

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI



# FÉNY-ANYAG-KÖLCSÖNHATÁS

*úton az*

# ULTRAERŐS CSATOLÁS

*tartományába*

Vukics András

Wigner FK, 2021–2022

## *Rövidítések*

CCQED	circuit quantum electrodynamics	áramkör- kvantumelektrodinamika
CQED	cavity quantum electrodynamics	rezonátor- kvantumelektrodinamika
DPT	dissipative phase transition	disszipatív fázisátalakulás
ODE	ordinary differential equation	közönséges differenciálegyenlet
PZW	Power–Zienau–Woolley(-transzformáció)	
QJMC	quantum-jump Monte Carlo	kvantumugrás-Monte-Carlo
QPT	quantum phase transition	kvantum-fázisátalakulás

## A KVANTUMOPTIKA A XXI. SZÁZAD ELEJÉN

A kvantumtudomány a fizikai alap kutatás egyik legperspektivikusabb területévé vált az elmúlt két évtized során. A kvantumoptika – a fény-anyag kölcsönhatást kvantumosan, fotonok és atomok illetve molekulák szintjén vizsgáló tudományág –, amely az 1960-as években a fizika egy specializált területeként indult, ezen újkeletű fejlődés egyik fő motorjává lépett elő (Cirac & Kimble, 2017).

A kvantumoptika közel háromnegyed évszázados története során a kvantumfizika számos *alappjelenségének* kimutatásával tünt ki: nem-klasszikus fényállapotok előállítás és detektálása, a Bell-egyenlőtlenségek sérülése, a kvantumugrások közvetlen demonstrációja mind kvantumoptikai kísérleti rendszerekben történt. *Elméleti* fejlődésének természetes hozadéka volt a nyílt kvantumrendszerek elmélete, amely az utóbbi időben számos más területen is alkalmazásra lelt, és hatásköre az elméleti fizikában várhatóan még néhány évtizedig terjeszkedni fog.

Mindezeken túlmenően a kvantumoptika kiemelkedő *alkalmazásokat* is eredményezett, eleinte jobbra a kísérleti technológiában, napjainkban azonban már az egyre inkább kommercializálódó kvantumtechnológia egészében is: voltaképpen maga a lézer is ide sorolható, de még jellemzőbb példák a lézeres hűtés és csapdázás, spektroszkópiai módszerek, kvantummetrológiai és kvantuminformatikai alkalmazások.

MTA doktori disszertációm az eddig körülbelül 20 évet számláló kutatói karrierem második felét, a 2012 és 2022 közötti, vagyis röviddel az Innsbruck-i posztdoktori éveimből való hazatérésem után kezdődő időszak főbb eredményeit mutatja be. Ezekben az években a hibrid és mesterséges kvantumrendszerek felemelkedésének lehettünk szemtanúi (Kurizki et al., 2015), melyek a fény–anyag–kölcsönhatás korábban elérhetetlen paramétertartományait nyitják meg, például a csatolási erősség vonalán. Ez az itt bemutatott munkának is fontos háttéreleme és motivációja.

## A FÉNY-ANYAG CSATOLÁS TARTOMÁNYAI

Az elektromágneses mező vákuuma és egy kétállapotú atom közötti csatolás szabad térben fundamentális jelenségekhez vezet – a Lamb-féle eltolódáshoz és spontán emisszióhoz –, míg egy betöltött módus „stimulálja” az emissziót a bozonikus erősítés miatt. E folyamatok Einstein

rata-egyenletei óta ismertek, amelyek termikus egyensúlyi megfontolásokon alapulnak. Míg egy atomi átmenet szabad térbeli bomlási rátáját alapvető állandók határozzák meg, az elektromágneses mező módussűrűségétől való függése miatt a spontán emisszió határfeltételekkel mégis befolyásolható – ez a Purcell-effektus, amely a rezonátoros kvantumelektrodinamika kiindulópontja (Haroche & Kleppner, 1989).

A spontán emisszió azonban irreverzibilis, vagyis az említett folyamatok az egyedi kvantumok szintjén nem kontrollálhatók. A múlt évezred utolsó két évtizedében megjelent paradigma a kvantumrendszerek közötti *erős csatolás*. Ez azt jelenti, hogy egy néhány kvantum erősségű gerjesztés többször kicserélődhet az alrendszerek között, mielőtt a disszipatív folyamatok közbelépnének; vagyis kvantum-koherens dinamika figyelhető meg az összetevők között. Másképpen: a csatolás által okozott spektrális változások jól feloldottak.

Az erős csatolást elsőként a kvantumoptikában valósították meg, mikrohullámú CQED-ben S. Haroche csoportjában az 1990-es években. Optikai hullámhosszakon e tartomány elérése sokkal nehezebb, mert nagyon kis rezonátortérfogatra és nagyon jó tükrökre van szükség. Ennek ellenére már Thompson et al. (1992) megfigyelték az egy atom által okozott módusfelhasadást optikai rezonátorban. Az eltelt három évtized során a CQED erőscsatolás-tartománya egy teljeskörű atom–fotonkvantuminterfészt eredményezett (Reiserer & Rempe, 2015), olyan képességekkel, mint egyfoton-keltés, atom–foton kvantumállapot-transzfer, atom–foton összefonódás, kvantummemória, atom–atom kvantumállapot-transzfer, távoli atom–atom összefonódás, Bell-állapot-mérés, kvantumteleportáció, nem-destruktív fotondetektálás és atom–foton kvantumkapu.

A harmadik évezred első évtizedében egy új paramétertartomány lehetősége vetődött fel: az *ultraerős csatolás* (Forn-Díaz et al., 2019), melyet elsőként Ciuti et al. (2005) javasoltak, és azt találták, hogy al-sávközi polaritonok rendszerében lehet elérhető. Az ultraerőscsatolás-tartományt az összetevők szabad frekvenciáinak jelentős hányadát elérő csatolási erősség definiálja. CQED platformon ez például azt jelenti, hogy az atom–rezonátor közötti, az egyfotonos Rabi-frekvenciaként kifejezett csatolási erősség eléri a rezonátormódus ill. az atomi átmenet frekvenciájának nagyjából egytizedét. Az ultraerős csatolás olyan fundamentális jelenségekhez vezet, mint a kétmódusú összenyomott vákuum mint alapállapot, és korrelált fotonpárok generálása egy, a dinamikus Casimir-effektusra emlékeztető folyamatban. Mára számos új

képességet és jelenséget jeleztek előre elméletileg ebben a tartományban, amilyen pl. a Jahn–Teller-modell és a környezet által asszisztált kvantumtranszport szimulációja, egyszerre több atom reverzibilis gerjesztése egy foton által, valamint kvantuminformaticai alkalmazások.

