Utak és körök gráfokban és hipergráfokban

Katona Gyula Y.

Doktori disszertáció
Tézisek
Magyar Tudományos Akadémia

Budapest, 2021

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az értekezés célja, hogy bemutassa kutatásaim hatását a kutatási területre. Minden publikációm valamennyire kötődik a gráfokhoz, hipergráfokhoz, algoritmusokhoz vagy bonyolultságelmélethez, azonban főleg négy szűkebb témában végeztem kutatásokat különböző társszerzőkkel. A disszertációban két tématerületen született eredményeimet foglalom össze.

Az I. rész olyan eredményeket tartalmaz, amelyek a Hamilton-utak és -körök hipergráfokra való általánosításaival kapcsolatosak. Ez rész 7, különböző társszerzőkkel írt publikáción alapszik. Véleményem szerint ez az a terület, ahol legnagyobb volt a kutatásaim hatása. Sok más szerző kezdett hasonló kérdésekkel foglalkozni és a cikkeinkre is szép számú hivatkozás született.

A II. rész 5 olyan, társszerzőkkel írt publikáción alapszik, ami a gráfpárosítások különböző általánosításaival foglalkozik. Ezek a cikkek is jelentős érdeklődést váltottak ki és sokan hivatkoztak rájuk.

Mindkét részben minden fejezet egy-egy cikken alapszik, mert a témák a legtöbb esetben jól elkülöníthetőek. A 8.-10. fejezetek témái ugyan szorosan kapcsolódnak egymáshoz, de az egységesség kedvéért ezek is külön fejezetbe kerültek.

A közelmúltban másik két nagyobb témában kutattam. Papp László F. doktori hallgatómmal és más társszerzőkkel 6 publikációnk jelent meg a gráfok követési számaival kapcsolatban. Varga Kitti doktori hallgatómmal és más társzerzőkkel pedig 3 cikket írtunk minimális szívós gráfok tulajdonságairól és még több kéziratunk is elkészült a témában. Véleményem szerint ezek az eredmények is figyelemre méltóak, de az eltelt idő rövidsége miatt hatásuk még nem mutatható ki annyira. Ezért ezeket az eredményeket nem említem az disszertációban.

Jelen tézisfüzetben a fejezetek, szakaszok, tételek és definíciók számozása a könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért megegyezik a disszertációban található számozással.

Jelölések

Ebben a szakaszban az olvasó azokat a jelöléseket és definíciókat találja, amelyeket a disszertáció során többször használok. Azokat, melyeket csak egy-két fejezetben kerülnek elő, csak az adott helyen ismertetem.

Gráfokra és hipergráfokra a szokásos jelöléseket használjuk, a legfontosabbak alább találhatóak. Ha nincs külön említve, akkor feltételezzük, hogy a gráf *egyszerű*, azaz nem tartalmaz párhuzamos és hurokéleket. Egy G gráf pont- illetve élhalmazát $V(G)$ illetve $E(G)$ jelöli. Ha x és y a G gráf két csúcsa, akkor xy és yx is egy x és y között futó élet jelöl. A gráf pont- és élszámát $v(G)$ és $e(G)$ jelöli. Egy $v \in V(G)$ pont *szomszédsága* $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid \exists\, u\ (vu \in E(G)\}$. A v pont foka a szomszédságának számossága, jelölése $d_G(v) := |N_G(v)|$. A G gráf *minimális fokszáma* $\delta(G)$. A pontok egy $X \subseteq V(G)$ részhalmazára legyen $N_G(X) := \cup_{v\in X} N_G(v)$. A fenti jelölésekben elhagyjuk G-t, ha az nem megy az egyértelműség rovására. Ha $X \subseteq V(G)$, legyen $G[X]$ a G gráf X ponthalmaza által *feszített részgráf*.

Az *út* egy olyan különböző pontokból álló sorozat, melyben bármely két szomszédos pont között vezet él a gráfban. Egy *kör* pedig egy olyan út, amelynek kezdő és végpontja megegyezik. Egy *Hamilton-út* illetve *Hamilton-kör* egy olyan út illetve kör, ami a gráf minden pontját tartalmazza.

Az n pontú teljes gráf jele: K_n.

Most definiáljuk a hipergráfokat, amik a gráfok általánosításai. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ponthalmazát jelöljük $V(\mathcal{H})$-el. v_{n+x} $(x \geq 0)$ ugyanazt pontot jelöli, mint v_x, ha nincs másképp definiálva. Egy hipergráf $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ élhalmaza, aminek jelölése $\mathcal{E}(\mathcal{H})$, a $V(\mathcal{H})$ különböző részhalmazainak egy részhalmaza. Ha nem félrevezető, akkor $V(\mathcal{H})$ helyett egyszerűen V-t, $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ helyett pedig $\mathcal{E}$-t írunk. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf, ha $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ kizárólag r-elemű részhalmazokat tartalmaz. Ezért egy 2-uniform hipergráf egy szokásos egyszerű gráf lesz. Jelölje $\mathcal{H}(U)$ a $\mathcal{H}$ hipergráf U által feszített részhipergráfját, valamely $U \subseteq V(\mathcal{H})$ ponthalmaz esetén.

A teljes, n pontú, r–uniform hipergráfot jelöljük $\mathcal{K}_n^{(r)}$-el.

Végül szokás szerint, $\lfloor x \rfloor$ jelöli a legnagyobb olyan egész számot, ami nem nagyobb, mint x. $\lceil x \rceil$ pedig a legkisebb olyan egész számot, ami nem kisebb, mint x.

I. rész

Hamilton-láncok

1. Dirac-típusú tételek Hamilton-láncokra

Ez fejezet néhány olyan eredményt tartalmaz, amelyek a Hamilton-utak és -körök hipergráfokra való általánosításaival kapcsolatosak.

A legismertebb Hamilton-körökkel kapcsolatos tétel Diractól származik: Ha egy n pontú gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Hogyan általánosítható ez a tétel hipergráfokra?

A kandidátusi disszertációmban adtam egy új definíciót, mely a Hamilton-kör általánosítása hipergráfokra.

1.1.4. Definíció. *Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf. A pontjainak egy $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorba rendezése* Hamilton-lánc, *ha $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+r-1}\} \in \mathcal{E}$ fennáll minden $1 \le i \le n$ esetén. (Itt v_{n+x} ugyanazt a pontot jelöli, mint v_x). Egy r-uniform hipergráf* r-maximális, *ha nem tartalmaz Hamilton-láncot, de akárhogy adunk hozzá egy r-élet keletkezik egy Hamilton-lánc. A pontok egy részhalmazának egy $(v_1, v_2, \ldots, v_{l+1})$ sorrendje egy l* hosszú nyílt lánc *a v_1 és v_{l+1} pontok között, ha $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+r-1}\} \in \mathcal{E}$ fennáll minden $1 \le i \le l - r + 2$ esetén.*

Az utak, körök illetve Hamilton-út definíciói hasonlóan általánosíthatóak.

Sok más módon is lehet definiálni ezen fogalmakat. Vegyük észre, hogy a a fenti definícióban a kör egymás után következő éleinek metszete $r - 1$ méretű. Egy általánosabb definícióban a metszet méretének egy konstans t számnak kell lennie. Ekkor *t-szoros r-utakról és körökről* beszélhetünk. Az elmúlt 20 évben több, mint 150 publikáció jelent meg ehhez a témához kapcsolódóan. Jó összefoglaló cikkek a témában: [58, 76, 82, 92].

Amikor $t = r - 1$, ez a definíció egybe esik a fenti lánc definíciójával. Az irodalom leggyakrabban *szoros utak és körök* elnevezést használja erre a fogalomra. $t = 1$ esetén a *laza út és kör* elnevezés használatos.

A disszertációban főleg a láncok esetével foglalkozunk. Mivel több más fogalmat és elnevezést is származtatunk belőle, praktikusabb az eredeti névnél maradni.

Ebben a fejezetben használni fogjuk a következő definíciót is, ami a korábbiaktól jobban eltérő fogalmat ad.

1.1.5. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ egy 4–uniform hipergráf. A pontjainak egy $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorba rendezése egy* Hamilton háló, *ha minden $1 \le i \le n$ és $1 \le j \le n$ esetén, melyre $|i - j| \ge 2$ fennáll, létezik olyan E_m éle $\mathcal{H}$-nak, amelyre $\{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\} = E_m$. (Itt v_{n+x} $(x \ge 0)$ ugyanazt a pontot jelöli, mint v_x.)*

Egy Dirac-típusú tétel megfogalmazásához a fokszám fogalmát is általánosítani kell hipergráfokra. Itt egy nagyon általános definíciót adunk, de ennek csak speciálisabb eseteit fogjuk használni.

1.1.6. Definíció. *Egy r–uniform hipergráfban egy fix ℓ–elemű ponthalmaz, $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$,* fokszáma *azon élek száma, amelyek tartalmazzák a $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ pontok mindegyikét. Jelölése $d^{(r)}(v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$. Továbbá $\delta_\ell^{(r)}(\mathcal{H})$ jelöli $d^{(r)}(v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$ minimumát tekintettel az összes ℓ-elemű ponthalmazra $\mathcal{H}$-ban. (A alsó indexet elhagyjuk, ha nem értelemzavaró.) A v pont* szomszédsága*:*

$$N_{\mathcal{H}}(v) := \{E - \{v\} \mid v \in E, E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}.$$

Az 1.2. szakaszban egy Dirac-típusú tételt bizonyítottunk r–uniform hipergráfokra. Az 1.4. szakaszban egy természetes extremális kérdést vizsgálunk: Legfeljebb hány éle lehet egy olyan r–uniform hipergráfnak, amelyben nincs Hamilton-lánc? Az 1.3. szakasz egy olyan konstrukciót tartalmaz, amely azt mutatja meg, hogy a Hamilton-hálók lényegesen különböznek a Hamilton-láncoktól. Ezek az eredmények a [K11] cikkben jelentek meg.

