljárásának központi eleme a modellezni kívánt nehézségi erőter statisztikai szerkezetéhez legjobban illeszkedő kovarianciafüggvény becslése. Ezt a mérési adatok és a kovarianciafüggvény valamely felvett paraméteres modellje alapján végezzük el a paraméteres modell illesztésével.

A kovarianciafüggvény a kollokációban a mérési adatok súlyát adja meg, és fontos jellemzője a korrelációs hossz. Ez az a távolság, amelyre a kovariancia a maximális érték felére csökken. Gyakorlati okokból célszerű ezt a távolságot csökkenteni, mert így kevesebb adatot kell bevonnunk a számításba – olyan adatokat, melyek súlya nem zérus, vagy zérus közeli kis érték. A csökkentés a nehézségi erőter főbb jellegzetességeit leíró modell(ek) segítségével valósítható meg. A kollokáció sikeres alkalmazásához homogén és irányfüggetlen adateloszlás is kell, mert a számításhoz egyetlen, irányfüggetlen kovarianciafüggvényt használunk. Ezeket a követelményeket a számítás során az adatok további redukálásával érhetjük el. A gyakorlatban úgy járunk el, hogy a nehézségi erőter valamely geopotenciális modellje, illetve a terepfelszín segítségével számítható mennyiségeket kivonjuk a mért mennyiségekből. A kollokációt pedig ezekkel a maradékokkal számítjuk.

Az inverzió másik eljárásához használt gömbi radiális bázisfüggvényeket a gömbfüggvény-spektrumbeli együtthatókkal és térbeli helyzetükkel adjuk meg. Az együtthatók definiálják a bázisfüggvények spektrális tulajdonságait és alakját. A térbeli helyzetük vagy egy előre megadott rácsponrendszerhez kötött, vagy szabadon változtatható az inverzió során. Alkalmazásuk hasonlítható a nehézségi erőter tömegpontokkal (maszkonokkal) való modellezéséhez, voltaképpen annak továbbfejlesztett változata.

A gömbi radiális bázisfüggvényeken alapuló inverzió a tapasztalatok szerint jól alkalmaz-

ható a regionális nehézségi erőter meghatározására. Schmidt et al. (2007) jó áttekintést adnak erről az eljárásról, amelyet többen sikeresen alkalmaztak a helyi nehézségi erőter számítására mind földi (Klees et al. 2008; Wittwer 2009; Bucha et al. 2016; Mahbuby et al. 2017), mesterséges holdas (Eicker 2008; Naeimi 2013) valamint úrgradiometriai és földi adatok esetében (Lieb et al. 2014). A módszer előnye a kollokációhoz képest a lényegesen kisebb számításigény (nem kell az adatok számával megegyező számú ismeretlent meghatározni).

A nehézségi erőterre vonatkozó mérésekből a nehézségi erőter modellezése általában rosszul kondicionált inverzfeladat. Egyrészt a mérési hibák, másrészt az analitikai lefelé folytatás és a szabálytalan adateloszlás, például adathiányos területek is bizonytalanná tehetik. A fizikailag értelmes megoldáshoz ezért gyakran a megoldás szabályozására (regularizáció) van szükség. A szakirodalomban erre számos eljárást javasoltak (Bouman 1998).

A következőkben az említett két nehézségi erőter meghatározást mutatjuk be. Mindegyik megoldás ismertetése során megemlítjük a felhasznált adatokat, valamint a redukció során felhasznált geopotenciális és terep (felszín) modelleket. Ezen kívül kitérünk a modellezéshez felhasznált kovariancia vagy bázisfüggvényekre és az elkészült megoldások vizsgálatára. További részleteket a Tóth (2009a), Völgyesi et al. (2018a) és Tóth és Földvály (2015a) cikkek tartalmaznak.

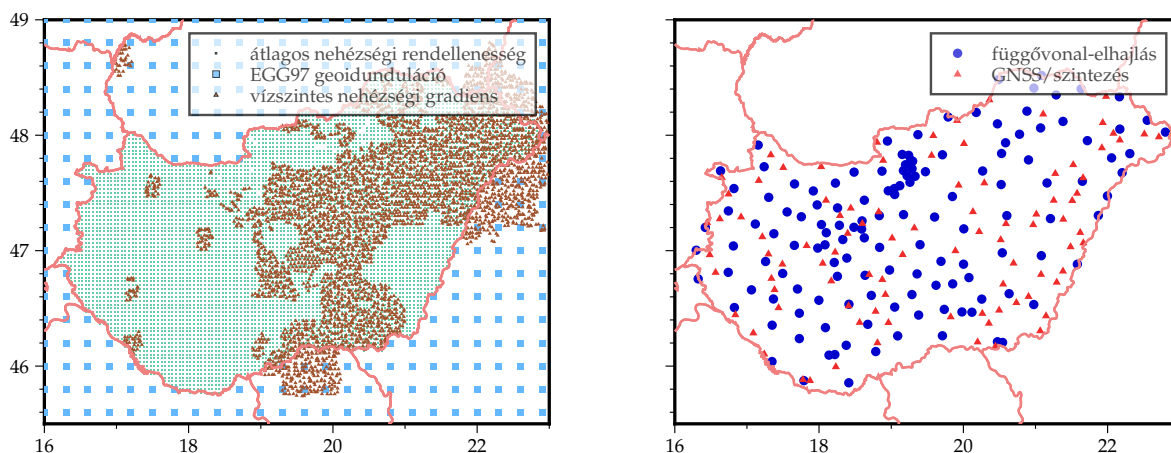
Magyarországon az itt említett megoldások mellett további nehézségi erőter modellek is készültek inverziós eljárással. Dobróka és Völgyesi (2009) egy jóval kisebb modellterületen ugyancsak az Eötvös-inga méréseit használták az inverzió során. A potenciáltér leírásra használt bázisfüggvények a térbeli derékszögű koordináták háromváltozós polinomjai voltak. Megemlítjük még az EGM2008 geopotenciális modell (Pavlis et al. 2012) segítségével kollokációval előállított kombinált asztrogeodéziai-gravimetriai kvázigeoidot (Tóth és Szűcs 2011). Tóth (2020b) diplomamunkájában pedig ugyancsak a radiális bázisfüggvényeket használta. A felszíni gravimetriai, GNSS, szintezési és asztrogeodéziai mérések mellett a GOCE pályamagasságában Magyarország tágabb területe fölött mért gravitációs gradienseket vonta be a megoldásba, viszont a modellben nem használt Eötvös-inga méréseket.

4.1 A HTGUB2007 kvázigeoid megoldás legkisebb négyzetes kollokációval

A HGTUB2007 jelű kvázigeoid megoldást Magyarország területére gravimetriai, GNSS, szintezési, függővonal-elhajlási, Eötvös-inga és DTM adatok kombinálásával készítettem el (Tóth 2009a). A legkisebb négyzetes kollokáció módszerével, síkbeli logaritmikus auto- és kereszt-kovariancia függvényekkel és 720 fokszámú referencia geopotenciális modellel végeztem a számítást. A végső megoldásban gyakorlati okokból nagy súllyal szerepeltek az Országos GPS Hálózat (OGPSH) 95 szintezett pontjának mérései. A megoldás belső pontosságát jelző szórás értéke az ország területén 2 cm-nél kisebb.

4.1.1 A felhasznált adatok és redukálásuk

A számítások során – a geopotenciális modelleken és a domborzat-, helyesebben felszínmodellen kívül – ötféle adatrendszerrel dolgoztam. A megoldandó egyenletrendszer méretének csökkentése céljából a nehézségi rendellenességeket és Eötvös-inga nehézségi gradienseket egyenletesen ritkítottam. A megoldásban végül a 4.1. ábrán látható adatok szerepeltek:



4.1. ábra. A megoldáshoz felhasznált adatok.

- 6678 átlag szabadlevegő nehézségi rendellenesség $2' \times 3'$ méretű (kb. $3.5 \text{ km} \times 3.5 \text{ km}$ -es) blokkokra az ELGI adatbázisából
- 276 (2×138) asztrogeodéziai függővonal-elhajlás összetevő
- 7452 Eötvös-inga nehézségi gradiens összetevő (a nehézségi erő vízszintes változása vektorának É-i és K-i irányú összetevői)
- 95 GNSS és szintezési pont kvázigeoid magasságai (az Országos GPS Hálózat (OGPSH) újabban szintezett pontjai)

Hazánk területén kívül bevontam az EGG97-es modellből (Denker és Torge 1998) további 267 kvázigeoid magasságot. A célom az országhatáron *kívüli* megoldás „elcsúszásának” megakadályozása volt. Ezt a technikát alkalmazta Marti (2007) a svájci CHGEO2004 számítási eljárásban. Az ország területén *kívüli* adatokat úgy súlyoztam, hogy Magyarországon *belül* a megoldást ne befolyásolják. Ezért jelentősen (1000 km-el) megnöveltem ezeknek és a GNSS/-szintezési pontoknak a távolságát, hogy a számításban nagyon kicsi legyen a súlyuk. Végeredményben az országon belüli és *kívüli* kvázigeoid magasságok esetleges eltérései így nem okozhattak szabályos hibát az ország területén belül.

Az összes adat redukálását két geopotenciális modellel is elvégeztem, 720 maximális fokig. Az egyik a GPM98CR modell volt (Wenzel 1998). A másik a GRACE GGM02C modell (Tapley et al. 2005) együtthatóit tartalmazta 200 fokig és rendig, azon felül pedig a GPM98CR modell együtthatóit, amelyeket a 180-200 fokszám tartományban lineáris átmenettel kombináltam (GGM02CB modell). Így a modellek eltérő maximális fokszáma nem befolyásolta az adatok redukcióját, másrészt az újabb GRACE modell várhatóan javította a megoldást. A számítás során még nem állt rendelkezésre az újabb, nagy felbontású EGM2008-as geopotenciális modell.

Az adatok topografikus redukációjához a $3''$ (kb. 90 m) felbontású SRTM3 digitális felszínmodellt használtam fel (Farr és Kobrick (2000), Timár et al. (2003)). Ezzel a modellel RTM korrekciókat számítottam (Forsberg és Tscherning 1981) az összes adatrendszerre a geopotenciális modellek maximális fokszámával.

Vizsgálataink (Tóth és Rózsa 2006) szerint Magyarország területén a GRACE mérésein alapuló geopotenciális modellek az eltérések szórása és az átlagos eltérés tekintetében is jobban illeszkednek a *nehézségi rendellenességekhez*, mint a korábbi, EGM96 alapú modellek, viszont rosszabbul az OGPSH szintezett pontjaiban a *kvázigeoid undulációkhoz*, természetesen azonos fokszám mellett. Az adatredukció során most is azt tapasztaltuk, hogy a felhasznált GRACE

alapú modellből számított erőter paraméterek, a nehézségi rendellenességek kivételével, kissé nagyobb szórással és átlagos eltéréssel illeszkedtek (4.1. táblázat).

4.1. táblázat. A HGTUB2007 megoldáshoz felhasznált eredeti, valamint redukált adatok szórása/átlaga

adatrendszer	nehézségi rendellenesség (mGal)	σ (")	σ (")	GNSS és szintezés (m)
eredeti adatok	$\pm 17.92/14.90$	$\pm 2.47/0.55$	$\pm 2.17/2.85$	$\pm 0.12/0.23$
GPM98CR és RTM	$\pm 7.77/-4.41$	$\pm 1.22/0.02$	$\pm 1.06/-0.06$	$\pm 0.12/0.23$
GGM02CB és RTM	$\pm 7.69/-1.06$	$\pm 1.20/-0.24$	$\pm 1.09/-0.11$	$\pm 0.14/0.61$

A táblázatban az Eötvös-inga mérések statisztikai adatai nem szerepelnek, mert az alkalmazott geopotenciális modellek felbontása (kb. 28 km) nem elég ezeknek az adatoknak az érdemi redukciójához. Ez azt jelenti, hogy a gradiensek szórása ± 15 E volt a redukció előtt, és ez maradt a redukció után is. Az érdemi redukcióhoz igen nagy felbontású geopotenciális modellek lennének szükségesek.

4.1.2 A kvázigeoid meghatározása

A kollokáció számításához a Forsberg (1987) által javasolt, térbeli derékszögű koordinátákban felírt logaritmikus kovariancia modellt választottam. Egyrészt azért, mert ez alkalmas volt az összes általam felhasznált mérési típus auto- és keresztkovariancia függvényei előállítására. Másrészt a referencia geopotenciális modell fokszáma és a számítási terület kisebb kiterjedése lehetővé tették a vetületi koordináták használatát (Forsberg 1984).

A nehézségi rendellenesség autokovariancia függvénye

$$C(\Delta g^{h_1}, \Delta g^{h_2}) = -C_0 \sum_{i=1}^4 \alpha_i \ln(D_i + h_1 + h_2 + \sqrt{s^2 + (D_i + h_1 + h_2)^2}) \quad (4.4)$$

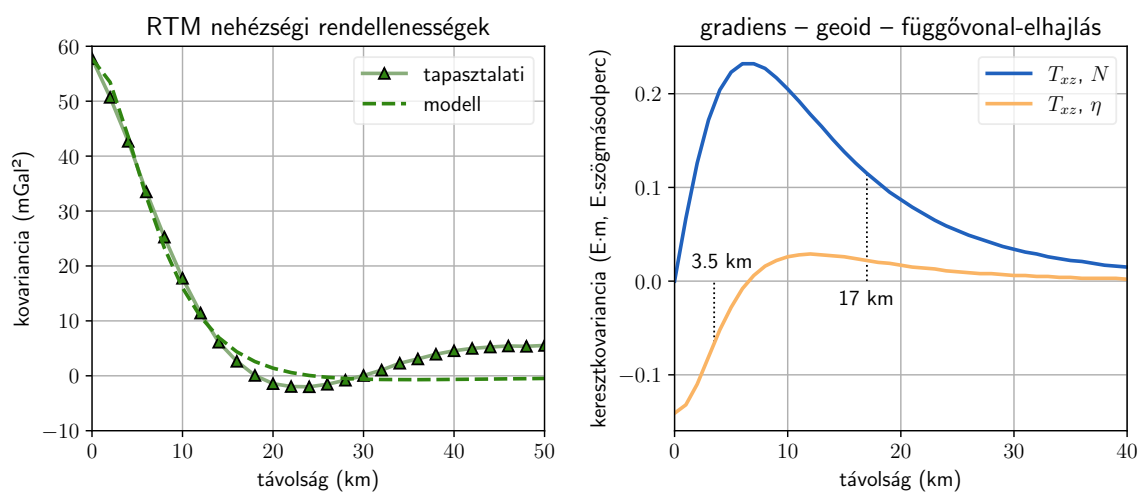
a pontok h_1, h_2 magasságától és s vízszintes távolságától függ. C_0 a nehézségi rendellenességek varianciája, az α_i -k egész számok (1, -3, 3, -1), $D_i = D + (i - 1)T$ (Forsberg 1984).

Ez a kovariancia modell nehézségi gradiensekre is használható, ami kevés kovariancia modelltől mondható el. A modell α_i és D_i állandóin keresztül három szabadon választható paramétertől függ: C_0 , D és T . Az első, C_0 a nehézségi rendellenesség autokovariancia függvénye skálatényezője, D az erőter magasabb frekvenciájú, T pedig az alacsonyabb frekvenciájú nehézségi erőter összetevőket csökkenti. A különböző mennyiségekhez tartozó részletes összefüggéseket Forsberg (1987) függeléke tartalmazza.

Az említett három modellparamétert a (4.4) kovariancia modell illesztésével határoztam meg. Az illesztést a nehézségi rendellenességekkel végeztem, de a modell a 4.2. táblázat tanúsága szerint jól illeszkedett a többi adatra is. Az illesztéssel kapott paraméter értékek: $C_0 = 57.7$ mGal², $D = 5$ km, $T = 9$ km voltak.

4.2. táblázat. A $C_0 = 57.7 \text{ mGal}^2$, $D = 5 \text{ km}$, $T = 9 \text{ km}$ paraméterű Forsberg-féle kovariancia modellből számított és a redukált adatok szórásai. A nehézségi rendellenességek szórása megegyezik C_0 értékével

mennyiség	redukált adatok szórása	modellből számított szórás
magassági rendellenesség	$\pm 0.120 \text{ m}$	$\pm 0.083 \text{ m}$
függővonal-elhajlás	$\pm 1.1\text{-}1.2''$	$\pm 1.13''$
vízszintes gravitációs gradiens	$\pm 14\text{-}15 \text{ E}$	$\pm 15.2 \text{ E}$



4.2. ábra. Tapasztalati és modell auto- és keresztkovariancia függvények. A függvények számításához az adatok redukcióját a GPM98CR geopotenciális modellel végeztem 720 maximális fok- és rendszámig.

Az 4.2. ábrákon láthatók a nehézségi rendellenességek autokovariancia függvényei, illetve a T_{xz} gradiensek, a kvázigeoid undulációk (GNSS és szintezés) valamint a K-Ny-i függővonal-elhajlás összetevők modellből számított keresztkovariancia függvényei. A kovariancia modell paramétereinek változására a függővonal-elhajlások és a nehézségi gradiensek voltak a legérzékenyebbek.

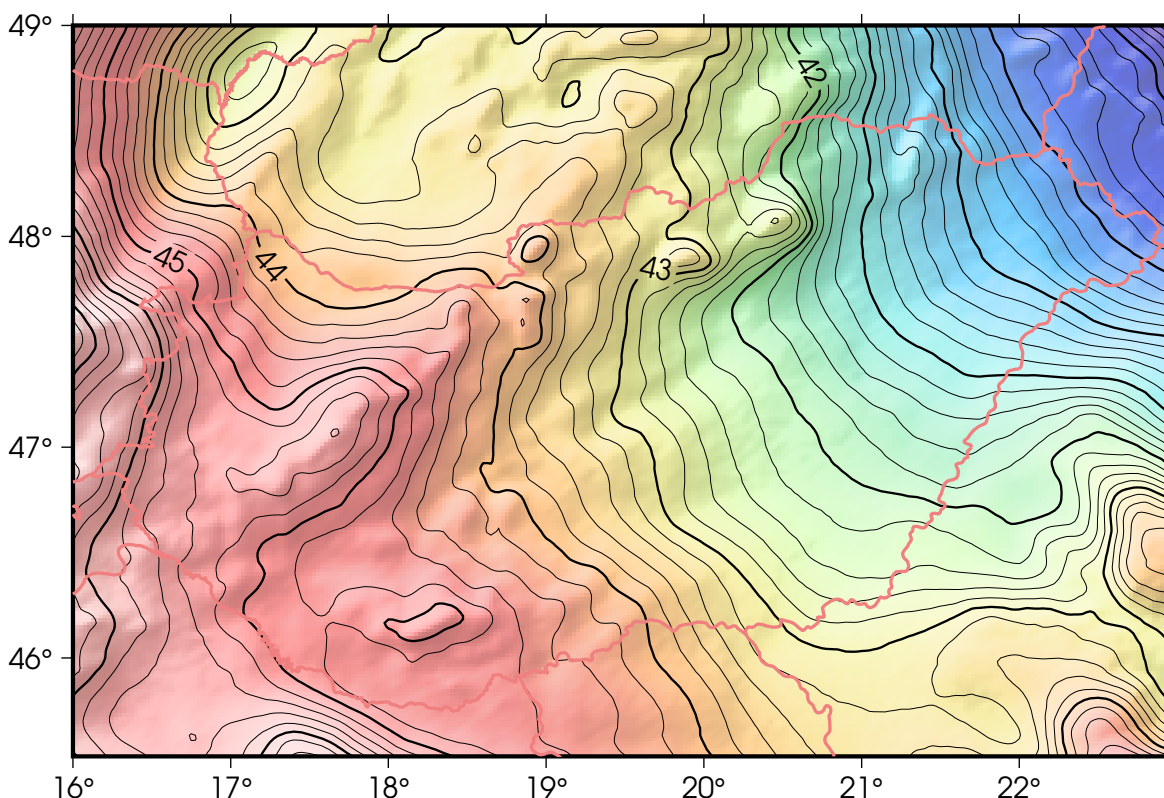
A kovariancia modell segítségével az Eötvös-inga mérések, nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlások és GNSS/szintezési adatok együtt használhatók fel a számításban. A különböző típusú adatok súlyozását tapasztalati úton végeztem, megfigyelve a számított pontokban kapott eltéréseket. Az Eötvös-inga vízszintes nehézségi gradienseit azonban két lépésben hasznosítottam. Először a kiválasztott 3726 pontbeli ($\pm 5 \text{ E}$ középhibájú) vízszintes gradiensekből és a ($\pm 0.3''$ -es középhibájú) függővonal-elhajlásokból kollokációval függővonal-elhajlásokat interpoláltam mind a 3726 pontban. A $\pm 5 \text{ E}$ középhibát a nehézségi rendellenességekkel és vízszintes nehézségi gradiensekkel végzett próbaszámítások alapján állapítottam meg. A második lépésben a számított függővonal-elhajlásokkal és becsült középhibáikkal 14 700 pontban kvázigeoid undulációkat határoztam meg. Ebben a lépésben a nehézségi rendellenességeket, függővonal-elhajlásokat és GPS/szintezési adatokat is felhasználtam.

A kétlépéses számítási eljárást a kollokációs egyenletrendszer instabilitása miatt követtem. Ezt akkor tapasztaltam, amikor a nehézségi gradienseket közvetlenül vittem be a megoldásba.

Az instabilitást vélhetően a nehézségi gradiensek inhomogén területi eloszlása okozta (4.1. ábra). Ugyanis ha a számítási pontnak abban a környezetében, amit a korrelációs hossz mutat, nincs elég adat, akkor az eredményt az adatok eloszlása is nagyon befolyásolja. A 4.2. ábra szerint a nehézségi gradiens – függővonal-elhajlás keresztkovariancia függvényének korrelációs hossza lényegesen kisebb, mint a nehézségi gradiens – geoid mennyiségeké (3.5 km 17 km helyett). Ezért a *függővonal-elhajlások* számításához a pont jóval kisebb környezetéből kellenek csak nehézségi gradiensek. Így a kétlépéses számítás már stabil. Érdekes megfigyelni azt, hogy az 2. részben az Eötvös peremérték-feladat gyakorlati megoldása során is egy kétlépéses számítási eljárás bizonyult célravezetőbbnek.

4.1.3 A számított megoldások és összehasonlításuk

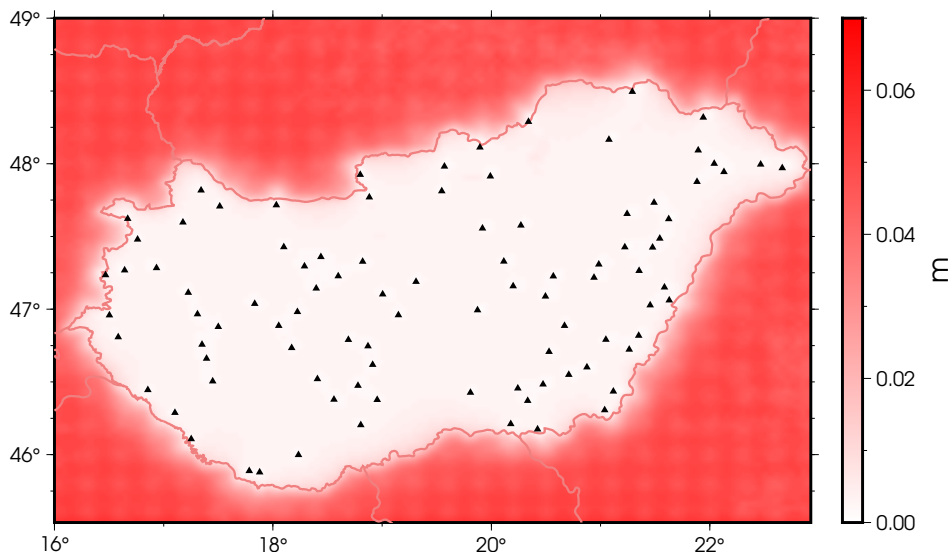
Többféle kvázigeoid megoldást készítettem el, amelyek az adatok és a GNSS/szintezési adatok felhasználása tekintetében térnek el egymástól. Ezek asztrogravimetriai (AG), asztrogravimetriai és GNSS/szintezési (AGG), valamint asztrogravimetriai, GNSS/szintezési és vízszintes gravitációs gradiens (AGGG) megoldások. Gyakorlati szempontok miatt a GNSS/szintezési adatok némelyik megoldásban nagy súllyal szerepeltek. Ez ugyan elfedi a GNSS/szintezési adatok esetleges hibáit, viszont hasznos lehet a GNSS magasságmeghatározáshoz, amikor EOMA magasságokat számítunk ellipszoid feletti (GNSS) magasságokból.



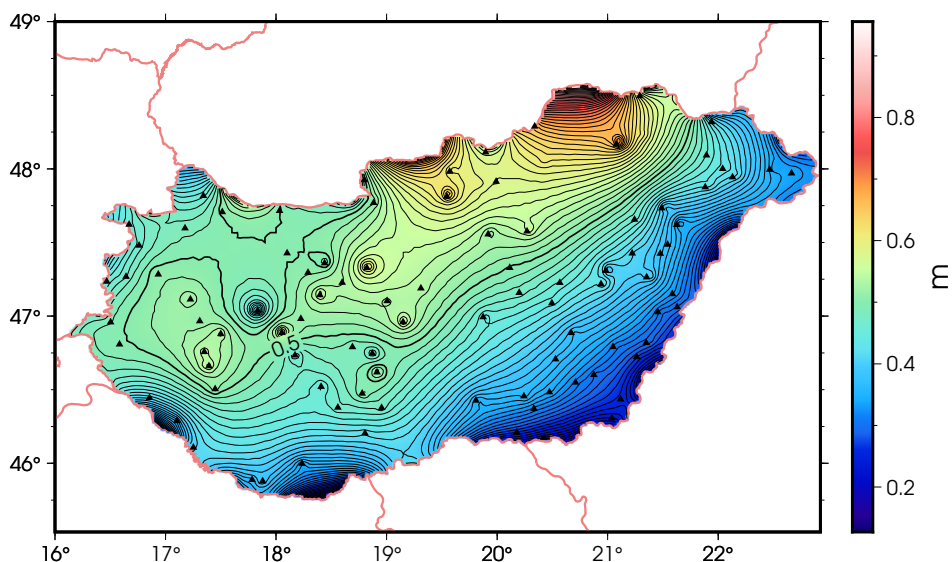
4.3. ábra. A GRACE geopotenciális modellel készített HGTUB2007 kvázigeoid megoldás a GRS80 ellipszoidhoz képest.

