MTA doktori értekezés tézisei

On the Volume of Boolean Expressions of Balls
(Gömbök Boole-kifejezéseinek térfogatáról)

Csikós Balázs

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2022

1. Bevezetés

A disszertáció célja a szerző Kneser–Poulsen-sejtéssel kapcsolatos kutatásainak bemutatása, és ezen eredmények közül néhány, az adott irányban legerősebbnek számító eredmény részletes bebizonyítása. A közel hetven éves sejtés eredeti formájában azt mondja ki, hogy ha az n-dimenziós euklideszi tér véges sok kongruens gömbjét úgy rendezzük át, hogy középpontjaik a kiinduló helyzethez képest egymáshoz közelebb kerülnek, akkor a gömbök által lefedett tartomány térfogata nem nőhet.

Bár a sejtést jelen pillanatig csak a síkon sikerült teljes egészében bebizonyítani, az ismert részeredmények arra utalnak, hogy a sejtésnek többféle általánosítása is igaz lehet. Elképzelhető, hogy a sejtés nem csak egyenlő sugarú gömbökre igaz, és nemcsak az euklideszi, hanem a gömbi és hiperbolikus terekben is. Igaznak látszik, hogy a gömbök összehúzásakor a gömbök metszetének térfogata nem csökken. Általánosabban sejthető, hogy ha egy *virág*, azaz egy olyan tartomány térfogatát vizsgáljuk, mely a $B_1, \ldots, B_k$ gömbökből az $\cup$, $\cap$ és $\setminus$ Boole-műveletekkel áll elő, akkor a Boole-kifejezéstől függően bizonyos középponttávolságokra közeledést, bizonyosakra távolodást előírva garantálni tudjuk a térfogat gyenge értelemben vett csökkenését. A Kneser–Poulsen-sejtés felveti azt az általánosabb kérdést is, hogy az unió és metszet térfogatán kívül egy gömbrendszer mely további geometriai invariánsai változnak monoton módon a gömbrendszer összehúzásakor.

A Kneser–Poulsen sejtés állítása tetszőleges metrikus mértéktérben megfogalmazható, de a sejtés teljesülése erős megszorítást jelent a térre. Az értekezésben a Kneser–Poulsen sejtés fenti általánosításai mellett azt a kérdést is vizsgáljuk, hogy a sejtés teljesüléséből adódó megszorításokat a Riemann-sokaságok mely osztályai elégítik ki.

A disszertáció 6 fejezetből áll. A bevezetést követő 2. fejezet az [1] cikk felépítését követve egy történeti áttekintést ad a Kneser–Poulsen-sejtéssel kapcsolatos kutatásokról, ezen belül ismertetve a szerző [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] cikkekben leírt eredményeit is. Ebben a részben csak néhány egyszerű állítást bizonyítunk be, az alapvető cél az eredmények kimondásához szükséges fogalmak, az eredmények és az eredmények közti kapcsolatok leírása. Az ezt követő fejezetekben egy-egy kiemelkedően fontos tételcsoportot részletesen is bebizonyítunk.

A 3. fejezetben belátunk egy variációs formulát az állandó görbületű terekben differenciálható módon mozgó gömbökből képzett virágok térfogatára, melyből levezetjük, hogy egy folytonosan mozgó gömbökből az unió és metszet műveletekkel előállított virág térfogata gyengén monoton csökkenő, ha a mozgás során bizonyos középpontok távolsága folyamatosan csökken, bizonyosaké folyamatosan nő.

A 4. fejezetben levezetünk egy Schläfli-típusú formulát egy Einstein-féle (azaz egy állandó Ricci-görbületű) pseudo-Riemann-sokaságban fekvő, görbült hiperfelületek által határolt poliedrális tartományra, és egy Arkhimédész-típusú formulát konstans göbületű terek forgásszimmetrikus testjeire. Ezek alkalmazásával belátjuk a Kneser–Poulsen-sejtés virágokra vonatkozó kiterjesztésének legáltalánosabb ismert alakját abban a speciális esetben, amikor feltételezzük, hogy a kiinduló és az átrendezett gömbkonfiguráció középpontrendszerei között van olyan homotópia, melynek során a középponttávolságok monoton módon változnak. Hasonló eredményeket érünk el a Kneser–Poulsen-sejtés egy Kneser által felvetett súlyozott változatára is.

A 3. és 4. fejezetben ismertetett variációs formulák akkor alkalmazhatók Kneser–Poulsen-típusú egyenlőtlenségek bizonyítására, ha a kiinduló és az átrendezett gömbkonfiguráció középpontrendszerei folytonosan egymásba mozgathatók úgy, hogy a mozgás során a középponttávolságok monoton módon változnak. Néha elég az is, ha egy ilyen távolság-monoton átmozgatás egy magasabb dimenziós térbe kilépve létezik. Az bakugrás lemma szerint az n-dimenziós euklideszi tér két pont-k-asa között mindig található egy ilyen átmozgatás a teret tartalmazó $2n$ dimenziós euklideszi térben. Az euklideszi síkon és térben a bakugrás lemmával bizonyított Kneser–Poulsen-típusú egyenlőtlenségek hiperbolikus és gömbi térre való kiterjesztésének sokszor az az egyetlen akadálya, hogy hiányzik a bakugrás lemma megfelelő hiperbolikus, vagy szférikus változata. I. Gorbovickis kitalált egy ötletes módszert, mellyel a bakugrás lemma használata nélkül tudott néhány, az euklideszi síkon a bakugrás lemmával bizonyított Kneser-Poulsen típusú tételt a hiperbolikus síkra és a gömbre is kiterjeszteni. Gorbovickis módszerének adaptálásával, illetve dualizálásával az 5. fejezetben belátjuk, hogy ha az euklideszi vagy hiperbolikus síkon, vagy egy félgömbön fekvő véges sok kört a középpontok összehúzásával átrendezünk, akkor a körök konvex burkának kerülete nem nő. Ez a tétel általánosítja azt a V. N. Sudakov, R. Alexander, V. Capoyleas és Pach J. által belátott tételt, mely szerint az euklideszi síkon egy véges pontrendszer konvex burkának a kerülete nem csökken, ha a pontrendszert egy kontrakcióval összehúzzuk. Belátjuk továbbá, hogy a hiperbolikus síkon véges sok körlap metszetének a területe nem csökken, ha a köröket a középponttávolságok csökkentésével átrendezzük.

Ha a Kneser–Poulsen-sejtés igaz egy összefüggő teljes Riemann-sokaságban, akkor k egyforma sugarú geodetikus gömb metszetének térfogata csak a középpontok távolságától és a sugártól függhet. A 6. fejezetben megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság $k = 3$ esetén az egyszeresen összefüggő állandó görbületű tereket jellemzi, $k = 2$-re pedig a harmonikus tereket karakterizálja (feltéve az egyszeres összefüggőséget).

2. Első eredmények a Kneser–Poulsen-sejtésről

Ha (M, d) egy rögzített metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, akkor jelölje $B(x, r)$ az x középpontú r sugarú zárt gömböt. Ha adott az M tér k pontja, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in M^k$ és k darab nemnegatív valós szám, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{R}_+^k$, akkor legyen

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r_i).$$

Ha az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in M^k$ és $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in M^k$ pontrendszerekre fennállnak a $d(x_i, x_j) \geq d(y_i, y_j)$, $1 \leq i < j \leq k$ egyenlőtlenségek, akkor azt fogjuk mondani, hogy az $\mathbf{y}$ pontrendszer az $\mathbf{x}$ pontrendszer *összehúzottja*, és ezt $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, vagy $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$ módon jelöljük.

Ha M^n egy n-dimenziós hiperbolikus, euklideszi vagy gömbi tér, $A \subset M^n$ egy tetszőleges s-dimenziós térfogattal rendelkező halmaz, akkor az A n-dimenziós térfogatát a tér típusától függetlenül $vol_s(A)$-val fogjuk jelölni.

1954-ben E. Thue Poulsen a Mathematica Scandinavica folyóirat *Problem Section* rovatában a következő kérdést vetette fel [13]:

Kérdés: *Legyen az $\mathbb{E}^n$ n-dimenziós euklideszi térben fekvő $\mathbf{y} \in (\mathbb{E}^n)^k$ középpontrendszer az $\mathbf{x} \in (\mathbb{E}^n)^k$ középpontrendszer összehúzottja, $r > 0$, $\mathbf{r} = (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^k_+$. Következik-e ebből, hogy*

$$vol_n(B(\mathbf{x}, \mathbf{r})) \geq vol_n(B(\mathbf{y}, \mathbf{r}))?$$

Egy évvel később jelent meg Martin Kneser [14] munkája a Minkowski-térfogatról, melyben természetes módon vetődött fel a Poulsen által megfogalmazott kérdés, mivel ha arra pozitív a válasz, akkor egy kompakt halmaz alsó és felső s-dimenziós Minkowski-térfogatai nem nőhetnek, ha a halmazra egy kontrakciót alkalmazunk. Az intuíció azt sugallja, hogy a kérdésre igen a válasz, ezt hívjuk Kneser–Poulsen-sejtésnek.

1955-ben H. Hadwiger [15] ismertette a Kneser–Poulsen-sejtést, és felsorolta azokat a speciális eseteket, melyekben be tudták azt bizonyítani:

(i) $n = 1$. Az egyenesen a Kneser–Poulsen-sejtés egy egyszerű teljes indukcióval bizonyítható.

(ii) Ha a gömbök k száma legfeljebb $n + 1$.

(iii) Ha az $x_1, \dots, x_k$ középpontrendszer hasonló az $y_1, \dots, y_k$ középpontrendszerhez. (G. Bouligand [16], (1928).

(iv) Mind Kneser, mind Hadwiger megemlíti, hogy W. Habicht bebizonyította a sejtésnek azon speciális esetét, amikor $n = 2$ és az $x_1, \dots, x_k$ középpontrendszer folytonosan átmozgatható az $y_1, \dots, y_k$ középpontrendszerbe úgy, hogy a mozgás során a pontok közti távolságok mindvégig csökkennek. Habicht nem publikálta bizonyítását.

Ha (M, d) egy metrikus tér, azt fogjuk mondani, hogy az $\mathbf{y} \in M^k$ pontrendszer az $\mathbf{x} \in M^k$ pontrendszer *folytonos összehúzottja*

(M-ben), ha létezik olyan $\mathbf{z}\colon [0,1] \to M^k$ folytonos leképezés, melyre $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{z}(1) = \mathbf{y}$ és $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ esetén $\mathbf{z}(t_1) \succ \mathbf{z}(t_2)$. A relációra az $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, vagy $\mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{x}$ jelölést fogjuk használni. A $\mathbf{z}$ leképezést a két konfigurációt összekötő *összehúzó homotópiának* fogjuk nevezni.

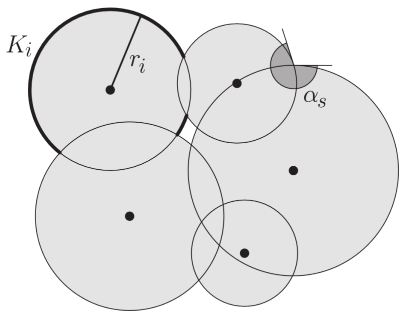
A Habicht-féle síkbeli esetre először Bollobás Béla [17] publikált egy bizonyítást. A szerző első eredménye a Kneser–Poulsen-problémával kapcsolatban a Kneser–Poulsen-sejtés Habicht és Bollobás által igazolt speciális esetének kiterjesztése volt arra az esetre, amikor a mozgó körök nem feltétlenül kongruensek.

1. tétel (Cs. B., [18], [2]). *Legyen $\mathbf{z}\colon [0,1] \to (\mathbb{E}^2)^k$ egy tetszőleges összehúzó homotópia. $\mathbf{x} \in (\mathbb{E}^2)^k$ és $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k_+$ esetén jelölje $A(\mathbf{x},\mathbf{r})$ a $B(\mathbf{x},\mathbf{r})$ unió területét, $K_i(\mathbf{x},\mathbf{r})$ az i-edik kör kerületének a $B(\mathbf{x},\mathbf{r})$ unió peremére eső részének hosszát, ha a $B(x_i,r_i)$ körlap nem esik egybe egyik kisebb indexű körlappal sem, egyébként $K_i(\mathbf{x},\mathbf{r})$ legyen 0 (l. 1. ábra). Ekkor*

(i) $\dfrac{\partial A}{\partial r_i}(\mathbf{x},\mathbf{r}) = K_i(\mathbf{x},\mathbf{r})$, *ha a $B(x_i,r_i)$ kör különbözik a többitől;*

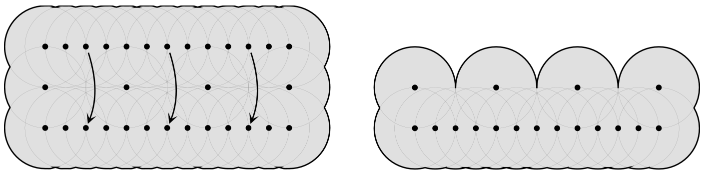
(ii) $\sum_{i=1}^k \frac{K_i(\mathbf{x},\mathbf{r})}{r_i} = 2\pi\chi + \sum_s(\alpha_s - \pi)$, *ahol α_s a $B(\mathbf{x},\mathbf{r})$ unió, mint körívekkel határolt poligon belső szögein fut végig, χ a tartomány Euler-karakterisztikája;*

(iii) A $\sum_{i=1}^k \frac{K_i(\mathbf{z}(t),\mathbf{r})}{r_i}$ *és $A(\mathbf{z}(t),\mathbf{r})$ függvények monoton csökkennek.*



1. ábra.