A kandidátusi disszertációmban [53] már bizonyítottam egy Dirac-típusú tételt hipergráfokra, de ez eredmény nem jelent meg folyóiratban. Ugyanis röviddel később Hal Kiersteaddel közösen sikerül belátunk a következő erősebb és általánosabb tételt. Ez a fejezet fő eredménye.

1.2.1. Tétel (Katona, Kierstead [K11])**.** *Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy n pontú, r-uniform hipergráf, melyre $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$. Ekkor $\mathcal{H}$ tartalmaz Hamilton-láncot.*

Ez a fokszámkorlát nem éles, de belátható, hogy a korlát biztosan legalább $\lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor$.

1.2.3. Tétel (Katona, Kierstead [K11])**.** *Minden r és n egészre, melyre such $2 \le r$ és $r^2 < n$ teljesül, létezik olyan r-maximális hipergráf $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ on n ponton, hogy*

$$\delta_{r-1}(\mathcal{H}) \ge \left\lfloor \frac{n-r+1}{2} \right\rfloor.$$

Az 1.3. szakaszban található következő tétel azt mutatja meg, hogy cn-es alsó korlát $c < 1$ esetén nem elegendő ahhoz, hogy Hamilton-háló létezése garantált legyen.

1.3.1. Tétel (Katona, Kierstead [K11])**.** *Minden $n \ge 6$ egészhez konstruálható olyan n pontú, 4-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, amely nem tartalmaz Hamilton-hálót és*

$$d(x, y, z) \ge \begin{cases} n - 9 & \textit{if } n \textit{ is odd} \\ n - 12 & \textit{if } n \textit{ is even} \end{cases}$$

teljesül minden x, y, z ponthármasra.

Az 1.4. szakaszban korlátokat adunk az n pontú, r-uniform maximális hipergráfok élszámára. Ore [68] bizonyította, hogy gráfok esetén egyetlen maximális gráf van, melynek $\binom{n-1}{2}+1$ éle van. Ezt egy $(r-1)$ pontú teljes gráfból kaphatjuk egy plusz él hozzávételével. A következő tétel ezt a konstrukciót általánosítja nagyobb r esetére, de amint később látni fogjuk, ez nem optimális.

1.4.1. Tétel (Katona, Kierstead [K11]). *Minden r és n egészre, amire teljesül $2 \le r$ és $2r-1 \le n$, létezik olyan n pontú, r–maximális $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ hipergráf amelynek éleinek száma*

$$|\mathcal{E}| = \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r-2} = \binom{n}{r} - \binom{n-2}{r-1}.$$

Ha $r=3$ és 3 osztja $n-1$-et, akkor jobb konstrukciót is adunk.

1.4.2. Tétel (Katona, Kierstead [K11]). *Minden n és $q \ge 2$ egészre, ahol $n=3q+1$ létezik olyan 3-maximális $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ hipergráf amelyre*

$$|\mathcal{E}| = \binom{n-1}{3} + n - 1.$$

Végül bizonyítunk egy felső korlátot is.

1.4.3. Tétel (Katona, Kierstead [K11]). *Ha $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ egy r–uniform hipergráf n ponton, melyre teljesül, hogy*

$$|\mathcal{E}| \ge \frac{n-1}{n}\binom{n}{r}$$

akkor $\mathcal{H}$ tartalmaz Hamilton-láncot.

Később Tuza [93] megjavította az alsó korlátot, olyan Hamilton-láncot nem tartalmazó konstrukciót adott, amelyben az élek száma $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-2}$. Frankl Péterrel a későbbiekben javítottunk a felső korláton is, ezt az eredményt a 2.4. szakasz tárgyalja. Ugyan a korlátok aszimptotikusan pontosak, teljesen pontos korlát még nem ismert azóta sem.

Cikkünk megjelenése nagy érdeklődést váltott ki, számos kutató kezdett hasonló kérdésekkel foglalkozni. Itt most csak néhány, a témához szorosabban kapcsolódó eredményt ismertetek.

Jelölje $h^t(r,n)$ a legkisebb olyan m számot, amelyre minden n pontú, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, amelyben $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) \ge m$ tartalmaz t-szoros Hamilton-r-kört, feltéve, hogy $r-t$ osztja n-et. Az 1.2. szakaszban ismertetett tételek szerint

$$\left\lfloor \frac{n-r+3}{2} \right\rfloor \le h^{r-1}(r,n) \le \left(1-\frac{1}{2r}\right)n + O(1).$$

Rödl, Ruciński és Szemerédi [77, 78] belátták, hogy $h^{r-1}(r,n) = \frac{n}{2} + o(1)$ teljesül $k \geq 3$ esetén. Később [79] pontos eredményt bizonyítottak a $k = 3$ esetben: $h^2(3,n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Markström és Ruciński általánosabb t-re megmutatták [65], hogy ha $0 \leq t \leq r-1$, $r-t \mid n$, $r-t \mid r$, akkor $h^t(r,n) = \frac{n}{2} + o(1)$.

$r - t \nmid r$ esetén a korlát különböző. Kühn and Osthus [57] belátták, hogy $h^1(3,n) = \frac{n}{4} + o(n)$. Ezt később Kühn, Mycroft és Osthus [56] általánosították tetszőleges r és t értékekre:

$$h^t(r,n) = \frac{n}{\lceil \frac{r}{r-t} \rceil (r-t)} + o(1) \quad \text{if } r - t \nmid r.$$

Czygrinow és Molla [29] megmutatták, hogy $h^1(3,n) = \lceil \frac{n}{4} \rceil$, tőlük függetlenül Han és Zhao [45] bizonyították, hogy $h^t(r,n) = \lceil \frac{n}{2r-2t} \rceil$ teljesül minden $t < \frac{r}{2}$ esetén.

Érdemes megemlíteni, hogy a fenti bizonyítások mindegyikének feltétele, hogy a hipergráf pontszáma óriási szám legyen. Ezzel szemben a mi módszereink kisebb pontszám esetén is működnek.

2. Extremális k-él-Hamilton hipergráfok

2.1.1. Definíció. *Egy hipergráf* k-él-Hamilton *ha bármely k élének elhagyása után is tartalmaz Hamilton-láncot.*

Ebben a fejezetben a k-él-Hamilton hipergráfok minimális élszámát vizsgáljuk. Gráfok esetén már ismert volt a pontos érték:

2.1.2. Tétel (Paoli, Wong, Wong, [69,88])**.** *Az $n \geq k+3$ pontú, k-él-Hamilton hipergráfok élszámának minimuma $\lceil n(k+2)/2 \rceil$.*

Mivel egy r-uniform Hamilton-láncban minden pont foka r, a minimális fokszám minden k-él-Hamilton hipergráfban $r+k$, ezért az élek száma legalább $\lceil n(r+k)/r \rceil$. Ebből következik, hogy $r = 2$ esetén a fenti tétel bizonyításában adott konstrukciók éles eredményt adnak. Azonban $r > 2$ esetén ez nem egy éles korlát.

A 2.2. szakaszban alsó és felső korlátokat adunk 3-uniform k-él-Hamilton hipergráfokra különféle k értékekre. A 2.3. szakaszban az általános r és $k = 1$ esettel foglalkozik. A 2.4. szakaszban ezek alkalmazásával felső korlátot adunk az r-uniform, Hamilton-láncot nem tartalmazó hipergráfok élszámának maximumára. Az eredmények a [K3] cikkben jelentek meg.

Ha egy hipergráfban van k éldiszjunkt Hamilton-lánc, akkor nyilván k-él-Hamilton. Ebből egy triviális felső becslést kapunk az élek minimális számára: $(k+1)n$. A $k = 1$ esetben ennél jobb korlátot bizonyítottunk.

2.2.1. Tétel (Frankl, Katona [K3])**.** *Létezik olyan n pontú,* 1*-él-Hamilton* 3*-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, amelyre*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{11}{6}n + o(n).$$

Ugyanerre az esetre alsó korlátot is adtunk:

2.2.2. Tétel (Frankl, Katona [K3])**.** *Minden $n \geq 5$ pontú,* 1*-él-Hamilton 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{14}{9}n.$$

$k = 2$ esetén is bizonyítottunk egy a triviálisnál jobb felső korlátot:

2.2.4. Tétel (Frankl, Katona [K3])**.** *Létezik olyan n pontú,* 2*-él-Hamilton* 3*-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, amelyre*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{13}{4}n + o(n).$$

Ahhoz, hogy tetszőleges k esetén alsó korlátot tudjunk bizonyítani, érdemes megvizsgálni, hogy minimálisan hány éle van egy olyan gráfnak, amiből akárhogyan hagyunk el k élet, még tartalmaz P_4-et, azaz egy 4 pontú, 3 élű utat. Az ilyen gráfokat *k-stabilnak* nevezzük és minimális élszámukat jelöljük $S(k)$-val.

Ha ismerjük az $S(k)$ értéket egy adott k-ra, akkor a következő alsó korlátot adhatjuk k-él-Hamilton, 3-uniform hipergráfokra:

2.2.5. Tétel (Frankl, Katona [K3]). *Minden n pontú, k-él-Hamilton 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{S(k)}{3} n.$$

A [K3] publikációban meghatároztuk $S(k)$ értékét $1 \leq k \leq 8$ esetén, és egy sejtést fogalmazunk meg nagyobb k-ra. Horváth Illéssel [K5] később bebizonyítottuk a sejtést. Megmutattuk, hogy $S(1) = 4$ és $k \geq 2$ esetén

$$S(k) = k + \left\lceil \sqrt{2k + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil.$$

Ennek bizonyítása a 3. fejezetben található.

Ezt előző tételbe helyettesítve a triviálisnál lényegesen jobb alsó korlátot kapunk.