Az ultraerős csatolás elérése olyan kontrollált kísérleti rendszerekben, ahol lehatárolt elektromágneses tér hat kölcsön valamilyen anyagi szabadsági fokkal elsődleges céllá vált. Ennek legigéretesebb platformjai

- a szupravezető kvantumáramkörök (Niemczyk et al., 2010; Blais et al., 2021),
- a félvezető kvantumgörök (Scalari et al., 2012; Geiser et al., 2012),
- és hibrid kvantumrendszerek (Wei et al., 2013).

## AZ ELEKTROMOSDIPÓL-KÉP ÉS A DICKE–HEPP–LIEB-FÁZISÁTALAKULÁS

A disszertációm I. részében leírt vizsgálatokat a Dicke–Hepp–Lieb-fázisátalakulás (másképpen Dicke- vagy szuperradiáns-fázisátalakulás) motiválta. A Dicke (1954) által felvetett modell (ld. még Kirton et al. (2019)) atomi sokaság általi kollektív fénykibocsátást ír le, és az ún. szuperradiáns viselkedést vetíti előre: ha az atomok a hullámhossz töredékén belüli térrészben helyezkednek el, akkor az emittált amplitúdók konstruktívan interferálnak, amely az atomszámmal arányos amplitúdót – illetve az atomszám négyzetével arányos intenzitást – eredményez (Benedict et al., 1996). Az állandósult állapotbeli szuperradianciát, amely egyetlen kvantált módushoz való csatolás esetén léphet fel, Hepp & Lieb (1973) fedezte fel. Az ő munkájukban a szuperradiancia mint termikus fázis jelenik meg egy normál fázis mellett, és a kettő közötti átmenet másodrendű termikus fázisátalakulásnak bizonyult. Elegendően nagy atom–mező-csatolás esetén létezik egy kritikus hőmérséklet, ahol az átalakulás lezajlik. A későbbiekben e fázisátalakulás nulla-hőmérsékletű változatát (kvantum-fázisátalakulás) is felfedezték (Narducci et al., 1973).

A Dicke-fázisátalakulás megdöbbentő elméleti lehetőség, hiszen azt jelentené, hogy ha egy hidegatom-sokaságot rezonátorba helyezünk, és elkezdjük csökkenteni a módustérfogatot, akkor teljesen spontán módon egy ponton hirtelen fény jelenne meg a rezonátorban. Vannak

persze buktatók ebben a gondolatmenetben, melyek közül talán a leglényegesebb, hogy a kritikusság a (kollektív) ultraerős csatolás elérését követeli meg. Mindemellett egyfajta megkönnyebbülést jelenthetett a fizikus közösségnek, amikor a 70-es évek vége felé olyan cikkek kezdtek megjelenni (pl. [Rzażewski et al. \(1975\)](#); [Knight et al. \(1978\)](#) és sokan mások), melyek állítólag a szuperradiáns fázisátalakulás elméleti lehetőségét is kizárták – ezek ez ún. Dicke-*no-go* tételek.

A *no-go* tételek azonban több szempontból is problematikusak, legfőképpen azért, mert a ponttöltések nemrelativisztikus kvantum-elektrodinamikájának *a priori* Hamilton-operátorát veszik alapul (ez az ún. „ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ ”-kép).<sup>1</sup> Dipoláris anyag elektromágneses mezővel való kölcsönhatásának ezen elmélettel való leírása két olyan nehézségtől szenved, amelyek miatt ez nem megfelelő alapja a kvantumoptika standard modelljeinek.

1. A töltések kanonikus és kinetikus impulzusa különbözik egy, a töltések helyén vett vektorpotenciállal arányos taggal, amely két részproblémához vezet:
  - a) a hírhedt A-négyzetes taghoz, amely az összes módust csatolja, és fotonpárok spontán keltését és annihilációját okozza, valamint
  - b) kényelmetlenségekhez a részecskék mozgásának leírásában.
2. A részecskék között pillanatszerű (Coulomb-)kölcsönhatás lép fel, amely gátolja atomok és molekulák definícióját, melyekre úgy szeretnénk gondolni, mint *belső* elektrosztatikus erők által összetartott önálló entitásokra.

A multipoláris QED-t, amely az atomok és molekulák nemrelativisztikus kvantumelektrodinamikájának adekvát alapja, részben e problémákra válaszul dolgozták ki az 1950-es évek végétől kezdődően. Az elmélet, amely egy unitér transzformáció (Power–Zienau–Woolley-transzformáció) eredménye ([Power & Zienau, 1959](#)), az anyagot polarizációmezővel írja le, miközben az elektromos mező helyét az eltolásmező veszi át. Bár ezek a fogalmak a folytonos közegek kvantum-elektrodinamikáját idézik, az elmélet mikroszkopikus, és képes leírni

---

<sup>1</sup>Néhány *no-go* tétel pedig egymódus-közelítést is alkalmaz, amelynek tarthatatlanságát a szuperradiáns fázisátalakulással összefüggésben megmutattuk a disszertáció I. részében.

ponttöltések tetszőleges rendszerének kölcsönhatását a vákuumbeli elektromágneses mezővel. A PZW-transzformáció a Hamilton-i formalizmusban értelmezett, és független a mértékválasztástól.

A kvantumoptika területén elterjedt nézet – amelyet még komoly szakkönyvek is sugallnak –, hogy az *a priori* kép és a PZW-kép ekvivalensek. Ez szigorúan matematikai értelemben igaz is, hiszen a két képet unitér transzformáció köti össze, vagyis minden megfigyelhető mennyiség várható értékére ugyanazt az értéket kell adniuk. Azonban az ekvivalencia elromlik már az elméleti fizika szintjén, mert mindkét kép teljesen hasznavehetetlen további közelítések nélkül. Már az atomok és molekulák leírásához elengedhetetlen hosszúhullám-közelítés<sup>2</sup> is elrontja az ekvivalenciát.

Különös momentum a tudományterület történetében, hogy ez a diszkrepancia évtizedekig fennmaradhatott: az atomi QED teljesen kidolgozott, adekvát elmélete az egyik oldalon; és az inadekvát *a priori* elméletre alapozott Dicke-no-go állítások a másikon. A disszertáció I. részében összefoglalt vizsgálatok e diszkrepancia feloldásához kívántak hozzájárulni.