A [18] dolgozat bemutatott egy példát is egy olyan $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ összehúzásra, melynél egy adott r-re az $\mathbf{x}$ pontjai köré írt r sugarú körök uniójának kerülete kisebb, mint az $\mathbf{y}$ pontjai köré írt r sugarú körök uniójáé. (l. 2. ábra.)



2. ábra. Egy példa, amikor $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, de $B(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ kerülete kisebb, mint $B(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ kerülete.

Az ellenpélda azon múlik, hogy az összehúzott körrendszer határa az összehúzás után „rögösebbé” válhat, ami növelheti a kerületet. Igaz lehet viszont R. Alexander [19] alábbi sejtése:

Sejtés. Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{E}^2)^k$ pontrendszerekre $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ és $r > 0$, akkor a $\bigcap_{i=1}^k B(x_i, r)$ metszet kerülete legfeljebb akkora, mint a $\bigcap_{i=1}^k B(y_i, r)$ metszeté.

Lényeges, hogy a körök azonos sugarúak legyenek. Az Alexander-sejtéssel foglalkozó, Bezdek Károllyal és R. Connellyvel közös [6] cikkünkben konstruálunk egy példát, melyben három kör *folytonosan* húzódik össze a síkban, miközben metszetük kerülete csökken. Ráadásul a három kör közül kettő kongruens és a harmadik sugara is tetszőlegesen közel választható a két kongruens kör sugarához. Olyan példa is ismert, melyben három kör folytonosan húzódik össze a síkban, miközben uniójuk kerülete nő.

1998-ban M. Bern és A. Sahai [20] publikált egy lényegesen új bizonyítást az 1. tételre, melyben szerepelt néhány egyszerű képlet két-három mozgó kör uniója területének deriváltjára.

Kiderült, hogy ezek a képletek egy általános formula speciális esetei, melyek tetszőleges dimenzióban kifejezik véges sok mozgó gömb uniója térfogatának deriváltját a középponttávolságok deriváltjaival. A tétel kimondásához vezessünk be néhány újabb jelölést. Legyen $\mathbf{x}\colon [0,1] \to (\mathbb{E}^n)^k$ egy differenciálható leképezés, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^k$ rögzített.

Legyen $V(t) := vol_n(B(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}))$ és $d_{ij}(t) := d(x_i(t), x_j(t))$. Ha a t időpillanatban a középpontok közt nincs két egybeeső, akkor legyen $W_{ij}(t)$ a $B(\mathbf{x}(t), \mathbf{r})$ unió Dirichlet–Voronoi-, röviden DV-felbontásában az i-edik és a j-edik gömb DV-celláját elválasztó fal. A $W_{ij}(t)$ halmaz a $B(x_i(t), r_i)$ és $B(x_j(t), r_j)$ gömbök hatványhipersíkjának egy korlátos tartománya, tehát egy $(n-1)$-dimenziós tartomány, mely akár üres is lehet.

2. tétel (Cs. B. [3]). *Ha $n \geq 2$, és a $t \in (0,1)$ pillanatban nincs két egybeeső gömbközéppont, akkor a V függvény differenciálható t-ben és*

$$V'(t) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} vol_{n-1}(W_{ij}(t)) d'_{ij}(t). \tag{1}$$

A tételből könnyen adódik, hogy egy differenciálható összehúzás során a folytonos V függvény véges sok pont kivételével mindenütt deriválható és deriváltja nempozitív, tehát V gyengén csökkenő függvény. Valamennyi többletmunkával a sima összehúzásokról át lehet térni a folytonosakra:

3. tétel (Cs. B. [3]). *Ha $\mathbf{z} : [0,1] \to (\mathbb{E}^n)^k$ egy összehúzó homotópia, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^k$, akkor a $t \mapsto vol_n(B(\mathbf{z}(t), \mathbf{r}))$ függvény (gyenge értelemben) monoton csökkenő.*

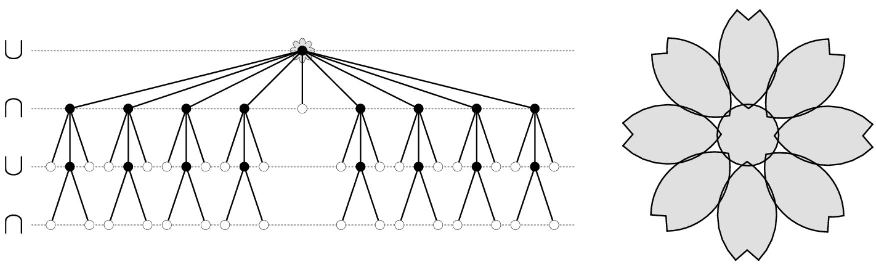
A tételből a bakugráslemma alkalmazásával beláthatjuk $\mathbb{E}^n$ részhalmazaira a $\underline{\mu}_s^n$, illetve $\bar{\mu}_s^n$ alsó, illetve felső s-dimenziós Minkowski-térfogat Kneser [14] által sejtett monotonitását kontrakcióknál, ha a kiinduló halmaz, illetve az összehúzottja Minkowski-mérhető.

4. tétel. *Ha egy Minkowski-mérhető $A \subset \mathbb{E}^n$ halmaz a $C \subset \mathbb{E}^n$ korlátos halmaz összehúzottja, $B \subset \mathbb{E}^n$ pedig az A összehúzottja, akkor*

$$\underline{\mu}_s^n(B) \leq \underline{\mu}_s^n(A) = \bar{\mu}_s^n(A) \leq \bar{\mu}_s^n(C).$$

3. A Kneser–Poulsen-sejtés virágokra

M. Gromov [21] gondolatébresztő írása felveti a Kneser–Poulsen-sejtés kiterjeszthetőségének gondolatát a gömbi és hiperbolikus térre. A szférikus térben a gömbök komplementerei szintén gömbök, és az unió komplemetere a komplementerek metszete, így a gömbön a sejtés egyenértékű azzal az állítással, hogy véges sok gömb metszetének a térfogata nem csökkenhet, ha a gömböket úgy rendezzük át, hogy a középpontjaik közelebb kerüljenek egymáshoz. Ez felveti azt a további kérdést, hogy tudunk-e valamit mondani olyan halmazok térfogatának a monotonitásáról, melyek véges sok gömbből az unió és a metszet műveletek vegyes alkalmazásával állíthatók elő, ha megfelelően szabályozzuk, hogy egy átrendezés során a középponttávolságok közül melyek nőjenek és melyek csökkenjenek. Ezt az általánosabb kérdést vizsgálta Y. Gordon és M. Meyer [22], akik *virágoknak* nevezték el a gömbök által generált háló elemeit. Egy virágot mindig megkaphatunk a következő eljárással. Tekintsünk egy fagráfot egy kitüntetett gyökérponttal. Irányítsuk a gráf éleit úgy, hogy az élek a gyökér felé mutassanak. Egy csúcsot nevezzünk *uniózó csúcsnak*, ha a gyökértől páros távolságra fekszik és *metsző csúcsnak*, ha páratlanra. A fa leveleihez, azaz a 0 be-fokú csúcsokhoz rendeljünk hozzá egy-egy gömböt. Egy ilyen, a leveleinél gömbökkel megcímkézett fa *kiértékelése* rekurzívan egy virágot rendel minden csúcshoz a következő szabály szerint. A levelekhez rendelt virág maga a kiinduláskor hozzárendelt gömb. Ha egy csúcs bejövő élek menti szomszédain a kiértékelést már megadtuk, akkor a csúcshoz rendelt virág legyen a bejövő élek menti szomszédaihoz rendelt virágok metszete illetve uniója attól függően, hogy a csúcs metsző illetve uniózó-e. Az utolsó lépésben a gyökérhez rendelt virágot *a fa értékének* is nevezzük.



3. ábra. Egy gyökeres fa és egy értékeként megkapható virág.

Két levél, illetve a hozzájuk rendelt két gömb viszonyát *metsződőnek*, vagy *uniózódónak* nevezzük attól függően, hogy tőlük a gyökér felé vezető utak első találkozási pontja metsző, vagy uniózó-e.

A [22] cikk fő eredménye a következő:

5. tétel (Y. Gordon, M. Meyer [22]). *Legyen M az n-dimenziós szférikus, vagy euklideszi tér. Rögzítsünk egy gyökeres fát, melynek legfeljebb $n+1$ levele van és címkézzük meg ezeket a leveleket az M gömbjeivel. Ekkor a fa értékének térfogata nem csökkenhet, ha a levelekhez rendelt gömböket úgy mozdítjuk el, hogy a metsződő viszonyban lévők középpontjainak távolsága csökkenjen, az uniózódó viszonyban lévőké pedig nőjön.*

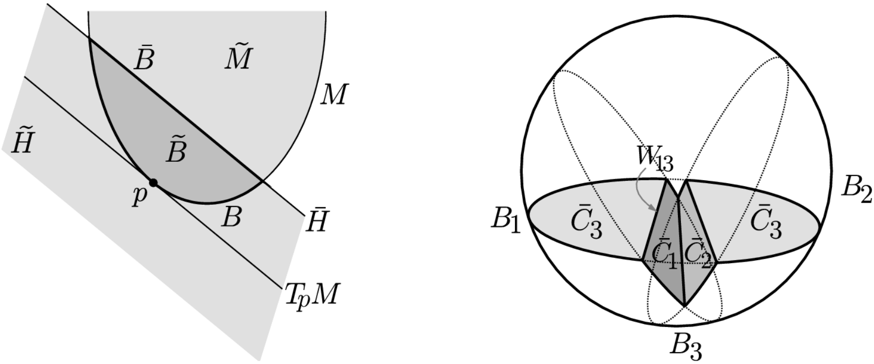
Gordon és Meyer tétele természetes módon veti fel azt a kérdést, hogy ki lehet-e terjeszteni az (1) formulát és annak következményeit az euklideszi, gömbi és hiperbolikus tér virágaira. Mint kiderült, a válasz igen, de az általánosítás nem teljesen mechanikus. Az igazi nehézséget az jelentette, hogy meg kellett találni a megfelelő definíciót egy virághoz tartozó DV-cellarendszerre.

Ahhoz, hogy egységesen tudjuk kezelni a hiperbolikus, euklideszi és szférikus tereket, tekintsük azok kvadrikmodelljét. Legyen $\langle\,,\rangle$ a szokásos skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-en és vezessük be az $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vektortéren az

$$\{(\mathbf{x}, x_{n+1}), (\mathbf{y}, y_{n+1})\} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \epsilon x_{n+1} y_{n+1}$$

szimmetrikus bilineáris függvényt, ahol $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$. Definiáljuk az M_ϵ hiperfelületet ϵ szerinti esetszétválasztással. Ha $\epsilon = 1$, akkor M_ϵ legyen a $\{\xi, \xi\} = 1$ egyenletű gömb. Ha $\epsilon = -1$, akkor M_ϵ legyen a $\{\xi, \xi\} = -1$ egyenletű kétköpenyű hiperboloidnak az $x_{n+1} > 0$ féltérbe eső köpenye. Végül $\epsilon = 0$ esetén M_ϵ legyen az $x_{n+1} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ egyenletű paraboloid. Be lehet látni, hogy a $\{\,,\}$ bilineáris függvény megszorítása az M_ϵ bármely pontjában vett érintőtérre pozitív definit, így ezek a megszorítások M_ϵ-t egy Riemann-metrikával látják el. Az M_1, M_0 illetve M_{-1} Riemann-sokaságok rendre az n-dimenziós szférikus, euklideszi illetve hiperbolikus terek modelljei. M_1 a gömb standard modellje, M_{-1} a hiperbolikus tér hiperboloidmodellje. M_0

és az euklideszi tér standard modellje között az $(\mathbf{x}, x_{n+1}) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ projekció ad egy izomorfizmust. A továbbiakban M legyen ezen modellek közül az egyik, és jelölje $\tilde{M}$ az M konvex burkát.