A következő tétel az általános r esetével foglalkozik.

2.3.1. Tétel (Frankl, Katona [K3]). *Létezik olyan n pontú, 1-él-Hamilton r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, amelyre*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{4r-1}{2r} n + o(n).$$

Alsó korlátot csak $r = 4$ esetében adtunk.

2.3.2. Tétel (Frankl, Katona [K3]). *Minden $n \geq 6$ pontú, 1-él-Hamilton 4-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{3}{2} n.$$

Az 1.4. szakaszban alsó és felső korlátot adtunk az n pontú, Hamilton-láncot nem tartalmazó hipergráfok maximális élszámára. Tuza [93] javított az alsó korlátunkon, olyan Hamilton-láncot nem tartalmazó hipergráfokat konstruált, melyben az élek száma $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-2}$. Mi a fenti eredmények felhasználásával az 1.4.3. tétel $\binom{n}{r}(1 - 1/n)$ felső korlátját javítottuk meg:

2.4.1. Tétel (Frankl, Katona [K3]). *Ha egy n pontú, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf nem tartalmaz Hamilton-láncot, akkor*

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \leq \binom{n}{r} \left(1 - \frac{4r}{(4r-1)n}\right).$$

4. Az Erdős-Gallai tétel kiterjesztése hipergráfokra

Ebben a fejezetben a következő klasszikus tételt általánosítjuk hipergráfokra.

4.1.1. Tétel (Erdős-Gallai [34]). *Legyen G egy n pontú gráf, ami nem tartalmaz k élű utat. Ekkor $e(G) \leq \frac{1}{2}(k-1)n$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a G gráf k pontú teljes gráfok diszjunkt uniója.*

Mivel hipergráfokban többféleképpen is lehet általánosítani az út fogalmát, ezért a fenti tételnek is többféle általánosítása lehetséges. Az út egyik definícióját az 1. fejezetben bemutattuk már. Most egy másik általánosítást definiálunk, melyet Berge adott.

4.1.2. Definíció. *Egy hipergráfban egy k hosszú* Berge-út *éleknek egy k elemű $h_1, \ldots, h_k$ és pontoknak egy $k+1$ elemű $v_1, \ldots, v_{k+1}$ halmaza, hogy minden $1 \leq i \leq k$ esetén fennáll a $v_i, v_{i+1} \in h_i$ tartalmazás.*

A következőkben meghatározzuk a k hosszú Berge-utat nem tartalmazó r-uniform hipergráfok maximális élszámát. Érdekes, hogy ez az érték másképp viselkedik $k \leq r$ és $k > r$ esetén.

4.1.3. Tétel (Győri, Katona, Lemons [K4]). *Legyen $k > r+1 > 3$, valamint $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf, ami nem tartalmaz k hosszú Berge-utat. Ekkor $e(\mathcal{H}) \leq \frac{n}{k}\binom{k}{r}$.*

Mubayi and Verstraete tőlünk függetlenül belátta ugyanezt, amikor $k > 2r > 2$ or $k > r+1 > 11$, de az bizonyítást nem publikálták. $k \leq r$ esetére egy másik tételt bizonyítottunk. Ekkor nem sikerült kiterjesztenünk a bizonyítást a $k = r+1$ esetre. Ezt később Davoodi, Győri, Methuku and Tompkins [30] tette meg, mi csak $r = 3$ és $k = 4$ esetén tudtuk bizonyítani a tételt.

4.1.4. Tétel (Győri, Katona, Lemons [K4]). *Legyen $r \geq k > 2$. Ha $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf, ami nem tartalmaz k hosszú Berge-utat, akkor $e(\mathcal{H}) \leq \frac{n(k-1)}{r+1}$.*

Megjegyzés. *Mindkét fenti korlát éles. Az első esetében, amikor $k > r$, tegyük fel, hogy k osztja n-et és particionáljuk az n pontot k elemű halmazokra. Minden k elemű halmaz valamennyi r elemű részhalmaza legyen a hipergráf egy éle. Egy ilyen hipergráfnak pontosan $\frac{n}{k}\binom{k}{r}$ éle van és világos, hogy nem tartalmaz k hosszú Berge-utat.*

A második esetben, amikor $k \leq r$, tegyük fel, hogy $r+1$ osztja $k-1$-et. A pontokat most $r+1$ elemű halmazokra particionáljuk és minden $r+1$ elemű halmazból vegyünk be $k-1$ darab r elemű részhalmazt az élek közé. Ennek a hipergráfnak pontosan $\frac{k-1}{r+1}n$ éle van. Minden komponensben pontosan $k-1$ él van, világos, hogy nincs k hosszú Berge-út benne.

Egy hasonló eredmény található a [67] cikkben. Ebben a szerzők minimális k-utat nem tartalmazó hipergráfok élszámának a maximumát keresik. A minimális k-utak olyan Berge-utak, amik még az a feltételt is kielégítik, hogy h_i és h_j diszjunkt, ha $|i-j| \geq 2$.

A Berge-utakra más megszorításokat is lehet tenni. A következő definíció körökre vonatkozó változata a [31] cikkben jelent meg.

4.1.5. Definíció. *Legyen $r \geq 2$ és $t, 1 \leq t \leq r-1$. Egy k hosszú t-szoros út egy r-uniform hipergráfban egy olyan Berge-út melyben az egymás melletti élek metszetének mérete legalább t.*

Nyilván egy 1-szoros út megegyezik egy Berge-úttal. t-szoros utak esetében is lényegében éles korlátot adtunk.

4.1.6. Tétel (Győri, Katona, Lemons [K4])**.** *Legyen $r \geq 2$ és $1 \leq t \leq r-1$. Tegyük fel, hogy k és n elegendően nagy. Legyen $\mathcal{H}$ egy lehető legtöbb élet tartalmazó r-uniform hipergráf n ponton, ami nem tartalmaz k hosszú t-szoros utat. Ekkor*

$$(1-o(1))\frac{\binom{n}{t}\binom{k}{r}}{\binom{k}{t}} \leq e(\mathcal{H}) \leq \frac{\binom{n}{t}\binom{k}{r}}{\binom{k}{t}}$$

Most tekintsünk egy szigorúbb definíciót, amit korábban nyílt láncnak neveztünk (1.1.4. definíció). A könnyebb olvashatóság miatt ezt megismételjük:

4.1.8. Definíció. *Egy r-uniform hipergráfban egy k hosszú nyílt lánc a $k+r-1$ darab $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+r-1}\}$ pont és a k darab $\{h_1, h_2, \ldots h_k\}$ él összessége, ahol minden $1 \leq i \leq k$-re teljesül, hogy $h_i = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+r-1}\}$.*

A definícióból következik, hogy minden nyílt lánc egy $(r-1)$-szoros út, ez fodítva nem igaz. Erről fontos különbségről a későbbiekben még lesz szó.

Nyílt láncok esetén az alsó és felső korlátunk egy r-es szorzóban különbözik.

4.1.9. Tétel (Győri, Katona, Lemons [K4])**.** *Legyen $\mathcal{H}$ be an extremális r-uniform hipergráf, ami nem tartalmaz k hosszú nyílt láncot. Ekkor*

$$(1-o(1))\frac{k-r+1}{r}\binom{n}{r-1} \leq |e(\mathcal{H})| \leq (k-1)\binom{n}{r-1}.$$

Amint az előbb említettük, fontos különbség van az $(r-1)$-szoros utak és a nyílt láncok között. Erre világít rá a következő definíció.

4.1.11. Definíció. *Legyen $k > r \geq 2$ és $1 \leq J < k$. Azt mondjuk, hogy egy r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfban a $e_1, \ldots, e_k$ élekből álló k hosszú Berge-út* kielégíti a (J) feltételhalmazt, *ha*

$$\textit{minden } 1 \leq l \leq J \textit{ és minden } i > l \textit{ esetén } |e_i \cap e_{i-l}| = max\{r-l, 0\}.$$

$J = 1$ esetén a (J) feltételhalmazt kielégítő Berge-utak épp az $(r-1)$-szoros utak, $J = k-1$ esetén pedig épp a nyílt láncok. Vegyük észre, hogy a fentiek szerint a k hosszú $(r-1)$-szoros utat nem tartalmazó hipergráfok élszáma aszimptotikusan $\frac{k-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$. A k hosszú nyílt láncot nem tartalmazóké viszont $\frac{k-1}{r}\binom{n}{r-1}$. Az élszám minden (J) feltételhalmazra várhatóan a kettő közé esik. $k-1$ különböző feltételhalmaz van, viszont az eddigi konstrukciók blokkokból állnak, amelyek mérete csak $r-1$ különböző értéket vehet fel. Ezért úgy sejtjük, hogy valamelyik esetben másmilyen lesz az extremális hipergráf.

A fenti eredmények a [K4] cikkben jelentek meg, de már jóval korábban megjelent egy kibővített absztrakt [44], ami felkeltette más kutatók érdeklődését. Azóta több, mint 50 publikáció hivatkozott az eredményeinkre különböző kontextusban.

Allen, Böttcher, Cooley and Mycroft [13] alsó és felső korlátokat adtak a 4.1.9. tétel egy analógjaként, amikor $k = \alpha n$ valamilyen α konstansra. Ha α kicsi, akkor a korlátok aszimptotikusen egyenlőek. A mi eredményeinket használva Glebov, Person and Weps [41] korlátokat adtak az analóg t-szoros körök esetére. Győri, Methuku, Salia, Tompkins és Vizer [43] aszimptotikusan bizonyította az Erdős-Gallai tétel Berge-utakra vonatkozó verzióját összefüggő hipergráfokra, amikor r fix és n valamint k tart a végtelenbe. Számos más cikk ad korlátokat Berge-körök esetén összefüggő illetve 2-összefüggő hipergráfokra. [35, 36, 39, 40, 42, 55]. Füredi, Jiang and Sievert [38] a lineáris utak esetével foglalkozik, felhasználva a mi módszereinket is. Szintén a mi eredményeinket használva a [33, 47] cikkek szerzői érdekes eredményeket bizonyítanak k-fákra (egyszerű gráfokban).