## A FOTONBLOKÁD-ÁTTÖRÉS MINT ELSŐRENDŰ DISSZIPATÍV FÁZISÁTALAKULÁS

A kvantum-fázisátalakulások, akár első- akár másodrendűek (Vojta, 2003), immár fél évszázada a fizikai kutatás homlokerében vannak. A QPT-k eredeti elképzelése – zárt kvantumrendszerek (tisztá) alapállapotában valamilyen kontrollparaméter függvényében bekövetkező hirtelen változások – főként a kondenzált anyagok fizikája számára bírt vonzerővel. A disszipatív fázisátalakulások azonban (Diehl et al., 2008; Nagy et al., 2010; Diehl et al., 2010), amelyek nyílt kvantumrendszerek (általában kevert) állandósult állapotában következnek be, kiterjesztették a fázisátalakulás koncepcióját mezo- és később mikroszkopikus rendszerekre is, ahol a környezettel való kölcsönhatás lényegesen megváltoztatja a rendszer dinamikáját. Disszipatív fázisátalakulást elsőként egymódusú optikai rezonátor mezejével kölcsönható Bose-kondenzátumban figyelt meg kísérletileg Baumann et al. (2010), és a koncepció egyre

---

<sup>2</sup>Nem lehet jelen dinamikus elektromágneses mező az atomi méretskálán, ha jóldefiniált energiaszintekkel akarunk dolgozni.

relevánsabb napjaink kvantumtudománya és -technológiája számára (Verstraete et al., 2009; Fitzpatrick et al., 2017).

E sikeres háttér előtt figyelemreméltó, hogy az elmúlt években még egy újabb fázisátalakulási paradigma tűnhetett fel: az *elsőrendű* disszipatív fázisátalakulások. Az elsőrendű fázisátalakulás azt jelenti, hogy két fázis együtt állhat fenn egy bizonyos paraméterrégióban, mint a víz és a jég  $0^\circ\text{C}$ -on a szabadenergia bizonyos tartományában. Fázisok koegzisztenciája egy kvantumrendszer állandósult állapotában azonban paradoxnak tűnik, hiszen az állandósult állapot feltétele kiegészítve a normálással lineáris egyenletrendszert eredményez, amelynek csak egyetlen megoldása lehet. A feloldás az, hogy egyetlen sűrűségoperátor magában foglalhat két makroszkopikusan különböző fázist mint *keveréket*, kifejezve a komponensek arányát is. A víz-analógiában  $0^\circ\text{C}$ -on szimbolikusan írhatnánk így:

$$\rho_{\text{áll.}} = c \rho_{\text{víz}} + (1 - c) \rho_{\text{jég}}, \quad (1)$$

ahol  $c$  0-tól 1-ig nő a szabadenergia növekedésével. Az utóbbi időben többféle rendszerben találtak elsőrendű *disszipatív* fázisátalakulásokat, Rydberg-atom klaszterektől kezdve ultrahideg atomokon, disszipatív Dicke-szerű modelleken, nemlineáris foton- és polaritonmódusokon, exciton-polariton-kondenzátumokon át az áramkör kvantumelektrodinamikáig.

A disszertáció II. részében egy disszipatív fázisátalakulást vizsgálunk, mely legegyszerűbben a kvantumtudomány egyik legfontosabb modelljében, a (hajtott-veszteséges) Jaynes-Cummings-modellben valósul meg, amely modell az erőcsatolás-tartományban az anharmonikus spektrum prototípusának tekinthető. Ez az anharmonicitás, melyet a CQED-ben Brune et al. (1996), a CCQED-ben pedig Fink et al. (2008) közvetlenül is demonstrált, a fotonblokádt-effektus alapja (Imamoğlu et al., 1997), amely a Coulomb-blokád mintájára kapta a nevét. Lényege, hogy a spektrumnak a rezonátor és a kétállapotú rendszer közötti csatolás okozta torzulása miatt egy, az üres rezonátor frekvenciájára hangolt meghajtásból nem léphet be gerjesztés a Jaynes-Cummings-rendszerbe.<sup>3</sup> Ez a blokádt azonban nem abszolút, mert megfelelő erősségű meghajtással áttörhető (Carmichael, 2015) multifotonos események és fotonszám-növelő kvantumugrások kombinációjának köszönhetően

---

<sup>3</sup>Illetve az egy-gerjesztésű szintek egyikének átmeneti frekvenciájára hangolt meghajtásból nem léphet be egy második gerjesztés a rendszerbe, és így tovább.



(ld. a disszertáció 6. fejezetét). A meghajtási erősség egy köztes tartományában a rendszer időben váltakozik két állapot között:

„**halvány**” állapot, melyben a fotonblokádi intakt

„**fényes**” állapot, amelyben a blokádi áttört.

Az utóbbi állapotban a rendszer a spektrum magasan gerjesztett, közel harmonikus részében tartózkodik. Fázistérben ez a viselkedés egy két-módusú állandósult állapotbeli eloszlásnak felel meg, amelyet az (1)-es egyenlet mintájára így írhatunk:

$$\rho_{\text{áll.}} = c \rho_{\text{fényes}} + (1 - c) \rho_{\text{halvány}}, \quad (2)$$

és ahol  $c$  0-tól 1-ig nő a meghajtási amplitúdó növelésével.

Az időbeli bistabilitás vagy a fázistérbeli bimodalitás azonban még nem elegendő egy elsődrendű fázisátalakuláshoz. Az is szükséges, hogy a (2)-es keverék két összetevője, melyek az időbeli bistabil jel két állapotának felelnek meg, makroszkopikusan különbözőek legyenek, amint azt az (1)-ben látjuk. Kimutatható, hogy a fotonblokádi-áttörésnek van egy ilyen tartománya, egy *termodinamikai limesz*, amelyben mind az időskála, mind pedig a bistabil jel amplitúdója végtelenhez tart, vagyis hosszú élettartamú makroszkopikusan különböző halvány és fényes fázisok vannak. Figyelemreméltó, hogy ez a termodinamikai limesz egy erőcsatolás-limesz, és semmi köze nincs a rendszer méretéhez, amely ugyanaz a két mikroszkopikus kölcsönható alrendszerből álló Jaynes–Cummins-rendszer marad – ezen okból ezt a fázisátalakulást 0-dimenziósnek tekinthetjük. A termodinamikai limeszben az időbeli bistabilitást hiszterézis váltja fel: a rendszer állapotát a kezdőfeltétel határozza meg, hiszen a másik állapotba való átcsapás végtelen várakozási időbe telik. A csatolási erősség növelése a termodinamikai limesz eléréséhez végesméret-skálázásnak tekinthető. A disszertáció II. részét képező tanulmányokban ezt a jelenségkört vizsgáltuk elméletileg, numerikusan, illetve két különböző CCQED-s kísérlet támogatásával.