4. ábra. A lapos DV-cellák konstrukciója (a jobboldali ábrán a $(B_1 \cup B_2) \cap B_3$ virág lapos DV-cellái láthatók).

A $p \in M$ középpontú gömböket úgy kapjuk M-ben, hogy az M hiperfelületet elmetsszük egy olyan p-t tartalmazó féltérrel, melynek határoló hipersíkja párhuzamos az M p-beli T_pM érintőterével. Ha B egy ilyen gömb, melyet a $\bar{H}$ hipersík által határolt $\tilde{H}$ féltér metsz ki, akkor $\bar{H}||T_pM$ miatt $\bar{H}$ egy euklideszi tér struktúrát örököl $\mathbb{R}^{n+1}$-től. A B határgömbje, $\partial B = \bar{H} \cap M$ a $\bar{H}$ euklideszi térben is egy gömbfelület. Az általa határolt $\bar{H} \cap \tilde{B}$ euklideszi gömböt jelöljük $\bar{B}$-vel. A B és $\bar{B}$ felületek uniója $\mathbb{R}^{n+1}$-nek a fél lencse alakú $\tilde{H} \cap \tilde{M}$ tartományát határolja, ennek jele legyen $\tilde{B}$.

Legyen $f(x_1, \ldots, x_k)$ egy k-változós hálópolinom, azaz egy olyan formális algebrai kifejezés, mely az $x_1, \ldots, x_k$ változókból és az $\cup$ és $\cap$ műveletekből épül fel. Ahhoz, hogy az M tér $B_1, \ldots, B_k$ gömbjeiből képzett $B_f = f(B_1, \ldots, B_k)$ virágra megfelelő módon kiterjesszük a DV-felbontás fogalmát, helyettesítsük be az f polinomba a B_i gömbök $\tilde{B}_i$ konvex burkát. A kapott $\tilde{B}_f = f(\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_k)$ tartomány határa egyrészt a B_f virágból, másrészt néhány „lapos” tartományból áll. A határ lapos darabjainak unióját lefedi a $\bar{B}_i$ lapos gömbök uniója. Abban az esetben, ha a $\bar{B}_i$ lapos gömbök páronként különbözők, a

$\bar{B}_i$ lapos gömb hozzájárulását a $\tilde{B}_f$ határához, vagyis a $\bar{C}_i = \bar{B}_i \cap \partial\tilde{B}_f$ metszettartományt az i-edik gömbhöz tartozó lapos DV-cellának nevezzük, az i-edik és j-edik cella $W_{ij} = \bar{C}_i \cap \bar{C}_j$ metszetét pedig az i-edik és a j-edik lapos cella közötti falnak. A W_{ij} fal a $\bar{H}_i \cap \bar{H}_j$ altérben helyezkedik el, mely $\bar{H}_i \neq \bar{H}_j$ esetén vagy egy $(n-1)$-dimenziós euklideszi tér, vagy üres.

Vegyünk egy fát egy kitüntetett gyökérponttal és rendeljünk hozzá minden leveléhez egy $B_i(t)$ gömböt az M térben, melynek $\mathbf{x}_i(t)$ középpontja a $t \in (a,b)$ paraméter differenciálható függvénye, míg r_i sugara állandó. Jelölje $V(t)$ a fa kiértékelésével kapott $B_f(t)$ virág térfogatát, $d_{ij}(t)$ az $\mathbf{x}_i(t)$ és $\mathbf{x}_j(t)$ középpontok távolságát. Legyen ϵ_{ij}^f értéke 1, ha az i-edik és j-edik gömb a virágban uniózódó viszonyban áll, és legyen -1, ha metsződőben.

6. tétel (Cs.B. [4]). *A bevezetett jelöléseket használva, ha $n \geq 2$ és egy adott $t_0 \in (a,b)$ pillanatban a $B_i(t_0)$ gömbök elhelyezkedése olyan, hogy a $\bar{H}_i(t)$ hipersíkok közül bármely $l \leq 3$-nak a metszete vagy üres, vagy $(n-l)$-dimenziós, akkor a V függvény a t_0 pontban differenciálható, és*

$$V'(t_0) = \sum_{i \neq j} \epsilon_{ij}^f vol_{n-1}(W_{ij}(t_0)) d'_{ij}(t_0). \tag{2}$$

A [4] cikkben megtalálható a (2) formula kiterjesztése arra az esetre is, amikor a B_i gömbökre csak az a gyengébb feltétel teljesül, hogy nincs kettő közöttük, melyek határgömbje megegyezik. A kiterjesztés technikai jellegű, ezért itt most nem ismertetjük.

A 6. tételből adódik az alábbi tétel:

7. tétel (Cs. B. [4]). *Ha a B_i gömbök folytonosan mozognak úgy, hogy az $\epsilon_{ij}^f d_{ij}$ előjeles középponttávolságok a mozgás során nem nőnek, akkor a gömbökből készített virág térfogata szintén nem nő.*

A differenciálható eset egyszerűen adódik a (2) egyenletből, a folytonos eset bizonyítása kevésbé nyilvánvaló.

A 6. tétel alkalmazásával Bezdek K. és R. Connelly általánosították az 1. tétel (iii) pontját tetszőleges dimenziós euklideszi térben fekvő virágokra:

8. tétel (K. Bezdek, R. Connelly [23]). *Jelölje* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{E}^n)^k$ *és* $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k_+$ *esetén* $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ *a* $\partial B_f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \cap \partial B(x_i, r_i)$ *gömbfelületdarab felszínét ha* $j < i$*-re* $(x_i, r_i) \neq (x_j, r_j)$*, egyébként legyen* 0*. Ekkor ha* $\mathbf{z}\colon [0,1] \to (\mathbb{E}^n)^k$ *egy olyan differenciálható homotópia, melyre az* $\epsilon^f_{ij} d(z_i, z_j)$ *előjeles távolságok monoton csökkennek, akkor a* $\sum_{i=1}^k K_i(\mathbf{z}, \mathbf{r})/r_i$ *súlyozott felszín gyengén monoton csökken.*

Azt, hogy ezt a tételt hogyan lehet a hiperbolikus és gömbi térre általánosítani, a Schläfli-formula általánosítása mutatta meg.

4. Egy Schläfli-típusú formula görbült lapú politópokra

A klasszikus Schläfli-formula a K szekcionális görbületű n-dimenziós hiperbolikus, euklideszi, vagy szférikus térben egy változó alakú n-dimenziós szimplex V térfogatának deriváltjára mondja ki az

$$(n-1)KV' = \sum_{1 \le i < j \le n+1} vol_{n-2}(W_{ij})\alpha'_{ij},$$

összefüggést, ahol W_{ij} az i-edik és j-edik hiperlap metszete, α_{ij} az i-edik és j-edik hiperlap szöge. A formula nagyon hasonlít az (1) és (2) formulákra.

Ez a hasonlóság felveti azt a kérdést, hogy ezeknek a formuláknak van-e valamilyen közös gyökere. A klasszikus Schläfli-formula könnyen kiterjeszthető politópokra. A gömbökből képzett virágok is poliéder-szerű halmazok, csak éppen görbült lapokkal vannak határolva. Ha megpróbáljuk a Schläfli-formulát a görbült lapú poliéderek osztályára kiterjeszteni, akkor speciális esetként egy Schläfli-típusú formulát kell kapnunk egy sokaság sima hiperfelületei által határolt kompakt tartományaira is. Ilyen formula már ismert volt korábban: egy Einstein-sokaságban fekvő sima határú kompakt tartomány térfogatának variációjára I. Rivin és J.-M. Schlenker [24] találtak egy Schläfli-típusú formulát. A kérdés tehát az volt, hogy ötvözni lehet-e a klasszikus Schläfli-formulát a Rivin-Schlenker-formulával úgy, hogy az összeolvasztott képlet tetszőleges görbült lapú poliéderre alkalmazható legyen.

Egy ilyen formulát sikerült találni a [5] cikkben pszeudo-Riemann-féle Einstein-sokaságban fekvő görbült lapú politópokra. Itt most röviden ismertetjük a cikk tartalmát, de a technikai részletek elkerülése végett csak a Riemann-esetre szorítkozunk. A disszertáció 4. fejezete teljes részletességgel tárgyalja a pszeudo-Riemann-esetet is.

4.1. Görbült lapú politópok egy sokaságban

Intuitívan egy görbült lapú politóp egy olyan kompakt tartomány egy sokaságban, melyet véges sok sima hiperfelület-darab határol. Ezt a képet több különböző matematikai modellel meg lehet ragadni. A gömbökből képzett virágokat, mint alappéldát szem előtt tartva a konstruktív testgeometria (KTG) számítógépes geometriában használatos megközelítése látszik legcélravezetőbbnek. Ennek szellemében a görbült lapú politópokat úgy fogjuk definiálni, mint olyan kompakt halmazokat, melyek egy sokaság reguláris tartományaiból regularizált Boole-műveletek egymásutáni alkalmazásával kaphatók.

Egy X topologikus tér $A \subset X$ részhalmazának reguláris lezárásán a $\rho_X(A) = \overline{\mathrm{int}(A)}$ halmazt értjük. Az A részhalmazt *reguláris zárt halmaznak* nevezzük, ha $A = \rho_X(A)$. A regularizált Boole-műveleteket X részhalmazain az

$$A \cup^* B = \rho_X(A \cup B), \quad A \cap^* B = \rho_X(A \cap B), \quad A \setminus^* B = \rho_X(A \setminus B)$$

képletekkel értelmezzük.

Egy f Boole-kifejezés egy olyan formális kifejezés (szimbólumok egy véges sorozata), melyre f vagy egy változót jelölő szimbólum, vagy $(f_1 * f_2)$ alakú, ahol f_1 és f_2 Boole-kifejezések, $*$ egyike a $\cup$, $\cap$, $\setminus$ műveleti jeleknek. Minden Boole-kifejezéshez tartozik egy f^* regularizált Boole-kifejezés melyet úgy kapunk f-ből, hogy a műveleti jeleket regularizált megfelelőikkel helyettesítjük. Két Boole-kifejezést akkor tekintünk azonosnak, ha mint szimbólumsorozatok megegyeznek. Ha $f(x_1, \ldots, x_k)$ egy k-változós Boole-kifejezés, $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}_X$ az X részhalmazai, akkor $f(A_1, \ldots, A_k)$-val és $f^*(A_1, \ldots, A_k)$-val jelöljük a kifejezések kiértékeléseit ezeken az $A_1, \ldots, A_k$ halmazokon. Ha az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok benne vannak az X tér Y alterében, akkor $f_Y^*(A_1, \ldots, A_k)$-val jelöljük az f^* Y-beli kiértékelését, melyben a regularizálást a ρ_Y operátorral végezzük a ρ_X helyett.

Legyen M egy n-dimenziós sima sokaság. Egy M-beli *reguláris tartomány* egy $\{p \in M \mid f(p) \leq 0\}$ alakban előálló részhalmaz, ahol $f\colon M \to \mathbb{R}$ egy olyan sima függvény M-en, melynek a 0 reguláris értéke. A reguláris tartományok n-dimenziós peremes, vagy perem nélküli sokaságok, melyek M-be reguláris zárt halmazként vannak beágyazva. Egy reguláris tartomány pereme vagy üres, vagy egy sima hiperfelület M-ben.

Egy *KTG-test* az M sokaságban egy olyan kompakt halmaz, mely megkapható egy regularizált Boole-kifejezésnek néhány reguláris tartományon felvett értékeként. Egy P KTG-test *KTG-reprezentációja* egy $f^*(x_1, \ldots, x_k)$ regularizált Boole-kifejezés reguláris tartományok egy $P_1, \ldots, P_k$ rendszerével, melyekre $P = f^*(P_1, \ldots, P_k)$.

A Konstruktív Test Geometriában a $P_1, \ldots, P_k$ reguláris tartományokat a P-t felépítő *kezdő* vagy *primitív objektumoknak* nevezik, a KTG-reprezentációt pedig egy gyökeres bináris fával, az úgynevezett KTG-fával szokás szemléltetni, melynek levelei a felépítő kezdő objektumokkal vannak megcímkézve, belső csomópontjaihoz pedig regularizált Boole-műveletek vannak rendelve (5. ábra). Egy KTG-test KTG-reprezentációja nem egyértelmű.