5. Kis méretű Hamilton-út telített gráfok

Ebben a fejezetben egy gráfokkal kapcsolatos problémával foglalkozunk, amit általánosítunk. A következő fejezetben pedig ennek hipergráfokra megfogalmazott esetét vizsgáljuk.

Legyen m és n olyan pozitív egész számok, melyre $n \geq m+1$ teljesül és legyen G egy n pontú gráf. G egy F részgráfját *m-út fedésnek (vagy az angol név alapján röviden mPC-nek)* nevezzük, ha

1. F minden komponense egy út, (0 hosszú út is megengedett),
2. F legfeljebb m komponensből áll,
3. $V(F) = V(G)$.

Világos, hogy egy 1-út fedés G-ben egyben egy Hamilton-út.

Azt mondjuk, hogy G *m-út fedés telített* (röviden mPCS), ha G-ben nincs m-út fedés, de akárhogyan is adunk egy új élet a gráfhoz, már lesz mPC. Ekkor használjuk a $G \in m$PCS jelölést is. Az 1PCS helyett a HPS (Hamilton-út telített angol rövidítése) jelölést használjuk.

Ezekkel a fogalmakkal már több cikk foglalkozott korábban: [18,23,83,84]. Skupień [84] meghatározta az mPCS gráfok maximális élszámát és karakterizálta az extremális gráfokat. Ez a fogalom összefüggésbe hozható Chvátal szívós gráfokra vonatkozó sejtésével is. Egy G gráf *t-szívós*, ha $|S| \geq t\omega(G-S)$ teljesül $V(G)$ minden elvágó S ponthalmazára (azaz $\omega(G-S) > 1$, ahol ω a komponensek számát jelöli). Chvátal sejtése [24], hogy létezik olyan t_0 konstans, melyre teljesül, hogy minden t_0-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört. Bauer társszerzőivel [15] olyan tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén konstruált $(\frac{9}{4} - \epsilon)$-szívós, Hamilton-kört nem tartalmazó gráfokat. Ezzel bizonyították, hogy ha a sejtés igaz, akkor $t_0 \geq \frac{9}{4}$. Ennek a korlátnak a javításához Hamilton-kört nem tartalmazó, nagy szívósságú gráfokat kellene konstruálni. Mivel élek hozzáadásával a szívósság nem csökkenhet, világos, hogy a legjobb konstrukciók szükségszerűen Hamilton-kör telített gráfok.

Egy G gráf *P_m-telített* ha G nem tartalmazza részgráfként az m pontú utat, P_m-et, de egy tetszőleges él hozzáadásával már tartalmaz.

A következő két függvényt vizsgáljuk:

$$\mathrm{sat}(n, m) = \min\{e(G) \mid v(G) = n \text{ és } G \in m\mathrm{PCS}\}$$

valamint

$$\mathrm{sat}(n, P_m) = \min\{e(G) \mid v(G) = n,\ G \quad P_m\text{-telített}\}.$$

$\mathrm{sat}(n, 1)$ helyett a $\mathrm{sat}(n, \mathrm{HP})$ jelölést használjuk.
Az extremális gráfok halmazának jelölése:

$$\mathrm{Sat}(n, m) = \{G \mid v(G) = n,\ e(G) = \mathrm{sat}(n, m) \text{ and } G \in m\mathrm{PCS}\}.$$

Sat$(n, 1)$ helyett pedig a Sat(n, HP) jelölést használjuk.

Az 5.2. szakaszban és az 5.3. szakaszban alsó és felső korlátokat bizonyítunk a sat(n, m) és a sat(n, HP) értékeire. Az 5.4. szakaszban pedig belátjuk, hogy $n \geq 54$ és $n \in \{22, 23, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51\}$ esetén

$$\left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor - 2 \leq \mathrm{sat}(n, \mathrm{HP}) \leq \left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor .$$

Végül az 5.5. szakaszban felső korlátot adunk a sat(n, m) és a sat(n, P_m) értékekre bizonyos n és m esetén. Ezek az eredmények a [K1] publikációban jelentek meg.

A következő tételeket bizonyítottuk:

5.2.4. Tétel (Dudek, Katona, Wojda [K1]). *Legyenek n és m olyan pozitív számok, hogy $n \geq m + 1$. Ekkor*

$$\mathrm{sat}(n, m) \geq \frac{3}{2}n - 3(m + 1).$$

5.3.1. Tétel (Dudek, Katona, Wojda [K1]). *Legyen $G \in$ Sat(n, HP), ahol $n \geq 14$. Ekkor $e(G) \geq \lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor - 2$.*

5.4.2. Tétel (Dudek, Katona, Wojda [K1]). *Minden $n \geq 54$ és $n \in \{22, 23, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51\}$ esetén létezik olyan n pontú HPS gráf, melyben az élek száma $\lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor$.*

5.5.2. Következmény. *Legyen $p \geq q$.*

1. *Páros q esetén, ha $q - 2 \in \{20, 28, 36, 38, 40, 44, 46, 48\}$ vagy $q - 2 \geq 52$, akkor*
$$\mathrm{sat}(p, P_q) \leq p + \frac{q}{2} - 1,$$

2. *páratlan q esetén, ha $q - 3 \in \{20, 28, 36, 38, 40, 44, 46, 48\}$ vagy $q - 3 \geq 52$, akkor*
$$\mathrm{sat}(p, P_q) \leq \frac{3p}{2}.$$

5.5.3. Következmény. *Ha $m \geq 2, n - 2m + 3 \in \{22, 23, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51\}$ vagy $n - 2m + 3 \geq 54$, akkor*

$$\mathrm{sat}(n, m) \leq \frac{3n}{2} - 2m + 2.$$

In [91] Zelinka gave a construction of a family of graphs $\mathcal{F}_n$ of order $n \in \mathbb{N}$, and conjectured that every HPS graph of order n is in $\mathcal{F}_n$. Since in Zelinska's construction $e(G) = O(n^2)$, for every graph $G \in \mathcal{F}_n$, Theorem 5.4.2 disproves this conjecture.

Following our work some results were improved. Frick and Singleton [37] improved our lower bound for $\mathrm{sat}(n, \mathrm{HP})$, and showed that the upper bound is sharp if $n \geq 54$. Burger and Singleton [22] obtained the precise values for many smaller n values. In [21] Bullock, Frick, van Aardt and Mynhardt investigated the structure of HPS graphs that are not 1-tough and they constructed several interesting new classes of HPS graphs, some of them are generalizations of our constructions. In [20] Bullock, Frick and Singleton constructed an HPS graph on 18 vertices with 30 edges which is the smallest know HPS graph at the moment.

6. Hamilton-lánc telített hipergráfok

Az 5.4. szakaszban Hamilton-út telített gráfokról volt szó. Ebben a fejezetben a hipergráfokra vonatkozó analóg kérdéseket vizsgáljuk. Ehhez ismét a 1.1.4. definícióban megadott Hamilton-út általánosítást használjuk.

Mivel ebben a fejezetben csak nyílt láncokkal foglalkozunk, ezért a nyílt lánc elnevezés helyett *az egyszerűség kedvéért a lánc elnevezést fogjuk használni.*

6.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$ nem tartalmaz (nyílt) Hamilton-utat, de akárhogyan is adunk hozzá egy új r-élet már tartalmazni fog.*

Gráfok esetén Ore [68] bizonyította, hogy a Hamilton-kört nem tartalmazó n pontú gráfok maximális élszáma (és így a Hamilton-kör telített gráfok maximális élszáma is) $\binom{n-1}{2} + 1$. Bollobás [16] vetette fel, hogy mekkora az élek minimális száma, $\mathrm{sat}(n; C_n)$, egy Hamilton-kör telített gráfban. 1972-ben Bondy [17] belátta, hogy $\mathrm{sat}(n; C_n) \geq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ ha $n \geq 7$. Clark, Entrigner és Shapiro [25, 26] valamint Xiaohui, Wenzhou, Chengxue és Yuansheng [59] eredményeiből következik, hogy ez a korlát éles eltekintve néhány kis n értéktől. A konstrukciók alapjai Isaack snarkok [48] illetve általánosított Petersen gráfok. Természetesen merül fel a kérdés a Hamilton-út telített gráfokra is. Az ezzel kapcsolatos eredményeinket az 5. fejezet tartalmazza.

Ebben a fejezetben az r-uniform hipergráfokra vonatkozó analóg kérdéssel foglalkozunk, elsősorban $r = 3$ esetén. Ezek az eredmények a [K2] cikkben jelentek meg.

6.1.2. Definíció. *Jelölje $g_r(n)$ $(r \geq 2)$ an n pontú, r-uniform Hamilton-út telített hipergráfok minimális élszámát.*

Ezzel a jelöléssel az 5. fejezet eredményei szerint $g_2(n) = \lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor$ teljesül, ha $n \geq 54$. Másrészt a [K11] cikkben található egy konstrukció n pontú, Hamilton-lánc telített hipergráfra, melyben az élek száma

$$\sim \left(\frac{1}{r!} - \frac{1}{2^r \lceil r/2 \rceil ! \lfloor r/2 \rfloor !} \right) n^r,$$

ami egy felső korlátot ad $g_r(n)$-re. $r = 3$ esetén ebből a $g_3(n) \leq \frac{5}{48} n^3 + o(n^3)$ korlát következik.

Ebben a fejezetben először egy általános alsó korlátot adunk, aminek nagyságrendje $\Omega(n^{r-1})$.