Az OGPSH-hoz illeszkedő, GGM02CB geopotenciális modell szerinti HGTUB2007 AGGG megoldás (4.3. ábra) számítása úgy történt, hogy a 94 GNSS/szintezési adat nagy súlyt (kis, ± 0.1 mm-es középhibát) kapott. A kvázigeoid undulációk becsült középhibája ezért gyakorla-

tilag zérus lett a 94 pont közelében, ± 1 cm-es az ország területén és ± 5 cm-es azon kívül (4.9. ábra). Az AG és AGG kvázigeoid megoldások különbsége (4.5. ábra) az ország területére 47 cm-es átlagos eltérést és ± 10 cm-es szórást mutatott. Megfigyelhető egy ÉNy-DK irányú dőlés is. Az OGPSH és az EGG97 összehasonlítása (Kenyeres és Virág 1998) szintén jelentős, 23 cm-es átlagos eltérést és ÉNy-DK irányú dőlést tárt fel. Az OGPSH némelyik pontján kiugróak lettek az eltérések, ami nyilván a GNSS/szintezési adatok egyedi ponthibáinak tulajdonítható (Kenyeres és Virág 1998).

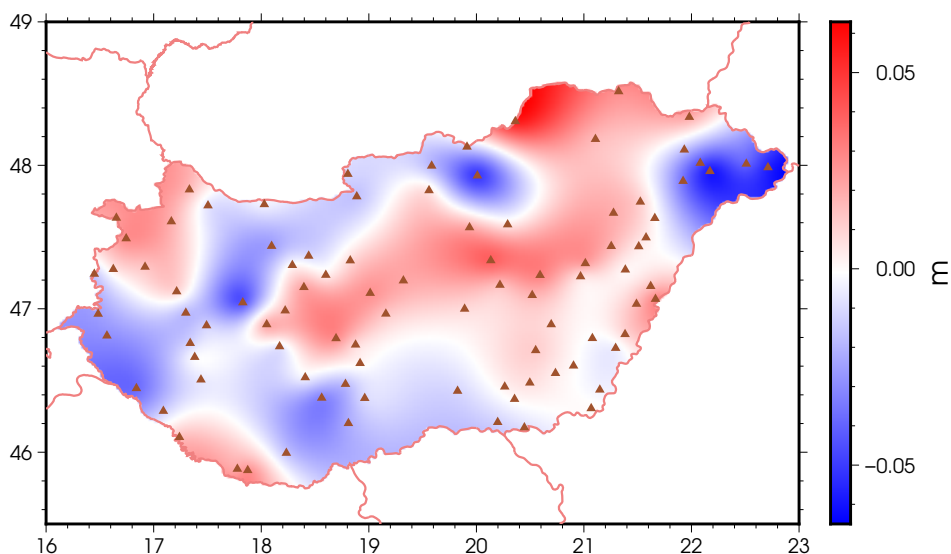


4.4. ábra. A HGTUB2007 megoldás becsült középhibái. A GNSS/szintezési pontokat háromszögekkel jelöltem



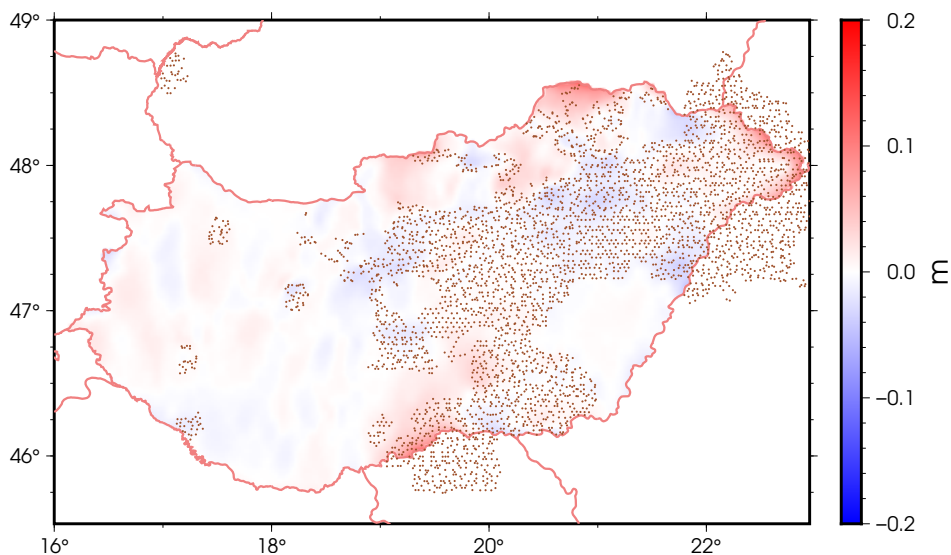
4.5. ábra. Az astrogravimetriai és a GNSS/szintezési adatokhoz illeszkedő astrogravimetriai kvázigeoid megoldások eltérése. A GNSS/szintezési pontokat háromszögekkel jelöltem

Az OGPSH pontjaiban a GNSS/szintezési adatokat nagy súllyal figyelembe vevő megoldás végül a 4.6. ábrán látható eltérésekkel illeszkedett a felhasznált 94 pontban, átlagosan ± 2.1 cm-es szórással.



4.6. ábra. Az asztrogravimetriai és a GNSS/szintezési adatokhoz illeszkedő kvázigeoid megoldás eltérése a 94 OGPSH ponton. A GNSS/szintezési pontokat háromszögekkel jelöltem

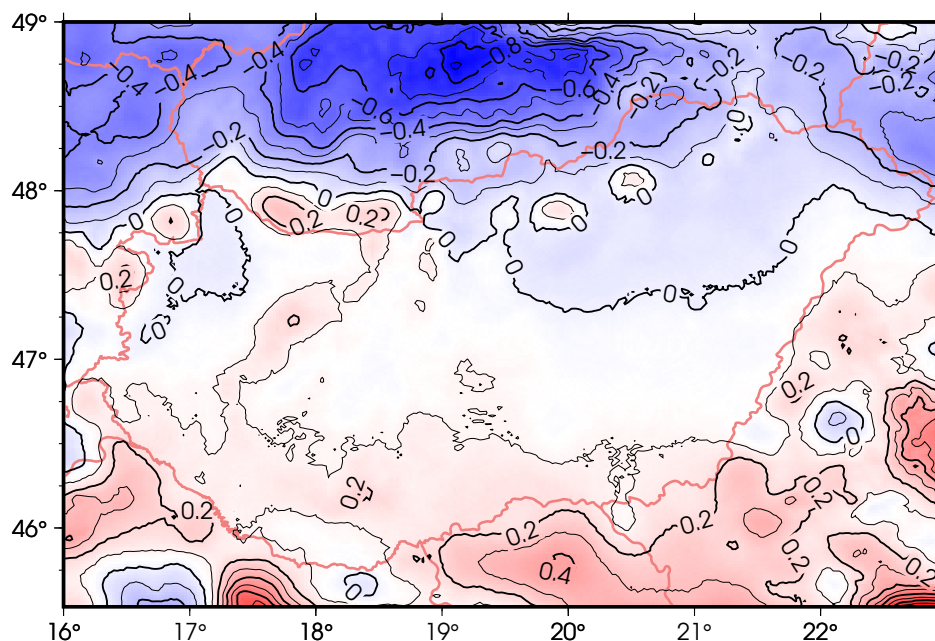
Érdekes megfigyelni a nehézségi gradiensekből adódó kvázigeoid unduláció különbségeket, amelyek az Eötvös-inga mérések hatását jelzik. Ezeket, vagyis az ország területén belüli asztrogravimetriai és asztrogravimetriai-gradiens geoidfelületek közötti eltéréseket a 4.7. ábrán láthatjuk. Ezek a (-4 cm, +13 cm) tartományba esnek, átlagos nagyságuk (szórás) ± 1.3 cm. A nagyobb értékek jellemzően az országhatár mentén ott található, ahol vannak Eötvös-ingával mért pontok.



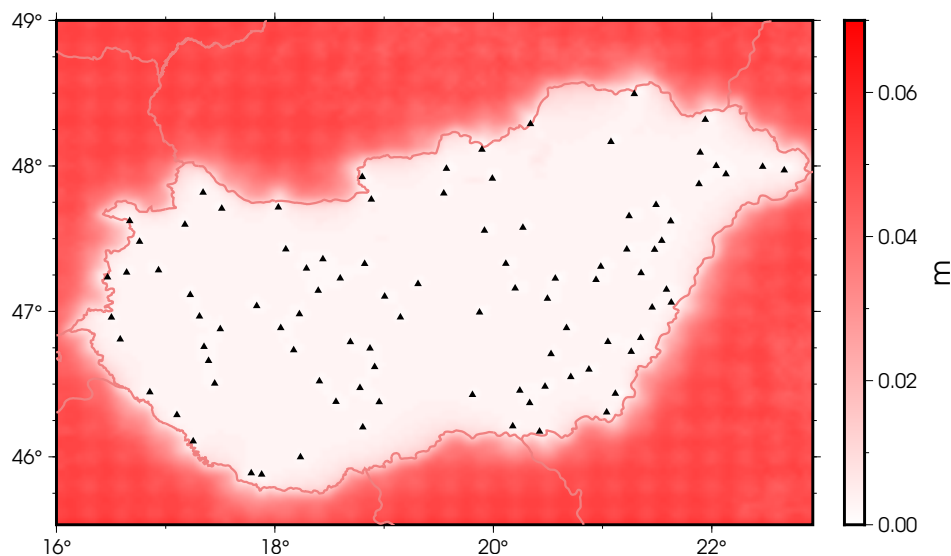
4.7. ábra. A vízszintes nehézségi gradiensek bevonásából származó geoidunduláció eltérések a GGM02CB geopotenciális modell alapú asztrogravimetriai és asztrogravimetriai-gradiens megoldások között. A felhasznált Eötvös-inga pontokat bejelöltem

Megoldásomat összevettem a korábbi HGTUB2000B jelű gravimetriai geoidmegoldással (Tóth és Rózsa (2000), Völgyesi et al. (2005)). Ezt spektrális kombinációs eljárással készítettük. Ez volt az európai EGG97-es geoidmegoldás (Denker és Torge 1998) számítási módszere is. A 4.8. ábra mutatja, hogy az eltérések az ország területén kívüli magas hegyvidéken elérték a

90 cm-t is, de az ország területén belül jóval kisebbek, általában 10 cm alattiak maradtak. A nagyobb eltérések feltehetően abból adódtak, hogy a HGTUB2000B megoldásban Magyarország területén kívülről is voltak nehézségi rendellenességek, valamint a felhasznált geopotenciális modellek is különböztek egymástól.



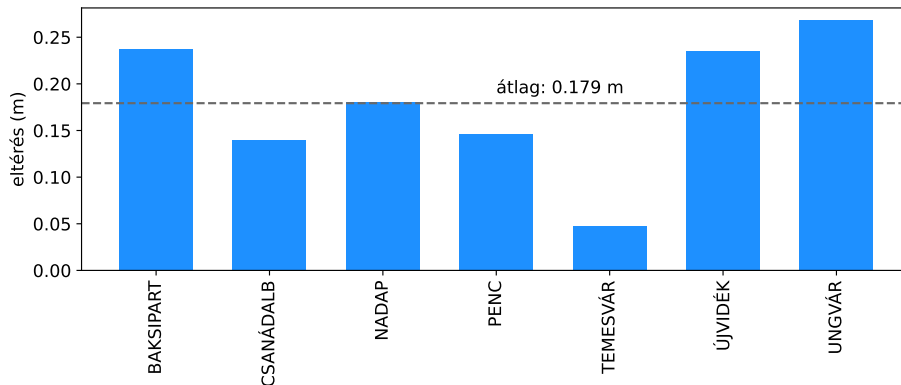
4.8. ábra. A HGTUB2007 és HGTUB2000B megoldások különbsége



4.9. ábra. A HGTUB2007 megoldás becsült hibái. A GNSS/szintezési pontokat háromszögekkel jelöltem

A kollokációs megoldás becsült hibái, ahogy láttuk, az országon belül 1-2 cm-esek, az OGPSH kiválasztott pontjain a súlyozás miatt gyakorlatilag zérusok (4.9. ábra). Ez a megoldás belső pontosságát jelzi. A külső pontosság értékeléséhez GNSS/szintezési pontokon ellenőriztem a számított AGGG megoldást. Hét EUVN GNSS/szintezési pont (Ádám et al. (2000), Ihde et al. (2000)) esik a számítási területre. Az átlagos eltérés ezekben a pontokban 0.179 m és az eltérések szórása ± 7.0 cm lett (4.10. ábra). Az átlagos eltérés értéke nagyjából hasonló lett az

UELN és a magyar felsőrendű szintezési hálózat magasságai közötti 14 cm-es eltéréshez (Ádám (2014), Biró et al. (2013)).



4.10. ábra. A HGTUB2007 megoldás eltérései az EUVN GNSS/szintezési pontok geoidmagasságaitól

4.1.4 Összefoglalás

Ebben a fejezetben egy olyan kísérleti kvázigeoid modellt mutattam be, amelyben – Magyarországon elsőként – együtt használtam fel gravimetriai, csillagászati geodéziai, GNSS/szintezési és felszíni *nehézségi gradiens* méréseket. A megoldás jelentős újdonsága az volt, hogy abban – bár közvetetten – hazai Eötvös-inga méréseket is felhasználtam.

Néhány pontban a GNSS/szintezés nem jól illeszkedett az asztrogravimetriai megoldáshoz, valószínűleg a harmadrendű szintezés hibái miatt. Ezért a cm pontos geoid meghatározásához fontos *felsőrendű* magassági hálózathoz vezetett GNSS pontokat használni. Ez csak részben valósult meg országos magassági alaphálózatunk (EOMA) újramérése kapcsán. Az Integrált Geodéziai Alapponthálózat (INGA) pontjai viszont jó lehetőséget biztosíthatnak a GNSS technológia magasabb szintű, nagyobb pontosságú alkalmazására (Kenyeres et al. (2011), Kenyeres (2012)). A függővonal-elhajlások közvetlenül a geoidfelület normálvektorának helyzetét mutatják, ezért előnyösebbek a pontosabb geoidfelület meghatározás szempontjából a nehézségi rendellenességeknél (Marti 2007), melyek csak közvetetten kapcsolódnak a geoidhoz. A BME Általános- és Felsőgeodézia tanszékén jelenleg is folynak a gyors és pontos terepi csillagászati függővonal-elhajlás mérések megvalósítását célzó kutatások a svájci QDAEDALUS rendszerrel (Völgyesi és Tóth 2021). A rendszer alkalmas arra, hogy 20-30 perces méréssel a függővonal helyzetét $\pm 0.1''$ pontossággal meghatározza, amivel megbízhatóbb és részletesebb geoidkép határozható meg.

4.2 A HGTUB2015 kvázigeoid megoldás gömbi radiális bázisfüggvényes inverzióval

A nehézségi gradiensek geodéziai hasznosítása szempontjából fontos, hogy az összes Eötvös-inga mérést sikeresen felhasználtuk a nehézségi erőter radiális bázisfüggvényes (Schmidt et al. 2007) meghatározásában (Völgyesi et al. 2018a). Ezen kívül a megoldásban minden számunkra elérhető pontbeli függővonal-elhajlás, nehézségi rendellenesség és GNSS/szintezéssel meghatározott kvázigeoid magasság (Tóth és Földváry 2015b; Völgyesi et al. 2018a) szerepelt. Kerültük a nem közvetlenül mért, hanem a mérésekből interpolált átlagértékek használatát. Egyrészt azért, mert szerettük volna elkerülni az interpolációból származó hibákat, másrészt azért, mert még nem kiforrott ezek felhasználása a radiális bázisfüggvényes modellezésben. Háromféle gepotenciális modellel is számítottunk kvázigeoidot, hogy lássuk, ez hogyan befolyásolja az eredményt.

4.2.1 A paraméterek becslése

A gömbi radiális bázisfüggvényes paraméterbecslés funkcionális modellje hasonló a (4.1) matematikai modellhez. Amennyiben a mérési pontok térbeli helyzete ismert,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) + \mathbf{e}(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^K x_k B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k). \quad (4.5)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ és $\mathbf{e}(\mathbf{r}_i)$ jelölik a mért nehézségi erőter mennyiséget és a mérési, modellezési hibáját az \mathbf{r}_i pontban, $B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ az \mathbf{r}_k pontban levő gömbi radiális bázisfüggvény, K a bázisfüggvények száma és x_k a k -adik bázisfüggvény ismeretlen paramétere. A (4.5) egyenlet vektoros alakban az \mathbf{x} ismeretlenre felírt lineáris egyenletrendszer. Az \mathbf{A} alakmátrixszal, \mathbf{y} mérési- és \mathbf{e} hibavektorral az

$$\mathbf{y} + \mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.6)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az N_{\min} és N_{\max} közötti gömbfüggvény-fokszám tartományban korlátozott $B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ gömbi radiális bázisfüggvényt Legendre-sorának b_n együtthatóival definiáljuk

$$B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (2n+1) \left(\frac{r_k}{r_i} \right)^{n+1} b_n P_n(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k), \quad (4.7)$$

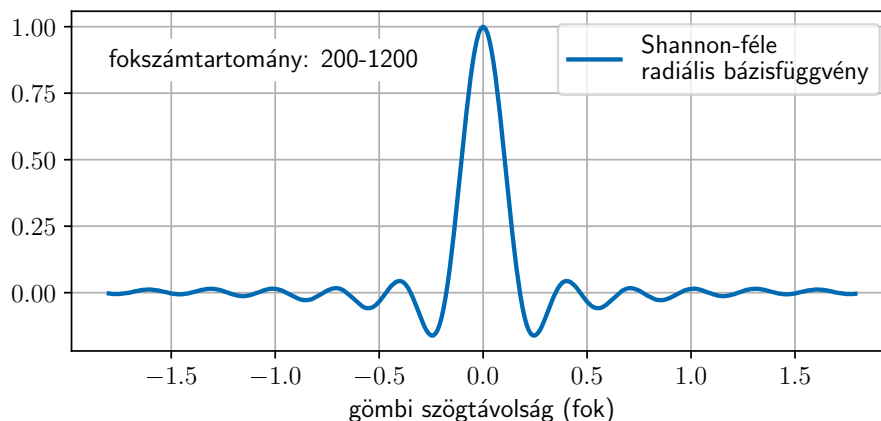
ahol $P_n(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k)$ az n -edfokú Legendre-polinom, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/r$ az \mathbf{r} vektorhoz tartozó egységvektor, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ pedig az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok skaláris szorzata. A (4.7) sorfejtésből úgy kaphatjuk a $B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ sorfejtését, hogy alkalmazzuk rá az \mathbf{F} mennyiség D differenciál operátorát. Például a ζ függővonal-elhajlás összetevőre $B^{\zeta}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ – a derivált gömbi közelítésével – a $B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ bázisfüggvény φ szélesség szerinti deriváltjából számítható ki az \mathbf{r}_i pontban

$$B^{\zeta}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (2n+1) \left(\frac{r_k}{r_i} \right)^{n+1} b_n P'_n(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k) \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial \varphi} \cdot \hat{\mathbf{r}}_k. \quad (4.8)$$

A gömbi radiális bázisfüggvények alakja függ a választott gömbfüggvény-fokszám tartománytól és együtthatóktól. Tenzer és Klees (2008) valamint Bentel et al. (2013) különböző gömbi radiális bázisfüggvényeket vizsgáltak meg. A legegyszerűbb Shannon-féle gömbi radiá-

lis bázisfüggvényeket alkalmaztam, melyek esetében a b_n együtthatók értéke 1. Ilyen függvény látható a 4.11 ábrán. Előnyös sajátosságuk, hogy az adott gömbfüggvény-fokszám tartományon kívül zérusok. Ezzel megkönnyítik a geopotenciális és terepmodellekkel történő számításokban a különböző jelösszetevők együttes használatát.

A megoldásban a gömbön szabályos lefedést adó Reuter-féle rács \mathbf{r}_k pontjaiban vannak a gömbi radiális bázisfüggvények (Eicker 2008). A rács szomszédos pontjainak állandó távolságát a c paraméter adja, ami a meridián menti pontok száma. Ez a paraméter azonos a bázisfüggvények sorfejtésének maximális N_{\max} fokszámával.



4.11. ábra. Shannon-féle radiális bázisfüggvény alakja. Az együtthatók gömbfüggvény-fokszám tartománya 200–1200

A nehézségi erőter modellezése általában rosszul kondicionált inverzfeladathoz vezet. Ennek oka többek között a mérések hibái, a peremhatás (modell területen kívüli mérések hatása), a lefelé folytatás és a szabálytalan adateloszlás. A fizikailag értelmes megoldás megtalálása további információt igényel. Ezt a lépést nevezzük regularizációnak (Naeimi 2013). A szakirodalomban számos regularizációs megoldást javasoltak, amelyekről jó áttekintést ad Bouman (1998) tanulmánya. A regularizációt gondosan figyelembe kell venni a radiális bázisfüggvényes megoldás során.

Amikor többféle adatrendszer (mérési csoport) van, akkor az $\mathbf{x} = [x_k], k = 1, \dots, K$ paramétervektort a következőképpen becsülhetjük. Az egyes adatrendszerek súlyait az egységnyi mérések szórásai (középhibái) segítségével a szokásos módon önállóan felvesszük. Ezután az i -edik mérési csoporthoz bevezetünk egy ismeretlen σ_i szórástényezőt, ami az adatrendszer többi adatrendszerhez viszonyított súlyát fejezi ki. Az utolsó „mérési” csoportnak tekintjük az ismeretlen paraméterekre vonatkozó előzetes információt. Az ehhez tartozó szórástényező σ_μ . Ez a Tyihonov-regularizáció (Bouman 1998) γ paramétere. Az adatrendszerek szórástényezőivel együtt γ is megbecsülhető, ha a regularizációt az ismeretlen paraméterekre vonatkozó előzetes információnak (prior) tekintjük a Bayes-féle becslés elmélete szerint. Ez a lényege a Koch és Kusche (2002) által javasolt szórástényező becslésnek (Variance Component Estimation, VCE). Az \mathbf{N} együttható-mátrixú normálegenlet-rendszer az egyes mérési csoportok \mathbf{N}_i együttható-mátrixú és \mathbf{n}_i vektorú normálegenlet-rendszereinek súlyozott összege

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n}, \text{ ahol } \mathbf{N} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{N}_i \text{ és } \mathbf{n} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{n}_i. \quad (4.9)$$

A normálegyenlet-rendszer megoldása az $\hat{\mathbf{x}}$ paramétervektor, de kiszámíthatók az egyes adatrendszerekből becsült $\hat{\mathbf{x}}_i$ rész megoldások is:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n} = \sum_i \hat{\mathbf{x}}_i \text{ ahol } \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}_i. \quad (4.10)$$

A megoldás tehát úgy tekinthető, mint az egyes adatrendszerekből számított rész megoldások összege. Így az is vizsgálható, hogy az egyes mérési csoportok milyen mértékben járultak hozzá a teljes megoldáshoz. A mérési csoport súlyok a becsült $\hat{\sigma}_i$ szórástényezők négyzetének

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{e}}_i}{r_i} \quad (4.11)$$

reciprokai, ahol $\hat{\mathbf{e}}_i$ a javítások vektora, \mathbf{P}_i az i -edik mérési csoport súlymátrixa és r_i a fölösmé-réshányad

$$r_i = n_i - \frac{1}{\sigma_i^2} \text{tr}(\mathbf{N}_i \mathbf{N}^{-1}). \quad (4.12)$$

Az i -edik csoport méréseinek száma n_i és $\text{tr}(\mathbf{A})$ az \mathbf{A} mátrix nyoma. Kezdetben az összes szórástényező egységnyi. Ezután számítjuk az $\hat{\mathbf{x}}$ megoldást és az új szórástényezőket. Majd az új szórástényezővel meg kell ismételni a számítást egészen addig, amíg a megoldás változása már elhanyagolható (Eicker 2008). Ha az iteráció konvergál, megkapjuk a paramétervektor optimális becslését, az egyes mérési csoportok szórástényezőit és a regularizáció paraméterét. A konvergenciához a regularizáció paraméterének jó kiinduló értéket kell adni. Erre Naeimi (2013) javaslata szerint a modellezett terület nagyságából számítható kezdőértéket használtam fel.

Az $\hat{\mathbf{x}}$ becslés ismeretében a paraméterek $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$ kovariancia mátrixa levezethető a kovarianciaterjedés törvényéből

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_i \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_i \mathbf{N}^{-1}. \quad (4.13)$$

A nehézségi erőter különböző y mennyiségeit kiszámíthatjuk nem mért pontokban az $\hat{\mathbf{x}}$ becslésnek a (4.6)-hoz hasonló egyenletekbe történő behelyettesítésével, a mennyiség bázisfüggvényének felhasználásával. A bázisfüggvényeket a *számítandó* pontokban felírva előállíthatjuk az \mathbf{A}_S mátrixot, majd az $\hat{\mathbf{y}}_S = \mathbf{A}_S \hat{\mathbf{x}}$ összefüggéssel az adott mennyiséget. Az $\hat{\mathbf{y}}_S$ mennyiség teljes kovarianciamátrixa is levezethető a kovarianciaterjedés törvényéből

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}_S \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}_S^T. \quad (4.14)$$

A különböző mennyiségek közül számunkra természetesen most a kvázigeoid magasságok számítása fontos. Mivel a radiális bázisfüggvényes modellezés a megoldást csak az N_{\min} és N_{\max} közötti gömbfüggvény-fokszám tartományban adja meg, ezért hozzá kell adni a nem modellezett gömbfüggvény-fokszám tartomány és az RTM terepmodell (Forsberg és Tscherning 1981) hatását.