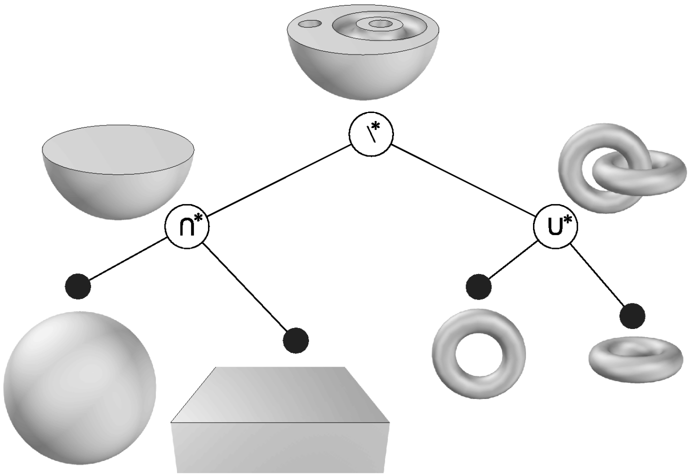
Definíció. Legyen $s \geq 1$ egy természetes szám. A P KTG-testet egy rögzített $f^*(P_1, \ldots, P_k)$ KTG-reprezentációval *s-transzverzálisnak* fogjuk nevezni, ha teljesül a következő két tulajdonság:

(i) az $x_1, \ldots, x_k$ változók mindegyike pontosan egyszer szerepel $f^*(x_1, \ldots, x_k)$-ban;

(ii) a ∂P_i, $(1 \leq i \leq k)$ hiperfelületek közül bármely $l \leq s$ transzverzálisan metszi egymást.

A továbbiakban *görbült lapú politópon* vagy egyszerűen *politópon* egy 3-transzverzális KTG-testet fogunk érteni.

Definíció. Legyen $P = f^*(P_1, \ldots, P_k)$ egy 2-transzverzális KTG-test M-ben. A P *i-edik* F_i *lapja* a $\Sigma_i = \partial P_i$ hiperfelület regularizált hozzájárulása a P határához, azaz $F_i = \rho_{\Sigma_i}(\Sigma_i \cap \partial P)$.



5. ábra. Példa egy KTG-fára

9. tétel. *Egy s-transzverzális P KTG-test lapjai* $s \geq 2$ *esetén rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:*

(i) F_i *egy* $(n-1)$*-dimenziós* $(s-1)$*-transzverzális KTG-test* Σ_i*-ben, mely felépíthető a* $P_j \cap \Sigma_i$ $(1 \leq j \leq k)$ *kezdő objektumokból, azaz létezik egy olyan (csak* f^**-tól függő)* $(\partial_i f^*)(x_1, \ldots, x_k)$ *regularizált Boole-kifejezés, melyben minden változó pontosan egyszer fordul elő és*

$$F_i = \partial_i f^*_{\Sigma_i}(P_1 \cap \Sigma_i, \ldots, P_k \cap \Sigma_i).$$

(ii) A lapok uniója P határa.

(iii) Ha M irányított, és a 2-transzverzális P KTG-test határát a sima pontokban az indukált irányítással látjuk el, akkor bármely M-en értelmezett $(n-1)$*-edfokú* ω *differenciálformára*

$$\int_P d\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} \omega. \qquad (3)$$

Ha P egy politóp, azaz 3-transzverzális, akkor alkalmazhatjuk a 9. tételt az F_i lapokra. F_i i-edik lapja üres, hiszen $\partial_{\Sigma_i}(\Sigma_i \cap P_i) = \emptyset$, a j-edik lap $j \neq i$-re a $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ részsokaság regularizált hozzájárulása az F_i lap határához, vagyis a $W_{ij} = \rho_{\Sigma_i \cap \Sigma_j}(\Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \partial_{\Sigma_i} F_i)$ halmaz. W_{ij} egy $(n-2)$-dimenziós KTG-test $\Sigma_i \cap \Sigma_j$-ben. Könnyű látni, hogy $W_{ij} = W_{ji}$. A W_{ij} testet az *F_i és F_j lapok közti falnak* fogjuk nevezni.

Tegyük fel, hogy az M sokaság el van látva egy $\{\,,\}$ Riemann-metrikával. Ekkor egy P reguláris tartomány $\Sigma = \partial P$ határán egyértelműen definiálható az $\mathbf{N}_P \in \Gamma(TM|_\Sigma)$ *kifelé mutató normális egységvektormező.*

Egy 2-transzverzális $P = f^*(P_1, \ldots, P_k)$ KTG-testnek minden lapja mentén van egy jól definiált sima kifelé mutató $\mathbf{N}_i = (-1)^{s_i}\mathbf{N}_{P_i}$ normális egységvektormezője, ahol az s_i egész szám csak az f^* kifejezéstől függ.

Alkalmazva ezt az okoskodást egy P politóp lapjaira azt kapjuk, hogy P minden F_i lapjához megadható egy sima kifelé mutató $\mathbf{n}_{ij} \in \Gamma(T\Sigma_i|_{W_{ij}})$ egységnormális mező a W_{ij} fal mentén.

A P politóp $\alpha_{ij}\colon W_{ij} \to (0, 2\pi)$ lapszöge a W_{ij} fal mentén az a sima függvény, melyre

$$\mathbf{n}_{ji} = \cos(\alpha_{ij})\mathbf{n}_{ij} + \sin(\alpha_{ij})\mathbf{N}_i.$$

4.2. Politópok variációja

Jelöljön I egy 0 körüli nyílt intervallumot. Ha $H\colon X \times I \to Y$ egy tetszőleges homotópia és $t \in I$, akkor $H_t\colon X \to Y$ fogja jelölni a $H_t(p) = H(p,t)$ képlettel definiált leképezést. Az elfajult példák kizárása céljából a továbbiakban minden $H\colon X \times I \to Y$ izotópiáról automatikusan feltesszük, hogy a belőle képzett $X \times I \to Y \times I$, $(p,t) \mapsto (H_t(p), t)$ leképezés perfekt.

Definíció. Egy M-beli $P = P_0$ *reguláris tartomány variációja* reguláris tartományok egy P_t, $t \in I$ egyparaméteres rendszere, melyre

(i) létezik egy $\Phi : \partial P \times I \to M$ izotópia azzal a tulajdonsággal, hogy Φ_0 a ∂P beágyazása M-be, és $\Phi_t(\partial P) = \partial P_t$ minden $t \in I$-re;

(ii) bármely $p \in M$-re a $\{t \in I \mid p \in \operatorname{int} P_t\}$ és $\{t \in I \mid p \in \operatorname{ext} P_t\}$ halmazok nyíltak I-ben.

Egy $X \in \Gamma(TM|_{\Sigma_0})$ Σ_0-menti vektormezőt a Σ_0 *hiperfelületnek egy, az adott variációval kompatibilis infinitezimális variációjának* nevezzük, ha a Φ izotópiát az előző definícióban megválaszthatjuk úgy, hogy $X_p = \frac{\partial\Phi(p,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ fennálljon minden $p \in \Sigma_0$ pontban.

Egy adott variációval kompatibilis infinitezimális variációk különbsége érinti a Σ_0 hiperfelületet.

Definíció. Egy

$$P = f^*(P_1, \dots, P_k) \tag{4}$$

s-transzverzális KTG-test variációja a P kezdő objektumainak $P_{1,t}$, $\dots, P_{k,t}$, $t \in I$ variációiból áll, melyekre teljesül, hogy

(i) $P_t = f^*(P_{1,t}, \dots, P_{k,t})$ egy s-transzverzális KTG-test minden $t \in I$-re;

(ii) bármely $l \leq s$ és $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$ esetén létezik a $\bigcap_{j=1}^{l} \partial P_{i_j}$ metszetnek egy Φ_t, $t \in I$ izotópiája M-ben úgy, hogy Φ_0 a beágyazó leképezés és $\Phi_t(\bigcap_{j=1}^{l} \partial P_{i_j}) = \bigcap_{j=1}^{l} \partial P_{i_j,t}$ minden t-re;

(iii) van olyan $K \subset M$ kompakt halmaz, hogy $P_t \subset K$ minden $t \in I$-re.

Tekintsük az $(M, \{,\})$-beli $P = f^*(P_1, \dots, P_k)$ politóp egy variációját. Jelöljük Σ_i-vel a P_i kezdő objektum határát és legyen $X_i \in \Gamma(TM|_{\Sigma_i})$ a Σ_i hiperfelület egy olyan infinitezimális variációja, mely P_i variációjával kompatibilis. Egy, a W_{ij} fal mentén definiált $X \in \Gamma(TM|_{W_{ij}})$ vektormezőt akkor nevezünk a W_{ij} falnak az adott variációval kompatibilis infinitezimális variációjának, ha a $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ metszetnek választható úgy a definíció (ii) pontjában leírt Φ_t izotópiája, hogy $X_p = \frac{\mathrm{d}\Phi_t(p)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$ teljesüljön minden $p \in W_{ij}$-re.

4.3. Schläfli-formula görbült lapú politópokra Einstein-sokaságokban

Jelölje $V(t)$ a $P_t = f^*(P_{1,t}, \dots, P_{k,t})$ politóp térfogatát a Riemann-metrika által indukált térfogati mérték szerint. Az általános Stokes-tételből levezethető, hogy ha a P_0 lapjai $F_1, \dots, F_k$, $\mathbf{N}_i$ a P_0 külső normális egységvektormezője az F_i lap mentén, az $X_i \in \Gamma(TM|_{F_i})$ infinitezimális variáció normális komponense ν_i, akkor

$$V'(0) = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} \nu_i d\sigma_i = \sum_{i=1}^{k} \int_{F_i} \{X, \mathbf{N}_i\} d\sigma_i, \tag{5}$$

ahol σ_i a Riemann-metrika által indukált térfogati mérték az F_i lapon.

Ahhoz, hogy ezt a képletet tovább tudjuk alakítani egy Schläfli-típusú formulává, az M sokaságról feltesszük, hogy egy s skalárgörbületű Einstein-sokaság (l. [25]).

Legyen Σ egy sima hiperfelület M-ben, $\mathbf{N} \in \Gamma(TM|_\Sigma)$ egy rögzített normális egységvektormező Σ mentén. Legyen $\Phi_t\colon \Sigma \to M$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ egy tetszőleges izotópia és legyen $X \in \Gamma(TM|_\Sigma)$, $X_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(p)\big|_{t=0}$ az általa indukált vektormező. Jelölje I_t, II_t és $H_t = \{I_t, II_t\}$ a $\Phi_t(\Sigma)$ hiperfelület első és második alapformájának illetve összeggörbületének visszahúzottját a Σ hiperfelületre a Φ_t által. Legyenek $I = I_0$ és $II = II_0$ a Σ első és második alapformái, I', II' illetve H' pedig a $\frac{\mathrm{d}I_t}{\mathrm{d}t}(0)$, $\frac{\mathrm{d}II_t}{\mathrm{d}t}(0)$ illetve $\frac{\mathrm{d}H_t}{\mathrm{d}t}(0)$ deriváltak.

Tekintsük az $(M, \{\,,\})$-beli (4) politóp egy variációját. Jelöljük Σ_i-vel a P_i kezdő objektum határát és legyen $X_i \in \Gamma(TM|_{\Sigma_i})$ a Σ_i hiperfelület egy olyan infinitezimális variációja, mely P_i variációjával kompatibilis. Válasszunk minden W_{ij} falhoz egy tetszőleges X_{ij} infinitezimális variációt, mely kompatibilis a rögzített variációval. A variáció definíciójának (ii) pontjának megfelelően válasszunk egy $\Phi : (\partial P_i \cap \partial P_j) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ izotópiát, melynek kezdő sebességmezője az X_{ij} vektormező. Terjesszük ki az α_{ij} függvényt egy sima $\alpha_{ij}^{\Phi} : (\partial P_i \cap \partial P_j) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvénnyé úgy, hogy $\alpha_{ij}^{\Phi}(p, t)$ a P_t politóp lapszöge legyen a $\Phi(p, t)$ pontban, feltéve, hogy $\Phi(p, t)$ a P_t politóp i-edik és j-edik lapja közötti falra esik. Az α_{ij} lapszög X_{ij} mező szerinti $X_{ij}\alpha_{ij} : W_{ij} \to \mathbb{R}$ deriváltját úgy definiáljuk a $p \in W_{ij}$ pontban, mint az $\alpha_{ij}^{\Phi}(p, t)$ t szerinti parciális deriváltját a $t = 0$ helyen. Az $X_{ij}\alpha_{ij}$-re vonatkozó képletek mutatják, hogy a definíció jó, tehát $X_{ij}\alpha_{ij}$ csak az X_{ij} vektormezőtől függ, a Φ izotópia választásától nem.