6.2.1. Tétel (Dudek, Katona, Żak [K2])**.** *Ha $\mathcal{H}$ egy r-uniform Hamilton-út telített hipergráf, akkor $|\mathcal{E}(H)| \geq \binom{n}{r} / (r(n-r)+1)$.*

Ezen kívül megjavítjuk a korábbi konstrukciót $r = 3$-ra. Az új konstrukcióban az élek száma $O(n^{5/2})$.

6.3.7. Tétel (Dudek, Katona, Żak [K2]). *Minden $n \geq 12$-re létezik olyan 3-uniform Hamilton-út telített hipergráf, melyben a élek száma $\frac{3\sqrt{30}}{25}n^{5/2} + o(n^{5/2})$.*

Ugyanezek a korlátok bizonyíthatóak, ha Hamilton-út helyett Hamilton-köröket tekintünk, azaz pontosabban fogalmazva nyílt Hamilton-lánc helyett (zárt) Hamilton-láncot.

Később Dudek és Żak [32] általánosította a konstrukciónkat tetszőleges r-uniform hipergráfok esetére, olyan r-uniform Hamilton-út telített hipergráfokat konstruáltak, melyekben az élek száma $O(n^{r-1/2})$ nagyságrendű. Ezután Żak [90] tovább javította a konstrukciót $O(n^{r-1})$-ra, ami már aszimptotikusan éles. Ruciński és Żak [80] ugyanezt kérdést t-szoros r-uniform Hamilton körök esetén vizsgálták. Megmutatták, hogy ha $r - t \mid n$ és $\frac{4r}{5} \leq t \leq r$, akkor a telített hipergráf éleinek számának nagyságrendje $\Theta(n^t)$, ami az előzőek általánosítása. További t értékre ugyanezen szerzők [81] különböző alsó és felső korlátokat bizonyítottak, de nem ismert, hogy ezek élesek-e.

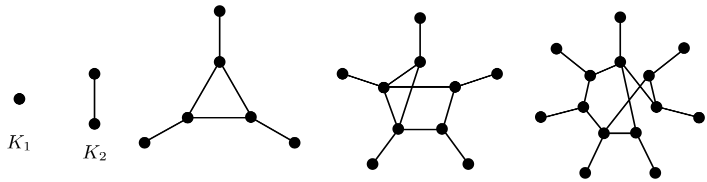
II. rész

Párosításokkal kapcsolatos problémák

7. Legalább kettő hosszú utak pakolása

Legyen $\{A, B, C, \dots\}$ összefüggő gráfok egy halmaza. A G gráf egy F részgráfját $\{A, B, C, \dots\}$-*pakolásnak hívjuk* ha F minden komponense izomorf az $\{A, B, C, \dots\}$ gráfok egyikével. Egy $\{A, B, C, \dots\}$-pakolás maximális, ha G lehető legtöbb pontját lefedi. Ha F egy feszítő részgráf, akkor teljes $\{A, B, C, \dots\}$-pakolásnak vagy $\{A, B, C, \dots\}$-*faktornak* nevezzük. Jelölje P_n az n különböző pontból és $n-1$ élből álló utat. Ezzel a jelöléssel egy 1-faktor (azaz teljes párosítás) megegyezik egy $\{P_2\}$-faktorral. Vegyük észre, hogy egy gráfban akkor és csak akkor van $\{P_3, P_4, P_5\}$-faktor ha van benne $\{P_n \mid n \geq 3\}$-faktor is. Erre rövidebben a $\{P_{\geq 3}\}$-faktorjelölést használjuk.

Egy H gráfot *faktor-kritikusnak* nevezünk, ha $H - \{v\}$ minden $v \in V(H)$ esetén tartalmaz 1-faktort. Vegyük észre, hogy a faktor-kritikus gráfok összefüggőek. Vegyünk egy faktor-kritikus H gráfot a $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ csúcshalmazon, vegyük hozzá a $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ új csúcsokat a $\{v_i u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ élekkel együtt. Az így kapott gráfot *napnak* nevezzük. A definíció szerint K_2 egy nap és tekintsük K_1 is napnak (ld. 7.1. ábra). Jelöljük $\mathrm{Sun}(G)$-el egy G gráf azon komponenseinek halmazát, amelyek napok. Számosságukra pedig a $\mathrm{sun}(G) = |\mathrm{Sun}(G)|$ jelölést vezetjük be.



7.1. ábra. Napok

Wang [87] karakterizálta a $\{P_{\geq 3}\}$-faktort tartalmazó *páros* gráfokat. Kaneko [50] ezt általánosította tetszőleges gráfokra. Számos eredmény ismert más komponenseket tartalmazó faktorok esetén (például [12] és [60]), de Tutte [86] f-faktorokra vonatkozó illetve Lovász [61] általánosabb, (g, f)-faktorokra vonatkozó tételén kívül az össze korábbi sikeres karakterizáció olyan esetekre vonatkozik, amikor a komponensek között szerepel P_2. Hell és Kirkpatrick [54] bizonyítottak, hogy ha H egy összefüggő gráf legalább 3 ponton, akkor NP-teljes annak eldöntése, hogy G tartalmaz-e $\{H\}$-faktort. Feltehetően ez az oka, hogy nem ismert karakterizáció $\{P_3\}$-faktorok esetén.

7.1.1. Tétel (Kaneko [50]). *G akkor és csak akkor tartalmaz $\{P_{\geq 3}\}$-faktort, ha*

$$\mathrm{sun}(G - S) \leq 2|S| \quad \textit{minden} \quad S \subset V(G) \ \textit{esetén.} \tag{7.1}$$

A 7.2. szakaszban egy lényegesen rövidebb és egyszerűbb bizonyítást adunk Kaneko tételére.

A 7.3. szakaszban pedig belátjuk a következő Berge-típusú formulát. Ezek a [K8] cikkben jelentek meg.

Jelölje $\mathrm{k}_2(H)$ egy H gráf azon komponenseinek számát, amik egyetlen élből állnak.

7.3.2. Tétel (Kano, Katona, Király [K8]). *A G gráfban a maximális méretű $\{P_{\geq 3}\}$-pakolás által lefedett pontok száma*

$$\mathrm{pp}(G) := |V(G)| - \max_{T \subseteq S \subset V(G)} (\mathrm{sun}(G - S) - 2|S| + \mathrm{k}_2(G - T) - 2|T|).$$

Vegyük észre, hogy ha

$$\max_{S \subset V(G)} (\mathrm{sun}(G - S) - 2|S|) = 0 \tag{7.2}$$

akkor $\mathrm{k}_2(G - T) - 2|T| \leq 0$ fennáll minden $T \subset V(G)$ ponthalmazra, mivel K_2 is egy nap. Ez mutatja, hogy

$$\max_{T \subseteq S \subset V(G)} (\mathrm{sun}(G - S) - 2|S| + \mathrm{k}_2(G - T) - 2|T|) = 0$$

akkor és csak akkor teljesül, amikor (7.2). Ezért a 7.3.2. tételből következik a 7.1.1.

Később Hell, Hartvigsen és Szabó [46] a probléma egy általánosításán kezdett dolgozni, amit k-piece pakolási problémának neveztek. Adtak egy Tutte típusú karakterizációt és egy Berge-típusú formulát erre a problémára. Egy k-piece egy olyan összefüggő gráf, melyben a maximális fokszám k, egy k-piece pakolás pedig részgráfok olyan pontdiszjunkt halmaza, ahol minden részgráf egy k-piece. Így egy 1-piece pakolás épp egy párosításnak felel meg, egy 2-piece pakolás pedig épp egy $\{P_{\geq 3}\}$-pakolás. Janata, Loebl és Szabó [49] belátta a Gallai-Edmonds struktúra tétel általánosítását k-piece-ek esetére. Ezek az eredmények egyben adnak egy polinomiális algoritmust optimális k-piece pakolások keresésére is. Kano, Lee and Suzuki [51] megmutatta, hogy minden legalább 8 pontú, összefüggő 3-reguláris, páros gráfban van $\{P_n \mid n \geq 8\}$-faktor. Ezeken kívül még számos más publikáció foglalkozik szorosan kapcsolódó témákkal, több mint 30-an hivatkoznak cikkükre.

8. Páratlan részgráfok és párosítások

Legyen $f\colon V(G) \to \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ egy páratlan értékű függvény. Egy G gráf páratlan pontszámú komponenseinek számát $o(G)$-val jelöljük. A G gráf egy H részgráfját $(1, f)$-*páratlan részgráfnak* nevezzük, ha minden $x \in V(H)$ pontra teljesül, hogy $d_H(x) \in \{1, 3, \ldots, f(x)\}$. A feszítő $(1, f)$-páratlan részgráf neve $(1, f)$-*páratlan faktor*. Ha $f(x) = 1$ minden $x \in V(G)$-re, akkor egy $(1, f)$-páratlan részgráf egy párosítás, egy $(1, f)$-páratlan faktor pedig egy 1-faktor, vagyis egy teljes párosítás.

Ebben a fejezetben párosításokra korábban bizonyított tételeket általánosítunk $(1, f)$-páratlan részgráfokra. De arra is mutatunk példát, amikor az általánosítás nem igaz: 8.3.5. tétel. Ezek a [K6] cikkben jelentek meg. A 9 és 10. fejezetben pedig további idevágó eredmények lesznek. $(1, f)$-páratlan faktorokkal kapcsolatos korábbi eredmények található a következő cikkekben: [28], [52] and [85].

Cui és Kano [28] adott egy szükséges és elégséges feltételt $(1, f)$-páratlan faktor létezésére. A 8.2. szakaszban a Berge-formulát általánosítjuk erre az esetre.

8.2.3. Tétel (Kano, Katona [K6])**.** *A maximális $(1, f)$-páratlan H részgráf mérete*

$$v(H) = v(G) - \max_{S \subseteq V(G)} \{o(G - S) - \sum_{x \in S} f(x)\}.$$

A 8.3. szakaszban pedig egy matroidok elméletéből is jó ismert, párosításokra már régebben belátott tulajdonságot általánosítunk.