4.2.2 A felhasznált adatok és redukálásuk

A nehézségi erőter modellezéséhez 11-féle mérési adatrendszerrel dolgoztam. A normál nehézségi erőteret a GRS80 vonatkoztatási rendszerben számítottam. Mivel az összes adatot redukáltam valamilyen geopotenciális modell segítségével, a továbbiakban nem a valódi potenciálfügg-

vény szokásos W jelölését, hanem a V jelölést használom. A redukcióra ebben az eljárásban is szükség van. Egyrészt az adatok korlátozott területről vannak, ami nem teszi lehetővé az N_{\min} -nél kisebb fokszámú együtthatók meghatározását. Másrészt az ismeretlen paramétereket csak a felhasznált Reuter-féle rács felbontásának megfelelő N_{\max} fokszámig számítjuk, ezért az erőter magasabb fokú részét is el kell távolítani. A felhasznált adatok a következők voltak:

- Δg szabadlevegő nehézségi rendellenességek az MGH-50 alaphálózatban (Renner és Szilárd 1959, 509 pont)
- ζ, η csillagászati-geodéziai függővonal-elhajlás összetevők a felsőrendű alaphálózat pontjaiban (138 pont)
- ζ kvázigeoid undulációk (magassági anomáliák) az OGPSH alaphálózat pontjaiban:
 - $\zeta_{Bendefy}$ a régi Bendefy-féle szintezési hálózat pontjaiban (87 pont)
 - ζ_{EOMA} az EOMA szintezési hálózat pontjaiban (149 pont)
 - ζ_{EOMAJ} az újonnan szintezett EOMA hálózat pontjaiban (97 pont)
 - V_{xz}, V_{yz} közeli terephatásra javított Eötvös-inga vízszintes gradiensek (37610 pont)
 - V_{Δ}, V_{xy} közeli terephatásra javított Eötvös-inga görbületi gradiensek (37272 pont)
 - ζ_{GPM} valamely geopotenciális modellből számított undulációk az országon kívüli Reuter-féle rácpontokban (3598 pont)

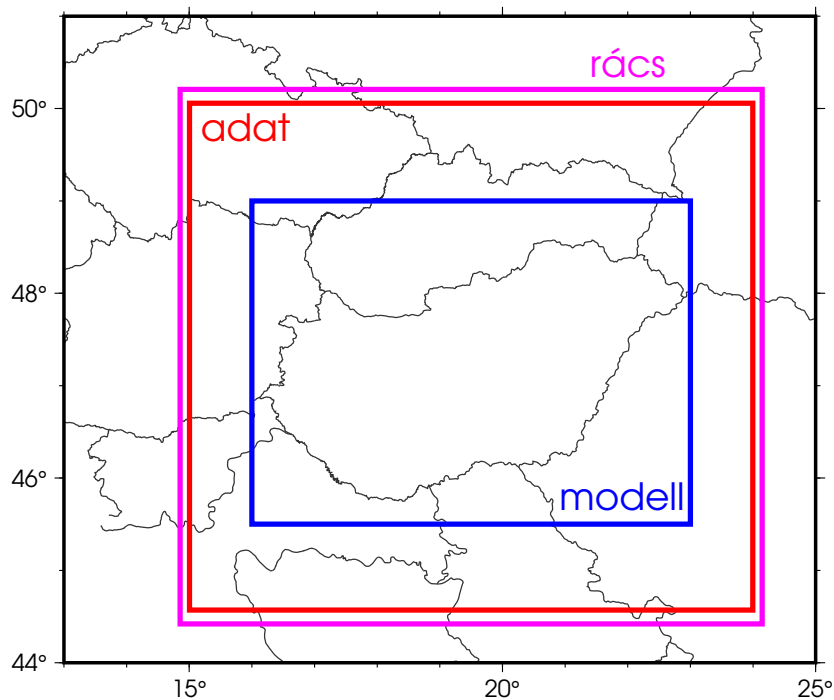
Az utolsó adatrendszer valamilyen geopotenciális modell (GPM) segítségével számított kvázigeoid undulációkat tartalmazza Magyarország területén kívül a $c = 2190$ paraméterű Reuter-féle rács pontjaiban. Ez homogén lefedést adott ott, ahol nem voltak adatok. A gömbfüggvény-sorfejtés ez esetben természetesen a gömbi radiális bázisfüggvények fokszám-tartományán belüli együtthatókat tartalmazta. Az adatrendszerek egységnyi súlyhoz tartozó szórásai (súlyegység középpontjai) a kiegyenlítés előtt az egyes adatok becslt pontosságát tükrözték. A felvett szórások az Eötvös-inga adatokra ± 5 (E), a függővonal-elhajlás összetevőkre ± 1 (″), a kvázigeoid undulációkra ± 0.1 (m) és a nehézségi rendellenességekre ± 1 (mGal) voltak.

Három geopotenciális modellt használtam, mindegyiket a modell maximális 2190 fokszámig. Az első az EGM2008-as geopotenciális modell volt (Pavlis et al. 2012), a második az EIGEN-6C4 modell, amelyben már a GOCE mesterséges hold összes mérését felhasználták (Forster et al. 2014). A harmadik az EGM2008 és GOCE DIR R05 modellek együtthatóit tartalmazta (Tóth és Földváry 2015a). A domborzat hatását az ERTM2160 elnevezésű RTM modell segítségével (Hirt et al. 2014) vettem figyelembe.

A modellezéshez felhasznált gömbi radiális bázisfüggvények fokszám-tartományát, vagyis az N_{\min} és N_{\max} értékeket az adatterület kiterjedésével összhangban kellett megválasztani. Az adatterületnek megfelelő minimális fokszám 144. A számításaim során ennél kissé nagyobb, $N_{\min} = 200$ értéket választottam, így az adatokhoz képest kissé nagyobb mértékben támaszkodtam a geopotenciális modellekben található információra. Az Eötvös-inga adatok átlagos ponttávolsága 2 km. Ha azt a szakirodalomban javasolt szabályt alkalmaztam volna, hogy az ismeretlen paraméterek száma az adatok számának körülbelül 1/3-a legyen (Wittwer 2009), akkor a megoldandó egyenletrendszer mérete 180 GB lett volna. Az ilyen nagyméretű egyenletrendszer megoldása komoly számítási nehézségekkel járt volna, ezért a kísérleti számításhoz egy kisebb felbontást adó, de kezelhető méretű egyenletrendszerhez vezető $N_{\max} = 1200$ értéket vettem fel.

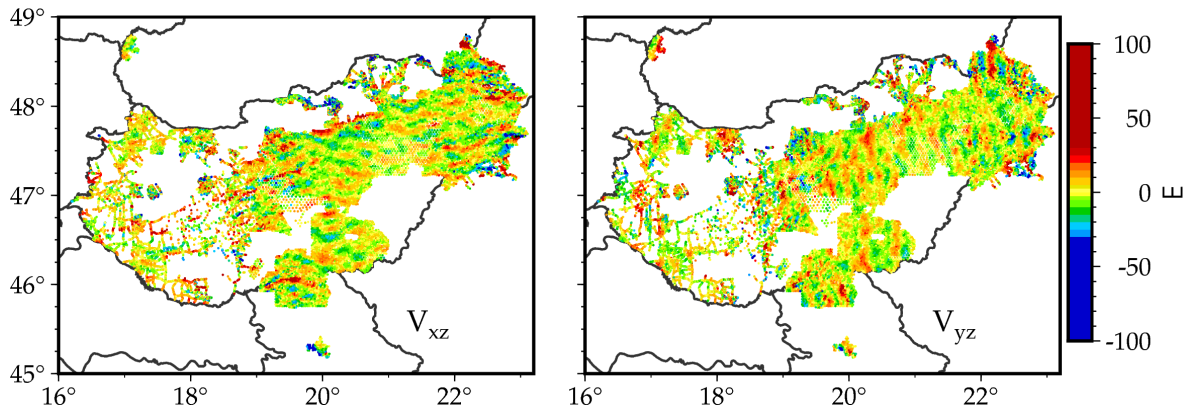
A modell területe Magyarország területét fedte le a 45.5° – 49° ellipszoidi földrajzi szélesség, 16° – 23° ellipszoidi földrajzi hosszúság tartományban (4.12. ábra). A peremhatás elkerülé-

se miatt az adatok és a gömbi bázisfüggvény rács területét ennél nagyobbra kellett megválasztani (Naeimi 2013). A modell területből kiindulva az adatterületet minden oldalon ki kellett bővíteni a 4.12. ábrán látható módon, mivel bizonyos távolságig a modell területen kívüli adatok is jelentősen hozzájárulnak a megoldáshoz. Az adatterületnél kicsit nagyobb rács területre volt szükség, mivel az adatterületen kívüli, de ahhoz közeli bázisfüggvényeknek is jelentős szerepük van a modellezéshez.

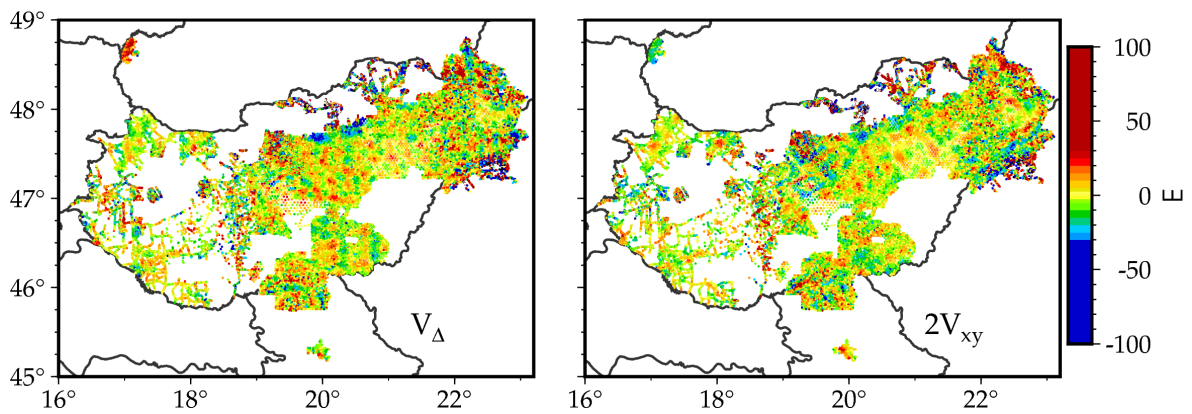


4.12. ábra. A modell, adat és rács területek kiterjedése.

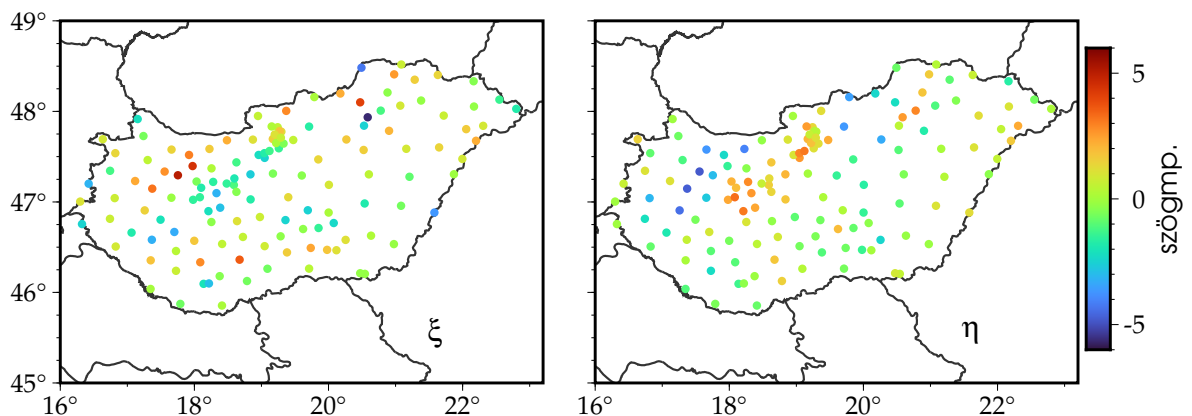
Az összes adatrendszer úgy redukáltam, hogy lehetőleg csak a választott N_{min} és N_{max} közötti gömbfüggvény-fokszám tartományban tartalmazzon információt a nehézségi erőterről. Azért csak 'lehetőleg', mert a geopotenciális modellek nincsenek teljesen összhangban a valódi nehézségi erőterrel, így a redukció után is maradhattak ezen a fokszám-tartományon kívüli összetevők. Először a 2160 fokszámnál nagyobb frekvenciájú összetevőket távolítottam el az ERTM2160 modell segítségével (Hirt et al. 2014). Ezután a geopotenciális modell hatását is eltávolítottam az adatokból az N_{min} -nél kisebb, illetve az N_{max} -nál nagyobb fokszámú együtthatók felhasználásával. Az eredményül kapott, a kísérleti számításokban felhasznált redukált mérési adatokat mutatják a 4.13 – 4.18 ábrák. A redukált adatok szórásai a 4.3 táblázatban vannak.



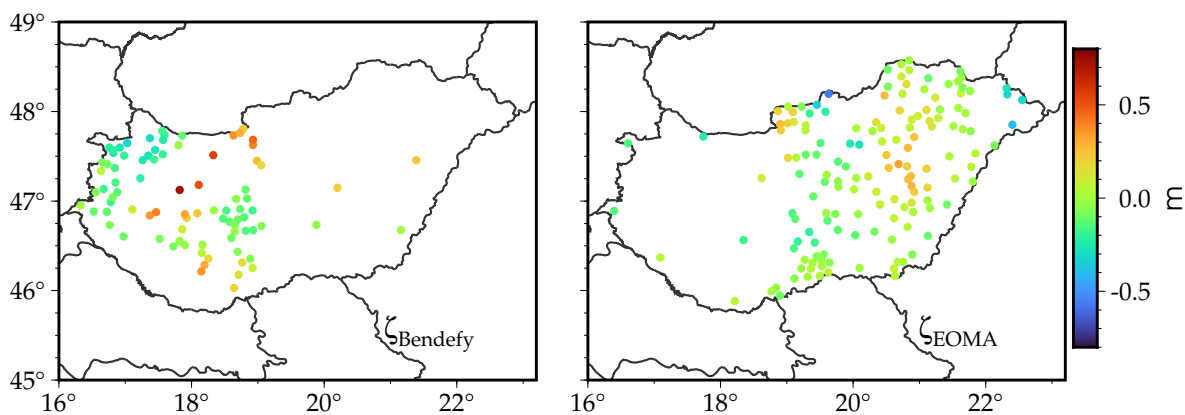
4.13. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált V_{xz} , V_{yz} Eötvös-inga gradiensek 200–1200 fokszám-tartományba eső része



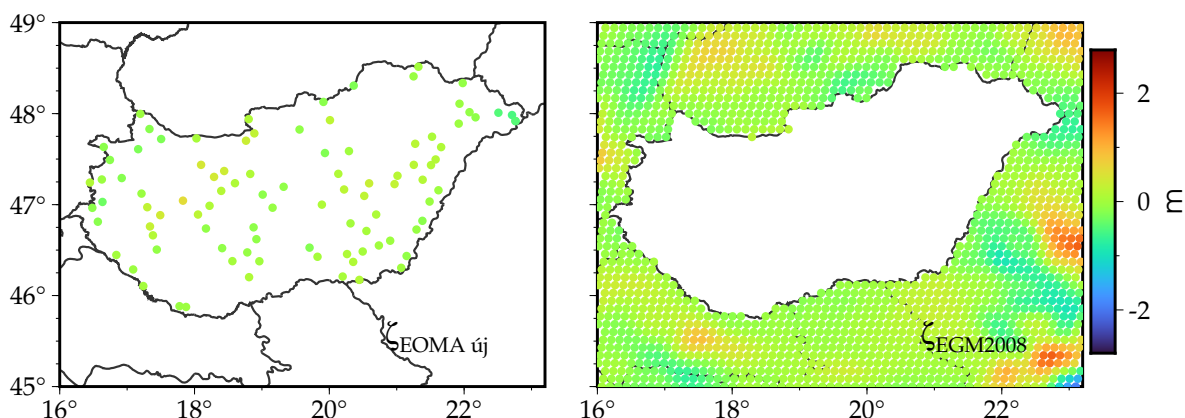
4.14. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált V_{Δ} , $2V_{xy}$ Eötvös-inga görbületi értékek 200–1200 fokszám-tartományba eső része



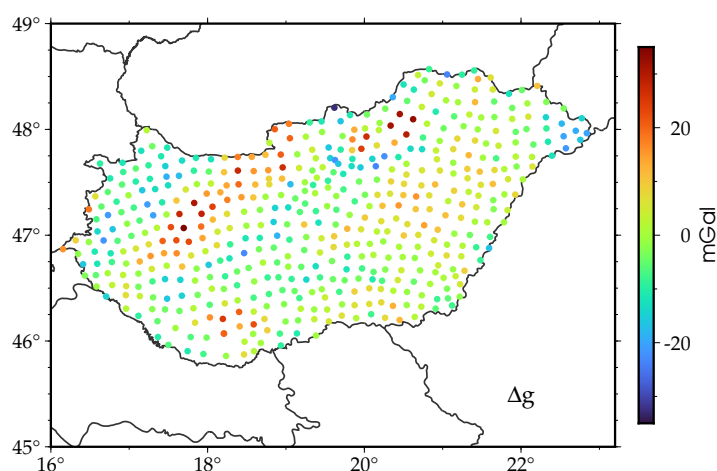
4.15. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált ξ , η függővonal-elhajlás összetevők 200–1200 fokszám-tartományba eső része



4.16. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált ζ kvázigeoid undulációk 200–1200 fokszám-tartományba eső része a Bendefy-féle és EOMA szintezési pontokban



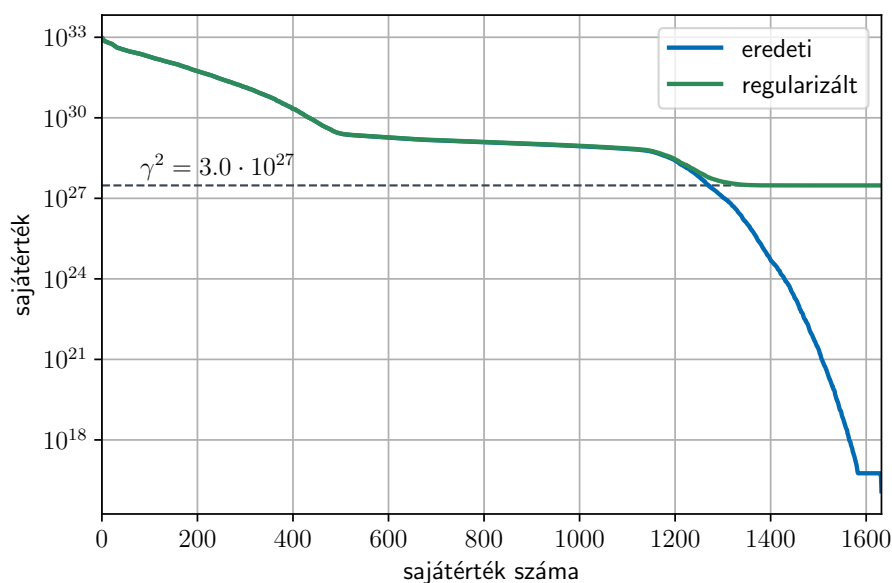
4.17. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált ζ kvázigeoid undulációk 200–1200 fokszám-tartományba eső része az újabban szintezett EOMA pontokban, illetve az EGM2008-as modellből az országon kívüli területre eső Reuter-féle rács pontjaiban



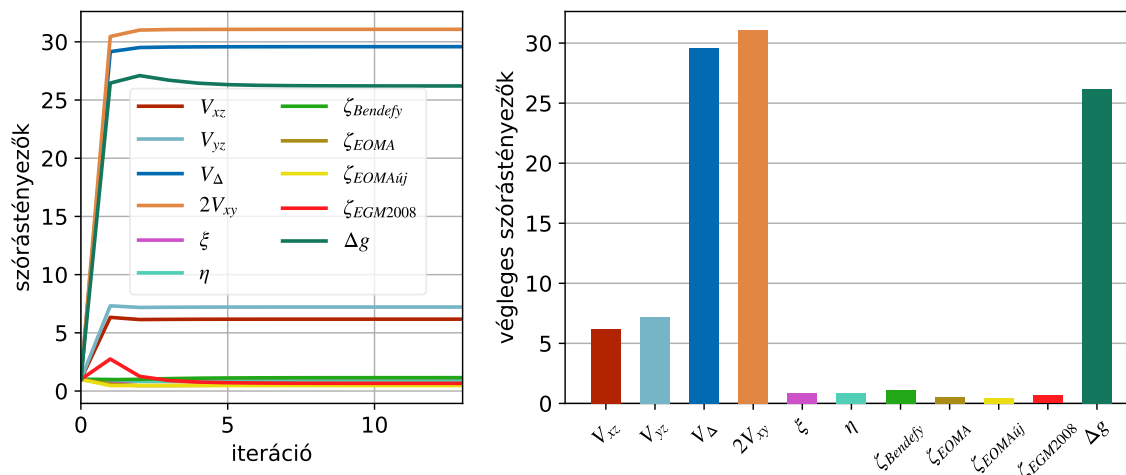
4.18. ábra. A HGTUB2015 megoldáshoz felhasznált Δg nehézségi rendellenességek 200–1200 fokszám-tartományba eső része az MGH-50 hálózat pontjaiban

4.2.3 Kísérleti számítások és eredmények

Ahogy említettük, az inverziós megoldás regularizációt igényelt. Az EGM2008-as gepotenciális modellel végzett számítás esetében a (4.9) normálegyenletrendszer együtthatómátrixának sajátértékeit mutatja a 4.19 ábra. A kondíciós szám a legnagyobb és a legkisebb sajátértékek hányadosa. Regularizáció nélkül a mátrix kondíciós száma $8 \cdot 10^{16}$, a regularizáció után $3 \cdot 10^5$. A megoldás során használt iterációs VCE eljárás (Koch és Kusche 2002) az adatok szórástényezőit is megadta. Ezek a tényezők megmutatták azt, hogy az egyes mérések – a felvett súlyegység középhibákon túl – milyen mértékben járultak hozzá a nehézségi erőter modelljéhez. A 4.20 ábra az EGM2008-as modellel számított szórástényezőket mutatja.

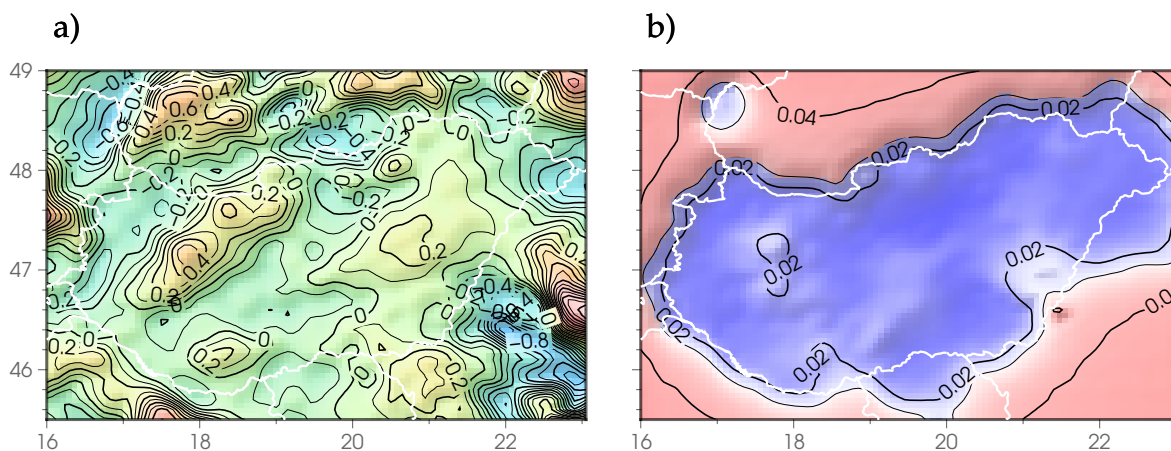


4.19. ábra. A normálegyenletrendszer együtthatómátrixának eredeti sajátértékei, és a Tyihonov-regularizáció utáni sajátértékei. A Tyihonov-regularizáció paraméterét (γ^2) az ábrán szaggatott vonallal jelöltem



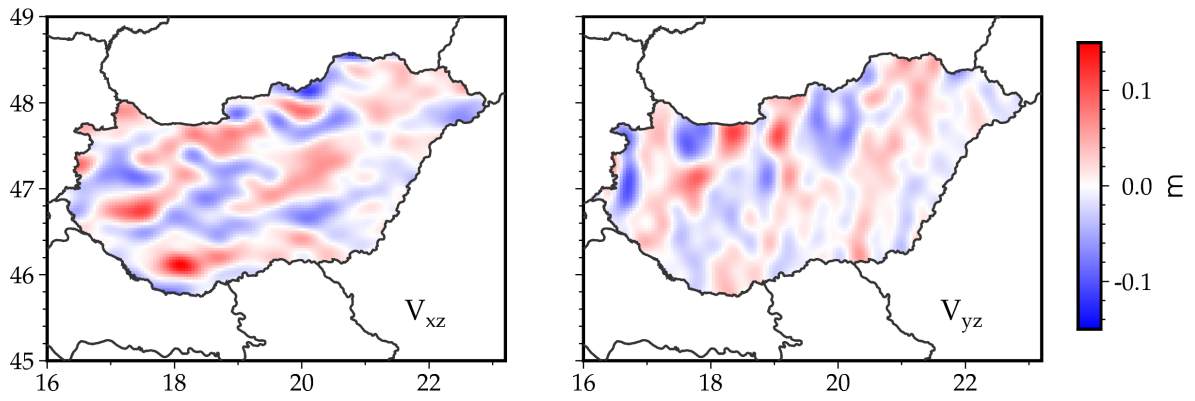
4.20. ábra. Az EGM2008-as modellel számított szórástényezők az egyes adatrendszerekre és változások az iteráció során. Kezdetben mindegyik szórástényező egységnyi volt. Az adatrendszerek egységnyi súlyhoz tartozó szórásai a kiegyenlítés előtt ± 5 E, ± 1 ", ± 0.1 m és ± 1 mGal voltak

A radiális bázisfüggvényes inverzió során az ismeretlen paraméterek teljes kovariancia mátrixát is megkaptuk, és ebből bármilyen számított mennyiség, így a kvázigeoid undulációk teljes kovariancia mátrixa is levezethető. A 200–1200 gömbfüggvény-fokszám tartományba eső kvázigeoid undulációk nagyságát és azok becsült hibáit mutatja a 4.21. ábra.