Most már minden készen áll ahhoz, hogy kimondjuk a Schläfli-formula általánosítását Einstein-sokaságokban fekvő görbült lapú politópokra:

10. tétel (Cs.B. [5]). *Legyen P_t az s skalárgörbületű n-dimenziós M Einstein-sokaságban fekvő P politóp egy variációja, $V(t)$ a P_t térfogata. Ekkor a fentebb bevezetett jelöléseket használva fennáll a*

$$\begin{aligned}\frac{s}{n}V'(0) = & \sum_{i=1}^{k}\int_{F_i}(H_i' + \frac{1}{2}\{I_i', II_i\})d\sigma_i \\ & + \sum_{1\le i<j\le k}\int_{W_{ij}}(X_{ij}\alpha_{ij})d\sigma_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\int_{W_{ij}}\{L_i(X_{ij}-X_i), \mathbf{n}_{ij}\}d\sigma_{ij}.\end{aligned} \tag{6}$$

variációs formula, ahol σ_i illetve σ_{ij} a Riemann-metrika által indukált térfogati mértékek a lapokon illetve a falakon, L_i az i-edik lap Weingarten-operátora az $\mathbf{N}_i$ normálvektormezőre nézve.

4.4. Az általánosított Schläfli-formula alkalmazásai

A (6) formula „erejét” jól szemlélteti, hogy belőle speciális esetként megkapható a klaszikus Schläfli-formula, a Rivin–Schlenker-formula, R. Souam [26] formulája, mely a Rivin–Schlenker formula egy általánosítása, valamint a virágok téfogatának deriváltját kifejező korábban tárgyalt képlet.

Vizsgáljuk meg azt, hogy mit ad a (6) formula, ha közvetlenül egy állandó görbületű tér virágaira alkalmazzuk. Legyen M egy n-dimenziós, $K = s/(n^2 - n)$ konstans görbületű hiperbolikus, euklideszi, vagy szférikus tér. Az M teljes összefüggő umbilikus hiperfelületeit $*$-*szféráknak* fogjuk nevezni. A gömbi térben a $*$-szférák gömbfelületek, az euklideszi térben gömbfelületek vagy hipersíkok, a hiperbolikus térben lehetnek gömbfelületek, paraszférák, hiperszférák vagy hipersíkok. Jelentsen a $*$-*gömb* kifejezés egy tetszőleges olyan reguláris tartományt M-ben, melynek határfelülete egy $*$-szféra. A $*$-gömbökből, mint kezdő objektumokból felépített KTG testek a virágok általánosításai, nevezzük őket $*$-*virágoknak*.

Legyen $P = f^*(B_1, \dots, B_k)$ egy 3-transzverzális $*$-virág M-ben, ahol a B_i-k $*$-gömbök. Tekintsük a P-nek egy olyan P_t variációját, melyet a B_i kezdő objektumok merev mozgatásával nyerünk. Ebben az esetben az X_i infinitezimális variációk választhatók Killing-mezőnek. Ha így teszünk, akkor az $\int_{F_i}(H_i' + \frac{1}{2}\{I_i', II_i\})d\sigma_i$ integrálok a (6) egyenletben eltűnnek. Két $*$-szféra metszési szöge a metszet minden pontjában ugyanaz, így az α_{ij} függvény csak t-től függ és az $\alpha_{ij}'(0) = X_{ij}\alpha_{ij}$ derivált értéke nem függ az X_{ij} vektormező tényleges választásától. Mivel ∂B_i umbilikus felület, a hozzá tartozó L_i Weingarten-leképezés egyszerűen a ∂B_i $*$-gömbnek a P kifelé mutató egységnormálisához tartozó konstans normálgörbületi függvény κ_i értékével való szorzás. Ebből adódik, hogy a (6) egyenlet a következő egyszerűsített alakot ölti:

$$\frac{s}{n}V'(0) = \sum_{1\le i<j\le k} \alpha_{ij}'(0)\sigma_{ij}(W_{ij}) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\int_{W_{ij}} \kappa_i\{(X_{ij}-X_i), \mathbf{n}_{ij}\}d\sigma_{ij}.$$

Mivel X_i egy Killing-mező, és X_{ij} a W_{ij} fal változásával kompatibilis infinitezimális variáció, $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\int_{W_{ij}}\{(X_{ij}-X_i), \mathbf{n}_{ij}\}d\sigma_{ij}$ az i-edik lap $(n-1)$-dimenziós térfogatának deriváltja a $t = 0$ időpillanatban (l. (5)). Így a 10. tételnek a következő speciális esetéhez jutunk:

11. tétel. *Az M^n-ben mereven mozgó $*$-gömbökből épített 3-transzverzális $*$-virágok térfogatára érvényes a következő variációs formula:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{n}V - \sum_{i=1}^{k}\kappa_i\sigma_i(F_i)\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{1\le i<j\le k}\alpha_{ij}'(0)\sigma_{ij}(W_{ij}). \qquad (7)$$

Ebből rögtön adódik egy monotonitási tétel.

12. tétel. *Ha egy $P = f^*(B_1, \dots, B_k)$ $*$-virág alakját úgy változtatjuk, hogy a B_i $*$-gömböket simán, 3-transzverzálisan és mereven mozgatjuk, miközben a P politóp α_{ij} lapszögei nem nőnek, akkor az $(sV/n - \sum_i \kappa_i\sigma_i(F_i))$ mennyiség szintén nem nő.*

Az $(sV/n - \sum_i \kappa_i \sigma_i(F_i))$ funkcionál kiterjeszthető tetszőleges, *nem feltétlenül 3-transzverzális* $*$-virágra az $sV(P)/n - \int_{\partial P} \kappa \mathrm{d}\sigma$ képlettel, ahol κ a ∂P határ sima pontjaihoz a külső normálishoz tartozó, minden érintőirányra azonos normálgörbület értékét rendelő függvény. A $*$-gömbök folytonos mozgatása esetén ez a mennyiség folytonosan változik.

Két $*$-gömböt *koncentrikusnak* nevezünk, vagy azt mondjuk, hogy megegyezik a *virtuális középpontjuk*, ha egyikük a másik zárt r-sugarú paralleltartománya valamilyen $r \geq 0$-ra.

Ha B_1 és B_2 két $*$-gömb, akkor definiáljuk az $\alpha(B_1, B_2) \in [\pi, 2\pi]$ szöget mint a $B_1 \cup B_2$ unió belső lapszögét a $\partial B_1 \cap \partial B_2$ mentén, feltéve, hogy ∂B_1 transzverzálisan metszi ∂B_2-t egy nem üres halmazban. A fennmaradó esetekben legyen

$$\alpha(B_1, B_2) = \begin{cases} \pi & \text{ha } B_1 \subseteq B_2 \text{ vagy } B_2 \subseteq B_1, \\ 2\pi & \text{ha } \# B_1 \cap B_2 \leq 1 \text{ vagy } B_1 \cup B_2 = M. \end{cases}$$

Ha B_1 és B_2 közönséges gömbök, akkor az $\alpha(B_1, B_2)$ szög a középpontok távolságának gyengén monoton növő függvénye. Azt mondjuk, hogy a $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{Iso}(M)$ izometriák gyengén közelítik a B_1 és B_2 $*$-gömbök virtuális középpontjait, ha bármely két, B_1-gyel, illetve B_2-vel koncentrikus B_1' és B_2' $*$-gömbre $\alpha(B_1', B_2') \geq \alpha(\Phi_1(B_1'), \Phi_2(B_2'))$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy Φ_1 és Φ_2 a virtuális középpontokat gyengén távolítja.

Ha f^* egy regularizált Boole-kifejezés, melyben minden változó pontosan egyszer fordul elő, akkor definiálhatók a csak az f^*-tól függő $\epsilon_{ij}^{f^*} \in \{\pm 1\}$ előjelek úgy, hogy a B_i $*$-gömbök bármely 3-transzverzális családjára az $f^*(B_1, \ldots, B_k)$ $*$-virág α_{ij} lapszöge és $\epsilon_{ij}^{f^*} \alpha(B_i, B_j)$ a π egy konstans többszörösével tér el egymástól.

Egy $*$-virágot 3-transzverzális $*$-virágokkal approximálva úgy, hogy a virágot alkotó $*$-gömböket közeli koncentrikus $*$-gömbökkel helyettesítjük, a 12. tétel a 8. tétel alábbi általánosításához vezet:

13. tétel. *Ha a $P = f^*(B_1, \ldots, B_k)$ $*$-virág alakját a B_i $*$-gömbök szakaszonként analitikus merev mozgatásával változtatjuk úgy, hogy minden $1 \leq i < j \leq k$-ra a B_i és B_j virtuális középpontjai gyengén* *közelednek ha* $\epsilon_{ij}^{f^*} = 1$ *és gyengén távolodnak ha* $\epsilon_{ij}^{f^*} = -1$*, akkor az* $sV(P_t)/n - \int_{\partial P_t} \kappa \mathrm{d}\sigma$ *mennyiség gyengén csökken a mozgás során.*

A 13. tétel a Kneser–Poulsen-sejtéshez hasonló monotonitási tétel. Mint látni fogjuk, ez a kapcsolat sokkal mélyebb a felszínes hasonlóságnál.

Legyen N egy $(n-2)$-dimenziós altér M-ben. Az M tér N pontjait fixen hagyó irányítástartó izometriáinak G csoportja az M N körüli forgatásaiból áll, így G izomorf az S^1 körvonalcsoporttal.

14. tétel. *Tegyük fel, hogy egy M-beli P G-invariáns KTG-test határának szinguláris pontjai elhanyagolható halmazt alkotnak a [27] könyvben használt értelemben, és hogy a P kezdő objektumainak határoló hiperfelületei transzverzálisan metszik N-et. Ha a $p \in \partial P$ nem szinguláris határpont nincs az N-ben, akkor jelölje $k_G(p)$ a ∂P-nek a P kifelé mutató normális egységvektormezőjére vonatkozó normálgörbületét a Gp kör érintőjének irányában. Ekkor fennáll az alábbi azonosság:*

$$\frac{s}{n} V_n(P) - \int_{\partial P} k_G d\sigma = 2\pi V_{n-2}(P \cap N), \tag{8}$$

ahol V_n, V_{n-2} és σ az M Riemann-metrikája által indukált térfogati mértékek M-en, N-en illetve ∂P sima részén.

Megjegyezzük, hogy a (8) egyenlet rokonságban áll a forgásfelületek felszínére vonatkozó Arkhimédész-féle formulákkal. A tétel $*$-virágok esetén a következőt állítja:

15. tétel. *Tegyük fel, hogy $P = f^*(B_1, \ldots, B_k)$ egy M-beli, G-invariáns $*$-gömbökből készült KTG-test. Jelölje κ a ∂P határa sima részének főgörbületét és σ az $(n-1)$-dimenziós térfogati mértéket ∂P-n. Ekkor fennáll az*

$$\frac{s}{n} V_n(P) - \int_{\partial P} \kappa \mathrm{d}\sigma = 2\pi V_{n-2}(f^*(B_1 \cap N, \ldots, B_k \cap N))$$

egyenlőség.

Bármely $(n-2)$-dimenziós $B^{n-2} \subset N$ $*$-gömb egyértelműen kiterjed egy olyan G-invariáns n-dimenziós $B^n \subset M$ $*$-gömbbé, melyre $B^{n-2} = B^n \cap N$.

A 13. és a 15. tételek kombinálásával a következő eredményt kapjuk:

16. tétel. *Legyen f^* egy regularizált Boole-kifejezés mint fentebb, $B_1, \dots, B_k$ és $B'_1, \dots, B'_k$ $(n-2)$-dimenziós $*$-gömbök N-ben, melyekre B_i és B'_i kongruens minden $1 \le i \le k$-ra. Jelölje $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ és $\mathbf{B}'_1, \dots, \mathbf{B}'_k$ azokat a G-invariáns $*$-golyókat M-ben, melyekre $\mathbf{B}_i \cap N = B_i$ és $\mathbf{B}'_i \cap N = B'_i$ minden i-re. Ha léteznek olyan szakaszonként analitikus $\beta_i \colon [0,1] \to \mathcal{B}_*(M)$ görbék az M-beli $*$-golyók $\mathcal{B}_*(M)$ terében, melyek úgy kötik össze a $\beta_i(0) = \mathbf{B}_i$ $*$-golyót a $\beta_i(1) = \mathbf{B}'_i$ $*$-golyóval, hogy $\beta_i(t)$ kongruens $\mathbf{B}_i$-vel minden t-re és az $\epsilon_{ij}^{f^*} \alpha(\beta_i(t), \beta_j(t))$ előjeles szögek gyengén csökkennek miközben t nő, akkor fennáll a*

$$V_{n-2}(f_N^*(B_1, \dots, B_k)) \ge V_{n-2}(f_N^*(B'_1, \dots, B'_k))$$

egyenlőtlenség.

Közönséges gömbökből készített $*$-virágokra ez a következő állítást adja.