## KOMPUTÁCIÓS ASPEKTUSOK

A kvantumugrás-Monte-Carlo-módszer<sup>4</sup> legalább az 1980-as évek végétől datálható. A kvantumugrás fogalma először az intermittens fluo-

<sup>4</sup>Eredeti, némileg pontatlan, de még ma is gyakran használt elnevezése: Monte Carlo hullámfüggvény-módszer. Angolul *Monte Carlo wave-function* – MCWF

reszcencia kapcsán vetődött fel [Diósi \(1985\)](#) és [Javanainen \(1986\)](#) munkáiban ([Plenio & Knight, 1998](#)). Az első implementálható algoritmusok az 1990-es évek elején jelentek meg ([Dum et al., 1992](#); [Dalibard et al., 1992](#)).

A kvantumugrás-módszer két különböző motivációval vethető fel:

**Mint komputációs eszköz,** a kvantum-masteregyenlet kvantumtrajektóriákká való kibontására a numerikus probléma dimenziószámának csökkentése céljából, hogy nagyobb rendszerek is kezelhetővé váljanak. Ebben az esetben nem szükséges az egyedi trajektóriáknak fizikai jelentést tulajdonítani.

**Mint fizikai modell,** amely kis kvantumrendszerek egyedi megvalósításainak viselkedését tükrözi. Míg a kvantummechanika eredetileg sokaságok leírását célozta, az utóbbi néhány évtizedben lehetővé vált egyedi megvalósítások vizsgálata.<sup>5</sup> Ebben az esetben az egyedi trajektóriák fizikainak tekinthetők, és a kvantummérés ismert sajátosságainak megfelelően függeni fognak attól, hogy miként figyeljük meg a rendszert.

A nettó számítási erőforrás tekintetében a módszer nem feltétlenül előnyös, mert túl sok trajektóriára lehet szükség az elfogadható statisztikához ([Breuer et al., 1997](#)); ám realisztikus szituációkban a rendszer gyakran olyan nagy, hogy a teljes sűrűségoperátor egyetlen példányban sem fér el a memóriában. Ilyenkor az ergodikus esetben még mindig lehetséges megoldás, ha megelégszünk az állandósult állapot megtalálásával egyetlen hosszú trajektória átlagolása révén. Egy néhány nívós rendszerhez csatolt egyetlen elektromágneses módus (vö. rezonátor-kvantumelektrodinamika) már könnyen ebbe a kategóriába eshet ([Dombi et al., 2013, 2015](#)), de ezen a módon lehetőségessé vált két atomból és egy módusból ([Vukics et al., 2007](#)), illetve két módusból (gyűrűrezonátor) és egy atomból ([Niedenzu et al., 2010](#)) álló csatolt rendszerek vizsgálata. Az ergodicitás még olyan helyzetekben is kihasználhatónak bizonyult, mint a fotonblokádtörés, vagyis amikor a rendszer két elkülönülő szemiklasszikus attraktornal bír, bár a számításgény igen tetemes volt. Újabban a kvantum-soktestprobléma kontextusában is alkalmaznak kvantumtrajektóriákat ([Daley, 2014](#); [Kirton & Keeling, 2017](#)), időnként tenzorhálózat-módszerekkel karöltve.

---

<sup>5</sup>A legkorábbi példa Paul-csapdában lévő egyedi ionok vizsgálata volt ([Cook & Kimble, 1985](#)).

Az adaptív algoritmusok nagyon fontosak a dinamikus szimulációk területén, mert nincs általános módszer egy optimális lépésköz meghatározására, amely optimum változik is a trajektória mentén. Míg determinisztikus problémákra (közönséges differenciálegyenletek) léteznek kielélt robusztus általános célú adaptív algoritmusok, ugyanez nem mondható el a sztochasztikus differenciálegyenletekre.

A disszertáció III. részében elsőként egy robusztus adaptív QJMC algoritmust mutatunk be, amelyet 2006–2008-ban dolgoztunk ki, és azóta számos különböző problémában, köztük a II. részben bemutatott fotonblokádtörtés problémakörben sikeresen alkalmaztunk.

A III. rész második felében a C++QED keretrendszert mutatom be, és ezen keresztül néhány olyan technikát és dizájn mintázatot, amelyek ennek a keretrendszernek alapját képezik, de általánosan érvényesek összetett kvantumrendszerek reprezentációjában. A C++QED a következő problémát célozza: valaki, aki ma szimulációs kódot ír egy kvantum mozgási szabadsági fok, módus vagy spin vizsgálatára; holnap kettő vagy tíz ilyen rendszert akar vizsgálni, amelyek kölcsönhatnak egymással. Ideálisan szeretné felhasználni az egy-rendszer esetre írt – és már tesztelt – kódot, ez azonban nem triviális a kvantummechanika algebrai szerkezete miatt. A C++QED megkönnyíti ezt a feladatot egy keretrendszert adva elemi fizikai rendszerek oly módon való reprezentációjához, hogy azok rögtön használhatók összetett rendszerek alrendszeriként is. Az így összerakott, tetszőlegesen komplex rendszerekre pedig dinamikai szimulációk végezhetők (pl. a fent leírt adaptív QJMC módszerrel, melyet implementáltunk a C++QEDben) a keretrendszer által adott eszközökkel.

A C++QED kiindulópontja CQED rendszerek szimulációja volt (innen ered a rendszer neve), de megközelítésmódja a későbbiekben hasznosnak bizonyult a kvantumoptika szélesebb kontextusában (Vukics et al., 2007, 2009; Niedenzu et al., 2010), hiszen ez a terület tipikusan összetett, számos különböző, „kicsi”, kölcsönható alrendszerből álló rendszerekkel foglalkozik; valamint az atomfizikában és a kvantumsoktestproblémában (Vukics et al., 2007; Maschler et al., 2008; Nagy et al., 2009).

A keretrendszer képes bármilyen rendszer teljes nyílt kvantumdinamikájának szimulációjára, amennyiben a Hamilton- és a kvantumugrásoperátorok megadhatók egyazon véges diszkrét bázisban. A rendszer méretének határa állapotvektor-szimulációk esetén néhány millió, sűrűségoperátor-szimulációk esetén pedig néhány ezer dimenzió. A jelenlegi

koncepció szerinti fejlesztés 2008 óta zajlik, így a C++QED mára nagyban kiérlelt, robusztus, miután több ezer teszten ment keresztül. Nyílt forráskódú projekt, melynek a GitHub ad otthont,<sup>6</sup> és kizárólag nyílt forráskódú, többnyire az akadémiai szférában feljesztett könyvtárakra támaszkodik.

## CÉLKITŰZÉSEK, MÓDSZEREK

Disszertációm három jól elkülönülő részből áll, melyeket külön-külön az iménti három fejezettel kívántam bevezetni és motiválni, és amelyeknek különbözőek a célkitűzései és módszerei. Az első két részt az ultraerős csatolást megközelítő fény–anyag–kölsönhatás köti össze, a III. rész pedig azokat a komputációs alapvetéseket írja le, amelyeket többek között a II. részben használtunk.