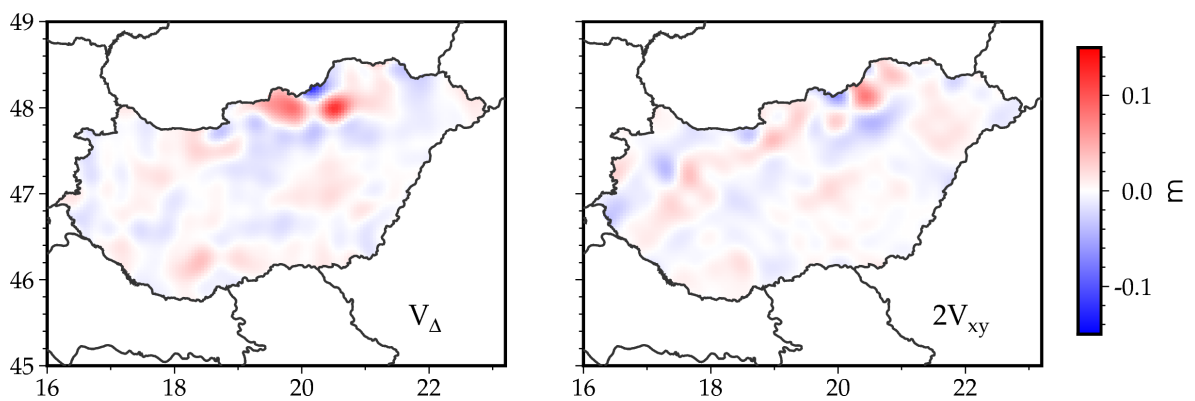


4.21. ábra. Az EGM2008 modellen alapuló kvázigeoid megoldás a) és becsült hibái b) a 200–1200 gömbfüggvény-fokszám tartományban. A mértékegység m, az izovonalköz 0.1 m és 0.01 m

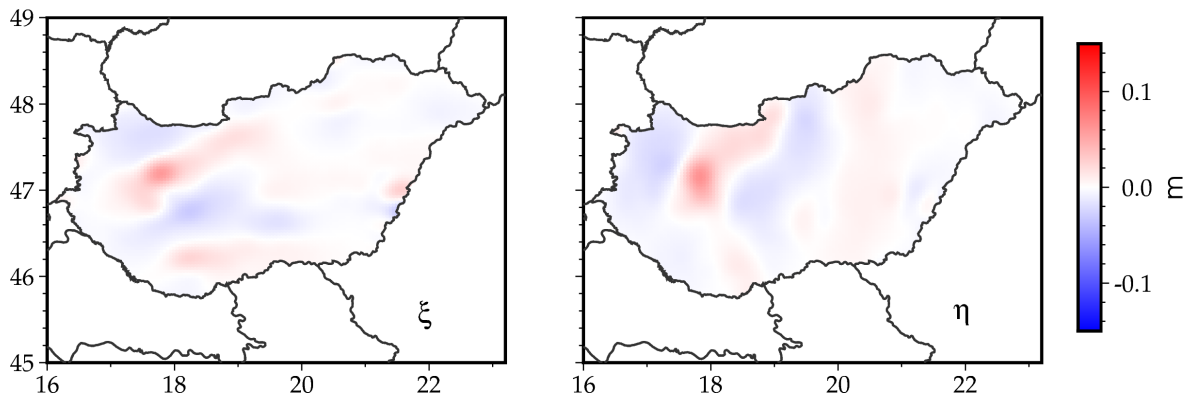
Az egyes adatrendszerekhez tartozó \hat{x}_i részmegoldásokból a számított kvázigeoid magasság részmegoldásokat is meghatároztam. Ezeket láthatjuk Magyarország területén belül a 4.22 – 4.27 ábrákon. A részmegoldásoknak kiszámítottam a szórását, ami a nagyságukat mutatja, illetve a korrelációs mátrixát, ami pedig az egyes részmegoldások statisztikai kapcsolatát jelzi (4.28 ábra).



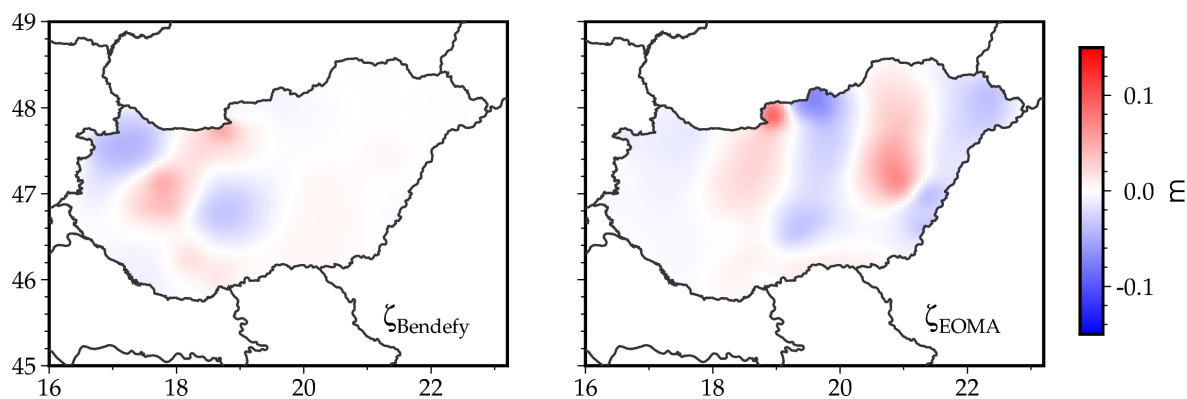
4.22. ábra. A V_{xz} , V_{yz} Eötvös-inga gradiensekből számolt rész megoldások



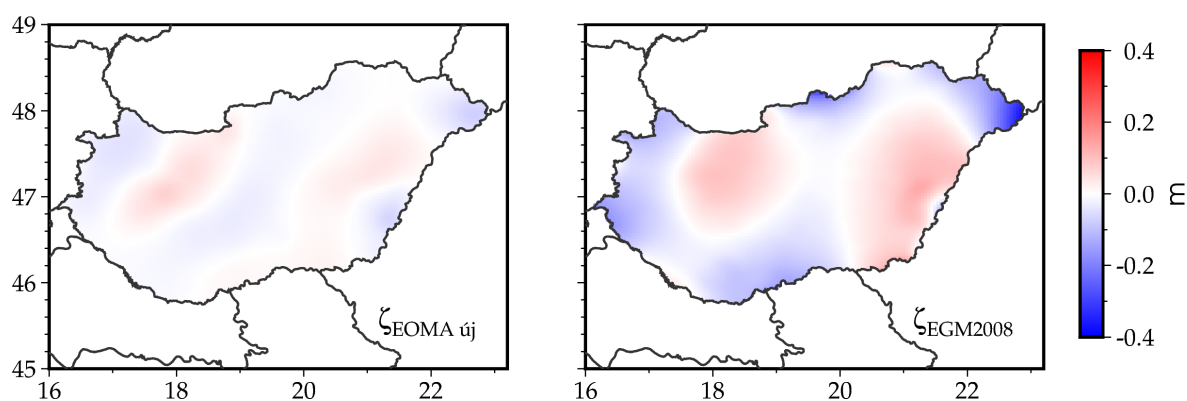
4.23. ábra. A V_Δ , $2V_{xy}$ Eötvös-inga görbületi értékekből számolt rész megoldások



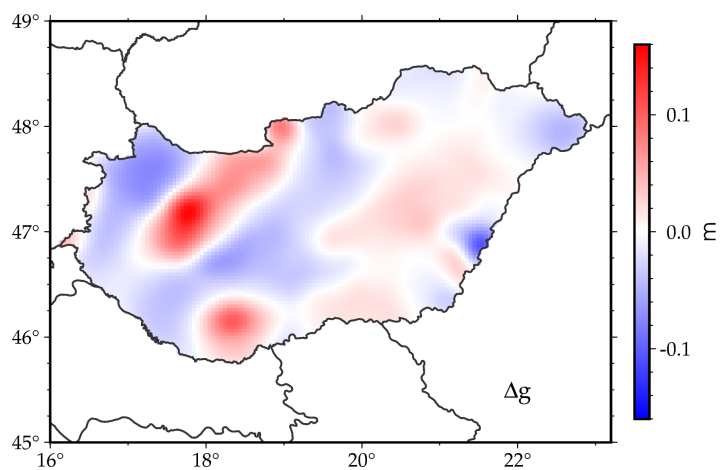
4.24. ábra. A ξ , η függővonal-elhajlás összetevőkből számolt rész megoldások



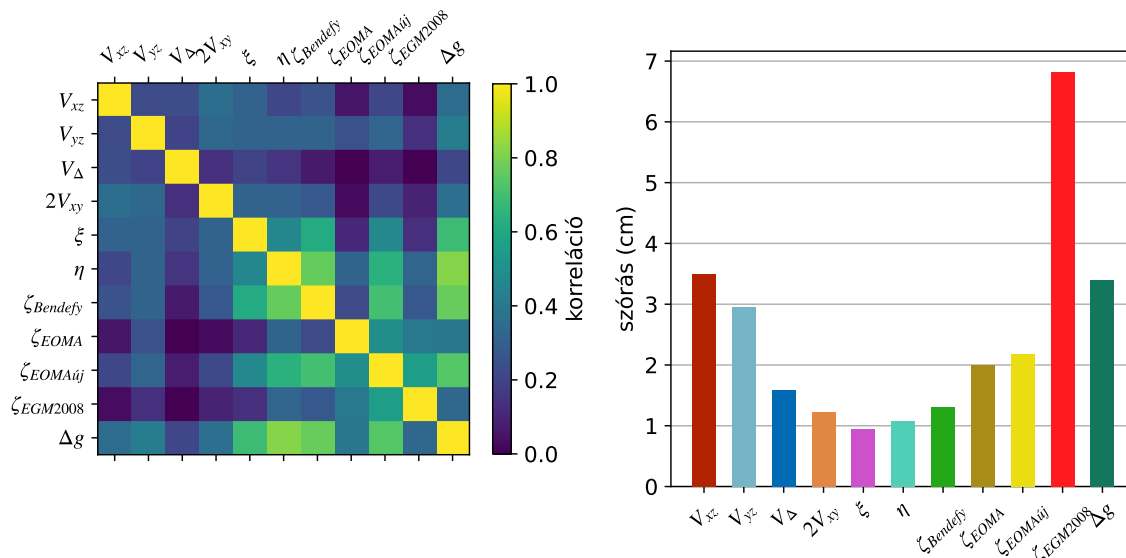
4.25. ábra. A Bendefy-féle és EOMA szintezési pontokban adott ζ kvázigeoid undulációkból számolt részmegoldások



4.26. ábra. Az újabban szintezett EOMA pontokban, illetve az EGM2008-as modellből az országon kívüli területről felhasznált ζ kvázigeoid undulációkból számolt részmegoldások



4.27. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont Δg nehézségi rendellenességekből számolt részmegoldás

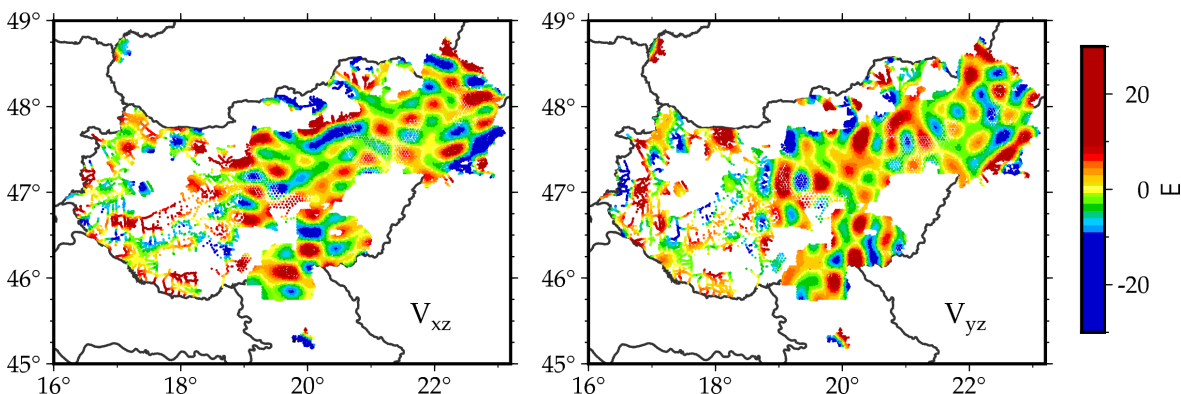


4.28. ábra. A különböző adatrendszerekhez tartozó kvázigeoid részmegoldások korrelációs mátrixa és szórásai, amelyek az egyes adatrendszerek hozzájárulásának nagyságát mutatják

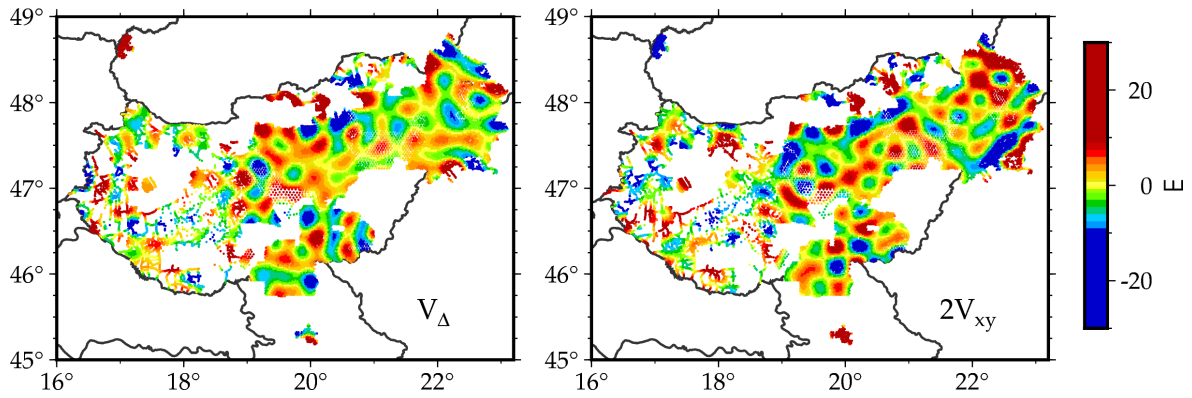
A szórástényezők, az egység súly szórása (középhibája) és a kiegyenlítés javításai ismeretében kiszámíthatók az egyes adatrendszerek végleges szórásai. Meghatározhatók továbbá az adatrendszerek jel/zaj viszonyai

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\|A\hat{x}\|}{\|e\|} \quad (4.15)$$

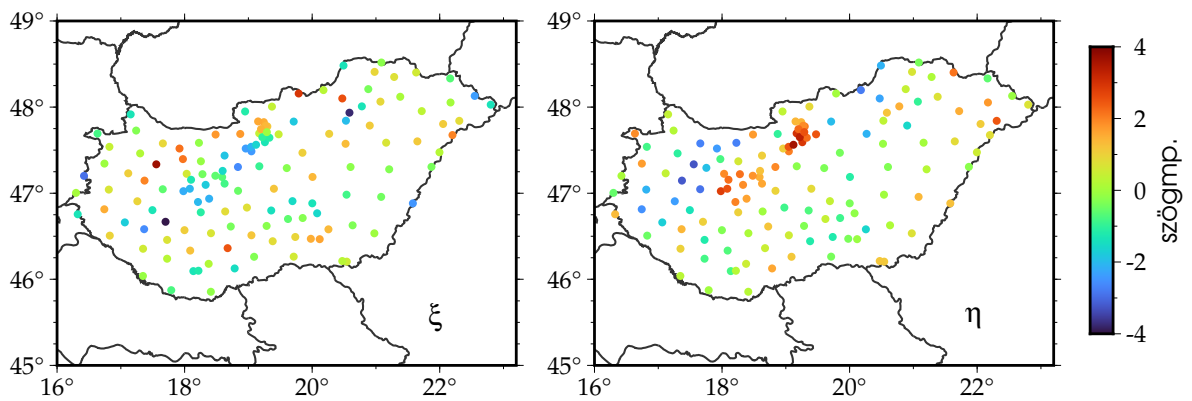
vagyis a modellezett és nem modellezett jelösszetevők átlagos nagyságának hányadosai. Ezek megmutatják, hogy az egyes adatok milyen mértékben voltak modellezhetők az inverziós eljárásban. Az említett jellemzőket a 4.3. táblázatban láthatjuk a három különböző geopotenciális modellel készített megoldás esetében. A modellbe bevont jelösszetevők nagyságát mutatják a mérési pontokban a 4.29 – 4.34 ábrák. Ezek azért érdekesek, mert egyrészt adatrendszerenként, másrészt területi eloszlásban mutatják a modellezhető jeleket.



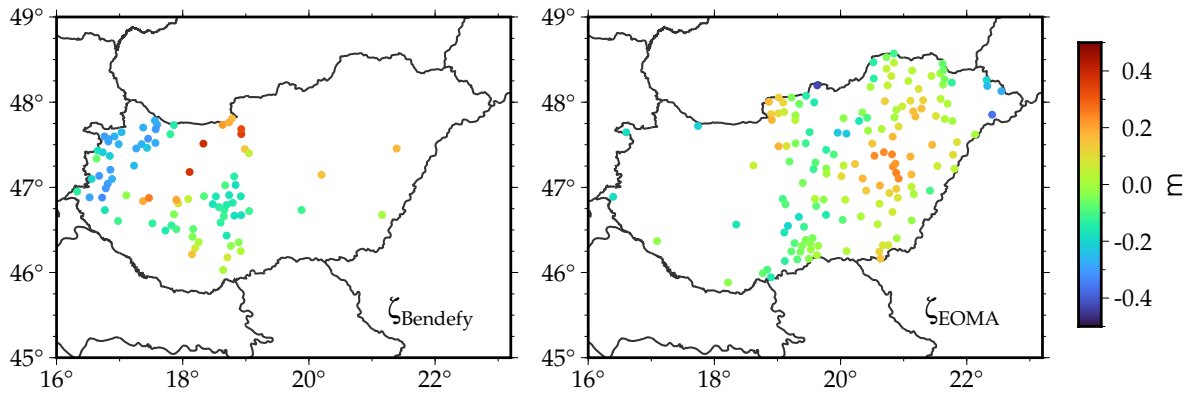
4.29. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont V_{xz} , V_{yz} Eötvös-inga gradiens jelösszetevők



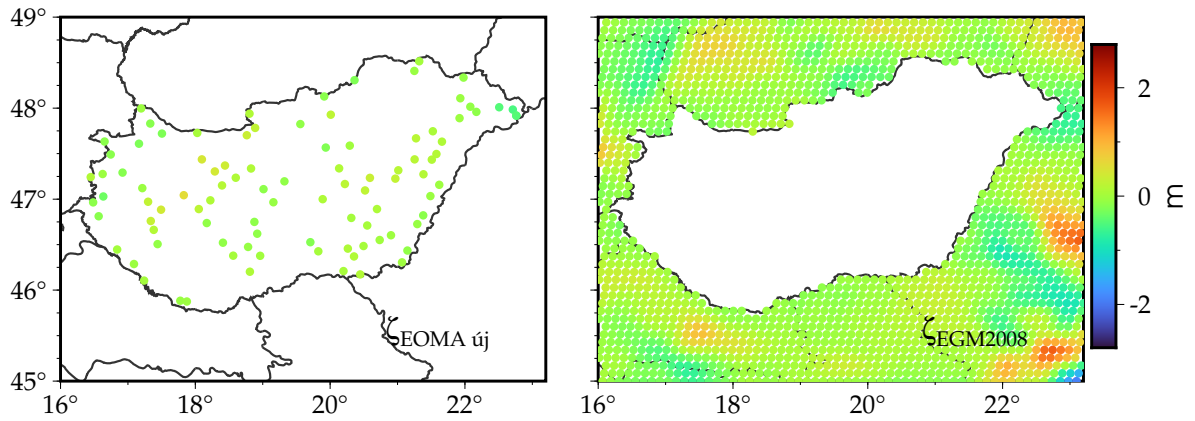
4.30. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont V_{Δ} , $2V_{xy}$ Eötvös-inga görbületi jelösszetevők



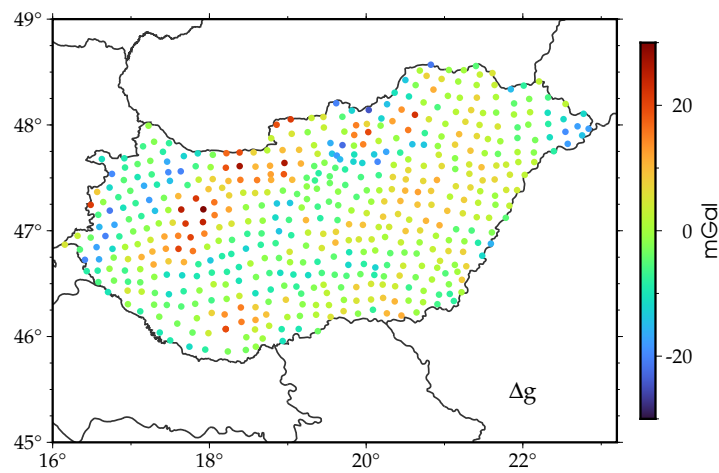
4.31. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont ξ , η függővonal-elhajlás jelösszetevők



4.32. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont ζ kvázigeoid unduláció jelösszetevők a Bendefy-féle és EOMA szintezési pontokban



4.33. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont ζ kvázigeoid unduláció jelösszetevők az újabban szintezett EOMA pontokban, illetve az EGM2008-as modellből az országon kívüli területre eső Reuter-féle rács pontjaiban

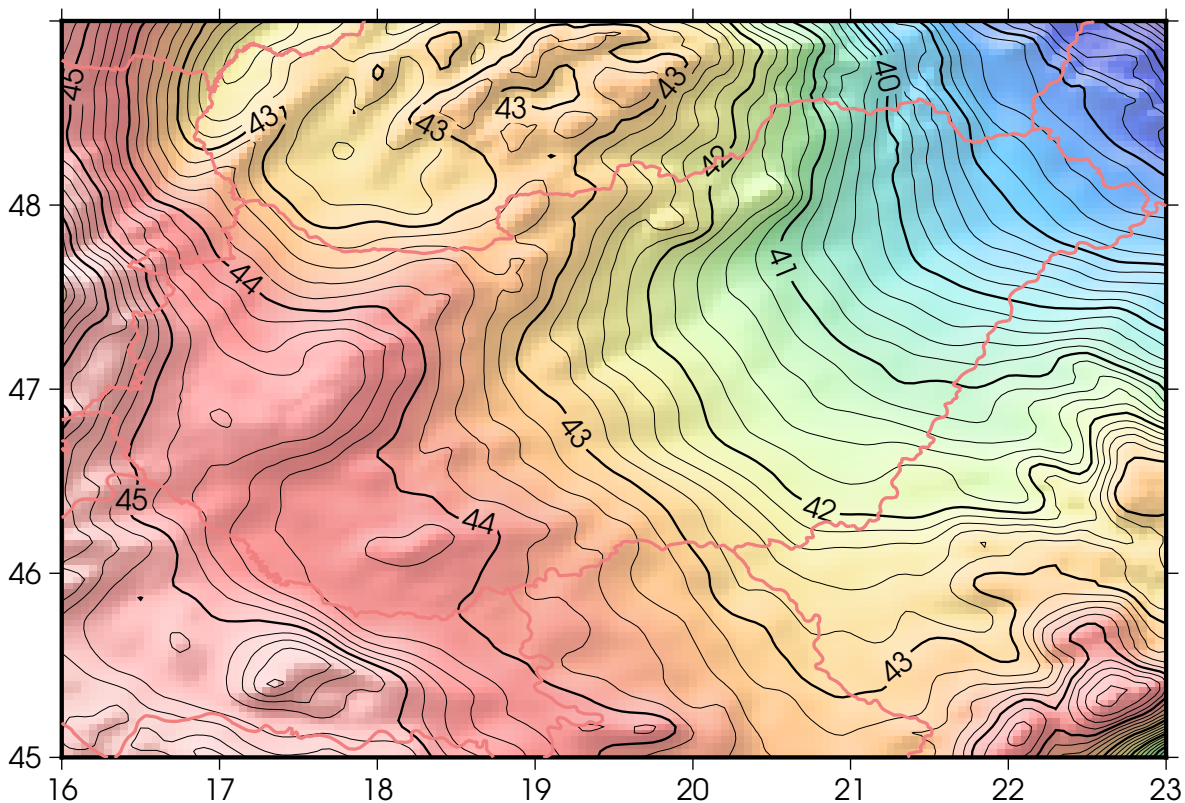


4.34. ábra. A HGTUB2015 megoldásba bevont Δg nehézségi rendellenesség jelösszetevők

Az EGM2008-as modellből számított végleges megoldást a 4.35 ábrán láthatjuk.

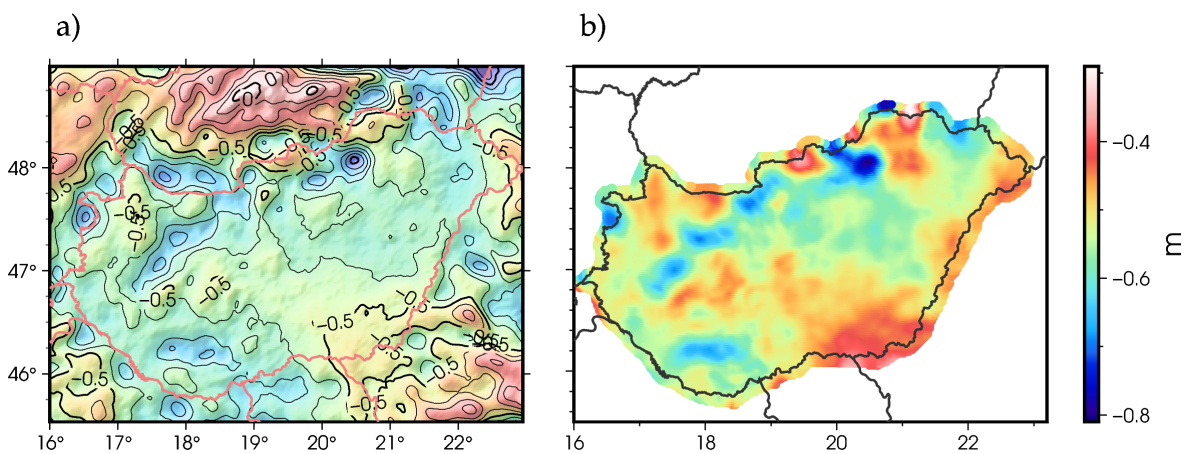
4.3. táblázat. A geopotenciális és RTM modellekkel redukált adatrendszerek σ_{GPM} szórása, a kiegyenlítés utáni nem modellezett maradékok σ_e szórása és az adatrendszerek jel/zaj viszonya a 200-1200 gömbfüggvény-fokszám tartományban

adat	típus	V_{xz}	V_{yz}	V_{Δ}	$2V_{xy}$	ζ	η
geopotenciális modell		E	E	E	E	szögmp.	szögmp.
EGM2008	σ_{GPM}	± 14.06	± 14.73	± 28.15	± 28.74	± 1.827	± 1.730
	σ_e	± 12.43	± 13.44	± 27.19	± 27.88	± 0.93	± 0.92
	jel/zaj	-2.87 dB	-3.44 dB	-5.88 dB	-5.76 dB	1.98 dB	2.44 dB
EIGEN-6C4	σ_{GPM}	± 14.06	± 14.71	± 28.14	± 28.73	± 1.820	± 1.715
	σ_e	± 12.41	± 13.42	± 27.19	± 27.86	± 0.93	± 0.91
	jel/zaj	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.97 dB	2.43 dB
GOCE R05-EGM08	σ_{GPM}	± 14.06	± 14.73	± 28.15	± 28.74	± 1.829	± 1.700
	σ_e	± 12.41	± 13.44	± 27.19	± 27.88	± 0.93	± 0.92
	jel/zaj	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.91 dB	2.30 dB
adat	típus	$\zeta_{Bendefy}$	ζ_{EOMA}	ζ_{EOMA} új	ζ_{GPM} kívül	Δg	ζ_{GPM} Mo.
geopotenciális modell		méter	méter	méter	méter	mGal	méter
EGM2008	σ_{GPM}	± 0.220	± 0.144	± 0.199	± 0.429	± 10.44	± 0.051
	σ_e	± 0.108	± 0.073	± 0.070	± 0.082	± 5.12	min: -0.187
	jel/zaj	4.78 dB	2.53 dB	4.84 dB	7.74 dB	2.66 dB	max: 0.227
EIGEN-6C4	σ_{GPM}	± 0.222	± 0.134	± 0.195	± 0.428	± 10.35	± 0.051
	σ_e	± 0.108	± 0.073	± 0.073	± 0.079	± 5.10	min: -0.189
	jel/zaj	4.44 dB	2.39 dB	4.35 dB	7.82 dB	2.65 dB	max: 0.224
GOCE R05-EGM08	σ_{GPM}	± 0.223	± 0.135	± 0.195	± 0.420	± 10.33	± 0.056
	σ_e	± 0.111	± 0.082	± 0.082	± 0.079	± 5.16	min: -0.206
	jel/zaj	4.05 dB	1.86 dB	3.65 dB	7.92 dB	2.57 dB	max: 0.219



4.35. ábra. A HGTUB2015 kvázigeoid megoldás az EGM2008-as modell alapján, a GRS80 ellipszoidhoz képest.