16.1. következmény. *Legyen f^* egy olyan regularizált Boole-kifejezés mint fentebb, $P_1, \dots, P_k$ és $Q_1, \dots, Q_k$ legyenek az N $(n-2)$-dimenziós altérben fekvő pontok. Ha léteznek olyan szakaszonként analitikus $\gamma_i : [0,1] \to M$ görbék, melyek a $\gamma_i(0) = P_i$ pontokat a $\gamma_i(1) = Q_i$ pontokkal kötik össze oly módon, hogy az $\epsilon_{ij}^{f^*} d(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ előjeles távolságok nem nőnek miközben a t nő, akkor az r_i sugarak bármely választása esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség a $B_i = B^n(P_i, r_i) \cap N$ és $B'_i = B^n(Q_i, r_i) \cap N$ N-beli gömbökből készített virágok térfogata között:*

$$V_{n-2}(f_N^*(B_1, \dots, B_k)) \ge V_{n-2}(f_N^*(B'_1, \dots, B'_k)).$$

A 16.1. következmény általánosítja Bezdek K. és R. Connelly [23] tételét, mely a következménynek az unió és metszet műveletekkel képzett virágokra vonatkozó speciális esetét mondja ki az euklideszi térben.

4.5. Alkalmazás Kneser egy problémájára

A politópok definíciójában szerepel egy feltétel, mely szerint a polinomot előállító $f^*(x_1, \dots, x_k)$ Boole-kifejezésben minden változó csak egyszer szerepelhet. Ezt érdemes volt feltenni, mert így „első közelítésben” meg lehetett szabadulni néhány technikai jellegű bonyodalomtól, másrészt az ezzel a megszorítással kapott formulát hatékonyan lehet alkalmazni olyan testekre is, melyek egy *tetszőleges* f^* Boole-kifejezéssel állíthatók elő $P = f^*(P_1, \dots, P_k)$ alakban, ahol a $P_1, \dots, P_k$ határai közül bármely legfeljebb 3 transzverzálisan metszi egymást. Ehhez nem kell mást tennünk, mint az f^* Boole-polinomot olyan unióként felírni, melyben minden tényező a P_i kezdő halmazok és komplementereik közül néhánynak a regularizált metszete. Ezután minden metszetre felírhatjuk a Schläfli-formulát, mert ha vannak is ismétlődő tagok a metszetben, a többször szereplő változók másodpéldányait el lehet hagyni a metszet megváltoztatása nélkül. Ha az $f^*(P_1, \dots, P_k)$-t alkotó összes metszetre felírjuk a Schläfli-formulát, majd a kapott formulákat összeadjuk, akkor egy P-re vonatkozó Schläfli-típusú formulához jutunk.

Amikor 1997-ben megjelent [2] cikk, M. Kneser eljuttatta a szerzőhöz annak a levélnek a másolatát, melyet még 1968-ban írt Bollobás Bélának. Ebben a levélben felveti az eredeti Kneser–Poulsen-sejtésnek egy súlyozott általánosítását:

Kérdés (M. Kneser). *Legyen $B_1, \dots, B_k$ k gömb az n-dimenziós euklideszi térben, $t_1 \geq \dots \geq t_k$ csökkenő valós számok. $1 \leq s \leq k$ esetén definiáljuk az E_s halmazt azon pontok halmazaként, melyek a gömbök közül legalább s-ben benne vannak. (E_1 a gömbök uniója, E_k a gömbök metszete.) Igaz-e, hogy a $\sum_{s=1}^{k} t_s vol_n(E_s)$ térfogatkombináció nem nőhet, ha a gömböket úgy rendezzük át, hogy a középponttávolságok ne nőjenek?*

A kérdés természetesen a gömbön és a hiperbolikus térben is értelmes. Legyen M az s skalárgörbületű n-dimenziós hiperbolikus, euklideszi, vagy szférikus tér, és tegyük fel, hogy $B_1, \dots, B_k$ M-beli gömbök. Az E_s halmaz egy virág, hiszen

$$E_s = f_s(B_1, \dots, B_k) := \bigcup_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le k} \bigcap_{j=1}^{s} B_{i_j},$$

csakhogy ha ezt a virágot egy fa kiértékeléseként akarjuk megkapni, akkor ugyanazt a B_i gömböt a fa több különböző leveléhez is oda kell írni, aminek az a következménye, hogy nem lehet egyértelműen megmondani, hogy a B_i és B_j gömbök az E_k virágban milyen viszonyban állnak egymással. Ez azzal a geometriai tünettel jár, hogy az E_s i-edik és j-edik lapja közötti $W_{s,ij}$ falon lesznek olyan pontok is, melyek kis környezetében az E_s a $B_i \cup B_j$ unióval egyezik meg, és lesznek olyanok is, ahol a $B_i \cap B_j$ metszettel. Ennek megfelelően a falnak kijelölhetjük két egymásba nem nyúló részét:

$$W^+_{s,ij} := \{p \in W_{ij} \mid \exists U \ni p \text{ nyílt, melyre } U \cap E_s = U \cap (B_i \cup B_j)\},$$
$$W^-_{s,ij} := \{p \in W_{ij} \mid \exists U \ni p \text{ nyílt, melyre } U \cap E_s = U \cap (B_i \cap B_j)\}.$$

Legyen $\alpha_{ij} = \alpha(B_i, B_j)$. Ha a Schläfli-formulát E_s-re alkalmazzuk, a következő eredményeket kapjuk:

17. tétel (Cs. B.). *Ha a $B_1, \dots, B_k$ gömböket differenciálható módon mozgatjuk, akkor minden olyan pillanatban, amikor a gömbrendszerhez tartozó B_i gömbök határgömbjei közül bármely $m \le 3$-transzverzálisan metszi egymást, az E_s halmaz V_s térfogatára fennáll, hogy*

$$\left(\frac{s}{n} V_s - \int_{\partial E_s} \kappa \mathrm{d}\sigma\right)' = \sum_{1 \le i < j \le k} (vol_{n-2}(W^+_{s,ij}) - vol_{n-2}(W^-_{s,ij}))\alpha'_{ij},$$

$W^-_{1,ij} = W^+_{k,ij} = \emptyset$ és $W^+_{s,ij} = W^-_{s+1,ij}$ minden $1 \le s < k$-ra és minden $1 \le i < j \le k$-ra, továbbá

$$\sum_{s=1}^{k} t_s \left(\frac{s}{n} V_s - \int_{\partial E_s} \kappa \mathrm{d}\sigma\right)' = \sum_{s=2}^{k} \sum_{1 \le i < j \le k} (t_{s-1} - t_s) vol_{n-2}(W^-_{s,ij}))\alpha'_{ij}.$$

Ebből és a 15. tételből azonnal látható az alábbi állítás.

18. tétel (Cs. B.). *Ha az állandó görbületű M tér $B_1, \ldots, B_k$ gömbjeit úgy rendezzük át, hogy az átrendezés utáni középpontrendszer megkapható az eredeti középpontrendszerből egy kettővel magasabb dimenziós térben szakaszonként analitikus összehúzással, akkor a Kneser-féle $\sum_{s=1}^{k} t_s vol_n(E_s)$ funkcionál nem nő.*

Ez az eredmény pedig a bakugráslemma szokásos alkalmazásával adja, hogy *a súlyozott Kneser-féle probléma igaz az euklideszi síkon.*

5. A centrális és kocentrális halmaz alkalmazásai

A 16.1. következmény euklideszi esetét a bakugráslemmával kombinálva Bezdek K. és R. Connnely teljes általánosságban belátták a Kneser–Poulsen sejtést és annak virágokra való általánosítását az *euklideszi* síkon. Bár a 16.1. következmény a hiperbolikus és a gömbi térben is igaz, a bakugrás lemma megfelelő gömbi és hiperbolikus változatának hiánya miatt a hiperbolikus síkon és a gömbfelületen továbbra is nyitott maradt a sejtés.

I. Gorbovickis [28] egy nagyon szép ötlettel jelentős előrelépést tett a hiperbolikus sík és a gömbfelület esetére vonatkozó sejtés bizonyításában. Az ötlet lényege a centrális halmaz vizsgálata. Ha M a hiperbolikus, az euklideszi, vagy a gömbi tér, $K \subset M$ egy kompakt halmaz, akkor K egy maximális beírt gömbjén egy olyan (esetleg 0 sugarú) zárt gömböt értünk, mely a K-ban fekvő gömbök között a tartalmazásra nézve maximális. *K centrális halmaza* a K maximális beírt gömbjeinek a középpontjaiból álló $c(K)$ halmaz. Be lehet látni, hogy ha K véges sok gömb uniója, akkor $c(K)$ egy geometriai szimpliciális komplexus, $\dim M = 2$ esetén egy gráf, mely K-nak deformációs retraktuma, tehát K-val homotopikusan ekvivalens. Speciálisan a 2-dimenziós esetben, ha a körlapok uniója összefüggő és egyszeresen összefüggő, akkor az unió centrális halmaza egy fagráf.

A Kirszbraun–Valentine-tétel (([29], [30], [31]) segítségével meggondolható, hogy a Kneser–Poulsen-sejtés igazolásához elég olyan kiinduló körrendszerekkel foglalkozni, melyekre a körök az unió maximális beírt körei, tehát középpontjaik a centrális halmazhoz tartoznak, és az is feltehető, hogy a centrális halmaz, mint szimpliciális komplexus csúcsaihoz tartozó maximális beírt körök is a körrendszerhez tartoznak. Ha a körök uniója összefüggő és egyszeresen összefüggő, akkor egy ilyen körrendszert le tudunk bontani egyesével elhagyva a centrális fagráf 1-fokú csúcsaihoz tartozó köröket, és induktívan be tudjuk bizonyítani a Kneser–Poulsen-egyenlőtlenséget.

Ezt a technikát használva Gorbovickis belátta, hogy a Kneser–Poulsen-sejtés igaz a hiperbolikus síkon és a gömbfelületen is, amennyiben a kiinduló konfigurációnál a körlapok uniója összefüggő és egyszeresen összefüggő. A gömbfelületen a topologikus feltétel automatikusan teljesül, ha a körök sugara legalább a gömbi főkör negyede. Áttérve a körlapok komplementereire azt kapjuk következményként, hogy a Kneser–Poulsen-sejtésnek a körök metszetének területére vonatkozó duálisa igaz a gömbön, ha a körök lefedhetők egy zárt félgömbbel.

A disszertáció 5. fejezetében a szerző és Horváth Márton közös [32] cikke nyomán a centrális halmaz módszerét adaptálva, illetve dualizálva két további Kneser–Poulsen-típusú tételt bizonyítunk.

V. N. Sudakov [33], R. Alexander [19], V. Capoyleas és Pach J. [34] egymástól függetlenül belátták, hogy az euklideszi síkon egy véges pontrendszer konvex burkának a kerülete nem csökken, ha a pontrendszert egy kontrakcióval összehúzzuk. Mindegyik bizonyítás erősen euklideszi és nem látszik, hogy át lehet-e vinni valamilyen alkalmas módosítással a hiperbolikus síkra, vagy a gömbfelületre. A Gorbovickis-féle centrális halmaz technika viszont alkalmazható megfelelő módosításokkal. Ahhoz, hogy véges sok pont konvex burkára az indukció működjön, egy erősebb állítást kellett bizonyítani, mely még az euklideszi síkra is egy új eredményt adott.

19. tétel (Cs. B., Horváth M. [32]). *Ha az euklideszi vagy hiperbolikus síkon, vagy egy félgömbön fekvő véges sok kört a középpontok összehúzásával átrendezünk, akkor a körök konvex burkának kerülete nem nő.*

Gorbovickis belátta, hogy a gömbön véges sok félgömbnél nem nagyobb körlap metszetének a területe nem csökken, ha a körök középpontjait közelítjük egymáshoz. Ha az euklideszi síkot egyre nagyobb sugarú gömbökkel approximáljuk, akkor ez egy új, a Bezdek–Connelly-féle bizonyítástól lényegesen különböző bizonyítást ad a körlapok metszetének a területére vonatkozó duális Kneser–Poulsen-sejtésre az euklideszi síkon. De mi a helyzet a hiperbolikus síkon? Ott Gorbovickis érvelése, az unióra vonatkozó eredmény dualizálása a komlementerekre való áttéréssel nem működik, mert a körlapok komplementerei nem körlapok és nem véges a területük. A [32] cikkben azt vettük észre, hogy bevezethetjük a körök metszetének a kocentrális halmazát, mely hasonló tulajdonságokkal bír, mint az unió centrális halmaza. A hiperbolikus sík egy kompakt K halmazának minimális körülírt körén egy olyan kört értünk, mely a tartalmazásra nézve minimális a K-t tartalmazó körök között. A K halmaz *kocentrális halmaza* a K minimális körülírt köreinek a középpontjaiból álló halmaz. Véges sok kör metszetének a kocentrális halmaza mindig egy fagráf. A centrális halmaz helyett a kocentrális halmazt használva az unióhoz hasonló módon beláttuk, hogy a hiperbolikus síkon is igaz a duális Kneser–Poulsen sejtés.