**I. rész** Itt az volt a célunk, hogy megmutassuk, a Dicke-no-go állítások nem érvényesek akkor, ha a Dicke-modellt az atomok és molekulák kvantumelektrodinamikájának PZW-képéből vezetjük le. Célunk volt továbbá, hogy feltérképezzük, milyen követelményeket támaszt a Dicke-fázisátalakulás az általunk javasolt regularizált elektromosdipól-képben. Ebben a részben (topologikus) térelméleti, regularizációs és átlagtér-módszereket használunk. Eredményeinket az I–IV. tézispontok foglalják össze.

**II. rész** Célunk a fotonblokkád áttörés fázisátalakuláskénti értelmezése, a termodinamikai limesz és a végesméret-skálázás numerikus vizsgálata volt. Áramkör-quantumelektrodinamikai rendszerben való megvalósítás elméleti/komputációs támogatása, és ennek kapcsán a transzmon modellezésének finomítása különösen a releváns energiaszintek és a fáziszaj-modell vonalán. Szuperszámítási környezetben alkalmaztuk a C++QED szimulációs keretrendszer adaptív QJMC módszerrel. Szemiklasszikus közelítésekkel kvalitatívan vizsgáltuk a fázisdiagramot. Eredmények: V–VIII. tézispont

**III. rész** Itt a cél egyrészt adaptív lépésközű QJMC algoritmus fejlesztése, tesztelése, és konvergenciatulajdonságainak vizsgálata volt. Másrészt a részben ezt az algoritmust implementáló C++QED

---

<sup>6</sup><http://github.com/vukics/cppqed>

fejlesztése, karbantartása, tesztelése és dokumentációja. Ehhez magasszintű szoftverdízajn- és szoftverimplementálási módszereket használtam. Eredmények: IX–X. tézispont

## EREDMÉNYEK TÉZISEK FORMÁJÁBAN

**I. tézis** (Vukics et al., 2014) A Helmholtz–Hodge-felbontásra alapozva általánosítottuk a Power–Zienau–Woolley-transzformációt tetszőleges topológiájú térrészekre, azaz a lehető legáltalánosabb rezonátor-quantumelektrodinamikai szituációra. Megmutattuk, hogy az  $A$ -négyzetes tag és a töltésklaszterek közötti pillanatszerű kölcsönhatás kiküszöbölése, amely szabad térből ismert volt, tetszőleges ilyen geometriára fennáll. A kvantumoptika egymódusú standard modelljei (Dicke- és Tavis–Cummings-modell) és a mikroszkopikus Hamilton-operátor így tagról-tagra megfeleltethetők egymással. Következésképpen, az elektromágneses térrel kölcsönható atomok rendszerében felvetődő Dicke-fázisátalakulással kapcsolatos no-go érvelések alapja szétoszlik. Megmutattuk, hogy a Dicke-modell, ha a PZW-képre alapozzuk, a transzverz elektromos mezőben mint mértékinvariáns mennyiségben is egy véges átlagtér megjelenését jósolja.

**II. tézis** (Vukics et al., 2015) Atomi ill. molekuláris közege a transzverz polarizációmező egy olyan alakját javasoltuk, amely megoldja a PZW-kép ún.  $P$ -négyzet problémáját – nevezetesen, hogy Dirac-delták négyzete jelenik meg az egyatomos Hamilton-operátorban – anélkül, hogy renormalizációs technikákhoz folyamodnánk. Ez az alak egy új, hosszúság dimenziójú paraméter megjelenését vonja maga után, amelyet a részecskék intimitás-zónájaként azonosítottunk: az intimitás-zónákon kívül a részecskék közötti pillanatszerű dipól–dipól-kölcsönhatás eltűnik. Azonosítottuk mindazon feltételeket, amelyeket a transzverz polarizációmezőnek teljesítenie kell, és e feltételek alapján meghatároztuk az intimitás-zóna méretének alsó és felső határait – az előbbi a részecskeméret, az utóbbi a hullámhossz nagyságrendjébe esik.

**III. tézis** (Vukics et al., 2015) Alkáli atomok esetére megbecsülve a kritikus részecskesűrűséget a Power–Zienau–Woolley-képben, azt találtuk, hogy az közel esik a kondenzációs sűrűséghez. Érveket hoztunk fel azon állításunk alátámasztására, hogy a Dicke-féle szuperradiáns

fázisátalakulás egyfajta sziluettje a kondenzációnak mint makroszkopikus fázisátalakulásnak: az előbbi oly mértékben egyszerűsített képe az utóbbinak, amilyen mértékben az elektromosdipól-Hamilton-operátor leegyszerűsített modellje a kondenzáció alapját adó roppantul bonyolult kvantum soktestproblémának, amely magában foglalja az elektromágneses kölcsönhatást az összes multipól-rendig, az elektronpályák delokalizációját és a részecskék mozgási szabadsági fokát.

**IV. tézis** (Grießer et al., 2016) Átlagtér-modellben kiszámoltuk a szuperradiáns fázisátalakulás depolarizációs eltolódását, vagyis azt a fázisátalakulást, amely a regularizált elektromosdipól-Hamilton-operátoron alapuló Dicke-típusú modellben történik. Ez a modell abban különbözik a Dicke-modelltől, hogy tartalmazza egyrészt az összes elektromágneses módust (mivel egyazon kritikus részecskesűrűségnél az összes szuperradiánssá válik), másrészt a rövidhatótávolságú elektrosztatikus kölcsönhatást azon részecskék között, melyek annyira megközelítik egymást, hogy az intimitás-zónáik összeérnek. Azt találtuk, hogy e kiterjesztett – és realiztikusabb – modellben a kritikus sűrűség a Dicke-féle kritikus sűrűség 3-szorosának adódik, tehát még közelebb kerül a kondenzációs sűrűséghez.

**V. tézis** (Vukics et al., 2019) Felállítottuk elsőrendű disszipatív fázisátalakulások egy lehetséges paradigmáját. Eszerint egy elsőrendű DPT nem mond ellent annak a követelménynek, hogy a Liouville-i dinamikájú disszipatív kvantumrendszerek egyértelmű sűrűségoperátorral rendelkezzenek az állandósult állapotban a külső paraméterek minden értékére. Az elsőrendű fázisátalakulásoknak az a tulajdonsága, hogy a paramétertér bizonyos tartományaiban több fázis állhat fenn együttesen, érvényes lehet disszipatív kvantumrendszerekre anélkül, hogy az állandósult állapotbeli sűrűségoperátorra többértékű megoldás létezne. Ennek az a kulcsa, hogy egyetlen sűrűségoperátor magában foglalhat több, együttesen fennálló fázist mint makroszkopikusan különböző állapotok keverékét. Az állandósult állapotbeli sűrűségoperátor azonban önmagában nem ad információt a fázisok stabilitásáról, vagy nemegyensúlyi jelenségekről, amilyen például a hiszterézis. Ahhoz, hogy ilyen hatásokat is jellemezhesünk, az állandósult állapotbeli sűrűségoperátor kvantumtrajektóriák nyelvén való időbeli kibontására kell hagyatkoznunk. A kvantumtrajektóriák lehetővé teszik olyan bistabilitások tanulmányozását, amelyek elsőrendű disszipatív fázisátalakulásba

mennek át egy termodinamikai határesetben, ahol a makroszkopikusan különböző attraktorok stabil fázisokká válnak, és a rendszer tökéletes hiszterézist mutat a koegzisztencia-tartományban.