Az EGM2018 modellel elkészített megoldást összehasonlítottam a HGTUB2007 megoldással és az EHT/VITEL 2014 geoidmodelljével (Takács és Siki 2017). A kapott eltéréseket a 4.36 ábra mutatja. Az HGTUB2015-VITEL 2014 különbségek statisztikáit mutatja a 4.4. táblázat.



4.36. ábra. a) a HGTUB2015 EGM2008 alapú megoldás és a HGTUB2007 megoldás különbsége (m). b) a HGTUB2015 EGM2008 alapú megoldás, valamint a VITEL 2014 2 km x 2 km-es rácsháló pontjaiban EHT2014 eljárással átszámított tengerszint és ellipszoid feletti magasságok különbségeinek eltérései

4.4. táblázat. Az EGM2008 modellen alapuló kvázigeoid megoldás és az EHT/VITEL2014 geoidmodell eltéréseinek statisztikái

minimum	maximum	átlag	szórás
-0,806 m	0,294 m	-0,528 m	0,060 m

4.2.4 Összefoglalás

A gömbi radiális bázisfüggvényes eljárásban mintegy 155 ezer pontbeli mérési adatot, köztük az összes felszíni Eötvös-inga mérést felhasználtam. Sajnos csak viszonylag kevés pontbeli nehézségi rendellenességet tudtunk bevonni a megoldásba, mivel nem volt elérhető a közel 400 ezer pontot tartalmazó magyarországi nehézségi adatbázis. Az adatok életkora több évtized, ezért a nehézségi erőter időbeli változása miatt a kapott modell nem feltétlenül tükrözi a jelenlegi nehézségi erőteret. A redukált adatrendszerek többségére legjobban az EIGEN-6C4 modellje illeszkedett a radiális bázisfüggvények 200-1200 fokszám közötti tartományában.

A kísérleti gömbi radiális bázisfüggvényes regionális nehézségi erőter modellezés ésszerű eredményeket szolgáltatott. Egyik előnye a legkisebb négyzetes kollokációval szemben a kisebb tárigénye volt: 16 GB, 180 GB helyett (Tóth és Földváry 2015a), mivel ebben az eljárásban nem a mérések, hanem a bázisfüggvények számának megfelelő méretű egyenletrendszert kellett megoldani. A másik előnye az, hogy ez az eljárás – ellentétben a kollokációval – nem simítja ki túlzottan a megoldást (Kotsakis 2007).

A modellek közül a legrégebbi, EGM2008 modellel készített megoldásban lett a legnagyobb (legjobb) a legtöbb adatrendszer jel/zaj viszonya, de különösen az EOMA GNSS/szintezési adatoké (4.3. táblázat). Ez valószínűleg azért volt, mert az adatrendszerek is régebbiek. Az újabb adatokat tartalmazó EIGEN-6C4 és GOCE R05-EGM08 modellekben viszont a Magyarországon kívüli adatok jel/zaj viszonya lett a nagyobb.

A különböző adatrendszerekhez tartozó kvázigeoid részmegoldások korrelációit és szórásait mutató 4.28 ábra alapján érdekes megfigyeléseket tehettünk. Először is az látszott, hogy a legnagyobb mértékben az országon *belüli* megoldáshoz az országon *kívüli*, geopotenciális modellből számított adatok járultak hozzá, ± 7 cm-es szórással. Ezután következtek az Eötvös-ingával mért gradiensek, illetve a nehézségi rendellenességek. A függővonal-elhajlások tudtak a legkisebb mértékben hozzájárulni a kapott megoldáshoz, feltehetően azért, mert a pontsűrűség nem volt megfelelő, több ilyen adatra lett volna szükség. Az is megfigyelhető, hogy a régebbi adatok részmegoldásai egymással jobban korreláltak (nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlás összetevők, Bendefy-féle és régebbi EOMA pontok), viszont kevésbé jól korreláltak az újabban szintezett EOMA pontokból származó részmegoldással.

A közölt eredmények természetesen finomításra szorulnak, azonban bizonyították e modellezési technika egyik fontos előnyét: különböző típusú és heterogén eloszlású adatok nagyobb nehézség nélkül együtt használhatók fel egy szigorú értelemben vett paraméterbecslési eljárásban, amely egyúttal a becsült paraméterek teljes kovariancia mátrixát (nem csak a középhibákat vagy szórásokat) is szolgáltatotta.

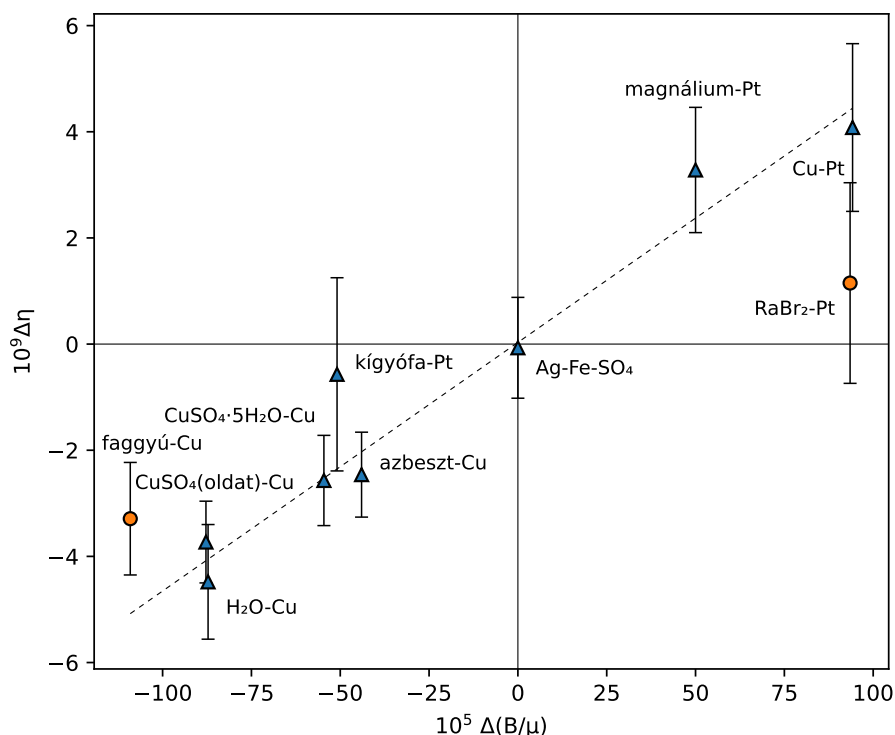
Fontosnak tartom újabb adatok felhasználását is a megoldásban. Ebben az irányban egy lépés Tóth (2020b) munkája, amiben az INGA pontok méréseit is felhasználta. Érdekes másfajta regularizációs eljárásokat is kipróbálni, például a Naeimi (2013) által javasolt PSC eljárást.

A Klees et al. (2008) által kidolgozott adaptív eljárás még jobb eredményeket szolgáltathat.

Végül rámutatunk arra, hogy közvetlen kapcsolat van a (4.5) egyenletben található x_k gömbi radiális bázisfüggvény együtthatók és a gömbfüggvény együtthatók között (Schmidt et al. 2007). Ennek segítségével fel lehet írni bármilyen regionális adatrendszerhez tartozó becült jel és hiba fokvarianciákat, amely további előnye az eljárásnak. Ezek a fokvarianciák például az optimális spektrális becslésen alapuló nehézségi erőter modellezési eljárások számára fontosak.

5 Nehézségi gradiensek jelentősége a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának mérésében

Eötvös Loránd és munkatársai, Pekár Dezső és Fekete Jenő 1906-tól több méréssorozatot végeztek (EPF-mérések) a súlyos (gravitációs) és a tehetetlen tömeg arányosságára vonatkozóan (Eötvös et al. 1922). Az ekvivalencia-mérés célja a tömegvonzási erő anyagfüggésének ellenőrzése volt. Úgy tervezték, hogy ne befolyásolja a mérés környezetében esetlegesen időben változó nehézségi erőter. Érdekes módon 1986-ban Fischbach és munkatársai (Fischbach et al. 1986) szabályos anyagfüggést találtak az EPF-mérésekben (5.1 ábra). Ez a felfedezés élénk vitát váltott ki, és bár a hatást mások azóta sem tudták kimutatni, az anyagfüggés mögött álló ok továbbra is ismeretlen. A vizsgálatainkból kiderült, hogy az időben változó tömegvonzási gradiensek a kísérletet végzők szándéka ellenére is torzíthatták az eredményeket. Sőt, még állandó, de inhomogén tömegvonzási erőterben is eltérő tömegvonzási erő hatott az eltérő alakú próbatömegekre. Ezek a problémák komolyak: megmutattam, hogy a mérés környezetében időben változó tömegvonzási erőterrel reprodukálhatók a mérési eredmények. Ezért javasoljuk az újramérést a tömegvonzási gradiensek torzításának gondos ellenőrzésével. Más, pontosabb ekvivalencia-méréseket is megvizsgáltam, vajon befolyásolhatták-e azokat is hasonló szabályos hibák. A jelen részben ezekről a vizsgálatainkról adok számot.



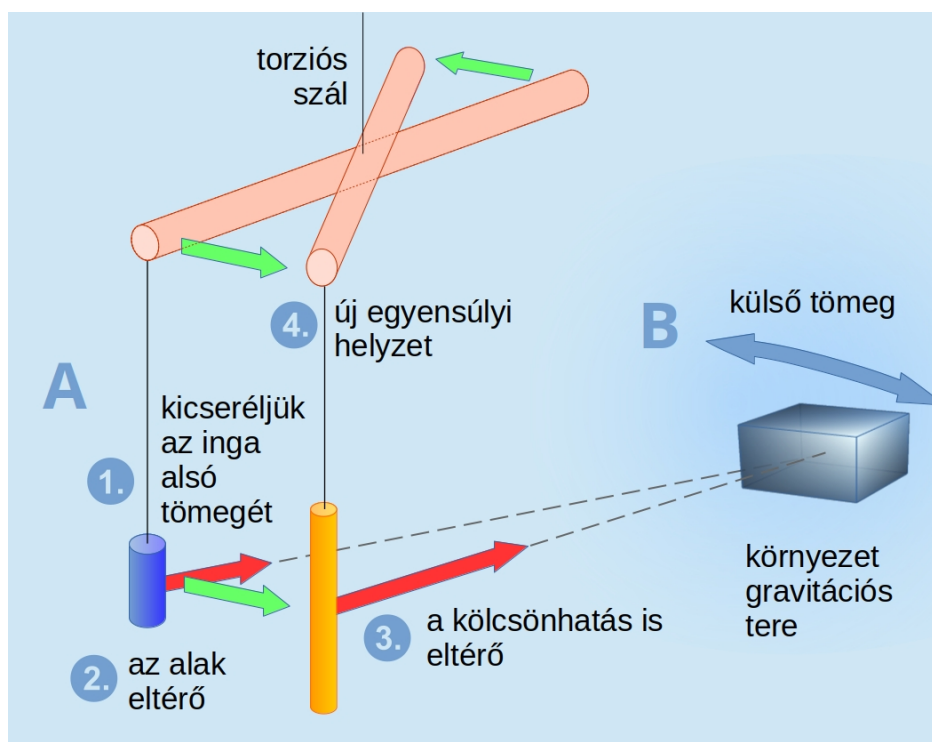
5.1. ábra. Az EPF-mérésekből kapott eredmények és becsült hibáik a B/μ barionszám/tömeg arány függvényében. Az adatok forrása a Fischbach et al. (1986) cikkében található II. és VII. táblázat. A szaggatott vonal a háromszöggel jelölt adatokhoz súlyozott legkisebb négyzetek módszerével számított regressziós egyenes.

A testek súlyos és tehetetlen tömegének Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalencia-mérése a 20. század elejének kiemelkedő eredménye volt a fizikában. Több, mint három nagyságrenddel javították a korábbi mérések pontosságát, és elsőként használtak torziós ingát az ekvivalenciaelv ellenőrzésére. A méréseik alapján az $1/100\,000\,000$ pontossági szinten sem találtak eltérést.

Fischbach és munkatársai újraelemezték az EPF adatokat, és meglepő anyagfüggést fedeztek fel a minták barionszám-tömeg arányát tekintve (5.1 ábra). Feltételeztek egy anyagfüggő ötödik erőt. Felfedezésüket újabb ekvivalencia-mérések követték, nagyrészt az Egyesült Államokban a Washingtoni Egyetemen dolgozó Eot-Wash csoporttól, de nem találtak bizonyítékot ilyen ötödik erőre. Az ötödik erő hipotézisét kísérleti alátámasztás hiányában elvetették. Az EPF-kísérlettel kapcsolatban azonban továbbra is maradtak fontos kérdések (Király 2007). Ez a kísérlet nagyban különbözött a következő, pontosabb ekvivalencia-mérésektől, és az EPF-anyagfüggést minden erőfeszítés ellenére sem sikerült fizikai okokkal megmagyarázni (Franklin és Fischbach 2016).

Ez a helyzet készítetett minket arra, hogy megvizsgáljuk a nehézségi gradiensek szerepét az EPF-kísérletben. Ezek a mérési hely szerint jelentősen, nem lineárisan változhatnak (Völgyesi és Ultman 2010). Kíváncsiak voltunk, hogy vajon látható-e ebből eredő valamilyen hatás az EPF-kísérlet eredményeiben.

Az itt bemutatott gondolatmenet szerint az EPF-mérést jelentősen torzíthatta a mérési környezet nehézségi erőterével kapcsolatos klasszikus szabályos hatás. Az erőter forrástömegmodellezésével azt találtam, hogy a nehézségi gradienseből fakadó hatás az EPF-eredményeket pontosan reprodukálhatja, ötödik erő nélkül. Az elemzés lényeges szempontjait az 5.2. ábra foglalja össze.

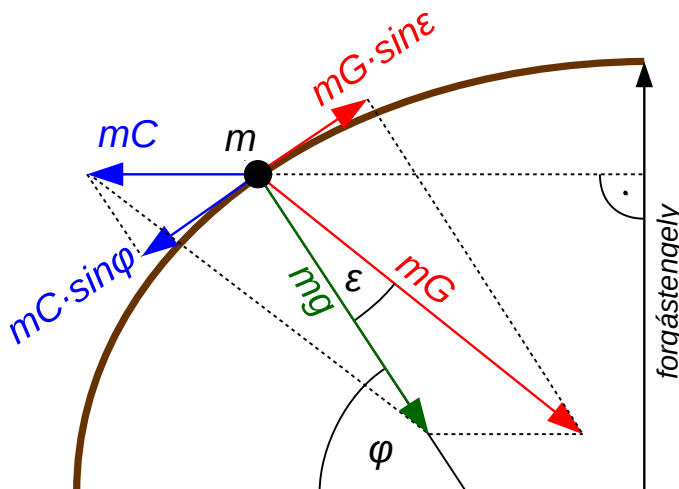


5.2. ábra. Az EPF kísérletben az inga alsó tömegét kicserélték. A.) A tömeg alakjának változása miatt megváltozott a gravitációs kölcsönhatás a környező tömegekkel és ez még változatlan nehézségi erőterben is befolyásolhatta a mérést. B.) A nehézségi erőter változhatott a mérés során.

Az 5.1 fejezetben áttekintem az EPF-mérések lényeges részleteit, és bemutatom a tömegvonzási gradiensből származó szabályos hiba okát. Az 5.2 fejezetben bemutatom a többpólusú formalizmust, és azzal modellezem az inga és a környezeti nehézségi erőter közötti kölcsönhatást. A modellel kiértékelem és elemzem az EPF-kísérletben a tömegvonzási gradiens okozta hibát. Az 5.3 fejezetben felépíték egy egyszerű környezeti nehézségi erőter modellt, és bemutatom a modellel kapott számszerű eredményeket. Az 5.4 fejezetben a tömegvonzási gradiens hibával kapcsolatban megvizsgálom néhány újabb, az EPF-kísérletnél pontosabb ekvivalenciamérést.

5.1 Az Eötvös-Pekár-Fekete kísérlet elve és a szabályos hiba oka

Az EPF kísérletek célja a Föld által okozott tömegvonzás G gyorsulásának összehasonlítása volt különböző anyagokon vagy mintákon (Eötvös et al. 1922). Eötvös eredeti gondolata az m tömegre ható tömegvonzási erő, és a centrifugális erő mC vízszintes összetevőinek összehasonlításán alapult (lásd az 5.3 ábrát). Feltételezte, hogy az mC centrifugális erő független az anyagi összetételtől, ezért ha a tömegvonzási erő függ tőle, akkor a vízszintes erők egyensúlyának hiányát a torziós ingájával ki lehet mutatni. Ha az ε szög az mg nehézségi erő (a tömegvonzási és a centrifugális erők összege) és az mG tömegvonzási erő közötti iránykülönbség, akkor $mG \sin \varepsilon$ ennek az erőnek a vízszintes összetevője. A φ ellipszoidi földrajzi szélességen a centrifugális erő vízszintes összetevője $mC \sin \varphi$.



5.3. ábra. Az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalencia-mérés elve

Eötvös bevezette a róla elnevezett η Eötvös-paramétert a tömegvonzási erő lehetséges anyagfüggésének jellemzésére. Ez a függés leírható az $(1 + \eta)mG$ képlettel, amennyiben valamilyen referencia anyagra az $\eta = 0$ értéket vesszük fel. Az Eötvös-paraméter az inga felső és alsó tömegei közötti gyorsuláskülönbség vízszintes összetevőjének és a tömegvonzási gyorsulás vízszintes összetevőjének hányadosa (Adelberger et al. 2009). Eötvösök 10 pár próbatömezzel dolgoztak. A mérés eredménye a kar alatti, cserélhető tömeg és a felső (nem cserélhető) tömeg Eötvös-paramétereinek eltérése $\Delta\eta$. Az EPF-mérések végeredményeit végül a paraméter különböző mintapárok közötti eltéréseivel adták meg (Eötvös et al. 1922). Hibátlan mérés esetén ennek nem nulla értéke az ekvivalenciaelv megsértését jelezte.

Mivel az észlelendő kis erő az észak-déli irányba mutat, ezért ez az erő a kelet-nyugati irányban álló ingakar tömegeire hatva fejt ki maximális nyomatékot. (Az irányok megadásához az inga alsó tömegének helyzetét használjuk.) Amikor az inga alsó tömege keleti irányban van, az ingára ható nyomaték $-(\eta_a - \eta_b)mGl \sin \varepsilon = -\Delta\eta mGl \sin \varepsilon$. Itt l az inga fél karhossza és η_a , η_b az alsó, illetve felső tömegekhez tartozó Eötvös-paraméter. (Pozitívnak tekintjük azt a nyomatékot, amelyik É-ról K felé forgat.) Ezután átforgatva 180° -al az ingát a nyomaték $\Delta\eta mGl \sin \varepsilon$ -ra változik. A nyomatékok különbsége tehát $-2\Delta\eta mGl \sin \varepsilon$. A forgatás után az alsó tömeg iránya (azimutja) $180^\circ + v_1$, vagyis a változás nem pontosan 180° , ha $\Delta\eta$ nem zérus. Az ingakar szög-helyzetének v_1 változása egyenesen arányos a nyomatékkülönbséggel. Az arányossági tényező a torziós szál τ csavarási állandójának reciproka. Ha megmérjük a v_1 elfordulást, η különbsége kiszámítható

$$\Delta\eta = -\frac{\tau v_1}{2mlG \sin \varepsilon}. \quad (5.1)$$

Ez az egyszerű összefüggés sajnos bonyolultabbá válik a tömegvonzási erő térbeli változása miatt. Északi-keleti-lefelé mutató tengelyű helyi koordinátarendszert vezetünk be: az x tengely északra, y keletre és z lefelé mutat. Ebben a rendszerben a tömegvonzási erőnek csak az x összetevője, g_x ad nyomatékot a kelet-nyugati irányban álló ingarúdra. Lineáris közelítéssel ennek az összetevőnek a változása a keleti és nyugati irányban levő tömegek között $m g_x(z) = m g_{xz} z$, ahol g_{xz} a g_x függőleges gradiense. Ezért a gravitációs gradiens miatti elfordulás

$$v_2 = -\frac{2}{\tau} mlh g_{xz}, \quad (5.2)$$

ahol h a tömegek függőleges irányú távolsága.

Az (5.2) összefüggésből látszik, hogy legalább két fontos feltételnek kellett teljesülnie ahhoz, hogy a gravitációs gradiens ne okozzon hibát az EPF-mérésben. Mindkettő abból következett, hogy v_2 értéke nem változhat a mérés során. Ellenkező esetben a $v = v_1 + v_2$ teljes elfordulási szög bármilyen változása az (5.1) összefüggés értelmében hibásan az ekvivalenciaelv sérüléseként értelmezhető. Megemlítem, hogy Eötvös és munkatársai teljesen tisztában voltak ezekkel a feltételekkel és ahogy látjuk majd, meg is változtatták emiatt a kísérleti elrendezést.

Az első feltétel az volt, hogy a τ csavarási állandónak, az m tömegnek, az l fél karhossznak, valamint a h függőleges távolságnak a vizsgált mintapárokra állandónak kellett lenniük, vagy ezeket pontosan mérve az eredményeket meg kellett javítani. Mivel τ állandó értéke nem volt biztosítható és a változását pontosan nem is lehetett mérni, Eötvös és munkatársai egy ügyes ötlettel kiküszöbölték változásának a hatását. Kihasználták azt, hogy az észak-déli irányban álló ingarúdra nincs anyagi különbség miatt fellépő nyomaték, viszont van gradiens hatás, amelyből az (5.2) összefüggéshez teljesen hasonlóan számítható a w elfordulás szöge

$$w = \frac{2}{\tau} mlh g_{yz} \quad (5.3)$$

a g_{yz} gradiens ismeretében. (Megjegyzem, hogy a (5.2) és (5.3) egyenletek jobb oldalainak előjele azért különbözik egymástól, mert a pozitív értelmű $m g_x$ és $m g_y$ erők forgató hatása egymással ellentétes irányú.) A v/w hányados már nem tartalmazta a kritikus τ paramétert, viszont a tömegek kicserélése miatti $\Delta\eta$ továbbra is kiszámítható, ha a gravitációs gradiensek változatlanok. Ez volt Eötvösék 2. módszere.

A második feltétel szerint a mérés környezetében a g_{xz} gradiens (valamint a 2. módszernél a g_{yz} is) a mérés közben nem változott. Ezt kiküszöbölendő Eötvösék egyidőben mértek egy-egy anyagpárt kettős ingával. Emiatt a tömegvonzási gradiensek bármilyen válto-

zása ugyanúgy hatott mindkét anyagra; v/w ugyanarra az időpontra vett különbségéből a két inga között a hatás kiesett. Az anyagpár első mérési sorozata után egy másodikat is mértek, a próbatömegeket az ingák között kicserélve. A két sorozattal végzett számítás lehetővé tette, hogy a kettős ingák kissé eltérő paraméterei és tájolása se befolyásolják az eredményeket. Ez volt a legfejlettebb 3. módszerük. Megjegyzem, hogy a kísérleteik végeredményei, a $\Delta\eta$ anyagpáronkénti értékei között a 2. és a 3. módszerrel kapott eredmények is voltak. Az 5.4. ábrán láthatjuk mind az eredményeket, mind a mérési módszereket.

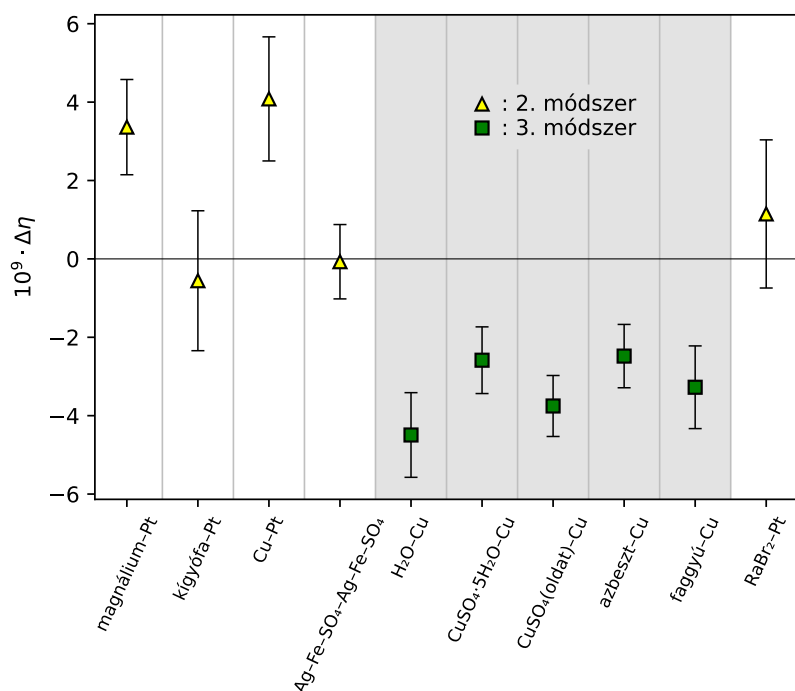
Most lássuk, honnan származik a gravitációs gradiensekből eredő további torzítás, amellyel Eötvösék nem számoltak. Az (5.2) egyenlet helytálló tömegpontok és homogén körhengerek esetében is, ha l és h a tömegközéppontjukra vonatkozik. Az utóbbit könnyen ellenőrizhetjük integrálással.

