Opponensi vélemény Katona Gyula Y. doktori pályázatáról

Gerbner Dániel

Katona Gyula Y. doktori értekezése gráf- és hipergráf-elméleti kérdésekkel foglalkozik. Két nagy részre van bontva, az első utak, Hamilton-utak és Hamilton-körök extremális problémáival foglalkozik, gráfokban és hipergráfokban. Ezek régi és gyakran vizsgált kérdések gráfokon, de a hipergráfos változatot csak az utóbbi néhány évtizedben kezdték szisztematikusan vizsgálni, nem kis részben Katona Gyula Y. munkásságának köszönhetően.

A második rész teljes párosítások általánosításaival foglalkozik, főleg az úgynevezett $(1,f)$-páratlan részgráfok létezésével, méretével és struktúrájával, illetve kapcsolódó problémákkal.

A dolgozat 11, társszerzőkkel írt cikken alapul (összesen több mint 60 cikke van a jelöltnek). A cikkek a téma elismert szakújságjaiban jelentek meg.

A továbbiakban röviden összefoglalom a disszertáció eredményeit. Nem fogom a tételeket kimondani, a precíz állításoknak nincs értelme egy ilyen összefoglalóban, sőt még csak hivatkozni sem fogok a tételekre, csak a témakört írom le.

A körök és utak talán a legtöbbet vizsgált gráfok, de nincs egyértelmű általánosításuk hipergráfokra. Az első részben a szerző több ilyen általánosítást bevezet. Ezek mára teljesen bevett fogalmak, a velük foglalkozó cikkek nem is idézik a szerző eredeti cikkeit.

Az első fejezetben főleg Dirac típusú problémákat vizsgál a szerző: milyen minimális fokszám garantálja hogy egy hipergáfban van Hamilton-kör, azaz olyan kör ami a lehető leghosszabb? A fokszám is többféleképpen általánosítható r-uniform hipergráfokra, itt az $(r-1)$-elemű részhalmazok fokszámát vizsgálják, ami a részhalmazt tartalmazó hiperélek száma. A fejezet alapjául szolgáló, Kierstaddal közös cikk a szerző legtöbbször idézett cikke, de véleményem szerint nem ez a legerősebb. Viszont a felvetett problémát, illetve annak változatait sokan vizsgálták, beleértve a kombinatorika legnagyobb nevei közül is többeket, mint például Rödl, Szemerédi, Kühn, Osthus, Schacht, Keevash.

Egy további vizsgált kérdés az első fejezetben hogy hány hiperél garantálja a Hamilton-kör létezését. A második fejezet azt vizsgálja hogy hány hiperél kell ahhoz hogy bármely k hiperél elhagyásával is maradjon Hamilton-kör. Ezt felhasználva javítja az előző fejezet egy eredményét is.

Az előbbi kérdés feltehető általánosabban is: adott egy r-uniform hipergráf H és egy szám k, hány hiperél kell n csúcson ahhoz, hogy bármely k hiperélt elhagyva a keletkező hipergráfban legyen egy H-val izomorf részhipergráf? Az $r = 2$, $H = P_4$ (4-csúcsú út) esetben ez nem csak egy kapcsolódó kérdés, hanem a második fejezetben vizsgált kérdésre egy alsó korlátot ad. A harmadik fejezet ezt a problémát oldja meg, elég nagy n esetén. Talán ez a legerősebb eredmény a disszertációban.

A 4. fejezetben utak különböző hipergráfos általánosításait vizsgálja a szerző, pontosabban azt hogy hány hiperél garantálja egy n pontú hipergráfban hogy az tartalmaz egy k élű utat. Itt az út hossza rögzített, míg n lehet akármi.

Az ötödik fejezetben csak gráfokról van szó; itt az vizsgálja a szerző hogy legalább hány éle van egy Hamilton-út-szaturált n csúcsú gráfnak. Ez olyan gráf amiben nincsen Hamilton-út, de bármely élt hozzáadva kapunk egy Hamilton-utat. A 6. fejezet ezt a problémát vizsgálja hipergráfokra. Mindkét esetben igaz, hogy a szaturálási problémákat inkább fix gráfra és nagy n-re vizsgálták, de ezek éppolyan természetes kérdések.

A második rész párosításokhoz kapcsolódó problémákkal foglalkozik. A 7. fejezetben a szerző olyan részgráfokat vizsgál, amik legalább 2 élű utakból állnak, és meghatározza a legnagyobb méretét ezeknek. Ez a másik olyan tétel ami talán a disszertáció legerősebb eredménye.

A 8. és 9. fejezetben adott egy $f : V(G) \to \{1, 3, \ldots\}$ függvény. Olyan részgráfokat keresünk ahol minden v pont foka egy páratlan szám ami legfeljebb $f(v)$. A 8. fejezetben ezek legnagyobb mérete van meghatározva, a 9. fejezetben egy ezekhez kapcsolódó struktúra-tétel és algoritmus van.

A 10. fejezetben ennek egy általánosítását vizsgálja a szerző: itt minden pontra elő van írva hogy páros vagy páratlan legyen a foka, egy adott felső határral. Itt is van egy struktúra-tétel, illetve több tétel az úgynevezett elementáris gráfokról. Ezt a komplikált definíciót a szerző kihagyta a tézisfüzetből, úgyhogy én se megyek bele a részletekbe.

A 11. fejezetben azt határozza meg a szerző, hogy mikor lehet felbontani egy multigráfot két olyan gráfra, amikben minden pontnak páratlan a foka.

Egy kérdés: gráfok esetében a Hamilton-út részben azért különösen érdekes mert egy egyszerűen definiálható és kis méretű feszítő részgráf. A dolgozat Hamilton-utakkal (-körökkel, -láncokkal) kapcsolatos eredményei mennyire kiterjeszthetők más feszítő rész(hiper)gráfokra?

Az értekezés jól megírt munka. Mivel már megjelent cikkeket tartalmaz, nem meglepő hogy kevés benne a hiba, akár elírásra, akár komolyabb hibára gondolunk. Az új részek, azaz az összekötő szövegek és a cikkek hatásának leírása, valamint a bevezető is gondosan van megírva. Különösen tetszik ahogy a cikkek hatását bemutatja, néhány kulcsfontosságú későbbi eredményt leírva, de egyáltalán nem törekedve a teljességre. Még jobb lett volna ha kikerülnek a szövegből azok a részek ahol az eredeti cikkekben a korlátok élességét fejtegetik a szerzők, mivel már tudjuk hogy a későbbi eredmények ezeket a kérdéseket eldöntötték. A cikkek választása is jól átgondolt, a szerző két különböző szakterületét bemutatja, de azokon belül jól kapcsolódnak a kérdések egymáshoz.

Összefoglalva, a disszertáció bizonyítja, hogy a jelölt a téma kiváló szakértője aki sok új eredménnyel gazdagította a területet. Támogatom a disszertáció nyilvános vitára bocsátását és javaslom a fokozat odaítélését.

Gerbner Dániel