**VI. tézis** (Vukics et al., 2019) Az V. tézisben leírt paradigma kiváló példaként tanulmányoztuk a fotonblokádtörés-fázisátalakulást, amely a hajtott-vesztéses Jaynes–Cummings-modellben valósul meg, a kétállapotú rendszer és a harmonikus oszcillátor közötti erős csatolás esetén. A meghajtási erősség bizonyos tartományában a stacioner megoldás az időtartományban klasszikusan megkülönböztethető állapotok közötti bistabilitásnak felel meg. A stacioner megoldást kvantumtrajektóriákra kibontva jellemezni tudtuk a fázisok koegzisztenciájának mibenlétét: az időbeli bistabilitás csak végesméret-effektus, mert a termodinamikai limeszben egy elsőrendű disszipatív fázisátalakulás valósul meg. A Rabi-illetve Jaynes–Cummings-modellekben korábban ismert fázisátalakulásokkal ellentétben itt a termodinamikai limesz egy erőscsatolás-limesz, amelyben a rendszer egyazon kétrésű mikroszkopikus kvantumrendszer marad, miközben mind a bistabilitás időskálája, mind pedig az attraktorok szétválasztottsága makroszkopikussá válik. A rendszerparaméterek egy olyan skálázását konstruáltuk meg, melynek révén a végesméret-felskálázás során a bistabil telegráfjel önhasonló marad, és numerikusan meghatároztuk a skálázási exponenseket. A numerikus munka fél évet vett igénybe egy felhőalapú 64-magos számítási klaszteren.

**VII. tézis** (Vukics et al., 2019) Megmutattuk, hogy a fotonblokádtörés inherensen kvantumos effektus. Ez még a termodinamikai limeszben is érvényes marad, vagyis a termodinamikai limesz nem egy klasszikus limesz. Ennek az az oka, hogy a kölcsönható kétrésű (atom-módus) kvantumrendszer jól feloldott spektruma elengedhetetlen a jelenség létrejöttéhez, mert a két attraktor (fázis) ennek a spektrumnak különböző régióiban él. A termodinamikai limeszben a spektrumnak a növekvő csatolási erősség miatti növekvő anharmonicitása felelős az attraktorok növekvő stabilitásáért. A halvány állapot jelentősen nemklasszikus állapot, mely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a fotonkiszökések *növelik* a fotonszámot a módusban (szuper-Poisson-fotonstatisztika). Megmutattuk, hogy a fel- és lekapcsolási folyamatokat kvantumugrások kaszkádjai idézik elő, valamint hogy az atomi átmenet depolarizációja és fáziszaja rontja az attraktorok élettartamát.

**VIII. tézis** (Fink et al., 2017; Sett et al., 2022) A fotonblokad-áttörési jelensége megvalósul áramkör-kvantumelektrodinamikai rendszerekben transzmon qubitekkel. A bistabilitás spektrális, időbeli és a kvázivalószínűségeloszlásokban megmutató jeleit közvetlenül megfigyelték. Megmutattuk, hogy a szükséges csatolás olyan erős, hogy a transzmon anharmonicitása nem elegendő a qubit-ként való működéshez: magasabban fekvő energiaszintjei is bekapcsolódnak a dinamikába, amelyek lényegesen megváltoztatják a spektrumot és ezáltal azokat a paramétertartományokat, ahol az effektus megfigyelhető. A termodinamikai limesz kísérletileg modellezhető a rezonátor veszteségi rátajának változtatásával, miközben a csatolási erősség állandó maradt. A karakterisztikus idő végesméret-skálázása hét nagyságrenden keresztül követhető a kísérletben. Kísérletileg meghatározták az elhangelés – meghajtási erősség síkon vett fázisdiagramot, amelyet kvalitatívan különbözőnek találtunk a szemiklasszikusan számolható fázisdiagramtól. A kísérletet támogató numerikus munka egy teljes évet vett igénybe egy felhőalapú 64-magos számítási klaszteren.

**IX. tézis** (Kornyik & Vukics, 2019) Kifejlesztettünk egy lépésenként adaptív kvantumugrás-Monte-Carlo-algoritmust, amelynek egyetlen specifikus paramétere van: az időlépésenkénti megengedett maximális teljes ugrási valószínűség,  $\Delta p$ . Tanulmányoztuk a QJMC-módszer konvergenciatulajdonságait ezen paraméter függvényében. Azt találtuk, hogy a QJMC-megoldás egzakt megoldástól való eltéréseinek a trajektóriaszám négyzetgyöke inverzével arányos függése ellaposodik, amely annál nagyobb trajektóriaszámnál történik, minél kisebb  $\Delta p$ . Ezt a viselkedést az elsőrendű QJMC-módszer inherens hibájának tulajdonítottuk, nevezetesen

1. az időbeli diszkretizációnak és
2. az olyan események elmulasztásának, amikor egy időlépésben több ugrás történne.

Mindkét típusú hiba  $O(\delta t^2)$ , ami azt jelenti, hogy  $\Delta p^2$ -tel skáláznak. A tisztán  $\Delta p$ -kontrollált rezsimben rámutattunk egy nem-folytonos viselkedésre a  $\Delta p$  függvényében, amelyet karakterizáltunk és azt találtuk, hogy azt a trajektóriák időbeli mintavételezésének módszere okozza. Ez egy kiváló példája annak, hogy a mintavételezés miként módosíthatja a trajektóriák viselkedését az időlépés befolyásolása által, és egyben rámutat az átlagos időlépés meghatározó szerepére a QJMC



konvergenciájára nézve. Abban az esetben, amikor egy nem-triviális Hamilton-i időfejlődés van jelen, jellemeztük a versengést az  $\Delta p$ - és az ODE-kontroll között, és azt találtuk, hogy az ODE-kontroll előtérbe kerül akkor, amikor a rendszernek a veszteségben szerepet nem játszó karakterisztikus frekvenciái növekednek. Az ODE-kontroll előtérbe kerülését az jelzi, hogy az átlagos időlépés függetlenné válik  $\Delta p$ -től, és a rendszer legnagyobb, a veszteségben szerepet nem játszó karakterisztikus frekvenciája kezdi meghatározni.