Viszont mi van akkor, ha a g_x függőleges irányú változása nem teljesen egyenletes, vagyis nem írható le a $g_x(z) = g_{xz}$ z lineáris összefüggéssel? A következő lehetőség a $g_x(z) = g_{xz}z + g_{xzz}z^2$ négyzetes közelítés. Az Eötvösék által használt henger alakú próbatömegek esetén a teljes tömegvonzási erőt $g_x(z)$ integrálásával kell kiszámítani

$$v_2 = -\frac{2}{\tau} \int_{z_1}^{z_2} m_z l g_x(z) dz, \quad (5.4)$$

ahol z_1 , z_2 jelöli a henger tetejének és aljának a magasságát és m_z egy végtelen kis keresztmetszet tömege. Egyszerű számítás után a $H = z_2 - z_1$ magasságú hengerre

$$v_2 = -\frac{2}{\tau} ml \left(h g_{xz} + \left(h^2 + \frac{H^2}{12} \right) g_{xzz} \right). \quad (5.5)$$



5.4. ábra. Az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalencia-mérés eredményei, az egyes anyagpárokra vonatkozó $\Delta\eta$ Eötvös-paraméter eltérések és becsült szórásaik

Az (5.5) összefüggés rávilágított egy további lehetséges hibára az EPF-mérésben, amelyet a gravitációs gradiensek okozhattak. Ez a próbatömegek magasságától való függés. Ha a magasság H helyett H' és g_{xzz} nem zérus, akkor a gravitációs gradiens okozta hiba az Eötvös-paraméterben

$$\Delta\eta_{hiba} = -\frac{g_{xzz}}{12G \sin \epsilon} (H^2 - H'^2). \quad (5.6)$$

A hiba miatt a valósággal ellentétben azt kaptuk, hogy sérül az ekvivalenciaelv. Mivel Eötvösök a mérésükben nagyon eltérő magasságú hengereket használtak, ez teret ad ennek a hibának. Például a Pt henger magassága 6 cm, a magnáliumé (Mg-Al ötvözet) 11.9 cm, a kígyófiaé 24 cm volt. (Megjegyzem, hogy az (5.5) egyenlet csak vékony hengerekre igaz. Ahogy majd látjuk, ennél jobb közelítés szerint $H^2/12 - R^2/4$ a függés. A hatás a henger R sugarától is függ, azonban az alakfüggő hiba továbbra is fennáll.)

A hiba az (5.6) kifejezés szerint arányos g_{xzz} -vel. Ez g_x magasság szerinti függésében a négyzetes tag együtthatója. A felületek közelében, ahol a sűrűség ugrásszerűen változik, g_x változása erősen nem lineáris. Milyen tömegek lehettek az ingákhoz közel a mérési helyszínen? Mivel hiányoznak az eredeti mérési jegyzőkönyvek, jegyzetek, rajzok, erre a kérdésre nem tudunk válaszolni. Tömegmodellekkel végzett számításaink szerint g_{xzz} változása elérhette a $0.2 - 3$ nGal/cm²-t sűrűségi határfelületek (padló, falak, stb.) 1 m-es környezetében. Nemrég egy 2,5 m széles földalatti folyosó közepén $g_{xzz} = 0.07$ nGal/cm² értéket mértünk egy pontosabbá tett Pekár G-2B típusú Eötvös-ingával (Völgyesi et al. (2018b), Szabó (2016)). Ezért a gravitációs gradiens okozta becsült $\Delta\eta$ hiba elérheti a $2 \cdot 10^{-9} - 8 \cdot 10^{-8}$ értéket és erősen függ a környezet nehézségi erőterének szerkezetétől és a próbatömegek alakjától. Összehasonlítással: ahogy az 5.4 ábrán is látható, Eötvösök a kísérletükben $\Delta\eta = \pm 1 - 6 \cdot 10^{-9}$ eredményeket

kaptak (Eötvös et al. 1922).

Ebben a fejezetben a környezet gravitációs hatásából eredő lehetséges hiba okát és várható nagyságát írtam le. A következő fejezetben bemutatom a hiba további elemzését multipólusok segítségével.

5.2 Multipólus kifejtés és a lehetséges gravitációs gradiens hatás elemzése

A multipólus kifejtés (D'Urso és Adelberger 1997) hasznos matematikai eszköz a torziós inga és a környező tömegek tömegvonzási kölcsönhatásának leírására (Su et al. 1994). A környező tömegeket a Q_{lm} multipólus *térrel* jellemezhetjük. Ekkor az ingára ható gravitációs nyomaték

$$T_g = -\frac{\partial W}{\partial \phi} = -4\pi i G \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l m q_{lm} Q_{lm} e^{-im\phi}. \quad (5.7)$$

W jelöli a gravitációs kölcsönhatás potenciális energiáját, G az egyetemes tömegvonzási állandó, q_{lm} az inga multipólus *nyomatéka* az ingához rögzített koordináta-rendszerben és ϕ az ingakar azimutiszöge. Az azimutiszöget az x tengelytől mérjük, pozitív értelemben az y tengely felé. Az Q_{11} multipólus tér nem eredményez nyomatékot, mivel a kar szabadon függ a torziós szálon; ezért az összegzés $l = 2$ -től indul.

Az volt a célom, hogy kiszámítsam a $\Delta\eta$ Eötvös paraméter megváltozását a multipólus nyomatékok és a környező tömegek multipólus tere segítségével. A 2. módszer esetében a változás

$$\Delta\eta = c \left(\frac{v}{w} - \frac{v'}{w'} \right), \quad (5.8)$$

ahol v és w az inga karjának kelet-nyugati és észak-déli irányban skálaosztás egységben kifejezett elfordulását jelöli. A 3. módszer esetében

$$\Delta\eta = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{v_1}{w_1} - \frac{v'_2}{w'_2} \right) + \left(\frac{v_2}{w_2} - \frac{v'_1}{w'_1} \right) \right], \quad (5.9)$$

ahol a vessző az eltérő próbatömeget, az alsó indexek pedig a kettős inga két külön ingáját jelölik (Eötvös et al. 1922). Az arányossági tényező

$$c = \frac{w\tau}{4LM_a l_a C \sin \varphi'}$$

ahol L a leolvasó skála távolsága a tükörtől skálaosztás egységben, M_a a próbatömeg nagysága, l_a az inga fél karhossza, τ a torziós szál csavarási állandója és $C \sin \varphi'$ a centrifugális gyorsulás vízszintes összetevője (5.3. ábra). A kar azimutjának kis változása is okozhatja az Eötvös paraméter változását, de ettől eltekintettem, mivel a gravitációs gradiensek hatására voltam kíváncsi.

Ezek után kifejeztük v -t és w -t a gravitációs nyomatékkülönbségek segítségével, amelyek viszont az (5.7) összefüggés szerinti kapcsolatban vannak a multipólus térrel. Negatív m esetében figyelembe vettük a $Q_{l,-m} = (-1)^m Q_{lm}^*$ kapcsolatot, ahol a csillag komplex konjugáltat jelöl. Feltételeztük, hogy az ingakar tömegeozslása az inga tengelye és a torziós szál által alko-

tott síkra szimmetrikus. Ekkor mindegyik q_{lm} valós. Csak az $l \leq 4$ fokszámú tagokat megtartva

$$\frac{v}{w} = -\frac{Re(p)}{Im(p)}, \quad (5.10)$$

ahol

$$p = q_{21}Q_{21} + \frac{5}{7}q_{31}Q_{31} - \frac{5}{7}q_{33}Q_{33}^* + \frac{5}{9}q_{41}Q_{41} - \frac{5}{9}q_{43}Q_{43}^*. \quad (5.11)$$

Összegezve, az (5.8–5.11) egyenletek adják meg multipólus nyomatók és terek segítségével a gravitációs gradiensek hatását az EPF-kísérlet eredményére, ha $l \leq 4$.

A v/w hányadost megvizsgálva választ kaptunk arra, hogy a próbatömegek alakja és a nehézségi erőter lehetséges változása hogyan befolyásolja a hányados értékét. Ugyanis az (5.8, 5.9) összefüggésekből látható, hogy a v/w hányados minden ilyen eredetű változása az Eötvös paraméter hibáját okozza.

Először a q_{lm} -ek alakfüggésével foglalkoztam. Valamely Ω tartományban $\rho(\vec{r})$ sűrűségű tömegeloszlás multipólus nyomatóka

$$q_{lm} = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) r^l Y_{lm}^*(\hat{r}) d^3r$$

ahol Y_{lm} (komplex) felületi gömbfüggvény, a csillag komplex konjugáltat jelöl és \hat{r} az \vec{r} irányú egységvektor. Az EPF-kísérletben használt összes próbatömeg függőlegesen felfüggesztett henger volt. Függőleges, homogén tömegeloszlású, a koordináta-rendszer kezdőpontjában elhelyezett hengerek esetében Stirling és Schlaminger (2017) összefüggéseivel számoltam, és a kapott multipólusokat eltoltam D'Urso és Adelberger (1997) eljárásával. Függőleges hengerek esetében az alacsony fokszámú ($l = 2, 3, 4$) multipólus nyomatók közül csak

$$q_{20} = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{5}{\pi}} M(H^2 - 3R^2 - 6x^2 - 6y^2 + 12z^2), \quad (5.12)$$

$$q_{31} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} M(x - iy)(H^2 - 3R^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12z^2), \quad (5.13)$$

$$q_{41} = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} Mz(x - iy)(H^2 - 3R^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4z^2) \quad (5.14)$$

alakfüggőek, ahol M a henger tömege, R a sugara, H a magassága, x, y, z a henger tömegközéppontjának a koordinátái. Ha a tömegközéppont az xz síkban van, ezek az együtthatók mind valósak. A felsorolt multipólus nyomatók, ahogy arra az 5.1 fejezetben utaltam, valóban $H^2/12 - R^2/4$ -el arányos alakfüggést fejeznek ki. Fontos megállapítás tehát, hogy ha ez a mennyiség a kísérletben használt különböző próbatömegek esetében állandó, akkor az alakhatás kiküszöbölhető. Az EPF-kísérlet szempontjából a q_{31} és q_{41} alakfüggése fontos, mivel ezek az (5.11) összefüggésben is megjelennek.

A legnagyobb nehézségi erőterétől függő hiba várhatóan az alacsonyabb fokú multipólus terétől származik. Ehhez hasonlóan a legnagyobb alakfüggő hatás a $q_{31}Q_{31}$ tagtól várható, mivel az (5.7) sor $(r/R)^l$ függvényében konvergál, ahol r a torziós inga jellemző mérete és R a legközelebbi tömeg jellemző távolsága (Su et al. 1994). Ezért az alak és nehézségi erőter függő hiba elemzésben elsősorban a (5.11) első két tagjára összpontosítottam, vagyis két multipólus összetevőt (Q_{21} és Q_{31}) tartalmazó tömegvonzási erőteret tételeztem fel.

A hiba számszerűsítéséhez kiszámítottam v/w teljes deriváltját a multipólus nyomatók

és terek dq_{31} , dQ_{21} és dQ_{31} végtelen kis növekményei szerint

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = -\frac{1}{\text{Im}(p)} \left(\frac{5}{7} dq_{31} Q_{31}^+ + q_{21} dQ_{21}^+ + \frac{5}{7} q_{31} dQ_{31}^+ \right), \quad (5.15)$$

ahol a $dQ_{21}^+ = \text{Re}(dQ_{21}) + v/w \text{Im}(dQ_{21})$, $dQ_{31}^+ = \text{Re}(dQ_{31}) + v/w \text{Im}(dQ_{31})$, $Q_{31}^+ = \text{Re}(Q_{31}) + v/w \text{Im}(Q_{31})$ és $p = q_{21} Q_{21} + \frac{5}{7} q_{31} Q_{31}$ rövidítéseket használtam. Ahogy említettem, az (5.15) összefüggéssel felírt v/w változás közvetlenül hozzákapcsolható a $\Delta\eta$ hibájához az (5.8) és (5.9) kifejezésekkel.

Az (5.15) jobb oldalának első tagja a dq_{31} -től függő alakhibát adja, míg a másik kettő a nehézségi erőteréből származót a dQ_{21}^+ és dQ_{31}^+ függvényében.

A 2. módszer esetében (lásd 5.8 egyenlet) mindhárom tag befolyásolhatta az Eötvös paramétert, hiszen v/w és v'/w' értékeit az EPF-kísérletben különböző próbatömegekkel egymás után végzett mérési sorozatokból számolták ki. Jelentős időnek kellett eltelni az egyes mérési sorozatok között. Bár Eötvös et al. (1922) nem közölt részleteket a méréseik időzítését illetően, de azt megadták, hány mérés volt az egyes mérési sorozatokban. Úgy becsülhető, hogy legalább egy hét, de inkább több is eltelt az egyes mérési sorozatok között, amely időszak alatt a nehézségi erőter nem biztos, hogy változatlan maradt. És természetesen ott van még a próbatömeg alakjától függő hatás dq_{31} miatt, függetlenül attól, hogy az erőter változott-e vagy nem.

A 3. módszer esetében (lásd 5.9 egyenlet) Eötvösék *egyszerre* mértek a kettős ingával. A v/w és v'/w' számítását gyakorlatilag *egyidejű* mérésekből végezték, ezért a dQ_{21}^+ és dQ_{31}^+ tényezőktől függő hibák még változó erőterben is majdnem ugyanazok voltak v/w és v'/w' hányadosok esetében. Különbségeik (5.9) szerint kiestek, nem okoztak hibát. Viszont az (5.15) első tagja hibát okozhatott, hiszen q_{31} különbözött az egyes próbatömegekre, vagyis dq_{31} nem volt nulla a kísérlet során. Látszik, hogy ez a hiba függ a Q_{31}^+ multipólus tértől. Ez megváltozhatott a mérés során, hiszen két mérési sorozatot mértek, az első után a két inga között felcserélve a próbatömegeket. Ezért a nem nulla alakfüggés miatt (nem nulla dq_{31}) még ennél a módszernél is hibás lehetett az Eötvös paraméter próbatömegek közötti eltérése, ha megváltozott a környezet nehézségi erőtere.

Megtartottam az (5.15) egyenlet első tagját és bevezettem a dq_{31}/q_{31} relatív változást. Ekkor

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = -\frac{5}{7} \frac{Q_{31}^*}{\text{Im}(Q_{21}) + 5/7 \text{Im}(Q_{31}) q_{31}/q_{21}} \cdot \frac{dq_{31}}{q_{31}}. \quad (5.16)$$

Megállapítottam tehát, hogy a 3. módszerben (vagy a 2. módszerben változatlan nehézségi erőterben) a hiba egyenesen arányos a dq_{31}/q_{31} hányadossal, ha a q_{31}/q_{21} hányados illetve a Q_{21} , Q_{31} multipólus terek a próbatömeg párokra azonosak voltak. Ezt a fontos összefüggést használtam később Eötvösék eredményeinek az ellenőrzésére amiatt, hogy a multipólus terek (a környezet nehézségi erőtere) ismerete nélkül is használható.

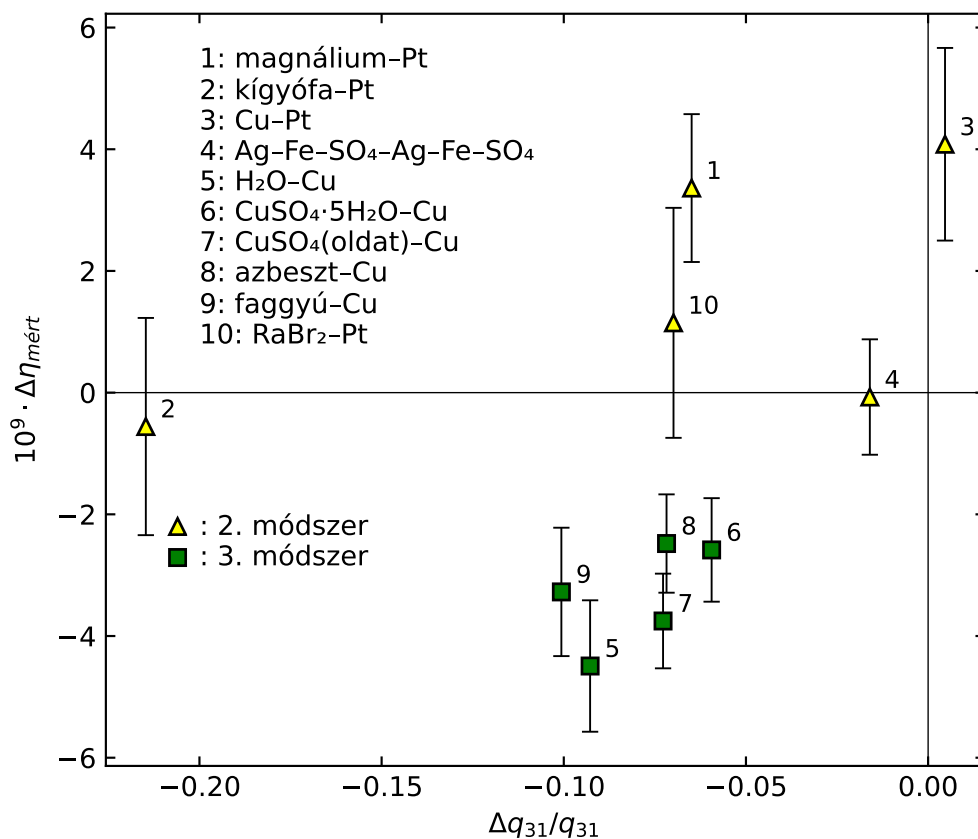
Végül megjegyzem, hogy ha a p -ben másodfokúnál magasabb fokú tagokat elhanyagoltam (Eötvösék elemzését követtem), akkor a kísérlet lehetséges hibája csak a Q_{21} változása miatt következhetett be, vagyis az (5.15) második tagja miatt. Ezt a hibát kerülték el Eötvösék a 3. módszerükkel.

Látható tehát, hogy amennyiben a magasabb fokú multipólus terek nem hanyagolhatók el, még a 3. módszer eredményei is hibásak lehettek. Ennek oka próbatömegek alakfüggő csatolódása a nehézségi erőterhez (5.2 ábra).

5.3 Az EPF-kísérlet lehetséges hibájának számszerűsítése és elemzése

A számítás kiinduló adatai, az $\Delta\eta$ Eötvös paraméter különbségek és szórásaik láthatók az 5.4 ábrán a 10 mért próbatömeg párra. Ezeket az eredeti Eötvös et al. (1922) cikkben található v/w hányadosok és azok becsült szórásai alapján számítottam újra.

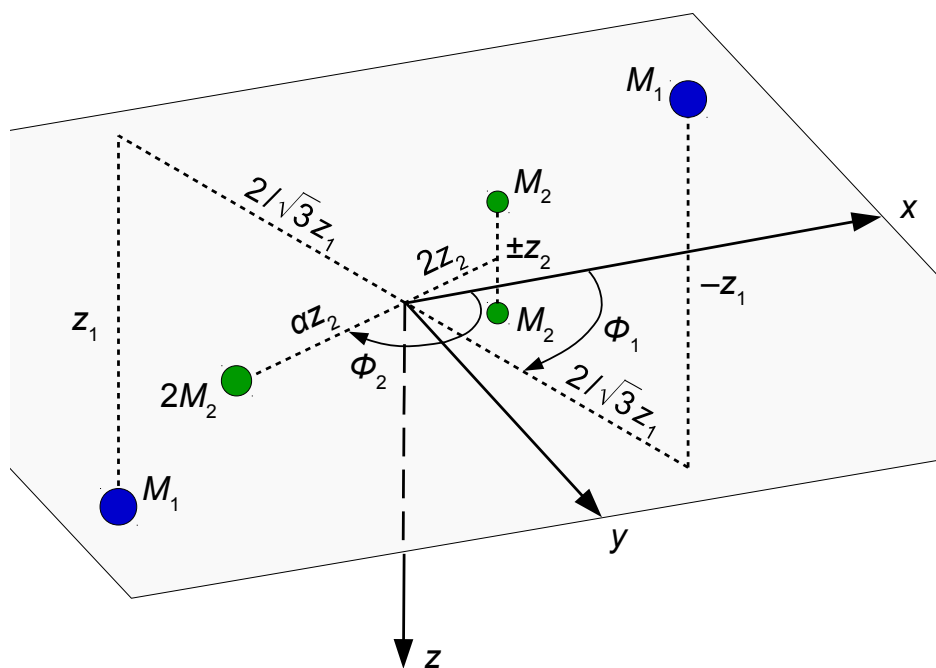
Viszonylag egyszerű volt kiszámítani az Eötvösék által használt ingák multipólus nyomatékait az Eötvös et al. (1922) cikkben közölt paraméterekből. A függőleges és vízszintes tengelyű hengerek multipólus nyomatékait D'Urso és Adelberger (1997), Stirling és Schlaminger (2017) alapján számítottam ki. A kísérletben használt inga karja 0.5 cm átmérőjű sárgaréz cső volt. A felső 30 g tömegű Pt hengert a csőben helyezték el (Selényi 1953). Az ingakar hiányzó méreteit a közölt tehetetlenségi nyomatékokból (Eötvös et al. 1922) határoztam meg. A teljes ingatest tömegmodelljével végeztem az összes számítást, beleértve a különböző próbatömegeket, az ingakart és a felső tömeget, hacsak külön nem jeleztem. Az egyértelműség kedvéért az 5.1 táblázatban közlöm az inga multipólus nyomatékait és a kiszámított q_{31}/q_{21} hányadosokat.



5.5. ábra. Az Eötvös-paraméter $\Delta\eta$ különbségei az EPF kísérletben az inga $\Delta q_{31}/q_{31}$ tömegcsere miatti relatív multipólus változása függvényében. Ha a különböző próbatömegekre a q_{31}/q_{21} hányadosok állandók, akkor $\Delta\eta$ lineárisan fog változni a 3. módszer esetében, valamint időben változatlan erőterben a 2. módszer esetében is. Jól látható a 3. módszerre a közelítő lineáris függés, ami alátámasztja a szabályos hiba hipotézisét.

Az 5.2 fejezetben láttuk, hogy a 3. módszer, illetve változatlan nehézségi erőterben a 2. módszer esetében a gradiensek okozta hiba egyenesen arányos dq_{31}/q_{31} -el. Ez akkor teljesül, ha a q_{31}/q_{21} hányadosok és a Q_{21} , Q_{31} multipólus terek a különböző anyagpárokra állandók. Az 5.1 táblázatból látszik, hogy q_{31}/q_{21} a 3. módszer során 2 %-nál kevésbé változott a különböző anyagpárokra és 16 %-nál kevésbé a 2. módszer során. Időben változatlan nehézségi erőterben tehát közel lineáris változás lenne várható a $\Delta\eta$ Eötvös paraméter különbségekben. Az 5.5 ábra a $\Delta\eta$ változását mutatja $\Delta q_{31}/q_{31}$ függvényében az anyagpárok különböző próbatömegei között. A 3. módszer esetében a két kissé eltérő $\Delta q_{31}/q_{31}$ érték átlagával számoltam.

Az EPF-mérések helyszínéhez (helyszíneihez) közeli tömegek nagyságát és elhelyezkedését sajnos nem ismerjük. Ahogy említettem, sem mérési vázlatok, sem jegyzőkönyvek nincsenek, amik ebben a segítségünkre lehetnének. Így csak találgathatjuk, hogy mekkora hibát okozhatunk a tömegvonzási gradiensek a kísérletben. Ezzel ellentétben a torziós ingák forgatásával végzett újabb ekvivalenciakísérletekben a multipólus tereket gondosan megmérték és kompenzálták (Su et al. 1994; Wagner et al. 2012; Xu et al. 2017), hogy elkerüljék a tömegvonzási gradiensek okozta hibát.



5.6. ábra. A környezeti nehézségi erőter tömegpont modellje. Az egyik része két azonos, a kezdőponthoz képest szimmetrikusan elhelyezett M_1 és M_1 tömegből áll. Ez a rész modellezi a nem zérus Q_{21} multipólus tereket és a Q_{43} sem zérus. A másik rész három, $2M_2$, M_2 és M_2 tömegből áll, ami a Q_{31} multipólus tereket modellezi (ld. 5.2 táblázat). Az α paraméter értéke $5/2\sqrt[8]{4/5}$

Szerettem volna azonban annak ellenére is megmutatni az időben változó nehézségi erőter hatását az EPF-kísérletek eredményére, hogy nem ismerjük a közeli tömegekből származó multipólus tereket. Ezért egy egyszerű tömegmodellt készítettem a környezeti nehézségi erőter előállításához (5.6. ábra). Tisztában vagyok vele, hogy ez a modell mesterkélt. Ennek ellenére úgy gondolom, hogy megfelel annak a célnak, hogy megmutassa, mennyire érzékeny volt az EPF-mérés a próbatömegek alakja miatt a mérés környezetének időben változó tömegvonzására.