20. tétel (Cs. B., Horváth M. [32]). *A hiperbolikus síkon véges sok körlap metszetének a területe nem csökken, ha a köröket a középponttávolságok csökkentésével átrendezzük.*

6. A Kneser–Poulsen-sejtés kiterjeszthetősége Riemann-sokaságokra

Az eredeti Kneser–Poulsen-sejtés az euklideszi térben van megfogalmazva, de a kérdés értelmes tetszőleges metrikus mértéktérben, tehát normált terekben vagy Riemann-sokaságokon is. Van a Kneser–Poulsen-sejtésnek néhány olyan speciális esete, melyek tetszőleges normált térben is igazak. Például a sejtés Bouligand-féle speciális esetét, amikor a középpontrendszerek hasonlóak egymáshoz, W. Rehder [35] terjesztette ki tetszőleges normált térre, amit Bezdek K. és Naszódi M. [36] tovább általánosított. Az ilyen típusú eredmények ellenére az eredeti sejtés a normált terek közül csak az euklideszi terekben lehet igaz.

Ha ugyanis a sejtés igaz egy normált térben, akkor a tér két egységsugarú gömbje metszetének térfogata csak a két gömb középpontjának távolságától függhet. M. Meyer, S. Reisner és M. Schmuckenschläger [37] egy tétele szerint a normált terek közt ez utóbbi tulajdonsággal csak az euklideszi terek rendelkeznek.

A disszertáció 6. fejezetében azt vizsgáljuk, hogy milyen Riemann-sokaságokban lehet igaz a Kneser–Poulsen-sejtés, illetve annak néhány következménye.

6.1. Az állandó görbületű terek jellemzése ponthármasok minimális fedőgömbjének sugarával

A 4. fejezetben belátott eredmények hátterében két fontos formula állt: az Einstein-sokaságokban bizonyított Schläfli-típusú formula, és az állandó görbületű terekben igazolt, forgástestekre vonatkozó Arkhimédész-típusú formula. Mivel a Schläfli-típusú formula az állandó görbületű tereknél általánosabb Riemann-sokaságokra is igaz, felvetődik a kérdés, hogy lehet-e igaz a Kneser–Poulsen-sejtés az állandó görbületű tereknél általánosabb Riemann-sokaságokban.

Ha a Kneser–Poulsen-sejtés igaz egy Riemann-sokaság tetszőleges sugarú geodetikus gömbjeire, akkor a szita-formulából könnyen láthatóan a sokaságban teljesül, hogy k geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugaraitól és a gömbök középpontjai közti távolságoktól függhet. Nevezzük ezt a tulajdonságot a rövidség kedvéért KP_k-tulajdonságnak. Hasonlóan, ha a Kneser–Poulsen-sejtés teljesül a Riemann-sokaság egyenlő sugarú geodetikus gömbjeire, akkor a sokaságban bármely k egyforma sugarú gömb metszetének térfogata csak a csak a gömbök sugarától és a gömbközéppontok távolságától függhet. Nevezzük ez utóbbi tulajdonságot $KP_k^=$ tulajdonságnak. Világos, hogy $KP_k \Rightarrow KP_k^=$ minden k-ra, és $k > l$ esetén $KP_k \Rightarrow KP_l$ és $KP_k^= \Rightarrow KP_l^=$.

A $KP_1 = KP_1^=$ tulajdonság szoros kapcsolatban áll az O. Kowalski és L. Vanhecke [38] által bevezetett gömbhomogenitással. Emlékeztetünk rá, hogy egy Riemann-sokaságot akkor hívunk gömb-homogénnek, ha a *kis* sugarú geodetikus gömbök térfogata csak a gömb sugarától függ. A gömb-homogén tereket intenzíven vizsgálták (l.

[39], [40], [41]) A KP_1 sokaságok nyilván gömb-homogének és minden gömb-homogén tér állandó skalárgörbületű.

A szerző és Kunszenti-Kovács Dávid [8] bebizonyította, hogy ha a KP_3 feltétel kis sugarú gömbökre teljesül, akkor abból már következik, hogy a tér állandó görbületű. Ha azt is feltesszük, hogy egy összefüggő KP_3 tér teljes, akkor szükségszerűen egyszeresen összefüggő, így nem lehet más, csak az euklideszi, gömbi, vagy hiperbolikus tér. Természetesen a tér ebben az esetben minden k-ra rendelkezik a KP_k tulajdonsággal.

A szerző és Horváth Márton [9] közös kutatásaiból kiderült, hogy az előző eredmény akkor is igaz, ha a KP_3 feltételt a gyengébb $KP_3^=$ feltétellel helyettesítjük. A $KP_3^=$ tulajdonságból következik, hogy egy ponthármast lefedő minimális sugarú geodetikus gömb sugara csak a három pont páronkénti távolságától függhet. Ez utóbbi feltételt speciálisan megválasztott ponthármasokra alkalmazva és kombinálva a Rauch-féle összehasonlítási tétel egy alkalmas változatával beláttuk a következő tételeket.

21. tétel (Cs. B., Horváth M. [9]). *Ha egy Riemann-sokaságban egy geodetikusan konvex halmazba eső ponthármast lefedő minimális sugarú geodetikus gömb sugara csak a három pont páronkénti távolságaitól függ, akkor a tér állandó görbületű.*

22. tétel (Cs. B., Horváth M. [9]). *Ha egy geodetikusan teljes összefüggő Riemann-sokaságban teljesül a $KP_3^=$ tulajdonság, akkor a tér egyszeresen összefüggő és állandó görbületű, tehát az euklideszi, gömbi, vagy hiperbolikus tér egyike.*

A tételből azonnal adódik, hogy a Kneser–Poulsen-sejtés már egyenlő sugarú gömbökre is csak állandó görbületű Riemann-sokaságokban lehet igaz.

Megjegyezzük, hogy Moussong Gáborral közös [7] dolgozatunkban megmutattuk, hogy az $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ elliptikus térben még a folytonos összehúzás esetére is adható a Kneser–Poulsen-sejtésre ellenpélda. Ugyanakkor a [7] cikkben sikerült bebizonyítani a Kneser–Poulsen-sejtésnek egy speciális esetét az elliptikus térben. Nevezetesen, ha az n-dimenziós elliptikus tér metrikáját úgy kalibráljuk, hogy a tér görbülete 1 legyen, akkor a tér átmérője $\pi/2$, és megadható a térben $n+1$ pont, mondjuk $P_1, \ldots P_{n+1}$ melyek távolsága páronként $\pi/2$. Ezekre a pontokra igaz, hogy:

23. tétel (Cs. B., Moussong G., [7]). *Ha $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ az elliptikus tér tetszőleges pontjai, $r_1, \ldots, r_{n+1} \in (0, \pi/2)$ tetszőleges valós számok, akkor a $B(P_i, r_i)$ gömbök uniójának térfogata legalább akkora, mint a $B(Q_i, r_i)$ gömbök uniójáé.*

6.2. A harmonikus terek egy jellemzése azonos sugarú geodetikus gömbök metszetének térfogatával

A $KP_3^=$ tulajdonsággal kapcsolatos vizsgálatok megválaszolták azt a kérdést, hogy milyen Riemann-sokaságokban van esély arra, hogy a Kneser–Poulsen-sejtést belássuk, de nem adnak választ arra az önmagában érdekes kérdésre, hogy milyen Riemann-sokaságokban teljesül a KP_2, illetve $KP_2^=$ tulajdonság. A kérdés tanulmányozása természetes módon vezet a harmonikus sokaságok osztályához.

A harmonikus sokaságok fogalmát E. T. Copson és H. S. Ruse [42] vezette be 1940-ben. Céljuk az volt, hogy jellemezzék azokat a Riemann-sokaságokat, melyeken minden p pont egy kis környezetében megadható egy olyan nem konstans harmonikus függvény, melynek q-beli értéke csak a q pont p-től mért távolságától függ. Megengedjük, hogy a keresett harmonikus függvénynek p-ben szingularitása legyen. Az ilyen Riemann-sokaságokat lokálisan harmonikusnak nevezzük. Megmutatták, hogy a lokálisan harmonikus sokaságok jellemezhetők azzal a geometriai feltétellel, hogy a kis sugarú geodetikus gömbök átlaggörbülete állandó. Később a lokálisan harmonikus tereknek több különböző jellemzése is született. T. J. Willmore [43] például belátta, hogy egy Riemann-sokaság pontosan akkor lokálisan harmonikus, ha bármely harmonikus függvényre, mely egy geodetikus gömbön definiálva van, a függvény értéke a gömb középpontjában megegyezik a határoló gömbfelületen felvett függvényértékek átlagával. A lokális harmonikusság azzal is ekvivalens, hogy az exponenciális leképezés (térfogattorzítást mérő) súlyfüggvénye minden pontban egy szférikusan szimmetrikus függvény. Ez utóbbi jellemzésből azonnal látszik, hogy a lokálisan harmonikus terek D'Atri-terek, azaz tetszőleges p pontjukra a p középpontra vonatkozó tükrözés – mely p egy kis környezetében jól definiált – térfogattartó.

1944-ben A. Lichnerowicz [44] megfogalmazta azt a sejtést, hogy egy 4-dimenziós lokálisan harmonikus sokaság lokálisan szimmetrikus is, vagyis teljesül rá, hogy a lokálisan jól definiált középpontos tükrözések a tér metrikáját is megtartják. Lichnerowicz eredeti sejtését A. G. Walker [45] bebizonyította, de a sejtés tetszőleges dimenziós változata tovább élt a köztudatban Lichnerowicz-sejtés néven.

Az első nagy áttörés a Lichnerowicz-sejtés megválaszolásában Szabó Zoltán nevéhez fűződik, aki bebizonyította ([46]), hogy ha egy lokálisan harmonikus sokaságnak az univerzális fedőtere kompakt, akkor a sokaság szimmetrikus. Később kiderült, hogy a kompaktsági feltétel nem hagyható el. E. Damek és F. Ricci konstruáltak olyan harmonikus tereket, melyek nem lokálisan szimmetrikusak.

Szabó Z. [46] bebizonyította, hogy egy teljes, összefüggő és egyszeresen összefüggő harmonikus sokaságban két geodetikus gömb metszetének a térfogata csak a gömbök sugarától és középpontjaik távolságától függ. A kérdés ezek után az volt, hogy a KP_2, illetve a $KP_2^=$ tulajdonságok lehetnek-e olyan térben igazak, melyek nem lokálisan harmonikusak. A választ a szerző és Horváth Márton két egymást követő cikkben adta meg. A [10] cikkben beláttuk, hogy a KP_2 tulajdonságból következik, hogy a tér lokálisan harmonikus. A cikk módszereit továbbfejlesztve a [47] cikkben sikerült a lokális harmonikusságot a gyengébb $KP_2^=$ feltételből is levezetni.

24. tétel (Cs. B., Horváth M., [47]). *Ha egy Riemann-sokaságban kis geodetikus gömbökre teljesül a $KP_2^=$ feltétel, akkor a tér lokálisan harmonikus.*

A bizonyítás egy fontos közbülső lépcsője annak bizonyítása, hogy a $KP_2^=$ tulajdonságú terek D'Atri-terek.

7. Összegzés

A közel hetven éves Kneser–Poulsen-sejtés azt állítja, hogy ha az euklideszi tér néhány gömbjét úgy rendezzük át, hogy középpontjaik közeledjenek egymáshoz, akkor uniójuk térfogata nem nőhet. A disszertáció a sejtéshez, a sejtés általánosításaihoz és rokonaihoz kapcsolódó kutatásokat foglalja össze. A disszertációban ismertetett legfontosabb eredmények a következők:

(1) A 2. fejezet egy történeti áttekintést nyújt a sejtéssel kapcsolatos kutatásokról, eközben ismerteti a szerző valamennyi e témában elért eredményét. Az egyre általánosabb részeredmények láncolata elvezet a pillanatnyilag ismert legerőteljesebb eredményekhez, melyek közül néhányat a rákövetkező fejezetekben bizonyítunk részletesen.

(2) Belátunk egy variációs formulát egy állandó görbületű tér simán mozgó $B_1, \ldots, B_k$ gömbjeiből készített virág, azaz egy $f(B_1, \ldots, B_k)$ alakú tartomány térfogatára, ahol f egy rögzített k-változós hálópolinom az unió és metszet műveletekből összeállítva (6. tétel $\approx$ Thm. 3.5). A formula a térfogat deriváltját $\sum_{1\leq i<j\leq k} \epsilon_{ij}^f vol_{n-1}(W_{ij})d'_{ij}$ alakban írja fel, ahol d_{ij} a B_i és B_j gömbök középpontjainak távolsága, W_{ij} a B_i és B_j gömbök lapos Dirichlet–Voronoi-celláit elválasztó fal, ϵ_{ij}^f egy előjel, mely az f hálópolinomtól függ. A formulához szükség volt a Dirichlet–Voronoi-cellák megfelelő általánosításának megtalálására az állandó görbületű terekben fekvő virágok esetére.