**X. tézis** (Vukics, 2012; Sandner & Vukics, 2014) Kifejlesztettük és karbantartjuk a C++QED, nyílt kvantumrendszerek szimulációját célzó C++ keretrendszert. A dizájn alapja a multiarray-konceptió kiaknázása összetett kvantumrendszerek kvantumállapotának (állapotvektor vagy sűrűségoperátor) reprezentálására. A rendszer aritásának<sup>7</sup> fordítási időbeli ismerete maga után vonja a fordítási időbeli algoritmusok alkalmazását az összetett kvantumrendszer elrendezésének fordítási időbeli processzálására, a futási idő csökkentése céljából. A keretrendszer egy magasszintű interfészt biztosít a felhasználónak tetszőlegesen összetett kvantumrendszerek összeállítására elemi szabad alrendszerekből – pl. harmonikus oszcillátor módusok, qubitek, spinek, részecske mozgási szabadsági fokok – és köztük lévő kölcsönhatásokból – pl. Jaynes–Cummings-kölcsönhatás, x–x-kölcsönhatás. A C++QED egy külön alrendszert biztosít többállapotú kvantumrendszerek definiálására (pl. összetett nívószerkezetű atomok), ahol meghajtások, elektromágneses módusokhoz való csatolások és radiatív veszteségek tetszőleges kombinációja állítható össze fordítási időben. A több, mint egy évtizedes története alatt a C++QED nagyjából 20 folyóiratcikk alapját képezte, és különösen hasznosnak bizonyult szuperszámítási környezetekben.

## SAJÁT VONATKOZÓ CIKKEK

- |                                                                                                                                                                             |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Vukics, A., C. Maschler, and H. Ritsch (2007). Microscopic physics of quantum self-organization of optical lattices in cavities. <i>New J. Phys.</i> 9(8), 255.             | 2007 |
| Vukics, A. and H. Ritsch (2007). C++QED: an object-oriented framework for wave-function simulations of cavity QED systems. <i>Eur. Phys. J. D</i> 44(3), 585–599.           | 2009 |
| Vukics, A., W. Niedenzu, and H. Ritsch (2009). Cavity nonlinear optics with few photons and ultracold quantum particles. <i>Phys. Rev. A</i> 79(1), 013828.                 | 2010 |
| Niedenzu, W., R. Schulze, A. Vukics, and H. Ritsch (2010). Microscopic dynamics of ultracold particles in a ring-cavity optical lattice. <i>Phys. Rev. A</i> 82(4), 043605. |      |

<sup>7</sup>Angolul *arity* – a tömb (*multiarray*) indexeinek száma

- 2012 Vukics, A. and P. Domokos (2012). Adequacy of the Dicke model in cavity QED: A counter-no-go statement. *Phys. Rev. A* 86(5), 053807.
- Vukics, A. (2012). C++QEDv2: The multi-array concept and compile-time algorithms in the definition of composite quantum systems. *Comp. Phys. Comm.* 183(6), 1381–1396.
- 2013 Dombi, A., A. Vukics, and P. Domokos (2013). Optical bistability in strong-coupling cavity QED with a few atoms. *J. Phys. B* 46(22), 224010.
- 2014 Vukics, A., T. Grieser, and P. Domokos (2014). Elimination of the A-square problem from cavity QED. *Phys. Rev. Lett.* 112(7), 073601.
- Sandner, R. and A. Vukics (2014). C++QEDv2 Milestone 10: A C++/Python application-programming framework for simulating open quantum dynamics. *Comp. Phys. Comm.* 185(9), 2380–2382.
- 2015 Vukics, A., T. Grieser, and P. Domokos (2015). Fundamental limitation of ultrastrong coupling between light and atoms. *Phys. Rev. A* 92(4), 043835.
- Dombi, A., A. Vukics, and P. Domokos (2015). Bistability effect in the extreme strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model. *Eur. Phys. J. D* 69(3), 60.
- 2016 Grieser, T., A. Vukics, and P. Domokos (2016). Depolarization shift of the superradiant phase transition. *Phys. Rev. A* 94(3), 033815.
- 2017 Fink, J., A. Dombi, A. Vukics, A. Wallraff, and P. Domokos (2017). Observation of the photon-blockade breakdown phase transition. *Phys. Rev. X* 7(1), 011012.
- 2019 Vukics, A., A. Dombi, J. Fink, and P. Domokos (2019). Finite-size scaling of the photon-blockade breakdown dissipative quantum phase transition. *Quantum* 3, 150.
- Korniyk, M. and A. Vukics (2019). The Monte Carlo wave-function method: A robust adaptive algorithm and a study in convergence. *Comp. Phys. Comm.* 238, 88–101.
- 2021 Fuchs, S., A. Vukics, and S. Y. Buhmann (2021). Superradiance from nonideal initial states: A quantum trajectory approach. *Phys. Rev. A* 103(4), 043712.
- Vukics, A., G. Kónya, and P. Domokos (2021). The gauge-invariant Lagrangian, the Power-Zienau-Woolley picture, and the choices of field momenta in nonrelativistic quantum electrodynamics. *Sci. Rep.* 11(1), 1–11.
- 2022 Clark, T., A. Dombi, F. Williams, Á. Kurkó, J. Fortágh, D. Nagy, A. Vukics, and P. Domokos (2022). Time-resolved observation of a dynamical phase transition of atoms in a cavity. *Phys. Rev. A* 105, 063712.
- Sett, R., F. Hassani, D. Phan, S. Barzanjeh, A. Vukics, and J. M. Fink (2022). Approaching the thermodynamic limit of a first-order dissipative quantum phase transition in zero dimension. *In preparation*.

## HIVATKOZÁSOK

- Baumann, K., C. Guerlin, F. Brennecke, & T. Esslinger (2010). Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity. *Nature* 464(7293), 1301.
- Benedict, M., A. Ermolaev, V. Malyshev, I. Sokolov, & E. Trifonov (1996). *Super-radiance: Multiatomic coherent emission*. Taylor and Francis.
- Blais, A., A. L. Grimsmo, S. M. Girvin, & A. Wallraff (2021). Circuit quantum electrodynamics. *Rev. Mod. Phys.* 93, 025005.