5.1. táblázat. Az ingakar és a hozzá kapcsolt tömegek multipólus nyomatékai és q_{31}/q_{21} hányadosai az EPF-kísérletben mért próbatömegekkel. A számításokat a közölt adatok alapján végeztem. A sorrend azonos az Eötvös et al. (1922) által közölt sorrenddel. Csillaggal jelöltem a 2. módszerrel mért próbatömegeket. Az egyszerű és kettős ingák paramétereit Eötvös et al. (1922), Selényi (1953) alapján vettem fel. A koordináta-rendszer kezdőpontja az inga tömegközéppontja, a z-tengely lefelé, az x-tengely pedig az ingakar irányába mutat az alsó tömeg felé

Ssz.	próbatömeg	q_{21}	q_{31}	q_{33}	q_{41}	q_{43}	q_{31}/q_{21}
		10^3 g cm^2	10^5 g cm^3	10^4 g cm^3	10^6 g cm^4	10^6 g cm^4	cm
1.*	magnárium	-8.3228	-0.8134	-2.2382	2.1409	-4.9000	9.77
2.*	Pt	-8.3539	-0.7606	-2.2274	2.4847	-4.9165	9.10
3.*	kígyófa	-8.0080	-1.1556	-2.4277	0.5126	-4.7800	14.43
4.*	Pt	-8.3101	-0.9075	-2.2611	2.2896	-4.9278	10.92
5.*	Cu	-8.3255	-0.9107	-2.2451	2.2757	-4.9340	10.94
6.*	Pt	-8.3510	-0.9149	-2.2465	2.2786	-4.9494	10.96
7.*	Ag-Fe-SO ₄	-8.4156	-0.8502	-2.2556	2.0067	-4.9577	10.10
8.*	Ag-Fe-SO ₄	-8.3556	-0.8366	-2.2536	2.0365	-4.9220	10.01
1.	H ₂ O	-8.3994	-1.0159	-2.2430	1.6862	-4.9774	12.10
2.	Cu	-8.4586	-0.9615	-2.1794	2.2868	-5.0424	11.37
3.	Cu	-8.3255	-0.9107	-2.2451	2.2757	-4.9340	10.94
4.	H ₂ O	-8.4607	-1.0491	-2.1780	1.7296	-5.0434	12.40
5.	CuSO ₄ ·5H ₂ O	-8.3522	-0.9867	-2.2430	1.8215	-4.9494	11.81
6.	Cu	-8.4692	-0.9758	-2.1777	2.2069	-5.0484	11.52
7.	Cu	-8.3198	-0.9196	-2.2355	2.2061	-4.9289	11.05
8.	CuSO ₄ ·5H ₂ O	-8.4656	-1.0306	-2.1664	1.8453	-5.0442	12.17
9.	CuSO ₄ (oldat)	-8.3584	-0.9949	-2.2387	1.7739	-4.9523	11.90
10.	Cu	-8.4415	-0.9668	-2.1692	2.2265	-5.0304	11.45
11.	Cu	-8.3198	-0.9196	-2.2355	2.2061	-4.9289	11.05
12.	CuSO ₄ (oldat)	-8.4769	-1.0418	-2.1696	1.7889	-5.0515	12.29
13.	azbeszt	-8.3954	-0.9967	-2.2376	1.8011	-4.9740	11.87
14.	Cu	-8.4415	-0.9668	-2.1692	2.2265	-5.0304	11.45
15.	Cu	-8.3164	-0.9187	-2.2351	2.2080	-4.9268	11.05
16.	azbeszt	-8.4849	-1.0364	-2.1696	1.8324	-5.0563	12.21
17.	faggyú	-8.3602	-1.0280	-2.2348	1.5629	-4.9527	12.30
18.	Cu	-8.4415	-0.9668	-2.1692	2.2265	-5.0304	11.45
19.	Cu	-8.3164	-0.9187 ⁶⁶	-2.2351	2.2080	-4.9268	11.05
20.	faggyú	-8.4601	-1.0704	-2.1646	1.5852	-5.0406	12.65
29.*	RaBr ₂	-8.4553	-0.9757	-2.2611	2.0180	-5.0140	11.54

5.2. táblázat. A környezeti nehézségi erőtér modellje alacsony foksámú ($l \leq 4$) Q_{lm} multipólus tér előállítására. A táblázat a tömegpontok vízszintes távolságait, azimutjait és z koordinátáit tartalmazza, valamint a modelltől számított nem zérus multipólus tereket.

rész	tömeg	vízszintes távolság	azimut	z koordináta	nem zérus multipólus terek
1.	M_1	$2/\sqrt{3}z_1$	Φ_1	z_1	$Q_{21} = -9/343\sqrt{210/\pi}M_1e^{i\Phi_1}/z_1^3$
	M_1	$2/\sqrt{3}z_1$	$\Phi_1 + \pi$	$-z_1$	$Q_{43} = -162/240\sqrt{5/\pi}M_1e^{i3\Phi_1}/z_1^5$
1.	$2M_2$	$5/2\sqrt[8]{4/5}z_2$	Φ_2	0	
	M_2	$2z_2$	$\Phi_2 + \pi$	z_2	$Q_{31} = 2/625\sqrt{105/\pi}M_2e^{i\Phi_2}/z_2^4$
	M_2	$2z_2$	$\Phi_2 + \pi$	$-z_2$	

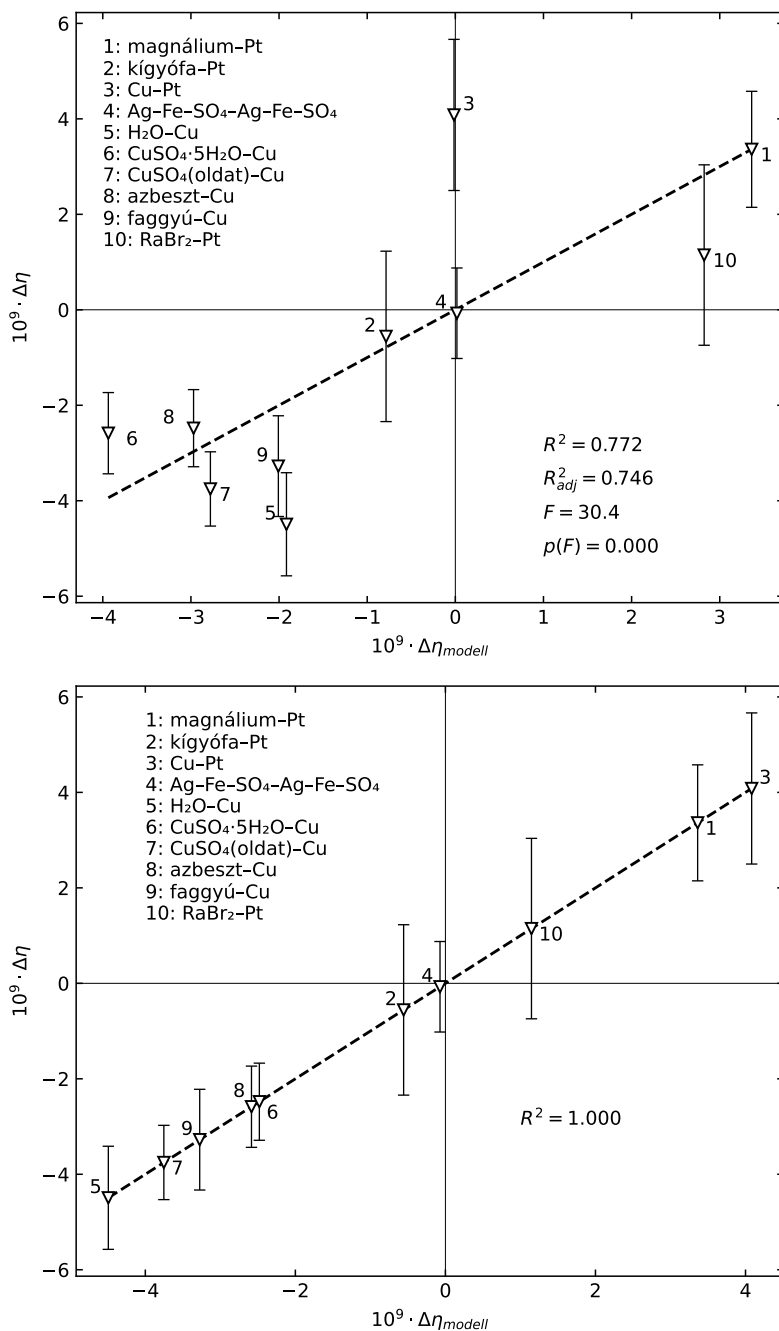
A tömegmodell 5 pontszerű tömegből állt, és 4 független paramétert tartalmazott. A modell részleteit az 5.2 táblázat mutatja. A belőle kiszámított v/w hányadosoknak egyezniük kell az EPF-mérésekben talált hányadosokkal. Ezért a Φ_1 azimutokat úgy kötöttem meg, hogy kiadják a mért v/w hányadosokat. Feltételeztem, hogy a Q_{31} multipólus terek jellemző távolsága 20 m. Azért ennyi, mert Bod et al. (1991) szerint a mérések helyszínétől kb. 20 méterre a Fizikai Intézet egy nagy betonból készült tornya helyezkedett el.

Ahogy említettem, a $\Delta\eta$ -k és a szórásaik pontosabb értékeit a 10 mintapárra újraszámítottam az eredeti adatokból (Eötvös et al. 1922). Az optimális megoldást a modell paraméterterében differenciális evolúciós algoritmussal kerestem meg (Storn és Price 1997). Az optimum feltétele az volt, hogy a különbségek súlyozott négyzetösszege a ténylegesen mért $\Delta\eta$ és a modelltől számított $\Delta\eta_{model}$ között minimális legyen. A súlyokat a mérések szórásaiból (középhibáiból) számítottam.

Két szélső esetet vizsgáltam: Az 1. esetben a modell statikus volt, vagyis az összes mérési időpontban a tömegek helye változatlan maradt. Az 5.7 felső ábrája ennek a modellnek és a méréseknek a kapcsolatát mutatja, a $\Delta\eta$ Eötvös paraméterek függvényében. A 2. esetben megengedtem a tömegmodell paramétereinek ésszerű mértékű változását az egyes mérési időpontok között. Az 5.7 alsó ábrája szerint a $\Delta\eta$ paraméter változása tekintetében teljes egyezést tudtam elérni az EPF-mérések és a modell között.

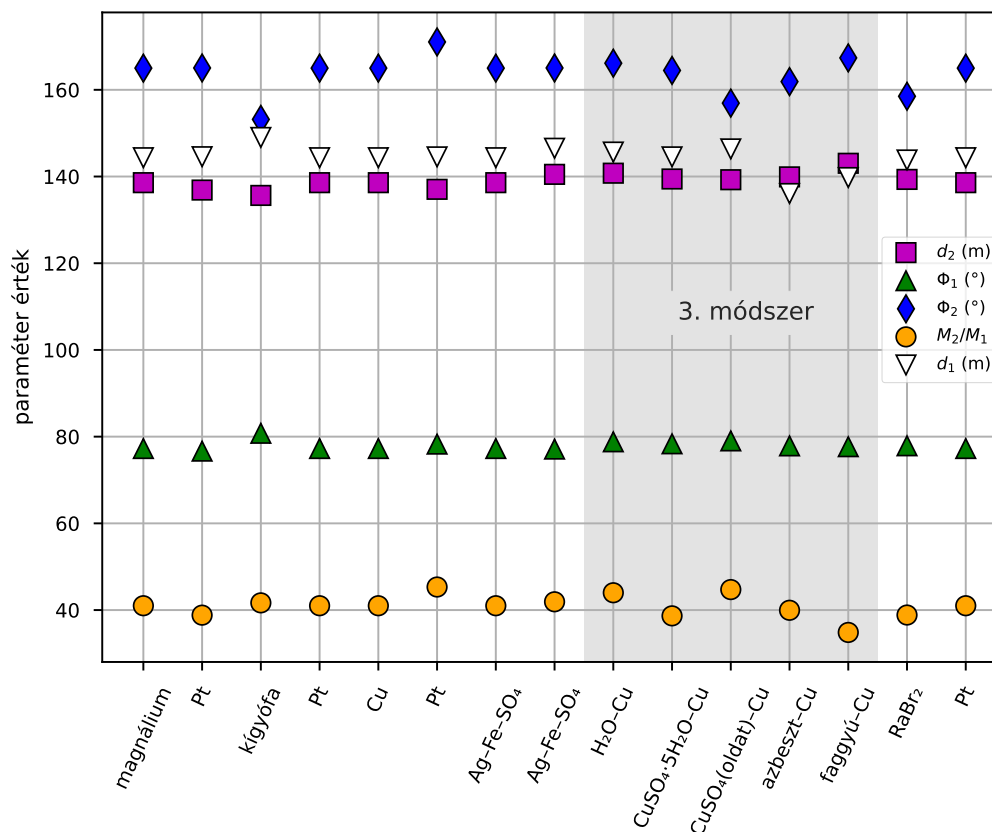
Az 5.8 ábra a 2. esetben elért teljes illeszkedéshez szükséges modell paramétereket mutatja. Ezt az illeszkedést a modellparaméterek abszolút értelemben átlagosan 2.6 %-os változásával értük el. A maximális paraméterváltozás 18 % volt, de a paraméterek 84 %-ának relatív változása ± 5 %-nál is kisebb. A legnagyobb változásokat az M_2/M_1 tömegarány esetében tapasztaltam.

Az 5.5 ábrán nem látszik lineáris változás a 2. módszer eredményeiben. Ezzel ellentétben a 3. módszer eredményei közel lineáris változást mutatnak. A 2. módszer esetében ez várható volt, mivel a környező nehézségi erőtér változása miatti hatás két mérési sorozat között meghaladhatta az alakfüggés miatti hatást. Ezt a feltevést egyszerű számítással ellenőriztem, amihez az 5.8 ábrán található tömegmodell paramétereket használtam. A tömegvonzási erőtér a tömegmodell szerint változott, viszont a próbatömegek alakja nem változott a 2. módszer mérései során. Az 5.3 táblázat szerint az Eötvös paraméter változása nagyságrendben ugyanakkora vagy még nagyobb lett, mint az EPF-kísérletben kapott eredmények.



5.7. ábra. Ez a két ábra két szélső esetben mutatja a EPF-kísérletből, illetve a környezeti nehézségi erőter modelljéből kapott $\Delta\eta$ Eötvös paraméter eltéréseket. A felső ábra az 1. esetet szemlélteti. Ebben az esetben a környezeti nehézségi erőter időben nem változott. Emiatt a modellből számított $\Delta\eta_{modell}$ csak a próbatömegek alakja miatt változhatott. Az alsó ábra a 2. esetben kapott teljes egyezést mutatja. Ezt a környezeti nehézségi erőter modelljének a mérési időpontoktól függő kismértékű változtatása tette lehetővé (ld. 5.8 ábra). Bár nem ésszerű teljes egyezést követelni, az ábra mégis egyértelművé teszi, hogy az EPF-mérések eredményei pusztán a tömegvonzási gradiensek hatásával is magyarázhatók. R^2 és R^2_{adj} a determinációs együtthatókat jelölik, az utóbbi a szabadsági fokkal korrigált determinációs együttható.

F az F-próba statisztikája, $p(F)$ az F-próbához tartozó p érték.



5.8. ábra. Az EPF ekvivalenciaméréseket reprodukáló tömegmodell paraméterei (tömegpontok Φ iránya, d távolsága, M_2/M_1 tömegaránya). A maximális paraméterváltozás 18 %, de a paraméterek 84 %-ának változása ± 5 %-nál is kisebb.

Eötösék beszámoltak arról, hogy egy építkezés kezdődött a mérés helyszínének közvetlen közelében, mialatt folytak a mérések (Kilényi 2019), Bod et al. (1991) szerint a mérés helyszínétől DNy-i irányban átmenetileg egy munkagödört ástak az építkezés miatt. Ezért az építkezés jelentős időbeli változást okozhatott mérés közben a nehézségi erőterben. Másrészt a 3. módszerük gyakorlatilag érzéketlen volt erre az időbeli változásra, ezért világosan látszott a próbatömegek alakja miatti hatás. Úgy gondolom, hogy az eredmények egyértelműen alátámasztják a próbatömegek alakjától függő hiba hipotézisét. Véleményem szerint, ha csupán véletlen hatások befolyásolták volna a méréseket, akkor az EPF-kísérletben a kétféle módszerrel kapott eredmények nem különböznének jelentősen egymástól.

Az egyszerű tömegpont modellezés megmutatta, hogy van olyan ésszerű mértékben változó nehézségi erőter, mellyel akár még reprodukálhatók is a mért eredmények. A forrástömegek modellezésével kapott eredmények értelmezése megerősítette a környezeti nehézségi erőter lehetséges változásának fontos szerepét az EPF-kísérletben. Amennyiben nem volt időbeli változás, csak mérsékelt kapcsolatot találtunk a mért és modellezett $\Delta\eta$ Eötös paraméter különbségek között. Még ehhez a kapcsolathoz is túl nagy M_2/M_1 arány és túl kicsi d_2 kellett.

Másrészt, amikor a forrástömegek változhattak, ésszerű eredményeket kaptunk. Habár statisztikai ingadozások nélküli, teljes egyezést elvárni nem ésszerű, a 5.8 ábrán bemutatott tömegmodell paraméterek és változásaik a mérés során elfogadható nagyságúak lettek.

5.3. táblázat. Az időben változó nehézségi erőtér hatása az Eötvös paraméterek különbségeire Eötvösék 2. módszere szerint. A 4.7 ábrán látható tömegpont modell paramétereiket használtuk. A 2. módszerben együtt mért próbatömeg-párok alakja nem változott. A harmadik oszlopban az újrászámított EPF-mérési eredmények, a negyedikben az időben változó nehézségi erőtér hatása miatti változások láthatók

Ssz.	próbatömeg pár	$\Delta\eta \cdot 10^9$	$\Delta\eta \cdot 10^9$
		EPF	modell
1.	magnárium – Pt	3.36	0.77
2.	kígyófa – Pt	-0.56	9.87
3.	Cu – Pt	4.08	4.02
4.	Ag-Fe-SO ₄ – Ag-Fe-SO ₄	-0.07	0.34
5.	RaBr ₂ – Pt	1.15	3.34

5.4 A nehézségi gradiensek hatása más ekvivalenciakísérletekre

Az EPF-kísérletben mutatkozó hatás miatt felmerült a kérdés, hogy más ekvivalenciakísérleteket is befolyásolhattak-e a nehézségi gradiensek? Példaszámításokat végeztem az ilyen hatások nagyságrendjének becslésére három további kísérletben. Ebben a fejezetben ezeket a számításokat ismertetem a Dicke és társai (Roll et al. 1964), Braginsky (Braginsky és Panov 1972) és az Eöt-Wash csoport (Wagner et al. 2012) kísérletei esetében. Röviden a MICROSCOPE (Touboul et al. 2017) űrkísérletről is szót ejtek. A régi és újabb gyenge ekvivalenciaelv-mérések jó áttekintését adja (Nobili és Anselmi 2018).

Az 5.2 fejezetben megmutattam, hogy az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciakísérlet hibája a próbatömegek alakja, a nehézségi erőtér időbeli változása, vagy mindkettő miatt adódhatott. Először azzal foglalkoztam, hogy a próbatömegek alakja hogyan befolyásolhatta az előzőekben említett pontosabb ekvivalenciakísérleteket.

Az EPF-kísérlettel ellentétben ezekben a mérésekben a próbatömegek alakja úgy lett megválasztva, hogy csökkentse a nehézségi erőtérrel kapcsolatos hibákat. Dicke és munkatársai (Roll et al. 1964) például úgy jártak el, hogy 1) kisméretű torziós ingát használtak, aminek a nyomatéki karja csak 3.3 cm volt, 2) az ingát háromszoros szimmetriájúra tervezték és 3) távolról felügyelték az eszközt. Braginsky (Braginsky és Panov 1972) az időben változó gradiensek hatását úgy csökkentette, hogy az ingáját nyolcágú csillag formájában építette meg egyforma tömegekkel. A Wagner et al. (2012) tervezte forgó torziós inga gravitációs gradiens érzékenysége a négyszeres forgásirányú és függőleges szimmetria miatt lényegesen kisebb lett, mivel lehetővé tette az ingával négyféle elfordított helyzetben való mérést.

Dicke és Braginsky mérései abban is eltértek az EPF-kísérlettől, hogy ingáik az É-D-i irányban álltak, mivel a Nap gravitációs hatása mérés közben nem kell forgatni az ingát. Eötvösék is mértek É-D-i irányú ingákkal a naptömeg gravitációs hatására, de ezek kevésbé voltak pontosak, mint a Föld tömegvonzására alapozott méréseik. Adott irányban álló inga esetében a próbatömegek alakja miatt csak állandó nyomaték keletkezik, ami nem módosítja az esetleges ekvivalenciasértésből várt 24 órás periódusú jel amplitúdóját, ezért nem befolyásolja az eredményt. Wagner et al. (2012) kísérletükben forgatták az ingát, mivel a Föld tömegvonzási hatására mértek, viszont az EPF-kísérlettel ellentétben, nagyon gondosan megvizsgálták és kompenzálták a

nehézségi erőter (multipólus terek) alakfüggő hatását.

Példaszámításokkal mutattam meg a környezeti nehézségi erőter időbeli változásainak a hatását ezekre az ekvivalenciamérésekre. Céлом ezzel a különböző környezeti hatások számszerűsítése volt. Ezt tárgyalom a továbbiakban.

Dicke és munkatársai (Roll et al. 1964) számszerűsítették az emberi okokból, csapadékból, légköri tömegekből és a háromszög alakú torziós inga gyártási hibáiból várható, időben változó nehézségi erőterre visszavezethető hatásokat. Ingájukat egy 5.8 m mély és 2.5 m oldalú négyzet keresztmetszetű, sziklára betonozott padlójú műszergödörben szerelték fel, és távolról irányították. A Roll et al. (1964) 11. ábráján látható, hogy a műszergödört talaj vette körül, ezért az ingára hatással lehetett a talajnedvesség. Ezt nem említették a Roll et al. (1964) tanulmányukban. A talajnedvesség változása miatti nyomaték változást az 5.2 fejezetben tárgyalt multipólus kifejtéssel, az 5.7 egyenletből számítottam ki. A számításhoz a q_{lm} multipólus nyomatékok és a Q_{lm} multipólus terek szükségesegek.

Feltételeztem, hogy az inga méretei hibátlanok, vagyis a nyomatéki karok azonosak, és kiszámítottam a Dicke-féle Al-Au inga q_{lm} multipólus nyomatékait 10 fokig és rendig. Ha például a talaj víztartalma 50%-al megnőtt a műszergödör közelében egy csupán kb. 6 dm³-es, 60 cm x 70 cm x 1.5 cm-es kis talajrészben, 40%-os normál porozitást feltételezve a sűrűségváltozás 0.2g/cm³ volt. Emiatt 1.3 kg-nyi tömegtöbblet jelent meg a talajban. Stirling és Schlamminger (2017) javított (5.17) összefüggésével kiszámítottam az M tömegű, H magasságú, a , b oldalhosszúságú és ϕ tájolású téglatest Q_{lm} multipólus tereit ugyancsak 10 fokig és rendig D'Urso és Adelberger (1997) analitikus eljárásával. A kiszámított nyomaték $T_g = 6.4 \cdot 10^{-10}$ dyn·cm lett. Amennyiben az inga méreteltérésére 1%-ot tételeztünk fel, a maximális nyomaték $7.9 \cdot 10^{-10}$ dyn·cm-nek adódott. Mindkettő nagyobb a Dicke és munkatársai által közölt $\eta = 1 \cdot 10^{-11}$ Eötvös paraméter pontosságánál, mivel az ennek megfelelő nyomaték $T_g = 5.9 \cdot 10^{-10}$ dyn·cm. Természetesen az ekvivalenciamérés csak akkor lesz hibás, ha a tömegváltozás és a belőle származó nyomaték is 24 órás periódusú. Mindenesetre ez az egyszerű számítás megmutatta a Dicke és munkatársai által használt készülék (Roll et al. 1964) érzékenységét az időben változó környezeti eredetű gravitációs zavarokra.

$$q_{lm} = M \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!(l-m)!}{4\pi}} e^{-im\phi} \times$$

$$\sum_{k=0}^{(l-m)/2} \frac{(-1)^k H^{l-2k-m}}{(m+k)! k! 2^{l+2k+m} (l-m-2k+1)! (2k+m+2)!} \times$$

$$\sum_{p=0}^{m/2} (-1)^p \binom{m}{2p} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \times$$

$$\frac{(-1)^{m/2} a^{2k+m-2j-2p} b^{2j+2p} + b^{2k+m-2j-2p} a^{2j+2p}}{2j+2p+1},$$

ha m, l párosak, és $m \geq 0$.

(5.17)

Braginsky és munkatársai kísérletüket (Braginsky és Panov 1972) a Moszkvai Állami Egyetem egy alagsori helyiségében végezték, amelyet nagyon gondosan hőszigeteltek. További részletek hiányában a helyiség mérete és a falak nedvességtartalma csak sejtethető. Ismét feltételeztem az inga hibátlanságát, azaz azonos karokat, és kiszámoltam a q_{lm} multipólus nyomatékokat 10. fokig és rendig. Feltételezve 0,8%-os nedvességváltozást egy 35 cm vastag, 2,5 m x 5 m méretű, az ingától 5 m távolságra lévő falban, a multipólus tereket ismét (5.17) segítségével

számoltam ki. Ebben az esetben a maximális nyomaték csupán $T_g = 7,2 \cdot 10^{-15}$ dyn·cm volt. Ez elhanyagolható, figyelembe véve a Braginsky által közölt $\eta = 0,9 \cdot 10^{-12}$ Eötvös-paraméter szórását, mivel az ennek az értéknek megfelelő T_g nyomaték az ingára $T_g = 7,5 \cdot 10^{-13}$ dyn·cm. Az inga relatív megmunkálási tűrését Braginskii és Manukin (1977) $4 \cdot 10^{-4}$ -ban adta meg. Az inga egyik karját ennyivel (10 cm-es kar esetén $40\mu\text{m}$ -rel) megváltoztattam, ezért a q_{22} kvadrupól nyomaték zérustól eltérő lett. Ezzel a csekély tökéletlenséggel az ingára ható maximális nyomaték két nagyságrenddel, $T_g = 8,1 \cdot 10^{-13}$ dyn·cm-re nőtt, a fentiekkel azonos nedvességváltozást feltételezve. Ez a nyomaték valamivel nagyobb, mint a kísérlet bejelentett pontossága.

A seattle-i Washingtoni Egyetem Eöt-Wash csoportja egyenletesen forgó ingákkal végzett egy sor ekvivalenciamérést; az utolsó és legpontosabb vizsgálatokról a Wagner et al. (2012) és Wagner (2014) tanulmányokban számoltak be. A Q_{21} , Q_{31} és Q_{41} környezeti gravitációs multipólus tereket egy speciálisan erre a célra tervezett gradiométer ingával mérték. A Q_{21} , Q_{31} terek napi változásait is nyomon követték egyenként mintegy 10 napon keresztül. A környezeti gravitációs tér $m = 1$ multipólusaiból származó, az ekvivalenciaelvet sértő hamis jelek elkerülése érdekében a készülék közelében lévő kompenzáló tömegekkel csökkentették a Q_{21} és Q_{31} , valamint a Q_{22} multipólusokat. A Q_{41} multipólus tér elhanyagolhatóan bizonyult. A laboratórium mögötti talaj nedvességtartalmának változásai és a Washington-tó vízszintjének változása miatt megfigyelt $\sim 1\%$ -os évszakos ingadozások azonban nem tették lehetővé a környezeti gravitációs tér gradiensei teljes kompenzálását.