8.3.2. Tétel (Kano, Katona [K6])**.** *Legyen G egy gráf, B és R a pontok két részhalmaza, melyre $|B| < |R|$ teljesül. Ha van két olyan $(1, f)$-páratlan részgráf ami lefedi B illetve R pontjait, akkor létezik olyan $(1, f)$-páratlan részgráf is, ami lefedi B-t és még legalább egy pontot $R \setminus B$-ből. Ennek következménye, hogy minden nem bővíthető $(1, f)$-páratlan részgráf maximális méretű.*

Később Yu és Zhang [89] olyan gráfokat vizsgált, amikben csak egyetlen $(1, f)$-páratlan faktor van, és meghatározták az élek maximális számát az olyan gráfokban, amikben egyetlen $[1, k]$-páratlan faktor van. Atanasov, Petruševski és Škrekovski [14] az eredményeink felhasználásával karakterizálták az adott páratlan kromatikus indexel rendelkező gráfokat. Petruševski [73] multigráfok páratlan élszínezésével kapcsolatos eredményeket ért el a módszereink felhasználásával.

9. Struktúra tétel $(1, f)$-páratlan részgráfokra

Ebben a fejezetben további eredmények találhatók $(1, f)$-páratlan részgráfokkal kapcsolatban. Ezek a [K7] cikkben jelentek meg.

Az előző fejezetben definiáltuk a maximális $(1, f)$-páratlan részgráf fogalmát, ami a lehető legtöbb pontot lefedő $(1, f)$-páratlan részgráf. Ezzel szemben most az *optimális* $(1, f)$*-páratlan részgráfot* definiáljuk. Legyen F egy $(1, f)$-páratlan részgráf, $B_v = \{1, 3, 5, \dots, f(v)\}$. Egy v pont hiánya, $\mathrm{def}_F(v)$, legyen $d_F(v)$ távolsága a B_v számhalmaztól, az F részgráf hiánya pedig $\mathrm{def}(F) = \sum_{v \in V(G)} \mathrm{def}_F(v)$. Egy $(1, f)$-páratlan részgráfot akkor nevezünk optimálisnak, ha a hiánya a lehető legkisebb.

A két definíció nyilván különböző. Könnyen látható, hogy egy optimális $(1, f)$-páratlan részgráf nem is feltétlen $(1, f)$-páratlan részgráf. A 9.2. szakaszban ugyanakkor belátjuk a következőt.

9.2.2. Tétel (Kano, Katona [K7])**.** *Minden minimális számú élet tartalmazó optimális* $(1, f)$*–páratlan részgráf egy maximális* $(1, f)$*-páratlan részgráf.*

A 9.3. szakaszban a Gallai-Edmonds stuktúratétel általánosítását bizonyítjuk. Ennek kimondásához szükség van néhány további definícióra.

Jelölje $\tau(G)$ a maximális $(1, f)$-páratlan részgráf pontszámát. A G gráf egy x pontjára G_x azt a gráfot jelöli, amit G-ből egy új w pont és az wx él hozzáadásával kapunk, az új pontra legyen $f(w) = 1$. Jelöljük $D(G)$ azon x pontok halmazát, melyre $\tau(G_x) = \tau(G) + 2$. Legyen $A(G)$ a $V(G) - D(G)$ pontjai közül azoknak a halmaza, melyek szomszédosak legalább egy $D(G)$-beli ponttal. Végül legyen $C(G) = V(G) - D(G) - A(G)$. Tehát $V(G)$-t 3 diszjunkt halmazra particionáljuk.

$$V(G) = D(G) \cup A(G) \cup C(G). \tag{9.1}$$

Vegyük észre, hogy ha minden x-re $f(x) = 1$, akkor egy $(1, f)$-páratlan részgráf egy maximális párosítás lesz. Egy y pontra akkor és csak akkor teljesül $\tau(G_y) = \tau(G)+2$, ha y nincsen benne maximális párosításban. Ezért a $V(G) = D(G) \cup A(G) \cup C(G)$ partíció éppen a Gallai-Edmonds dekompozíciót adja ([63] 94. old.).

Azt mondjuk, hogy egy G gráf $(1, f)$*-páratlan faktor kritikus*, ha G minden x pontjára a $G_x = G+wx$ gráf tartalmaz $(1, f)$-páratlan faktort. Világos, hogy ha egy gráf $(1, f)$-páratlan faktor kritikus, akkor összefüggős és pontjainak száma páratlan.

9.3.4. Tétel (Kano, Katona [K7])**.** [Structure Theorem on $(1, f)$-odd subgraphs]. *Legyen G egy gráf, $V(G) = D(G) \cup A(G) \cup C(G)$ pedig a (9.1)-ben definiált partíció. Ekkor a következők teljesülnek:*

(i) $\langle D(G) \rangle_G$ *minden komponense* $(1, f)$*-páratlan faktor kritikus.*

(ii) $\langle C(G)\rangle_G$ *tartalmaz* $(1,f)$*-páratlan faktort.*

(iii) G *minden* H*-val jelölt* $(1,f)$*-páratlan részgráfja lefedi a* $C(G)\cup A(G)$ *ponthalmazt, minden* $x\in A(G)$ *pontra teljesül, hogy* $d_H(x)=f(x)$ *valamint* H *minden* x*-re illeszkedő éle* x *és* $D(G)$ *egy pontja között fut.*

(iv) A maximális $(1,f)$*-páratlan* H *részgráf pontszáma*

$$v(H)=v(G)+\omega(\langle D(G)\rangle_G)-\sum_{x\in A(G)}f(x), \tag{9.2}$$

ahol $\omega(\langle D(G)\rangle_G)$ *a* $\langle D(G)\rangle_G$ *komponenseinek számát jelöli.*

Cournejols [27] egy általánosabb problémára már korábban adott egy algoritmust, melynek futásideje $O(|V(G)|^5)$. A 9.4. szakaszban egy új algoritmust adunk, melynek futásideje gyorsabb, $O(|V(G)|^3)$. A mi algoritmusunk Edmonds maximális párosításokra adott algoritmusának általánosítása.

9.5.4. Tétel (Kano, Katona [K7])**.** *A 9.4. szakaszban ismertetett algoritmus meghatározza a legkevesebb élet tartalmazó maximális* $(1,f)$*-páratlan részgráfot, futásideje pedig* $O(|V(G)|^3)$*.*

10. Elementáris f-paritás faktor gráfok

Ebben a fejezetben a [K9] publikáció eredményeit ismertetjük, először az $(1, f)$-páratlan részgráfok egy további általánosításával foglalkozunk. f értéke most egyes pontokra páratlan, másokra páros is lehet. Olyan részgráfokat keresünk, melyben a fokszámok a paritásnak megfelelően a $\{1, 3, \ldots, f(v)\}$ illetve a $\{0, 2, \ldots, f(v)\}$ halmazba esnek f paritásának megfelelően, ezeket *f-paritás részgráfoknak* nevezzük. A 10.2. szakaszban a Gallai-Edmonds struktúratétel megfelelő általánosítását bizonyítjuk. (A tételben szereplő fogalmak az előző fejezetben található hasonló fogalmak értelemszerű kiterjesztései.)

10.2.4. Tétel (Kano, Katona, Szabó [K9])**.** *Legyen G egy gráf, $f : V(G) \to \mathbb{N}$ egy függvény a ponthalmazon. Jelölje $D_f \subseteq V(G)$ azon v pontok halmazát, amelyhez létezik olyan F-el jelölt f-paritás részgráf, hogy $d_F(v) \in \{\ldots, f(v) - 3, f(v) - 1\}$ teljesül. Legyen továbbá $A_f = N(D_f)$ és $C_f = V(G) - (D_f \cup A_f)$. Ekkor*

1. *$G[D_f]$ minden komponense f-kritikus,*
2. *$|\{K : K$ a $G[D_f]$ egy A'-val szomszédos komponense$\}| \geq f(A') + 1$ teljesül minden $\emptyset \neq A' \subseteq A_f$ esetén,*
3. *$\delta_f(G) = \omega(G[D_f]) - f(A_f)$,*
4. *$G[C_f]$ tartalmaz f-paritás faktort.*

A fenti tétel egyszerű következménye egy Berge-típusú minimax formula is, ezt a 10.2.7. tételben fogalmazzuk meg.

A 10.3. szakaszban az *elementáris gráf* fogalmát általánosítjuk f-paritás részgráfokra. Az elementáris gráfokról Lovász [62] több érdekes tétel bizonyított, ezek közül többet sikerült az általánosabb esetben is belátnunk. (A tételekben szereplő nagy számú új fogalom bevezetésének hosszadalmas volta miatt jelen tézisfüzetben nem idézzük ezen tételeket.)

11. Felbontás két páratlan részgráfra

11.1. Introduction

Ebben a fejezetben a [K10] cikkben megjelent eredményeket ismertetem. Az eddigiektől eltérően multigráfokkal foglalkozunk, azaz megengedünk párhuzamos éleket is, azonban hurokéleket nem.

Jelöljük EvenV(G)-val a G gráf páros fokú pontjainak halmazát, OddV(G)-vel pedig a páratlan fokúakét. G egy részgáfja *páratlan (ill. páros) részgráf*, ha minden pontjának foka páratlan (ill. páros). Egy *páratlan faktor* pedig G egy feszítő páratlan részgráf. Könnyen látható, hogy egy gráfban akkor és csak akkor van páratlan faktor, ha a gráf minden komponensének pontszáma páros. Ráadásul egy páratlan faktort meg is lehet találni polinom idejű algoritmussal.

Azt mondjuk, hogy G *felbontható n páratlan részgráfra*, ha az élhalmaza particionálható n (esetleg üres) $E_1, \dots, E_n$ halmazra, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén E_i egy páratlan részgráf.