- Breuer, H.-P., W. Huber, & F. Petruccione (1997). Stochastic wave-function method versus density matrix: a numerical comparison. *Comp. Phys. Comm.* 104(1), 46 – 58.
- Brune, M., F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagle, J. Raimond, & S. Haroche (1996). Quantum Rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.* 76(11), 1800.
- Carmichael, H. J. (2015). Breakdown of Photon Blockade: A Dissipative Quantum Phase Transition in Zero Dimensions. *Phys. Rev. X* 5, 031028.
- Cirac, J. I. & H. J. Kimble (2017). Quantum optics, what next? *Nat. Photonics* 11(1), 18–20.
- Ciuti, C., G. Bastard, & I. Carusotto (2005). Quantum vacuum properties of the intersub-band cavity polariton field. *Phys. Rev. B* 72, 115303.
- Cook, R. J. & H. J. Kimble (1985). Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps. *Phys. Rev. Lett.* 54, 1023–1026.
- Daley, A. J. (2014). Quantum trajectories and open many-body quantum systems. *Advances in Physics* 63(2), 77–149.
- Dalibard, J., Y. Castin, & K. Mølmer (1992). Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.* 68, 580–583.
- Dicke, R. H. (1954). Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Phys. Rev.* 93, 99–110.
- Diehl, S., A. Micheli, A. Kantian, B. Kraus, H. Büchler, & P. Zoller (2008). Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms. *Nat. Phys.* 4(11), 878–883.
- Diehl, S., A. Tomadin, A. Micheli, R. Fazio, & P. Zoller (2010). Dynamical phase transitions and instabilities in open atomic many-body systems. *Phys. Rev. Lett.* 105(1), 015702.
- Diósi, L. (1985). Orthogonal jumps of the wavefunction in white-noise potentials. *Physics Letters A* 112(6), 288 – 292.
- Dum, R., P. Zoller, & H. Ritsch (1992). Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission. *Phys. Rev. A* 45, 4879–4887.
- Fink, J. M., M. Göppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, & A. Wallraff (2008). Climbing the Jaynes–Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system. *Nature* 454(7202), 315–318.
- Fitzpatrick, M., N. M. Sundaresan, A. C. Y. Li, J. Koch, & A. A. Houck (2017). Observation of a Dissipative Phase Transition in a One-Dimensional Circuit QED Lattice. *Phys. Rev. X* 7, 011016.
- Forn-Díaz, P., L. Lamata, E. Rico, J. Kono, & E. Solano (2019). Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction. *Rev. Mod. Phys.* 91, 025005.
- Geiser, M., F. Castellano, G. Scalari, M. Beck, L. Nevou, & J. Faist (2012). Ultrastrong Coupling Regime and Plasmon Polaritons in Parabolic Semiconductor Quantum Wells. *Phys. Rev. Lett.* 108, 106402.
- Haroche, S. & D. Kleppner (1989). Cavity Quantum Electrodynamics. *Physics Today* 42(1), 24–30.
- Hepp, K. & E. H. Lieb (1973). On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model. *Ann. Phys.* 76(2), 360–404.
- Imamoğlu, A., H. Schmidt, G. Woods, & M. Deutsch (1997). Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity. *Phys. Rev. Lett.* 79, 1467–1470.

- Javanainen, J. (1986). Possibility of quantum jumps in a three-level system. *Phys. Rev. A* 33, 2121–2123.
- Kirton, P. & J. Keeling (2017). Suppressing and Restoring the Dicke Superradiance Transition by Dephasing and Decay. *Phys. Rev. Lett.* 118, 123602.
- Kirton, P., M. M. Roses, J. Keeling, & E. G. Dalla Torre (2019). Introduction to the Dicke model: From equilibrium to nonequilibrium, and vice versa. *Advanced Quantum Technologies* 2(1-2), 1800043.
- Knight, J. M., Y. Aharonov, & G. T. C. Hsieh (1978). Are super-radiant phase transitions possible? *Phys. Rev. A* 17, 1454–1462.
- Kurizki, G., P. Bertet, Y. Kubo, K. Mølmer, D. Petrosyan, P. Rabl, & J. Schmiedmayer (2015). Quantum technologies with hybrid systems. *PNAS* 112(13), 3866–3873.
- Maschler, C., I. B. Mekhov, & H. Ritsch (2008). Ultracold atoms in optical lattices generated by quantized light fields. *Eur. Phys. J. D* 46(3), 545–560.
- Nagy, D., P. Domokos, A. Vukics, & H. Ritsch (2009). Nonlinear quantum dynamics of two BEC modes dispersively coupled by an optical cavity. *Eur. Phys. J. D* 55(3), 659–668.
- Nagy, D., G. Kónya, G. Szirmai, & P. Domokos (2010). Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity. *Phys. Rev. Lett.* 104, 130401.
- Narducci, L. M., M. Orszag, & R. A. Tuft (1973). Energy Spectrum of the Dicke Hamiltonian. *Phys. Rev. A* 8, 1892–1906.
- Niemczyk, T., F. Deppe, H. Huebl, E. Menzel, F. Hocke, M. Schwarz, J. Garcia-Ripoll, D. Zueco, T. Hümmer, E. Solano, et al. (2010). Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nat. Phys.* 6(10), 772–776.
- Plenio, M. B. & P. L. Knight (1998). The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.* 70, 101–144.
- Power, E. A. & S. Zienau (1959). Coulomb gauge in non-relativistic quantum electrodynamics and the shape of spectral lines. *Phil. Trans. R. Soc. A* 251(999), 427–454.
- Reiserer, A. & G. Rempe (2015). Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Rev. Mod. Phys.* 87, 1379–1418.
- Rzażewski, K., K. Wódkiewicz, & W. Żakowicz (1975). Phase Transitions, Two-Level Atoms, and the  $A^2$  Term. *Phys. Rev. Lett.* 35, 432–434.
- Scalari, G., C. Maissen, D. Turčinková, D. Hagenmüller, S. De Liberato, C. Ciuti, C. Reichl, D. Schuh, W. Wegscheider, M. Beck, & J. Faist (2012). Ultrastrong Coupling of the Cyclotron Transition of a 2D Electron Gas to a THz Metamaterial. *Science* 335(6074), 1323–1326.
- Thompson, R. J., G. Rempe, & H. J. Kimble (1992). Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.* 68, 1132–1135.
- Verstraete, F., M. M. Wolf, & J. Ignacio Cirac (2009). Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. *Nat. Phys.* 5(9), 633–636.
- Vojta, M. (2003). Quantum phase transitions. *Reports on Progress in Physics* 66(12), 2069.
- Wei, H.-S., C.-C. Jaing, Y.-T. Chen, C.-C. Lin, C.-W. Cheng, C.-H. Chan, C.-C. Lee, & J.-F. Chang (2013). Adjustable exciton-photon coupling with giant Rabi-splitting using layer-by-layer J-aggregate thin films in all-metal mirror microcavities. *Optics Express* 21(18), 21365–21373.