Az Eötvös paraméter legpontosabb értéke a Föld nehézségi erőterében végzett méréseikre a Be-Al konfiguráció esetében $\eta = \pm 1,2 \cdot 10^{-13}$ volt, és az ennek megfelelő ingára ható nyomatékot $T_g = 2,6 \cdot 10^{-12}$ dyn·cm-re becsültem. A Be-Ti és Be-Al konfigurációjú ingák multipólus nyomatékait a Wagner (2014) 5.4. táblázatából vettem. Az ingától 0,8 m távolságra lévő, $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ méretű, 35 cm vastag falban $0,8\%$ -os nedvességváltozást feltételeztem, és ennek a tömegnek a a multipólus tereit a fentiek szerint számoltam ki. A maximális nyomaték $T_g = 1,1 \cdot 10^{-13}$ dyn·cm volt a Be-Al és $2,1 \cdot 10^{-13}$ dyn·cm a Be-Ti konfiguráció esetén. Mindkét érték kevesebb, mint 10% -a a legjobb szórásnak megfelelő értéknek.

A MICROSCOPE űrkísérlet új megközelítést alkalmazott a gyenge ekvivalenciaelv vizsgálatára (Touboul et al. 2017). A műholdra ható nem gravitációs erőket hajtóművek ellensúlyozták, lehetővé téve két különböző összetételű, koncentrikus üreges hengeres próbatömeg gyorsulásainak összehasonlítását. A próbatömegek alakját úgy alakították ki, hogy azok közelítőleg gravitációs monopólusok legyenek, és ezzel a gravitációs gradiensek hatását lecsökkentették (Connes et al. 1997). Ideális gravitációs monopólusok esetén ugyanis semmilyen zavaró gravitációs forrás, bármilyen közel is legyen, nem okozhatja a próbatömegek eltérő gyorsulását (Lockerbie 2000). Ezért ez az ügyes kialakítás csaknem teljesen kiküszöbölte azt a hibát, amely a tesztömegek és az időben változó helyi gravitációs erőter kölcsönhatásából adódhatott.

5.5 Összefoglalás

Úgy gondolom, hogy ebben a részben bemutatott eredményeim új megvilágításba helyezték az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciamérést. Megindokoltam, hogy a gravitációs gradiensekkel kapcsolatos hibát miért kell figyelembe venni az EPF-mérések magyarázatára tett jövőbeli kísérleteknél.

Megmutattam, hogy az EPF-kísérlet eredményeire hogyan hathatott ez a gravitációs gradienshez kapcsolódó szabályos hiba, bár annak pontos nagysága ismeretlen maradt. Ezért újra-

mérést javasoltam a gravitációs gradiens hatás kísérleti ellenőrzésére egy eredeti Eötvös-inga felhasználásával. Az ilyen hatást nem zárják ki a sokkal pontosabb egyenértékűségi vizsgálatok, mivel azokat csak egy Eötvös-ingával lehet mérni. Az EPF ekvivalenciavizsgálat újramérése folyamatban van. Egy eredeti Pekár G-2B ingát állítottunk fel számítógéppel vezérelt forgatással és leolvasással nemrég a Jánossy Földalatti Fizikai Laboratórium egy alagútjában, a föld alatt 30 m mélyen (Völgyesi et al. 2018b). Remélhetőleg ez az újramérés a gravitációs gradiens hatás gondos ellenőrzésével további részletekkel szolgálhat az EPF kísérlet hibájáról és magáról az EPF kísérletről. Ez a kísérleti ellenőrzés kizárhatja vagy megerősítheti egy olyan hatás létezését is, amely a Föld forgásával függhet össze (Fischbach 2019), ami az EPF-kísérletben megfigyelt, az ekvivalenciaelvtől való szabályos eltérés egy lehetséges másik oka.

Az EPF-méréseket követő ekvivalenciakísérletekkel kapcsolatos példaszámításaink azt mutatták, hogy a környezeti gravitációs hatások akkor is elérhették egyes kísérletek érzékenységét, ha az inga nem lett forgatva. Ez volt a helyzet a Dicke, Braginsky és munkatársaik által végzett kísérletek esetében. Még csekély gyártási tökéletlenségek is nagyságrendekkel növelhették az ingák érzékenységét a helyi nehézségi erőter viszonylag kis változásaira. Ezzel szemben az Eöt-Wash csoport vagy a MICROSCOPE űrkísérlet újabb ekvivalenciamérései a környezeti gravitációs hatások gondos figyelembevételének, illetve az okos tervezésnek köszönhetően lényegében mentesek maradhattak a gravitációs gradiensek okozta hibától.

6 Az eredmények összefoglalása

Vizsgálataim alapján az alábbi új tudományos eredményeket adom meg.

1. tézis

Levezettem a geoidmagasságokra és nehézségi rendellenességekre vonatkozó integrálösszefüggéseket, az *Eötvös integrálokat*, amelyekben az Eötvös-inga által mérhető összes mennyiség szerepel.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)

1.1 altézis

Az Eötvös integrálok magfüggvényeit az *Eötvös magfüggvények* végtelen sorait összegezve zárt alakban előállítottam.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)

1.2 altézis

A gyakorlat igényeit szem előtt tartva kidolgoztam a távoli területek hatásának számítását a peremérték-feladatot megoldó integrálkifejezésekre. Megállapítottam, hogy az Eötvös függvények eltérő sajátosságai miatt a távoli területek hatása lényegesen eltérő módon csökken a geoidundulációk, illetve a nehézségi rendellenességek esetében. Ez alapján két lépéses eljárást javasoltam a geoidundulációk számítására.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth et al. 2002), (Tóth 2002), (Tóth 2003)

2.1 altézis

Meghatároztam a GOCE mérések lefelé folytatása során a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát. Megállapítottam a mérések pontosságának megfelelő lefelé folytatáshoz szükséges adatterület nagyságát.

A tézishez kapcsolódó publikáció: (Tóth et al. 2006b)

2.2 altézis

Meghatároztam az Eötvös-inga mérések felfelé folytatása során a távoli területek elhanyagolásából eredő hibát. Megállapítottam, hogy az Eötvös-inga adatai önmagukban nem, csak más mérésekkel együtt alkalmasak a GOCE mérések ellenőrzésére.

A tézishez kapcsolódó publikáció: (Tóth et al. 2005)

3. tézis

Inverziós eljárással modellezve a nehézségi erőter potenciálfüggvényét kombinált geoidmegoldásokat határoztam meg Magyarország területére az Eötvös-inga mérések felhasználásával.

A tézishez kapcsolódó publikáció: (Tóth 2009b), (Tóth 2009a), (Tóth és Földváry 2015a), (Völgyesi et al. 2018a)

3.1 altézis

Legkisebb négyzetes kollokációval meghatároztam a nehézségi erőter modelljét. Az Eötvös-inga vízszintes nehézségi gradienseméréseket egy erre a célra kidolgozott két lépcsős eljárással vontam be a meghatározásba, melyben nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlások, szintezett GNSS pontok és az SRTM3 digitális domborzatmodell szerepeltek.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth 2009b), (Tóth 2009a)

3.2 altézis

Regularizált radiális bázisfüggvényes megoldással az ország területén elsőként határoztam meg a nehézségi erőter modelljét az összes Eötvös-inga mérést, valamint az összes rendelkezésre álló egyéb pontbeli mérést is felhasználva.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth és Földváry 2015a), (Völgyesi et al. 2018a)

4. tézis

Az Eötvös-Pekár-Fekete ekvivalenciamérésekben olyan nehézségi erőter függő szabályos hibát találtam, amely indokoltá teszi a kísérletek megismétlését.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth 2019), (Tóth 2020a)

4.1 altézis

Kimutattam, hogy az EPF kísérlet szabályos hibája a próbatömegek alakjának megfelelő megválasztásával kiküszöbölhető, és javasoltam ennek figyelembe vételét a kísérlet újramérése során.

A tézishez kapcsolódó publikációk: (Tóth 2019), (Tóth 2020a), (Völgyesi et al. 2018b)

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Biró Péternek, aki doktoranduszi éveim alatt témavezetőként megismertette velem a kutatómunka szépségét, majd később is kedves ösztönzésével elősegítette szakmai fejlődésemet és a dolgozat elkészítését. Köszönöm egykori diplomamunkám témavezetőjének, Völgyesi Lajosnak a folyamatos támogatását és tanácsait, a több évtizedes közös munkát, ami nagymértékben hozzájárult a doktori értekezésben megfogalmazott eredmények eléréséhez. Köszönöm a Budapesti Műszaki Egyetem Általános és Felsőgeodézia Tanszéke valamennyi volt és jelenlegi munkatársának a támogatását, kiemelve Ádám Józsefet és Rózsa Szabolcsot, akik között szakmailag inspiráló, baráti légkörben dolgozhattam és dolgozhatok jelenleg is.

Legfőképpen pedig hálás vagyok a Teremtőnek, aki “mindent gyönyörűnek készített”, és megadta a képességet rá, hogy ‘kutassa azokat mindenki, aki gyönyörködik bennük’ (Zsolt 111:2).

Irodalom

- Ádám J (2007) Globális geodéziai megfigyelőrendszer. *Magyar Tudomány* 5:563–576
- Ádám J (2014) Egységes európai geodéziai és geodinamikai alapok létrehozása. Magyar Tudományos Akadémia
- Ádám J, Augath W, Brouwer F, et al (2000) Status and development of the European height systems. In: Schwarz K-P (szerk) *Geodesy Beyond 2000*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 55–60 o.
- Ádám J, Tokos T, Tóth Gy (2002) Magassági mérőszámok és azok kapcsolata Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia* 54:5–10
- Adelberger EG, Gundlach JH, Heckel BR, et al (2009) Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. *Prog Part Nucl Phys* 62:102–134. <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2008.08.002>
- Bayman BF (1978) A generalization of the spherical harmonic gradient formula. *Journal of Mathematical Physics* 19:2558–2562. <https://doi.org/10.1063/1.523640>
- Bentel K, Schmidt M, Gerlach C (2013) Different radial basis functions and their applicability for regional gravity field representation on the sphere. *GEM - International Journal on Geomathematics* 4:67–96. <https://doi.org/10.1007/s13137-012-0046-1>
- Biró P (1983) *Time Variation of Height and Gravity*. Akadémiai Kiadó; Herbert Wichmann Verlag, Budapest; Karlsruhe
- Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy (2013) *A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata*. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest
- Bod L, Fischbach E, Marx G, Náray-Ziegler M (1991) One hundred years of the Eötvös experiment. *Acta Physica Hungarica* 69:335–355. <https://doi.org/10.1007/BF03156102>
- Bouman J (1998) Quality of regularization methods. In: *DEOS Report*. TU Delft
- Bölling K, Grafarend E (2005) Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. *Journal of Geodesy* 79:300–330. <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0465-y>
- Braginskii VB, Manukin AB (1977) *Measurement of weak forces in physics experiments*. University of Chicago Press
- Braginsky VB, Panov VI (1972) Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 34:463–466
- Bucha B, Janák J, Papčo J, Bezděk A (2016) High-resolution regional gravity field modelling in a mountainous area from terrestrial gravity data. *Geophysical Journal International* 207:949–966. <https://doi.org/10.1093/gji/ggw311>
- Claessens S (2021) Second- and Third-Order Derivatives of the Somigliana-Pizzetti Reference Gravity Field. In: Novák P, Crespi M, Sneeuw N, Sansò F (szerk) *IX Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*. Springer International Publishing, 19–23 o.
- Connes A, Damour T, Fayet P (1997) Aspherical gravitational monopoles. *Nuclear Physics B* 490:391–431. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(97\)00041-2](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0550-3213(97)00041-2)

- D'Urso C, Adelberger EG (1997) Translation of multipoles for a $1/r^3$ potential. *Phys Rev D* 55:7970–7972. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.7970>
- Denker H, Torge W (1998) The European Gravimetric Quasigeoid EGG97 - An IAG Supported Continental Enterprise -. In: Forsberg R, Feissel M, Dietrich R (szerk) *Geodesy on the Move*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 249–254 o.
- Dobróka M, Völgyesi L (2009) A nehézségi erőter 3D potenciálfüggvényének inverziós előállítás. *Geomatikai Közlemények* 12:101–107
- Eicker A (2008) *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. Phdthesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
- Eötvös R (1906) Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwaage. In: *Verhandl. d. XV. allg. Konferenz der Int. Erdmessung in Budapest*. Berlin, 337–395 o.
- Eötvös R v., Pekár D, Fekete E (1922) Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik* 373:11–66
- Fano U, Racah Giulio (1959) *Irreducible tensor sets*. Academic Press New York
- Farr TG, Kobrick M (2000) Shuttle radar topography mission produces a wealth of data. *Eos, Transactions American Geophysical Union* 81:583–585. [https://doi.org/https://doi.org/10.1029/EO081i048p00583](https://doi.org/10.1029/EO081i048p00583)
- Fischbach E (2019) The Enduring Significance of Eötvös' Most Famous Experiment. URL <https://arxiv.org/abs/1901.11163>
- Fischbach E, Sudarsky D, Szafer A, et al (1986) Reanalysis of the Eotvos experiment. *Physical Review Letters* 56:3–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.3>
- Foerste SeanL Christophand Bruinsma, Abrykosov O, Lemoine J-M, et al (2014) EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. GFZ Data Services
- Forsberg R (1984) *Local Covariance Functions and Density Distributions*. Ohio State University, Columbus, Ohio. Report No. 356
- Forsberg R (1987) A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 92:1305–1310. [https://doi.org/https://doi.org/10.1029/JB092iB02p01305](https://doi.org/10.1029/JB092iB02p01305)
- Forsberg R, Tscherning CC (1981) The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 86:7843–7854. [https://doi.org/https://doi.org/10.1029/JB086iB09p07843](https://doi.org/10.1029/JB086iB09p07843)
- Franklin A, Fischbach E (2016) *The Rise and Fall of the Fifth Force: Discovery, Pursuit, and Justification in Modern Physics*. Springer
- Gelderen M van, Rummel R (2001) The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *Journal of Geodesy* 75:1–11. <https://doi.org/10.1007/s001900000146>
- Gelderen M van, Rummel R (2002) Corrections to "The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares". *Journal of Geodesy* 76:121–122. <https://doi.org/10.1007/s00190-001-0229-2>
- Goldberg JN, MacFarlane AJ, Newman ET, et al (1967) Spin-s Spherical Harmonics and δ . *Journal of Mathematical Physics* 8:2155–2161
- Haagmans R, Prijatna K, Omang O (2002) An Alternative Concept for Validation of GOCE Gra-

- diometry Results Based on Regional Gravity. In: Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC. 281–286 o.
- Heck B (1979) Zur Lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen Vertikaler Schweregradienten. In: Dissertationen Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1–95 o.
- Hein GW (1981) Untersuchungen zur Terrestrischen Schweregradiometrie. In: Dissertationen Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1–110 o.
- Heiskanen WA, Moritz H (1967) Physical Geodesy. Freeman, W. H.; Co., San Francisco; London
- Hirt C, Flury J (2008) Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. *Journal of Geodesy* 82:231–248
- Hirt C, Kuhn M, Claessens S, et al (2014) Study of the Earth's short-scale gravity field using the ERTM2160 gravity model. *Computers & Geosciences* 73:71–80. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cageo.2014.09.001>
- Hirt C, Seeber G (2007) High-resolution local gravity field determination at the sub-millimeter level using a digital zenith camera system. In: *Dynamic Planet*. Springer, 316–321 o.
- Ihde J, Ádám J, Gurtner W, et al (2000) The height solution of the European vertical reference network (EUVN). *Veröff Bayer Komm für die Internat Erdmessung, Astronom Geod Arb* 61:132–145
- Kenyeres A (2001) A geoid hosszúhullámú komponense a Stokes-integrál módosítási eljárásában és a GPS-gravimetriai geoidban. Phdthesis, BME
- Kenyeres A (2012) 4D-geodézia: Az időbeli változások kezelése a geodéziai hálózatokban – jelen és jövő. *Geomatikai Közlemények* 15:55–66
- Kenyeres A, Herczeg F, Csizmadia Mné VG (2011) Az integrált geodéziai alapponthálózat (INGA) koncepciója. *Geodézia és Kartográfia* 63:7–12
- Kenyeres A, Virág G (1998) Testing of Recent Geoid Models with GPS/Leveling in Hungary. In: Vermeer M, Ádám J (szerk) *Reports of the Finnish Geodetic Institute*. 217–223 o.
- Kilényi É (szerk) (2019) *Az Eötvös kísérlet - Történelmi keretben*. Unicus Műhely Kiadó, Budapest
- Király P (2007) A 100 éves Eötvös-Pekár-Fekete kísérletek és máig tartó hatásuk. *Fizikai Szemle* 57:1–6
- Klees R, Tenzer R, Prutkin I, Wittwer T (2008) A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy* 82:457–471. <https://doi.org/10.1007/s00190-007-0196-3>
- Koch K-R, Kusche J (2002) Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy* 76:259–268
- Kotsakis C (2007) Least-squares collocation with covariance-matching constraints. *Journal of Geodesy* 81:661–677. <https://doi.org/10.1007/s00190-007-0133-5>
- Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JK, et al (1998) The development of the joint NASA GSFC and NIMA geopotential model EGM96. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland 20771:
- Lieb V, Bouman J, Dettmering D, et al (2014) Combination of GOCE Gravity Gradients in Regional Gravity Field Modelling Using Radial Basis Functions. *International Association of*

- Geodesy Symposia. https://doi.org/10.1007/1345_2015_71
- Lockerbie NA (2000) A dynamical technique for measuring the gravitational quadrupole coupling of the STEP and \square SCOPE experimental test masses. *Classical and Quantum Gravity* 17:4195–4206. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/17/20/304>
- Mahbuby H, Safari A, Foroughi I (2017) Local gravity field modeling using spherical radial basis functions and a genetic algorithm. *Comptes Rendus Geoscience* 349:106–113. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.crte.2017.03.001>
- Marti U (2007) Comparison of High Precision Geoid Models in Switzerland. In: Tregoning P, Rizos C (szerk) *Dynamic Planet*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 377–382 o.
- Mologyenskij MS, Eremeev VF, Yurkina MI (1962) *Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem
- Moritz H (1980) *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag; Abacus Press, Karlsruhe; Tunbridge Wells Kent
- Naeimi M (2013) Inversion of satellite gravity data using spherical radial base functions. In: *Dissertationen Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München*, 1–135 o.
- Nobili AM, Anselmi A (2018) Relevance of the weak equivalence principle and experiments to test it: Lessons from the past and improvements expected in space. *Physics Letters A* 382:2205–2218. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.09.027>
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2012) The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 117: <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2011JB008916>
- Petrovskaya MS, Zieliński J (1998) Application of spatial gradiometry for constructing quasi-geoid models. In: Vermeer M, Ádám J (szerk) *Reports of the Finnish Geodetic Institute*. 107–112 o.
- Roll PG, Krotkov R, Dicke RH (1964) The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics* 26:442–517. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0003-4916\(64\)90259-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0003-4916(64)90259-3)
- Rummel R (2001) Global unification of height systems and GOCE. In: *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000*. Springer, 13–20 o.
- Rummel R, Colombo O (1985) Gravity field determination from satellite gradiometry. *Bulletin géodésique* 59:233–246
- Rummel R, Yi W, Stummer C (2011) GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy* 85:777. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0500-0>
- Schmidt M, Fengler M, Mayer-Gürr T, et al (2007) Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy* 81:17–38
- Selényi P (szerk) (1953) *Roland Eötvös Gesammelte Arbeiten*. Akadémiai Kiado, Budapest
- Šprlák M, Sebera J, Val'ko M, Novák P (2014) Spherical integral formulas for upward/downward continuation of gravitational gradients onto gravitational gradients. *Journal of Geodesy* 88:179–197
- Stirling J, Schlamming S (2017) Closed form expressions for the gravitational inner multipole moments of homogeneous elementary solids. URL <https://arxiv.org/abs/1707.01577>

- Stokes GG (1849) On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8:672–695
- Storn R, Price K (1997) Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization* 11:341–359. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
- Su Y, Heckel BR, Adelberger EG, et al (1994) New tests of the universality of free fall. *Phys Rev D* 50:3614–3636. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3614>
- Szabó Z (2016) The history of the 125 year old Eötvös torsion balance. *Acta Geodaetica et Geophysica* 51:273–293. <https://doi.org/10.1007/s40328-015-0126-4>
- Szűcs E, Papp G, Benedek J (2014) A study of different wavelength spectral components of the gravity field derived from various terrestrial data sets. *Acta Geodaetica et Geophysica* 49:327–342. <https://doi.org/10.1007/s40328-014-0061-9>
- Takács B, Siki Z (2017) Centiméter pontosságú ETRS89-EOV/Balti átszámítás nyílt forráskódú környezetben. In: Balázs B (szerk) *Az elmélet és a gyakorlat találkozása a térinformatikában*. Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, Magyarország, 355–362 o.
- Tapley B, Ries J, Bettadpur S, et al (2005) GGM02 – An improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy* 79:467–478. <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0480-z>
- Tenzer R, Klees R (2008) The choice of the spherical radial basis functions in local gravity field modeling. *Studia Geophysica et Geodaetica* 52:287–304. <https://doi.org/10.1007/s11200-008-0022-2>
- Timár G, Telbisz T, Székely B (2003) Űrtechnológia a digitális domborzati modellezésben: az SRTM adatbázis/Space technology in the digital elevation modelling: The SRTM database/. *Geodézia és Kartográfia* 55:11
- Tóth Gy (2002) Az Eötvös geodéziai peremértékfeladat. *Geomatikai Közlemények* 5:163–174
- Tóth Gy (2003) The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: *Gravity and Geoid 2002, 3rd Meeting of the IGGC*. 102–107 o.
- Tóth Gy (2009a) New combined geoid solution HGTUB2007 for Hungary. In: *Observing our Changing Earth*. Springer, 405–412 o.
- Tóth Gy (2009b) A HGTUB2007 új magyarországi kombinált kvázigeoid megoldás. *Geomatikai Közlemények* 12:131–140
- Tóth Gy (2019) Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciamérések szabályos hibája. *Fizikai Szemle* 69:155–188
- Tóth Gy (2020a) Gravity gradient bias in the EPF experiment. *Eur Phys J Plus* 135:222. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00242-w>
- Tóth Gy, Ádám J, Földváry L, et al (2005) Calibration/validation of GOCE data by terrestrial torsion balance observations. In: *A Window on the Future of Geodesy*. Springer, 214–219 o.
- Tóth Gy, Földváry L (2005) Effect of geopotential model errors on the projection of GOCE gradiometer observables. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (szerk) *Gravity, Geoid and Space Missions*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 72–76 o.
- Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN (2006b) Practical aspects of upward / downward continuation of gravity gradients. In: *Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop, Frascati, Rome, Italy, ESA SP-627*. 115–120 o.

- Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN, Ádám J (2006a) Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 41:21–30. <https://doi.org/10.1556/ageod.41.2006.1.3>
- Tóth Gy, Földváry L (2015a) Új magyarországi geoidmeghatározás az ötödik generációs GOCE nehézségi erőter modellek segítségével. *Geomatikai Közlemények* 18:63–74
- Tóth Gy, Földváry L (2015b) Hungarian Gravity Field Modeling by Spherical Radial Basis Functions. In: Poster presented at 26th IUGG General Assembly, Prague, Czechia, June 22 to July 2.
- Tóth Gy, Rózsa Sz (2000) New Datasets and Techniques – an Improvement in the Hungarian Geoid Solution. In: Ádám J, Schwarz K-P (szerk) CD Proceedings of the Gravity, Geoid and Geodynamics Conference. Banff, Canada, 6 o.
- Tóth Gy, Rózsa Sz, Ádám J, Tziavos IN (2002) Gravity field modelling by torsion balance data – a case study in Hungary. In: Ádám J, Schwarz K-P (szerk) *Vistas for Geodesy in the New Millennium*. Springer, Berlin, Heidelberg, 193–198 o.
- Tóth Gy, Rózsa Sz (2006) Comparison of CHAMP and GRACE geopotential models with terrestrial gravity field data in Hungary. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 41:171–180. <https://doi.org/10.1556/ageod.41.2006.2.3>
- Tóth Gy, Szűcs E (2011) On the determination of a new combined EGM2008 based quasi-geoid model for Hungary. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 46:417–430. <https://doi.org/10.1556/ageod.46.2011.4.4>
- Tóth S (2020b) Geoidmeghatározás Magyarország területére GOCE gravitációs gradiensekből. Diplomamunka, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
- Touboul P, Métris G, Rodrigues M, et al (2017) MICROSCOPE Mission: First Results of a Space Test of the Equivalence Principle. *Phys Rev Lett* 119:231101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.231101>
- Varshalovich DA, Moskalev AN, Khersonskii VK (1988) *Quantum Theory of Angular Momentum*. WORLD SCIENTIFIC
- Völgyesi L (2002) *Geofizika*. Tankönyvkiadó, Budapest
- Völgyesi L (2019) Eötvös Loránd munkásságának geodéziai jelentősége. *Geodézia és Kartográfia* 71:4–13. <https://doi.org/10.30921/GK.71.2019.5.1>
- Völgyesi L, Ádám J, Égető C, et al (2018a) Hungarian contribution to the research in gravimetry, gravity field modelling and geoid determination (2015-2018) – IAG Commission 2. *Geomatikai Közlemények* 21:23–36
- Völgyesi L, Kenyeres A, Papp G, Tóth Gy (2005) A geoidmeghatározás jelenlegi helyzete Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia* 56:4–12
- Völgyesi L, Szondy G, Tóth G, et al (2018b) Előkészületek az Eötvös-kísérlet újramérésére. *Magyar Geofizika* 59:165–179
- Völgyesi L, Tóth Gy (2021) Improvement of QDaedalus measurements with continuous detection of environmental parameters. *Acta Geodaetica et Geophysica* 56:607–622. <https://doi.org/10.1007/s40328-021-00359-z>
- Völgyesi L, Ultman Z (2010) A nehézségi gradiensek linearitás vizsgálata a Mátyás-barlangban. *Geomatikai Közlemények* 13:123–128
- Wagner TA (2014) Rotating Torsion Balance Tests of the Weak Equivalence Principle. Phdthesis, University of Washington

- Wagner TA, Schlamminger S, Gundlach JH, Adelberger EG (2012) Torsion-balance tests of the weak equivalence principle. *Class Quantum Grav* 29:184002. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/18/184002>
- Wang YM (2016) Geodetic Boundary Value Problems. *Encyclopedia of Geodesy*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02370-0_42-1
- Wenzel G (1998) Ultra high degree geopotential models GPM98A, B and C to degree 1800
- Wittwer T (2009) Regional gravity field modelling with radial basis functions. Phdthesis, TU Delft
- Xu J-H, Shao C-G, Luo J, et al (2017) Effect of gravity gradient in weak equivalence principle test. *Chinese Physics B* 26:080401