Ilyen felbontásokkal először Pyber [75] foglalkozott. Belátta, hogy minden egyszerű gráf felbontható 4 páratlan részgráfra. (3-ra már nem, erre végtelen sok ellenpélda van [66].) Pyber [75] továbbá belátta, hogy minden fa felbontható 2 páratlan részgráfra, valamint azt is, hogy minden páros pontszámú multigráf felbontható 3 páratlan részgráfra.

Lužar [64] megmutatta, hogy minden multigráf felbontható 6 páratlan részgráfra, sőt egy gráfosztály kivételével 5-re is. Petruševski [74] ezt tovább javította, bizonyítva, hogy két gráfosztály kivételével 4 páratlan részgráfra is felbontható minden multigráf.

Mi társzerzőimmel azt vizsgáltuk, hogy milyen feltételek mellett bontható fel egy multigráf két páratlan részgráfra. Adtunk egy szükséges és elégséges feltételt a felbontás létezésére, valamint egy polinomiális algoritmust egy felbontás megtalálására vagy létezésének cáfolatára.

11.1.10. Tétel (Kano, Katona, Varga [K10])**.** *Legyen G egy multigráf, jelölje $\mathcal{X}$ a páratlan fokú pontok által feszített G[OddV(G)] részgráf komponenseinek halmazát, $\mathcal{Y}$ illetve $\mathcal{Z}$ pedig G[EvenV(G)] páratlan illetve páros pontszámú komponenseinek halmazát. G akkor és csak akkor bontható fel két páratlan részgráfra, ha minden olyan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$-re amire $|\mathcal{S} \cap \mathcal{Y}|$ páratlan, létezik olyan $X \in \mathcal{X}$ komponens, amire $e_G(X, S)$ páratlan. Itt S az $\mathcal{S}$-beli komponensek pontjait jelöli.*

11.1.11. Tétel (Kano, Katona, Varga [K10])**.** *Van olyan polinom idejű algoritmus, ami ad egy felbontást két páratlan részgráfra, vagy megmutatja, hogy nem létezik ilyen felbontás.*

A fenti eredmények átfogalmazhatóak a gráfok élszínezéses terminológiával. A G gráf *páratlan élszínezése* egy olyan színezése az éleknek, hogy minden ponthoz egy adott színből páratlan vagy nulla él csatlakozik. A legkevesebb színt használó ilyen színezésben használ színek száma a gráf *páratlan kromatikus indexe*, jelölése $\chi'_o(G)$. Ezzel a jelöléssel Pyber azt látta be, hogy egyszerű gráfra $\chi'_o(G) \leq 4$. A 11.1.10. tétel egy szükséges és elégséges feltétel multigráfok esetén $\chi'_o(G) = 2$-re. A 11.1.11. tétel pedig polinomiális algoritmust ad $\chi'_o(G) = 2$ eldöntésére.

Később számos további eredmény jelent meg a témával kapcsolatban. Petruševski és Škrekovski [70] általánosította eredményünket arra az esetre, amikor ez egyes színek egyes pontokbeli fokszámainak paritását tetszőlegesen előírjuk. Ugyanezen szerzők a [72] cikkben irányított gráfokra bizonyítottak a miénkkel analóg tételeket, a [71] publikációban pedig listaszínezésekre általánosították. Botler, Colucci and Kohayakawa [19] belátták, hogy majdnem minden páros pontszámú egyszerű gráfra $\chi'_o(G) = 2$ és majdnem minden páratlan fokszámúra $\chi'_o(G) = 3$.

A disszertáció alapjául szolgáló publikációk

[K1] A. Dudek, G. Y. Katona, and A. P. Wojda, *Hamiltonian path saturated graphs with small size*, Discrete Applied Mathematics, 154 (2006), pp. 1372–1379.

[K2] A. Dudek, A. Żak, and G. Y. Katona, *Hamilton-chain saturated hypergraphs*, Discrete Mathematics, 310 (2010), pp. 1172–1176.

[K3] P. Frankl and G. Y. Katona, *Extremal k-edge-Hamiltonian hypergraphs*, Discrete Mathematics, 308 (2008), pp. 1415–1424.

[K4] E. Győri, G. Y. Katona, and N. Lemons, *Hypergraph extensions of the Erdős-Gallai theorem*, European Journal of Combinatorics, 58 (2016), pp. 238–246.

[K5] I. Horváth and G. Y. Katona, *Extremal P_4-stable graphs*, Discrete Applied Mathematics. The Journal of Combinatorial Algorithms, Informatics and Computational Sciences, 159 (2011), pp. 1786–1792.

[K6] M. Kano and G. Y. Katona, *Odd subgraphs and matchings*, Discrete Mathematics, 250 (2002), pp. 265–272.

[K7] M. Kano and G. Y. Katona, *Structure theorem and algorithm on $(1, f)$-odd subgraph*, Discrete Mathematics, 307 (2007), pp. 1404–1417.

[K8] M. Kano, G. Y. Katona, and Z. Király, *Packing paths of length at least two*, Discrete Mathematics, 283 (2004), pp. 129–135.

[K9] M. Kano, G. Y. Katona, and J. Szabó, *Elementary graphs with respect to f-parity factors*, Graphs and Combinatorics, 25 (2009), pp. 717–726.

[K10] M. Kano, G. Y. Katona, and K. Varga, *Decomposition of a graph into two disjoint odd subgraphs*, Graphs and Combinatorics, 34 (2018), pp. 1581–1588.

[K11] G. Y. Katona and H. A. Kierstead, *Hamiltonian chains in hypergraphs*, Journal of Graph Theory, 30 (1999), pp. 205–212.

Irodalomjegyzék

[12] J. Akiyama and M. Kano, *Factors and factorizations of graphs—a survey*, Journal of Graph Theory, 9 (1985), pp. 1–42.

[13] P. Allen, J. Böttcher, O. Cooley, and R. Mycroft, *Tight cycles and regular slices in dense hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory. Series A, 149 (2017), pp. 30–100.

[14] R. Atanasov, M. Petruševski, and R. Škrekovski, *Odd edge-colorability of subcubic graphs*, Ars Mathematica Contemporanea, 10 (2016), pp. 359–370.

[15] D. Bauer, H. J. Broersma, and H. J. Veldman, *Not every 2-tough graph is Hamiltonian*, in Proceedings of the 5th Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1997), vol. 99, 2000, pp. 317–321.

[16] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, vol. 11 of London Mathematical Society Monographs, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1978.

[17] J. A. Bondy, *Variations on the Hamiltonian theme*, Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques, 15 (1972), pp. 57–62.

[18] J. A. Bondy and V. Chvátal, *A method in graph theory*, Discrete Mathematics, 15 (1976), pp. 111–135.

[19] F. Botler, L. Colucci, and Y. Kohayakawa, *The odd chromatic index of almost all graphs*, in Anais do Encontro de Teoria da Computação (ETC 2020), Sociedade Brasileira de Computação - SBC, jun 2020.

[20] F. Bullock, M. Frick, and J. Singleton, *Smallest claw-free, 2-connected, nontraceable graphs and the construction of maximal nontraceable graphs*, Discrete Mathematics, 307 (2007), pp. 1266–1275.

[21] F. Bullock, M. Frick, J. Singleton, S. van Aardt, and K. Mynhardt, *Maximal nontraceable graphs with toughness less than one*, Electronic Journal of Combinatorics, 15 (2008), pp. Research Paper 18, 19.

[22] A. P. Burger and J. E. Singleton, *Further results on maximal nontraceable graphs of smallest size*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. DMTCS., 15 (2013), pp. 75–92.

[23] G. J. Chang and D. Kuo, *The $L(2,1)$-labeling problem on graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 9 (1996), pp. 309–316.

[24] V. Chvátal, *Tough graphs and Hamiltonian circuits*, Discrete Mathematics, 5 (1973), pp. 215–228.

[25] L. Clark and R. Entringer, *Smallest maximally non-Hamiltonian graphs*, Period. Math. Hungar., 14 (1983), pp. 57–68.

[26] L. H. Clark, R. C. Entringer, and H. D. Shapiro, *Smallest maximally non-Hamiltonian graphs. II*, Graphs Combin., 8 (1992), pp. 225–231.

[27] G. Cornuéjols, *General factors of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, 45 (1988), pp. 185–198.

[28] Y. Cui and M. Kano, *Some results on odd factors of graphs*, Journal of Graph Theory, 12 (1988), pp. 327–333.

[29] A. Czygrinow and B. Nagle, *A note on codegree problems for hypergraphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 32 (2001), pp. 63–69.

[30] A. Davoodi, E. Győri, A. Methuku, and C. Tompkins, *An Erdős-Gallai type theorem for uniform hypergraphs*, European Journal of Combinatorics, 69 (2018), pp. 159–162.

[31] P. Dorbec, S. Gravier, and G. N. Sárközy, *Monochromatic Hamiltonian t-tight Berge-cycles in hypergraphs*, Journal of Graph Theory, 59 (2008), pp. 34–44.

[32] A. Dudek and A. Żak, *On hamiltonian chain saturated uniform hypergraphs*, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. DMTCS., 14 (2012), pp. 21–28.

[33] M. N. Ellingham, S. Shan, D. Ye, and X. Zha, *Toughness and spanning trees in K_4-minor-free graphs*, Journal of Graph Theory, 96 (2021), pp. 379–402.

[34] P. Erdős and T. Gallai, *On maximal paths and circuits of graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 10 (1959), pp. 337–356.

[35] B. Ergemlidze, E. Győri, A. Methuku, N. Salia, C. Tompkins, and O. Zamora, *Avoiding long Berge cycles: the missing cases $k = r+1$ and $k = r+2$*, Combinatorics, Probability and Computing, 29 (2020), pp. 423–435.