Következményként belátjuk, hogy ha a gömbök *folytonosan* mozognak úgy, hogy mozgás közben az $\epsilon_{ij}^f d_{ij}$ előjeles távolságok csökkennek, akkor az $f(B_1, \ldots, B_k)$ virág térfogata nem nő (7. tétel = Thm. 3.7).

(3) Belátjuk a klasszikus Schläfli-formula egy messzemenő általánosítását egy pszeudo-Riemann-féle Einstein-sokaságban az alakját simán változtató görbelapú politópra (10. tétel $\approx$ Thm. 4.2.). A formula általánosítja I. Rivin és J. M. Schlenker [24],

valamint R. Souam [26] variációs formuláit is. Belátunk továbbá egy Arkhimédész-féle formulát a hiperbolikus, euklideszi vagy szférikus térben fekvő forgásszimmetrikus testekre (14. tétel = Thm. 4.5.).

Ezt a két formulát kombinálva belátjuk a legáltalánosabb ismert formáját a Kneser–Poulsen sejtés azon variánsainak, ahol feltételezzük a gömbök egy olyan folytonos mozgásának a létezését, melynél a középpontok távolságai monoton módon változnak (16. tétel és 16.1. következmény = Thm. 4.6 és Cor. 4.5). A korábbi változatokhoz képest több szempontból is általánosabb a vizsgált szituáció. Általánosított gömbnek, röviden $*$-gömbnek nevezzük a tér teljes és összefüggő umbilikus hiperfelületei által határolt reguláris zárt halmazokat, és a virágok fogalmát általánosítva olyan kompakt halmazokat tekintünk, melyeket $*$-gömbökből a regularizált unió, metszet, és *halmazkülönbség* műveletekkel állíthatunk elő. Amikor az általánosított virágot felépítő $*$-gömbök középpontja nincs definiálva, akkor a középpontok közeledési feltételét a két gömb határoló felületeinek metszési szögére vonatkozó feltétellel helyettesítjük. Ezeken túl, ahhoz, hogy egy n-dimenziós konstans görbületű tér gömbjeiből készített általánosított virágokra egy Kneser–Poulsen-típusú egyenlőtlenséget kapjunk, elegendő, ha a két gömbrendszer középpontjai között létezik egy szakaszonként analitikus homotópia egy $(n+2)$-*dimenziós bennfoglaló állandó görbületű térben*, melynek során a középpontok közti távolságok (megfelelő irányban) monotonon változnak.

A Schläfli-típusú formula alkalmazásával az előzőhöz hasonló eredményt érünk el a Kneser–Poulsen-sejtés egy Martin Kneser által felvetett általánosításával kapcsolatban (18. tétel = Thm. 2.28).

(4) I. Gorbovickis [28] centrális halmazt alkalmazó módszerét adaptálva és dualizálva két Kneser–Poulsen-típusú egyenlőtlenséget bizonyítunk állandó görbületű síkokban. Belátjuk hogy a hiperbolikus, vagy euklideszi síkban, vagy egy félgömbön fekvő

véges sok kör konvex burkának a kerülete nem növekszik, ha a köröket úgy rendezzük át, hogy középpontjaik távolsága ne nőjön. (19. tétel = Thm. 5.1). Ez a tétel általánosítja a véges sok pont konvex burka kerületének gyenge csökkenéséről szóló tételt a pontrenszer kontrakciójánál, amit az euklideszi síkon V. N. Sudakov [33], R. Alexander [19], V. Capoyleas és Pach J. [34] bizonyítottak.

Belátjuk továbbá, hogy a hiperbolikus sík véges sok köre metszetének területe nem csökken egy ilyen kontraktív átrendezés során (20. tétel=Thm. 5.2). Ez utóbbi állítás euklideszi megfelelőjét Bezdek K. és R. Connelly [23] bizonyították.

(5) Tanulmányozzuk a Kneser–Poulsen-sejtés kiterjeszthetőségét Riemann-sokaságokra. Belátjuk, hogy ha egy teljes összefüggő Riemann-sokaságban három azonos sugarú geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbök középpontjai közti távolságoktól és a sugarak közös értékétől függ, akkor a sokaság egy egyszeresen összefüggő állandó szekcionális görbületű sokaság (22. tétel $\approx$ Thm. 6.5). Következésképpen csak ezekben a teljes és összefüggő Riemann-sokaságokban lehet igaz a Kneser–Poulsen-sejtés.

Belátjuk továbbá, hogy azon teljes, összefüggő és egyszeresen összefüggő Riemann-sokaságok családja, melyekben két azonos sugarú geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbközéppontok távolságától és a sugár értékétől függ, egybeesik a teljes, összefüggő, és egyszeresen összefüggő harmonikus Riemann-sokaságok családjával (24. tétel $\approx$ Thm. 6.10).

Hivatkozások

[1] B. Csikós, „On the volume of Boolean expressions of balls—a review of the Kneser-Poulsen conjecture,” in *New trends in intuitive geometry*, vol. 27 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pp. 65–94, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2018.

[2] B. Csikós, „On the Hadwiger-Kneser-Poulsen conjecture,” in *Intuitive geometry (Budapest, 1995)*, vol. 6 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pp. 291–299, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1997.

[3] B. Csikós, „On the volume of the union of balls,” *Discrete Comput. Geom.*, vol. 20, no. 4, pp. 449–461, 1998.

[4] B. Csikós, „On the volume of flowers in space forms,” *Geom. Dedicata*, vol. 86, no. 1-3, pp. 59–79, 2001.

[5] B. Csikós, „A Schläfli-type formula for polytopes with curved faces and its application to the Kneser-Poulsen conjecture,” *Monatsh. Math.*, vol. 147, no. 4, pp. 273–292, 2006.

[6] K. Bezdek, R. Connelly, and B. Csikós, „On the perimeter of the intersection of congruent disks,” *Beiträge Algebra Geom.*, vol. 47, no. 1, pp. 53–62, 2006.

[7] B. Csikós and G. Moussong, „On the Kneser-Poulsen conjecture in elliptic space,” *Manuscripta Math.*, vol. 121, no. 4, pp. 481–489, 2006.

[8] B. Csikós and D. Kunszenti-Kovács, „On the extendability of the Kneser-Poulsen conjecture to Riemannian manifolds,” *Adv. Geom.*, vol. 10, no. 2, pp. 197–204, 2010.

[9] B. Csikós and M. Horváth, „A characterization of spaces of constant curvature by minimum covering radius of triangles,” *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 25, no. 3, pp. 608–617, 2014.

[10] B. Csikós and M. Horváth, „On the volume of the intersection of two geodesic balls,” *Differential Geom. Appl.*, vol. 29, no. 4, pp. 567–576, 2011.

[11] B. Csikós and M. Horváth, „A characterization of harmonic spaces,” *J. Differential Geom.*, vol. 90, no. 3, pp. 383–389, 2012.

[12] B. Csikós, „On the volume of Boolean expressions of large congruent balls,” in *Discrete geometry and symmetry*, vol. 234 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pp. 71–86, Springer, Cham, 2018.

[13] E. T. Poulsen, „Problem 10,” *Math. Scandinavica*, vol. 2, p. 346, 1954.

[14] M. Kneser, „Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass,” *Arch. Math. (Basel)*, vol. 6, pp. 382–390, 1955.

[15] H. Hadwiger, „Ungelöste Probleme Nr. 11,” *Elem. Math.*, vol. 11, pp. 60–51, 1956.

[16] G. Bouligand, „Ensembles impropres et nombre dimensionnel. I.,” *Bull. Sci. Math., II. Sér.*, vol. 52, pp. 320–344, 1928.

[17] B. Bollobás, „Area of the union of disks,” *Elem. Math.*, vol. 23, pp. 60–61, 1968.

[18] B. Csikós, „Körrendszer által lefedett tartomány területének megváltozása a körök mozgatása esetén,” in *A XVI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia kiemelkedő pályamunkái III.*, vol. 6 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pp. 209–212, Művelődési Minisztérium Tudományszervezési és Informatikai Intézete, 1984.

[19] R. Alexander, „Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 288, no. 2, pp. 661–678, 1985.

[20] M. Bern and A. Sahai, „Pushing disks together—the continuous-motion case,” *Discrete Comput. Geom.*, vol. 20, no. 4, pp. 499–514, 1998.

[21] M. Gromov, „Monotonicity of the volume of intersection of balls,” in *Geometrical aspects of functional analysis (1985/86)*, vol. 1267 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 1–4, Springer, Berlin, 1987.

[22] Y. Gordon and M. Meyer, „On the volume of unions and intersections of balls in Euclidean space,” in *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994)*, vol. 77 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pp. 91–101, Birkhäuser, Basel, 1995.

[23] K. Bezdek and R. Connelly, „Pushing disks apart—the Kneser-Poulsen conjecture in the plane,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 553, pp. 221–236, 2002.

[24] I. Rivin and J.-M. Schlenker, „The Schläfli formula in Einstein manifolds with boundary,” *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, vol. 5, pp. 18–23 (electronic), 1999.

[25] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, vol. 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[26] R. Souam, „The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces,” *Differential Geom. Appl.*, vol. 20, no. 1, pp. 31–45, 2004.

[27] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, vol. 191 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[28] I. Gorbovickis, „The central set and its application to the Kneser-Poulsen conjecture,” *arXiv:1511.08134v2 [math.MG]*, pp. 1–19, 2016.

[29] M. Kirszbraun, „Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen,” *Fundamenta Mathematicae*, vol. 22, no. 1, pp. 77–108, 1934.

[30] F. A. Valentine, „Contractions in non-euclidean spaces,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 50, pp. 710–713, 10 1944.

[31] F. A. Valentine, „A Lipschitz condition preserving extension for a vector function,” *American Journal of Mathematics*, vol. 67, no. 1, pp. 83–93, 1945.

[32] B. Csikós and M. Horváth, „Two Kneser-Poulsen-type inequalities in planes of constant curvature,” *Acta Math. Hung.*, vol. 155, no. 1, pp. 158–174, 2018.

[33] V. N. Sudakov, „Gaussian random processes, and measures of solid angles in Hilbert space,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 197, pp. 43–45, 1971.

[34] V. Capoyleas and J. Pach, „On the perimeter of a point set in the plane,” in *Discrete and computational geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990)*, vol. 6 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pp. 67–76, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[35] W. Rehder, „On the volume of unions of translates of a convex set,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 87, no. 5, pp. 382–384, 1980.

[36] K. Bezdek and M. Naszódi, „The Kneser-Poulsen conjecture for special contractions,” *Discrete Comput. Geom.*, vol. 60, no. 4, pp. 967–980, 2018.

[37] M. Meyer, S. Reisner, and M. Schmuckenschläger, „The volume of the intersection of a convex body with its translates,” *Mathematika*, vol. 40, no. 2, pp. 278–289, 1993.

[38] O. Kowalski and L. Vanhecke, „Ball-homogeneous and disk-homogeneous Riemannian manifolds,” *Math. Z.*, vol. 180, no. 4, pp. 429–444, 1982.

[39] G. Calvaruso, P. Tondeur, and L. Vanhecke, „Four-dimensional ball-homogeneous and C-spaces,” *Beiträge Algebra Geom.*, vol. 38, no. 2, pp. 325–336, 1997.

[40] G. Calvaruso and L. Vanhecke, „Special ball-homogeneous spaces,” *Z. Anal. Anwendungen*, vol. 16, no. 4, pp. 789–800, 1997.

[41] A. Gray and L. Vanhecke, „Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls,” *Acta Math.*, vol. 142, no. 3-4, pp. 157–198, 1979.

[42] E. Copson and H. Ruse, „Harmonic Riemannian spaces.," *Proc. R. Soc. Edinb.*, vol. 60, pp. 117–133, 1940.

[43] T. J. Willmore, „Mean value theorems in harmonic Riemannian spaces," *J. London Math. Soc.*, vol. 25, pp. 54–57, 1950.

[44] A. Lichnerowicz, „Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques," *Bull. Soc. Math. France*, vol. 72, pp. 146–168, 1944.

[45] A. G. Walker, „On Lichnerowicz's conjecture for harmonic 4-spaces," *J. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 21–28, 1949.

[46] Z. I. Szabó, „The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds," *J. Differential Geom.*, vol. 31, no. 1, pp. 1–28, 1990.

[47] B. Csikós and M. Horváth, „A characterization of harmonic spaces," *J. Differential Geom.*, vol. 90, no. 3, pp. 383–389, 2012.