[36] Z. Füredi, A. Kostochka, and R. Luo, *Avoiding long Berge cycles II, exact bounds for all n*, arXiv:1807.06119, (2018).

[37] M. Frick and J. Singleton, *Lower bound for the size of maximal nontraceable graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, 12 (2005), pp. Research Paper 32, 9.

[38] Z. Füredi, T. Jiang, and R. Seiver, *Exact solution of the hypergraph Turán problem for k-uniform linear paths*, Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing, 34 (2014), pp. 299–322.

[39] Z. Füredi, A. Kostochka, and R. Luo, *Avoiding long Berge cycles*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 137 (2019), pp. 55–64.

[40] ——, *On 2-connected hypergraphs with no long cycles*, Electronic Journal of Combinatorics, 26 (2019), pp. Paper No. 4.31, 36.

[41] R. Glebov, Y. Person, and W. Weps, *On extremal hypergraphs for Hamiltonian cycles*, European J. Combin., 33 (2012), pp. 544–555.

[42] E. Győri, N. Lemons, N. Salia, and O. Zamora, *The structure of hypergraphs without long Berge cycles*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 148 (2021), pp. 239–250.

[43] E. Győri, A. Methuku, N. Salia, C. Tompkins, and M. Vizer, *On the maximum size of connected hypergraphs without a path of given length*, Discrete Mathematics, 341 (2018), pp. 2602–2605.

[44] E. Győri, G. Y. Katona, and N. Lemons, *Hypergraph extensions of the Erdős-Gallai theorem*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 36 (2010), pp. 655–662.

[45] J. Han and Y. Zhao, *Minimum codegree threshold for Hamilton ℓ-cycles in k-uniform hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory. Series A, 132 (2015), pp. 194–223.

[46] D. Hartvigsen, P. Hell, and J. Szabó, *The k-piece packing problem*, Journal of Graph Theory, 52 (2006), pp. 267–293.

[47] M. Hasanvand, *Spanning trees and spanning eulerian subgraphs with small degrees. II*, arXiv:1702.06203v5, (2017).

[48] R. Isaacs, *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable*, American Mathematical Monthly, 82 (1975), pp. 221–239.

[49] M. Janata, M. Loebl, and J. Szabó, *The Edmonds-Gallai decomposition for the k-piece packing problem*, Electronic Journal of Combinatorics, 12 (2005), pp. Research Paper 8, 21.

[50] A. Kaneko, *A necessary and sufficient condition for the existence of a path factor every component of which is a path of length at least two*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 88 (2003), pp. 195–218.

[51] M. Kano, C. Lee, and K. Suzuki, *Path and cycle factors of cubic bipartite graphs*, Discussiones Mathematicae. Graph Theory, 28 (2008), pp. 551–556.

[52] M. Kano and H. Matsuda, *Some results on $(1, f)$-odd factors*, in Combinatorics, graph theory, and algorithms, Vol. I, II (Kalamazoo, MI, 1996), New Issues Press, Kalamazoo, MI, 1999, pp. 527–533.

[53] G. Y. Katona, *Paths and cycles in graphs and hypergraphs*, candidate of sciences dissertation, Hungarian Academy of Sciences, 1999.

[54] D. G. Kirkpatrick and P. Hell, *On the completeness of a generalized matching problem*, in Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, Calif., 1978), ACM, New York, 1978, pp. 240–245.

[55] A. Kostochka and R. Luo, *On r-uniform hypergraphs with circumference less than r*, Discrete Applied Mathematics. The Journal of Combinatorial Algorithms, Informatics and Computational Sciences, 276 (2020), pp. 69–91.

[56] D. Kühn, R. Mycroft, and D. Osthus, *Hamilton ℓ-cycles in uniform hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory. Series A, 117 (2010), pp. 910–927.

[57] D. Kühn and D. Osthus, *Loose Hamilton cycles in 3-uniform hypergraphs of high minimum degree*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 96 (2006), pp. 767–821.

[58] ———, *Hamilton cycles in graphs and hypergraphs: an extremal perspective*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. IV, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 381–406.

[59] X. Lin, W. Jiang, C. Zhang, and Y. Yang, *On smallest maximally non-Hamiltonian graphs*, Ars Combin., 45 (1997), pp. 263–270.

[60] M. Loebl and S. Poljak, *Subgraph packing—a survey*, in Topics in combinatorics and graph theory (Oberwolfach, 1990), Physica, Heidelberg, 1990, pp. 491–503.

[61] L. Lovász, *Subgraphs with prescribed valencies*, Journal of Combinatorial Theory, 8 (1970), pp. 391–416.

[62] L. Lovász, *On the structure of factorizable graphs. I, II*, Acta Mathematica. Academiae Scientiarum Hungaricae, 23 (1972), pp. 179–195; ibid. 23 (1972), 465–478.

[63] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.

[64] B. Lužar, M. Petruševski, and R. Škrekovski, *Odd edge coloring of graphs*, Ars Mathematica Contemporanea, 9 (2015), pp. 267–277. [Paging previously given as 277–287].

[65] K. Markström and A. Ruciński, *Perfect matchings (and Hamilton cycles) in hypergraphs with large degrees*, European Journal of Combinatorics, 32 (2011), pp. 677–687.

[66] T. Mátrai, *Covering the edges of a graph by three odd subgraphs*, Journal of Graph Theory, 53 (2006), pp. 75–82.

[67] D. Mubayi and J. Verstraëte, *Minimal paths and cycles in set systems*, European Journal of Combinatorics, 28 (2007), pp. 1681–1693.

[68] Ö. Øre, *Arc coverings of graphs*, Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta, 55 (1961), pp. 315–321.

[69] M. Paoli, W. W. Wong, and C. K. Wong, *Minimum k-Hamiltonian graphs. II*, J. Graph Theory, 10 (1986), pp. 79–95.

[70] M. Petruševski and R. Škrekovski, *Decomposing a graphs into two subgraphs with prescribed parities of vertex degrees*, Advances in Mathematics: Scientific Journal, 8 (2019), pp. 63–68.

[71] M. Petruševski and R. Škrekovski, *Odd decompositions and coverings of graphs*, European Journal of Combinatorics, 91 (2021), p. 103225.

[72] ——, *Some remarks on odd edge colorings of digraphs*, Mathematics, 9 (2021), p. 231.

[73] M. Petruševski, *Odd 4-edge-colorability of graphs*, Journal of Graph Theory, 87 (2018), pp. 460–474.

[74] ——, *Odd 4-edge-colorability of graphs*, Journal of Graph Theory, 87 (2018), pp. 460–474.

[75] L. Pyber, *Covering the edges of a graph by ...*, in Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991), vol. 60 of Colloq. Math. Soc. János Bolyai, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 583–610.

[76] V. Rödl and A. Ruciński, *Dirac-type questions for hypergraphs — A survey (or more problems for Endre to solve)*, in Bolyai Society Mathematical Studies, Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 561–590.

[77] V. Rödl, A. Ruciński, and E. Szemerédi, *A Dirac-type theorem for 3-uniform hypergraphs*, Combinatorics, Probability and Computing, 15 (2006), p. 229–251.

[78] V. Rödl, A. Ruciński, and E. Szemerédi, *An approximate Dirac-type theorem for k-uniform hypergraphs*, Combinatorica, 28 (2008), pp. 229–260.

[79] V. Rödl, A. Ruciński, and E. Szemerédi, *Dirac-type conditions for Hamiltonian paths and cycles in 3-uniform hypergraphs*, Adv. Math., 227 (2011), pp. 1225–1299.

[80] A. Ruciński and A. Żak, *Hamilton saturated hypergraphs of essentially minimum size*, Electronic Journal of Combinatorics, 20 (2013), pp. Paper 25, 16.

[81] ———, *Upper bounds on the minimum size of Hamilton saturated hypergraphs*, Electronic Journal of Combinatorics, 23 (2016), pp. Paper 4.12, 26.

[82] M. Simonovits and E. Szemerédi, *Embedding graphs into larger graphs: results, methods, and problems*, in Bolyai Society Mathematical Studies, Springer Berlin Heidelberg, 2019, pp. 445–592.

[83] Z. Skupień, *Hamiltonian circuits and path coverings of vertices in graphs*, Colloquium Mathematicum, 30 (1974), pp. 295–316.

[84] ———, *Hamiltonian shortage, path partitions of vertices, and matchings in a graph*, Colloquium Mathematicum, 36 (1976), pp. 305–318.

[85] J. Topp and P. D. Vestergaard, *Odd factors of a graph*, Graphs Combin., 9 (1993), pp. 371–381.

[86] W. T. Tutte, *The factors of graphs*, Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques, 4 (1952), pp. 314–328.

[87] H. Wang, *Path factors of bipartite graphs*, Journal of Graph Theory, 18 (1994), pp. 161–167.

[88] W. W. Wong and C. K. Wong, *Minimum k-Hamiltonian graphs*, J. Graph Theory, 8 (1984), pp. 155–165.

[89] Q. R. Yu and Z. Zhang, *Extremal properties of* $(1, f)$*-odd factors in graphs*, Ars Combinatoria, 84 (2007), pp. 161–170.

[90] A. Żak, *Growth order for the size of smallest Hamiltonian chain saturated uniform hypergraphs*, European Journal of Combinatorics, 34 (2013), pp. 724–735.

[91] B. Zelinka, *Graphs maximal with respect to absence of Hamiltonian paths*, Discussiones Mathematicae. Graph Theory, 18 (1998), pp. 205–208.

[92] Y. Zhao, *Recent advances on Dirac-type problems for hypergraphs*, in Recent trends in combinatorics, vol. 159 of IMA Vol. Math. Appl., Springer, [Cham], 2016, pp. 145–165.

[93] Zsolt Tuza, *Steiner systems and large non-Hamiltonian hypergraphs*, Le Matematiche, 61 (2006), pp. 179–183.